DEJAHYR LOPES JUNIOR

FUNÇÃO DO 1º GRAU: UM ESTUDO SOBRE SEUS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA POR ALUNOS DA 1ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
CENTRO DE CIÊNCIAS HUMANAS E SOCIAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO – MESTRADO
Campo Grande/ MS.
2006

DEJAHYR LOPES JUNIOR

FUNÇÃO DO 1º GRAU: UM ESTUDO SOBRE SEUS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA POR ALUNOS DA 1ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO.

Dissertação apresentada como exigência final para obtenção do grau de Mestre em Educação à comissão julgadora do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal de Mato Grosso do sul sob a orientação do Prof. Dr. José Luiz Magalhães de Freitas.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
CENTRO DE CIÊNCIAS HUMANAS E SOCIAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO – MESTRADO
Campo Grande/ MS.
2006

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. José Luiz Magalhães de Freitas

Profª. Dr. ª Silvia Dias Alcântara Machado

Profª. Dr. ª Marilena Bittar

DEDICATÓRIA

À minha querida esposa Fabiana por ter
compreendido a minha ausência em
alguns momentos difíceis.

Aos meus filhos, Isadora, Gabriela e Eduardo,
razões da minha vida.

AGRADECIMENTOS

Estamos completando mais uma etapa dos nossos trabalhos, um período que passou muito rápido, porém, tempo suficiente para não deixar de perceber o brilho de pessoas que contribuíram para que eu vencesse esta etapa. A elas o meu carinho e agradecimentos:

A Deus pela força espiritual;
À minha família, pelo incentivo;
Ao meu orientador, Professor Doutor José Luiz, pela dedicação, competência e disponibilidade;
Aos professores do Mestrado, pela competência e generosidade em compartilhar o saber;
Aos funcionários do Programa de Mestrado, em especial à Jacqueline e a Tatiana;
Aos meus colegas de trabalho, que souberam entender todos os meus momentos de dúvidas e angústias;
Aos colegas do Mestrado, pela amizade e contribuição nas discussões e trocas de idéias.

RESUMO

Na tentativa de compreender melhor o funcionamento cognitivo dos alunos em relação às dificuldades da disciplina de matemática, mais especificamente no caso de função do 1º grau, apoiamos nossa investigação na teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval, explorando situações em que alunos da 1ª série do Ensino Médio são chamados à construção do conceito de função do 1º grau. Realizamos nosso estudo a partir de um levantamento de aspectos epistemológicos do conceito de função, de documentos oficiais que tratam do processo de ensino e aprendizagem, da análise de alguns materiais didáticos impressos e também, da aplicação e interpretação de uma seqüência didática por nós elaborada. Procuramos explorar nessa seqüência didática alguns registros de representação semiótica como: gráfico, a escrita algébrica, tabelas e a língua natural; tentando compreender como essas formas de linguagem se mostram disponíveis para sua utilização e coordenação em torno do conceito matemático *função do 1º grau*. Nossa investigação se concentrou na análise de algumas atividades cognitivas envolvidas nas transformações (tratamentos e as conversões). Acreditamos que nossa pesquisa possa contribuir para a compreensão do modo como processos matemáticos, relacionados a registros de representação semiótica de conteúdos específicos, são mobilizados pelos alunos, sobretudo, nas atividades que exigem a conversão entre diferentes registros, o que para Duval (1995) é condição necessária para a aprendizagem de um conceito matemático.

Palavras-chave: função do 1º grau – registros de representação semiótica – conversões - tratamentos.

ABSTRACT

In attempt to increase the comprehension of students' cognitive operation related to difficulties in Mathematic discipline, more specifically in the case of *first level function*, we based our investigation on Raymond Duval's theory of the registers of semiotic representations, exploring situations in which first grade high school students are called to construct the concept of *first level function*. We carried out our study from: a survey of epistemological aspects of the concept of *first level function*, official documents that deal with teaching and learning process, analysis of some teaching materials and of application and interpretation of a didactic sequence created by us. In this didactic sequence, we intended to explore some registers as: the graphical, the algebra writing, through chart and natural language; trying to understand how these representations are displayed as available for their utilization and coordination about the mathematical concept of *first level function*. Our research was mainly concerned with some cognitive activities involved in transformations such as treatments and conversions. Therefore, we believe our research may contribute to the comprehension of how mathematical processes, related to specific contents, are mobilized by the students during the registers of semiotic representations, especially in activities which demand the student the conversion among the registers, that, according to Duval (1995), is a necessary condition for learning a Mathematical concept.

Key-words: first level function – registers of semiotic representations – conversions – treatments.

LISTAS DE ANEXOS

LISTA DE PROTOCOLOS

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

– Trajetória pessoal

Iniciei minha experiência como educador, lecionando a disciplina de Física e, em seguida, a Matemática, trabalhando com alunos do Ensino Médio de uma escola Salesiana de Campo Grande-MS.

Acredito que o exercício desse ofício está centralizado numa proposta pedagógica que atende às dimensões intelectual, social e afetiva; a partir de um trabalho que está fundamentado no sistema preventivo de Dom Bosco, o qual fornece subsídios básicos para um maior engajamento pela arte de educar. O prazer de trabalhar com jovens sempre me motivou para um maior envolvimento com o processo pedagógico. Talvez seja essa uma das mais importantes lições que aprendi nesses 15 anos de magistério, norteados por essa filosofia de trabalho.

Em 1998, já com vários anos de magistério, quis oficializar minha docência, já que minha formação inicial era de engenheiro civil como muitos outros professores leigos que atuavam na educação - fazendo um curso de Formação Pedagógica que me proporcionou a obtenção da licenciatura em Matemática para a Educação Básica.

A partir desse momento me senti motivado para dar continuidade à minha formação, freqüentando um programa de mestrado em Educação como aluno especial e, participando de Congressos na área de educação como: SBEM, EPECO, ANPED e outros.

Atuar numa disciplina como a Matemática, entendida por muitos como uma área do conhecimento extremamente conteudista e cumulativa, me fez procurar entender melhor como é, e como deveria ser a postura dos alunos, nesse nível de escolaridade, diante do processo de ensino que cobra deles, constantemente, os pré-requisitos matemáticos de etapas ou séries anteriores para uma maior compreensão de um determinado objeto matemático.

Buscando entender melhor e, também, fortalecer a relação professor X aluno, inserida num contexto de educação matemática que, acreditamos seja o de uma aprendizagem mais significativa procurei, a partir de minhas primeiras leituras e de minha experiência como professor, compreender melhor essa relação, que em determinados momentos tem se mostrado um tanto quanto tensa, no que diz respeito ao trabalho de alguns conteúdos matemáticos em sala de aula.

- Apresentação da pesquisa

Esta pesquisa se coloca no bojo das questões que são discutidas pela Educação Matemática e, dessa forma, fomos buscar em alguns autores da Didática Francesa da Matemática, sustentação teórica e metodológica para refletirmos sobre nosso objeto de pesquisa, no caso, os registros de representação semiótica do conceito de função do 1º grau por alunos do Ensino Médio.

Nessa perspectiva, iremos investigar a compreensão do conceito de função do 1º grau, no que diz respeito às formas de linguagens e códigos que são utilizados por alunos no Ensino Médio.

No Capítulo I, procuramos tratar de questões relacionadas à História da Matemática e da epistemologia do conceito de Função, tentando percorrer o caminho do seu surgimento e da evolução da linguagem utilizada por esse objeto matemático. Em seguida, passamos por uma análise de documentos oficiais, como os PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais; destacando alguns pontos da trajetória do ensino da Matemática no Brasil e das recomendações desse documento sobre o ensino da Álgebra, mais especificamente, com relação à função.

No Capítulo II, realizamos uma reflexão sobre alguns pontos da Didática Francesa da Matemática a partir de considerações sobre a teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1986) e dos objetivos traçados pelos PCN, nesse nível de escolaridade, para o ensino e a aprendizagem da Matemática. A seguir, passamos a expor elementos de compreensão do nosso quadro teórico como: semiótica, algumas formas de representações e os registros de representação semiótica, dando destaque para o modelo teórico proposto por Raymond Duval (1995) em relação às transformações realizadas nos registros de representação semiótica como: o tratamento e a conversão. Encerramos o capítulo, apresentando uma análise de alguns textos didáticos, procurando relacionar o quadro teórico de Duval com os registros de representação utilizados pelos autores, no trabalho com o conceito de função do 1º grau no Ensino Fundamental (8ª série).

No Capítulo III, exploramos nosso referencial metodológico baseando-nos nas fases da Engenharia Didática proposta por Artigue (1990). Como procedimento metodológico organizamos uma seqüência didática em que suas atividades foram divididas em três conjuntos, com objetivos específicos, para investigarmos os registros do conceito de função do 1º grau realizados por alunos no início do Ensino Médio (1ª série).

Em seguida, apresentamos um trabalho de tratamento dos dados coletados a partir de um teste diagnóstico e das análises preliminares, que ajudaram a fundamentar a elaboração e escolha das atividades de nossa seqüência didática. Logo após, iniciamos nossas análises *a priori* que, mais tarde no capítulo IV, foram retomadas juntamente com as análises *a posteriori* de seis encontros, para o processo de validação dos resultados.

Ao final, apresentamos algumas conclusões sobre nossas análises dos dados coletados, em relação ao uso de registros de representação semiótica do conceito de função do 1º grau por alunos da 1ª série do Ensino Médio, corroborando com a hipótese de Duval na qual esse movimento nos registros e entre os registros seja condição necessária para uma aprendizagem mais significativa desse objeto matemático.

– Localização da área de estudos

Esta pesquisa de mestrado é conduzida a partir de alguns pressupostos da área de Educação Matemática. Pressupostos esses, que levam em consideração conceitos da Didática da Matemática como: Situações Didáticas, Obstáculos Epistemológicos de Brousseau (1986); registros de representação semiótica de Raymond Duval (1995) e o referencial de Engenharia Didática, de Michele Artigue (1990) que, no caso, trataremos como referencial metodológico.

Primeiramente, a partir de nossa experiência como professor, pudemos constatar que algumas dificuldades apresentadas por alunos, nesse nível de escolaridade, em relação a concepção do conceito de função, estão relacionadas ao trabalho com as diversas formas de linguagens utilizadas no processo de ensino e aprendizagem.

Dessa forma, buscamos um recorte no conteúdo de Funções, estreitando nossos olhares para o conteúdo de função do 1º grau, buscando responder questões como:

- Os livros didáticos têm explorado essa diversidade de linguagens de maneira a contribuir para um processo de aprendizagem mais eficaz para o aluno?
- Quais registros de representação semiótica são mobilizados por alunos do início do Ensino Médio para o trabalho com o conceito de função do 1º grau? Tendo disponíveis tais registros, até que ponto são capazes de realizar transformações (tratamentos e conversões) nesses registros?

Para Freitas (2003), o significado do saber matemático está diretamente relacionado com a forma didática que determinados conteúdos são apresentados. E, é nesse sentido, que precisaremos compreender como seqüências didáticas, previamente elaboradas devem ser precedidas por um quadro de reflexão, colocando de uma vez por todas o ensino da Matemática num patamar de prática educativa que não seja meramente de reprodução, mas, que permita fazer dos alunos os verdadeiros protagonistas do processo de ensino-aprendizagem.

Questões relacionadas ao processo de ensino e aprendizagem têm preocupado profissionais das mais diversas áreas da educação que buscam opções para superar dificuldades, principalmente, em sala de aula. Dessas tentativas de solução, muito se tem produzido a respeito da importância da Matemática, tanto no seu ensino quanto na sua aprendizagem, através de propostas voltadas ao grande desafio de levar cada vez mais um maior número de alunos à compreensão dos conteúdos curriculares dessa disciplina.

Neste trabalho, estaremos revisando alguns pontos, buscando destacar elementos que justifiquem a importância conferida a essa ciência em relação às formas de linguagens e da necessidade do seu domínio por parte desses alunos.

O processo de ensino e aprendizagem da Matemática é historicamente marcado por inúmeros conflitos envolvendo professor, aluno e objetos matemáticos. Antes de analisarmos alguns aspectos e objetivos de tal processo, tentaremos responder a uma pergunta que é freqüentemente colocada por alunos. Por que aprender Matemática?

Começaremos a responder tal questão atribuindo à Matemática um caráter de instrumentação que a coloca diante de uma necessidade social, sendo capaz de responder questões relacionadas às operações básicas como: juros, porcentagem, problemas de contagem, medidas e outras. Podemos ainda considerar o seu caráter histórico que dá a essa disciplina um grande destaque cultural; um dos primeiros conhecimentos gerados pela humanidade.

Independente da justificativa, histórica ou relacionada às situações práticas, o fato é que a disciplina se apresenta ao cenário escolar como a grande vilã dos currículos e, mesmo com mudanças nos sistemas de avaliação, ela se apresenta como uma das principais responsáveis pelos altos índices de reprovação.

O SAEB – Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica - vem avaliando o desempenho de alunos ao longo da Educação Básica, coletando e divulgando índices que tentam traduzir a atual situação do ensino dessa disciplina. Em relação aos alunos concluintes do Ensino Fundamental, os indicadores mostram que menos de 3% dos alunos avaliados conseguem desenvolver as competências e as habilidades condizentes com uma boa escolaridade.

Diante dos resultados apresentados, nos chama a atenção o elevado percentual de alunos que se encontram nos níveis muito crítico e crítico de compreensão de tais competências e habilidades. Para esse grupo, a dificuldade de interpretação de problemas e do trabalho com algumas formas específicas de linguagem matemática, tem se mostrado determinante para o fracasso de sua aprendizagem.

Ainda, quando comparamos a aprendizagem da Matemática com situações do cotidiano, podemos constatar um certo nível de analfabetismo por grande parte dos alunos que, acreditamos, está diretamente relacionado a diversidade de formas de linguagens. Uma outra pesquisa citada por Braga (2003), nos apresenta uma classificação desse analfabetismo utilizada na pesquisa INAF (Indicador Nacional Funcional) realizada, em novembro de 2002, pelo instituto Paulo Montenegro, co-organizada pela ONG Ação Educativa[1], que objetivava conhecer o nível de analfabetismo brasileiro. Tal indicador foi criado para avaliar a funcionalidade das habilidades básicas em matemática a partir dos seguintes níveis de referência:

- *Analfabetismo Matemático*, nível em que as pessoas não demonstram dominar nem sequer as habilidades mais simples e básicas, como ver o preço de um produto ou anotar um número ditado por outras pessoas;

- *Nível 1*, em que as pessoas conseguem ler as horas, medir com fitas métrica, verificar dias em calendários e outras atividades similares;

---

[1] Teve a Profª. Maria da Conceição Fonseca da Universidade Federal de Minas Gerais como consultora.

- *Nível 2*, em que, além das habilidades requeridas no nível anterior, as pessoas são capazes de comparar números decimais que se referem a preços, efetuarem operações de adição, subtração e mesmo uma multiplicação muitas vezes com calculadoras, e, por fim, identificar a existência de relação de proporção direta e inversa;

- *Nível 3*, em que, além das habilidades requeridas nos níveis anteriores, as pessoas conseguem resolver problemas que demandam uma série de operações, fazer cálculos proporcionais e demonstrar certa familiaridade com algumas representações como mapas, tabelas e gráficos.

Os resultados desta enquête, que contou com a participação de 2000 pessoas de 15 a 64 anos, foram publicados pelos jornais O Estado de São Paulo, em 18 de dezembro de 2002, e Folha de São Paulo, em 25 de fevereiro de 2003:

	Analfabetismo Matemático	Nível 1	Nível 2	Nível 3
Até 3ª Série do Fundamental	13 %	64 %	21 %	2 %
Da 4ª à 7ª Série do Fundamental	-	38 %	50 %	12 %
Ensino Fundamental completo ou Médio incompleto	-	16 %	59 %	25 %
Médio completo ou mais	**-**	**5 %**	**38 %**	**56 %**
População brasileira	3 %	32 %	44 %	21 %

De acordo com Braga (2003), apesar dessa pesquisa visar aspectos práticos da Matemática e também de atender a uma necessidade da ONG Ação Educativa os seus resultados mostram de maneira significativa a necessidade de se propiciar aos alunos, ao longo do Ensino

Médio, condições para construir e articular diferentes representações de objetos matemáticos.

Consideramos as informações acima, principalmente, as que mostram o comportamento dos alunos durante a faixa etária do Ensino Médio, como elementos que vêm a corroborar os objetivos dessa pesquisa e, assim, justificar o seu prosseguimento de modo a proporcionar condições para que tais dificuldades possam, ao menos, ser minimizadas.

– Objetivos

Entendemos que as dificuldades apresentadas por alunos, em relação ao conteúdo *função do 1º grau*, estão relacionadas à diversidade de registros e necessidade de transformações entre os mesmos.

A Matemática, para Duval (1995), é uma área do conhecimento que possui como uma de suas características a diversidade de registros e, na maioria das vezes, o seu ensino não leva em conta essa diversidade, provocando dificuldades de articulação e mobilização das diferentes representações de um mesmo objeto matemático e, conseqüentemente, uma menor apreensão do mesmo, o que pode reduzir sua aprendizagem a um processo mecânico.

Como Duval (1995), acreditamos que para que ocorra a aprendizagem de um objeto matemático seja necessário que o aluno trabalhe com o maior número possível de registros bem como, a articulação entre os mesmos. Dessa forma, estaremos nesta pesquisa, propondo uma seqüência didática que permita investigar e analisar a utilização desses registros de representação semiótica em relação ao conceito de função do 1º grau, por alunos da 1ª série do Ensino Médio.

Nesse sentido, dar condições para que o conhecimento matemático seja trabalhado de forma que se promova, constantemente, situações mais efetivas de aprendizagem e, assim, possibilite um maior e mais significativo comprometimento dos mesmos perante esse saber matemático, através de uma atuação mais intensa e de maneira que os mesmos possam participar mais ativamente do processo de elaboração do seu próprio conhecimento matemático. Tal perspectiva é colocada em contra-ponto ao que seria considerado um ensino tradicional, em que o professor se encarrega de "passar" o conteúdo matemático para os alunos.

Entendemos que um dos objetivos essenciais do ensino da Matemática seja o de que alguns conteúdos, como função do 1º grau, trabalhados ao longo da Educação Básica, tenham algum significado para o aluno e, assim, permitam que os mesmos possam ser relacionados ou adequados, no futuro, a uma determinada situação-problema.

Brousseau, apud Charnay (1996), afirma que o sentido de conhecimento matemático se define não só pela coleção de situações em que esse conhecimento é realizado como teoria matemática; não só pela coleção de situações em que o sujeito o encontrou como meio de solução, mas também pelo conjunto de concepções que rejeita, de erros que evita, de economias que procura, de formulações que retoma etc.

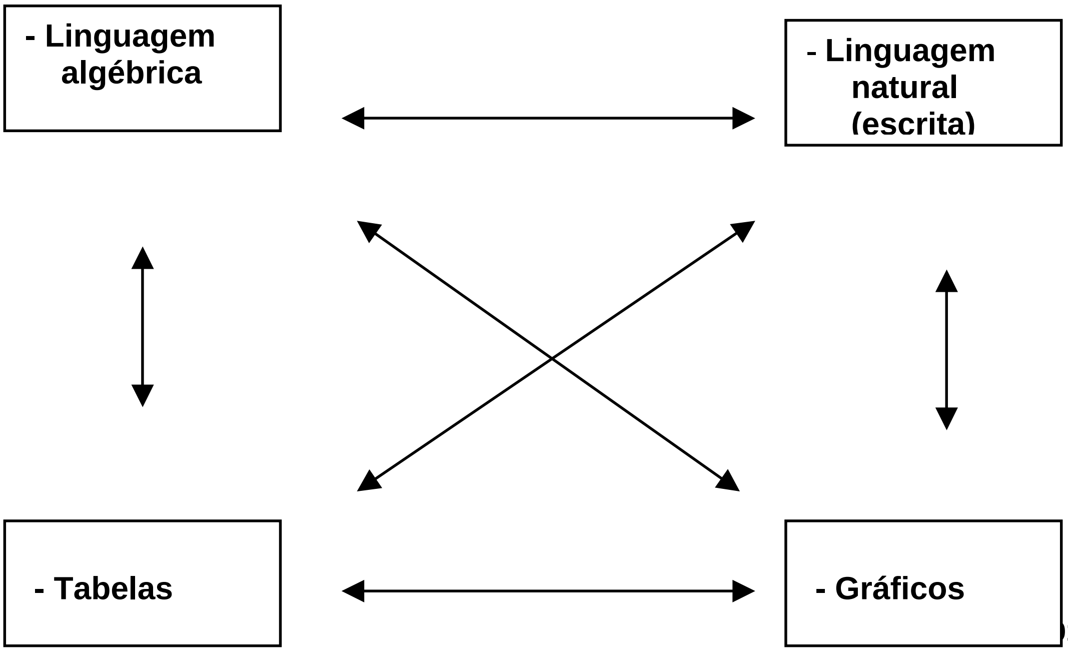
– Definição do objeto de pesquisa

Entendemos que a Matemática seja um valioso instrumento de compreensão do mundo globalizado, cercado de tecnologias cada vez mais presentes no nosso cotidiano.

Nesse sentido, buscaremos a partir de uma análise histórica da Matemática, de documentos oficiais como os PCN, de textos didáticos (livros e Apostilas) e dos discursos produzidos por alunos da 1ª série do Ensino Médio de uma escola particular de Campo Grande-MS; compreender melhor suas concepções a respeito do objeto matemático função do 1º grau, entendendo que essa disciplina se apresenta como um sistema de linguagens, códigos e regras que permite a comunicação entre os sujeitos e o objeto matemático.

Teremos na álgebra, mais especificamente no conteúdo de função do 1º grau, um maior comprometimento em tentar compreender como as formas de linguagens e códigos, que utilizamos para expressar esse conhecimento matemático, são entendidas e mobilizadas por alunos, nesse nível de escolaridade em sua estrutura cognitiva, e de que maneira a apreensão desse conteúdo tem proporcionado aos alunos um instrumento eficaz para o seu processo de aprendizagem.

Consideraremos na construção dessa pesquisa algumas formas de linguagens sobre o conceito de função do 1º grau, como: linguagem algébrica, linguagem natural (escrita), tabelas e gráficos. Assim, na figura 01, podemos perceber um grande número articulações que podem ser exploradas na busca de uma maior apreensão desse conceito por parte dos alunos.



Para uma maior aproximação do nosso objeto de pesquisa, procuraremos defini-lo segundo autores que abordam tal conceito no Ensino Fundamental para mais tarde, resgatarmos essa teoria nos discursos produzidos por alunos no início do Ensino Médio norteados pelo seguinte problema: Quais formas de linguagens se mostraram disponíveis, ao longo da aplicação de uma seqüência didática que teve como objetivo investigar alguns registros de representação semiótica do conceito de função do 1º grau, por alunos da 1ª série do Ensino Médio?

Com esse propósito, optamos pela construção de uma seqüência didática que permitisse analisar situações segundo o referencial teórico que adotamos e que tivesse como objetivo maior, investigar o trabalho dos alunos frente aos seus registros de representação semiótica e as mobilizações que os mesmos são capazes de realizar durante o desenvolvimento das atividades propostas.

Esperamos que os resultados deste trabalho possam promover discussões e reflexões entre professores e pesquisadores que desejem, de algum modo, rever o seu modo de ensinar bem como tentar compreender melhor o funcionamento cognitivo de seus alunos, no que diz respeito ao uso dos registros de representação semiótica.

CAPÍTULO I

1.1 – Algumas considerações sobre a História da Matemática, o desenvolvimento da Álgebra e o conceito de função.

O Empirismo pode ser considerado a característica principal da Matemática praticada pelos Babilônios, antes do século VII a.C.. Dessa forma, os babilônios e os egípcios praticavam uma “matemática” que atendia fundamentalmente suas necessidades práticas, como problemas relacionados à distribuição de bens e agrimensura. É a partir dos séculos VI e V a.C., na Grécia, que a Matemática começa a ter um caráter mais voltado para a ciência, minimizando sua aplicação estritamente prática.

Após a tomada de Alexandria, em 641 pelos árabes, a ciência dos gregos, que já havia entrado em decadência com o Império Romano, entra num profundo processo de transformação. Os árabes, na sua arremetida conquistaram a Índia e encontraram lá um outro tipo de cultura matemática: a Álgebra e a Aritmética. Foram os hindus que criaram o sistema de numeração decimal no qual introduziram um símbolo completamente novo no sistema de numeração, até então desconhecido, que foi o zero.

Alkchwrizmi propaga a sua obra “Aldschebr Walmakabala”, restauração e conforto, e é dessa obra que se origina o nome álgebra. Em 1202, Leonardo de Pisa alavanca a matemática com sua obra “Liber Abaci”, apresentando algumas soluções de equações de 1º, 2º e 3º graus. Nessa mesma época o alemão Jordannus Nemorarius, começa a utilizar letras para representar um número qualquer, e os sinais de (+) e (-), sob a forma das letras p (plus=mais) e m (minus=menos).

Percorrendo o caminho do surgimento da Álgebra, devemos destacar a importância da obra intitulada *Triparty en la science des nombres*, escrita por Nicolas Chuquet (1484), que teve sua importância comparada ao *Líber Abaci* de Fibonacci, quase três séculos antes. A obra de Chuquet é essencialmente retórica, sendo as quatro operações fundamentais indicadas pelas palavras e frases: plus($\overline{p}$), moins($\overline{m}$), multiplier par e party par. Ao tratar de raízes de números, faziam uso de uma linguagem sincopada[2].

Como exemplo, a expressão moderna $\sqrt{5} - \sqrt{2}$ seria, $R)^2$ .5. $\overline{m}$. $R)^2$ 2 .

Na última parte do *Triparty*, a que diz respeito à "*Regle des premiers"* – isto é, a regra da incógnita, que nos séculos XV e XVI vários nomes foram dados à coisa desconhecida, tais como *res* (em latim) ou *chose* (em francês) ou *cosa* (em italiano) ou *coss* (em alemão). Ainda nessa última parte a *Triparty*, trata da resolução de equação, encontramos muitos problemas que haviam aparecido em seus predecessores, mas com uma importante novidade. Chuquet estava pela primeira vez exprimindo um número negativo isolado numa equação algébrica, como exemplo, a expressão moderna 4.x = - 2, seria . 4 .^{1} egaux à $\overline{m}$. 2 .^{0} .

Temos em François Viète (1540-1603) como o maior precursor e considerado pai da Álgebra que introduziu uma conversão tão simples quanto fecunda. Usou uma vogal para representar, em álgebra, uma quantidade suposta desconhecida ou indeterminada e uma consoante, para representar uma grandeza ou números supostos conhecidos ou dados. Aqui encontramos pela primeira vez na Álgebra, uma distinção clara entre o importante conceito de parâmetro e a idéia de uma quantidade desconhecida. Mas infelizmente ele só era moderno em alguns aspectos, em outros ele ainda era conservador, mostrando uma álgebra sincopada e não simbólica; apesar de usar símbolos germânicos para adição e subtração e diferentes símbolos para parâmetros e incógnitas, o restante de sua álgebra consistia de palavras e abreviações.

Como exemplo dessa evolução, observamos que a terceira potência da quantidade incógnita não era A^3, ou AAA, mas A *cubus*, e a segunda potência era A *quadradus*. Essa foi mais uma das contribuições de Descartes para o aprimoramento do simbolismo algébrico.

A partir daí, a Álgebra finca profundas raízes e se consolida com sua obra "*Álgebra Speciosa*", em que símbolos podem ter uma significação

---

[2] Uma linguagem matemática intermediária entre a forma retórica usada na Antiguidade e a forma simbólica usada atualmente.

geral de números, segmentos de retas, entes geométricos, etc. Vemos assim, a partir do século XVII, a Álgebra dar início a vários outros ramos da matemática como: Geometria Analítica, Análise Matemática, Cálculo Diferencial, e outros.

Em relação ao conceito de função, podemos observar em Youschkevich apud Pelho (2003), que o seu desenvolvimento pode ser dividido em três partes:

1) A Antiguidade: Nesta fase verifica-se o estudo de alguns casos de dependência entre duas quantidades, sem ainda destacar a noção de variáveis e de funções.

2) A Idade Média: Etapa em que se expressavam as noções de funções sob forma geométrica e mecânica, porém, ainda prevalecendo as descrições gráficas ou verbais.

3) O Período Moderno: A partir do fim do século XVI e especialmente durante o século XVII, começam a prevalecer as expressões analíticas de função, sendo que o método analítico de introdução à função revoluciona a Matemática devido sua extraordinária eficácia e assegura a esta noção um lugar de destaque em todas as ciências exatas.

Podemos destacar alguns pensadores que contribuíram para o desenvolvimento do conceito de função ao longo da história a partir de estudos relacionados aos movimentos. Galileu Galilei (1564-1642), contribui para a evolução do conceito de função, ao utilizar instrumentos de medidas aprimorados em suas experiências, introduziu um tratamento quantitativo nas suas representações (curvas), expressando relações funcionais em palavras e em linguagem de proporção. Em um de seus relatos Galileu descreve: “O espaço percorrido por um corpo em queda a partir do repouso com movimento uniformemente acelerado, depende do quadrado do intervalo de tempo utilizado ao percorrer esta distância”, de forma simbólica: $S = k.\ t^2$.

Segundo Eves (1997), a palavra *função*, na sua forma latina equivalente, parece ter sido introduzida por Leibniz em 1694, inicialmente para expressar qualquer quantidade associada a uma curva, como por exemplo, as coordenadas de um ponto da curva, a inclinação de uma curva e o raio da curvatura de uma curva. Pouco tempo depois, temos em Bernoulli e Euler, pensadores que deram um tratamento mais próximo daquilo que conhecemos hoje como função, consideraram uma função como uma equação ou fórmula qualquer envolvendo variáveis e constantes.

Sfard (1992), ao tratar em seu artigo da origem operacional de objetos matemáticos, mais especificamente o caso da função, nos apresenta a idéia de que objetos matemáticos são produtos de definições formais o que para nós, ajuda a compreender a forma tradicional do seu ensino como sendo fruto de uma formalização herdada da Matemática Moderna.

No seu trabalho, a autora destaca a importância de se buscar nas raízes históricas o processo e a formação do conceito. No caso das funções temos, em Bernoulli e Euler, estudos que mostram o entendimento de tal objeto matemático. Primeiramente, o conceito de função era compreendido por esses pensadores em termos de entidades matemáticas; para Bernoulli "quantidade composta por variáveis e constantes" e para Euler "a explicação para tal conceito era dada através de expressões analíticas".

Para Sfard (1992:62), "a natureza desse conceito não estava muito clara para esses pensadores não demorando muito tempo para Euller se dar conta que o seu conceito de função como "expressão analítica" não poderia funcionar". Em 1755, troca a sua definição original por variáveis dependentes e independentes. Nesse sentido, a autora acha "notório verificar que nessa nova versão dada por Euller é explicitamente operacional".

> "uma quantidade pode ser chamada de função apenas se ela depende de outra quantidade, de tal modo que se a última é modificada, a primeira também será" (Sfard,1992, p.63)

Os resultados de suas pesquisas mostraram que antes de se trabalhar qualquer conceito matemático com alunos, devemos fazê-lo, primeiramente, de uma forma operacional, pois os alunos expressam melhor esse conceito de forma operacional. Para a autora “os conceitos dos alunos parecem estar mais próximos do operacional do que do estrutural”.

Uma abordagem estrutural desse conceito “a função é um conjunto de pares ordenados tais que...” ou “uma função é uma correspondência entre dois conjuntos de elementos que...”, segundo Sfard (1992), pode desencadear uma série de dificuldades no seu processo de aprendizagem, já que os alunos apresentam dificuldades de criarem tais objetos abstratos em sua estrutura cognitiva. Assim, ela entende que novos conceitos não deveriam ser introduzidos em termos estruturais.

Um exemplo de apresentação em termos estruturais é a definição de função a partir do movimento imposto pela Matemática Moderna como qualquer associação entre os elementos de dois conjuntos **A** e **B** tal que, a cada elemento de **A** corresponde um único elemento de **B**. Denota-se por f: **A** $\rightarrow$ **B**, onde qualquer x $\in$ **A**, y = f(x) $\in$ **B**.

A **é chamado de** domínio **da função f e** B **de** contra-domínio **de f. O conjunto formado por todos os f(x) onde um x** $\in$ A **é denominado** conjunto-imagem **de f.**

1.2 - Análises de documentos oficiais.

Inicialmente, faremos uma reflexão sobre a História da trajetória do ensino da Matemática no Brasil destacando alguns momentos importantes, com o intuito de apresentar alguns aspectos da História do Ensino da Matemática que julgamos importante para uma compreensão da trajetória do conceito de função nos programas escolares.

Nas décadas de 1960/70, o ensino da Matemática sofre uma grande renovação, em conseqüência de um grande movimento internacional conhecido por Matemática Moderna. Esse movimento valorizava as grandes estruturas e a linguagem da teoria dos Conjuntos, provocando amplas discussões e reformas em nível de currículo de Matemática.

E, assim, o ensino passou a ter uma preocupação excessiva com o formalismo, relegando a um segundo plano as questões relacionadas ao cotidiano. Um pouco mais tarde, sob influência de trabalhos na área do ensino da Matemática nos Estados Unidos na década de 1980, temos uma sinalização de um ensino da Matemática voltado para a resolução de problemas mais práticos, um reflexo das mutações tecnicista no mercado de trabalho.

A partir da década de 1990, tendências modernas expressas em vários documentos, dentre eles os PCN, consideram a Álgebra "um espaço bastante significativo para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização". Assim, sugerem a exploração de situações que levem os alunos a construir noções algébricas pela observação de regularidades: em tabelas, gráficos e outros registros de representação; estabelecendo relações que sejam mais significativas e não apenas um trabalho de "manipulações" com expressões e equações como acontece na maioria das vezes.

Nesse sentido, os PCN sugerem um ensino da matemática de forma que se estimule a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas.

Tais preocupações, relacionadas ao processo de ensino e aprendizagem, são confirmadas através de indicadores levantados pelo Sistema Nacional de Avaliação Escolar da Educação Básica - SAEB que, a partir de 1993, passa a mostrar índices alarmantes de alunos que acertavam menos da metade das questões propostas; dentre elas as questões relacionadas à Álgebra. Em 1995, abrangendo alunos da 4ª e 8ª séries do Ensino Fundamental, os percentuais de acerto por série/grau e por capacidade cognitiva, além de continuar diminuindo, à medida que aumentavam os anos de escolaridade, indicavam também que as maiores dificuldades encontravam-se nas questões relacionadas à aplicação de conceitos e à resolução de problemas.

Desse modo, o ensino de Função precisa garantir que os alunos trabalhem com problemas e que os mesmos possam dar significado à linguagem e às idéias matemáticas, promovendo assim, uma maior integração das ciências que fazem uso desse objeto matemático.

Para esse tipo de trabalho, os PCN consideram fundamental a compreensão de conceitos como o de variável; a representação de fenômenos na forma algébrica e na forma gráfica; a formulação e a resolução de problemas por meio de equações e o conhecimento da "sintaxe" (regras para resolução de uma equação).

Podemos ainda, observar nos PCN um grande esforço no sentido de que o que se ensine, seja mais significativo para o aluno e que lhe possibilite no futuro poder continuar aprendendo. Dessa maneira, podemos encontrar nos PCN uma preocupação em relação ao papel do ensino da Matemática no Ensino Médio a partir de suas diversas funções:

- possuir um caráter formativo; ajudando no desenvolvimento dos processos de pensamento. Gerando aquisições que transcendem à disciplina, tais como: hábitos investigativos, capacidade de resolver problemas genuínos, criatividade, visão ampla e científica da realidade.
- quanto ao seu papel instrumental; a matemática deve ser vista pelo aluno como um conjunto de técnicas e estratégias para ser aplicado em outras áreas do conhecimento e na atividade profissional. Deve também ser

percebida como um sistema de códigos e regras que a torna uma linguagem, permitindo modular a realidade, interpretá-la e comunicar idéias.

- a matemática possui também, nesse nível de escolaridade, a função de ampliar as capacidades desenvolvidas no ensino fundamental como: abstração, raciocínio, resolução de problemas de qualquer tipo, investigação, análise e interpretação da realidade.
- e por fim; fornecer ao aluno os conhecimentos e instrumentos necessários para que possa continuar aprendendo e desenvolvendo sua capacidade de pesquisar e a confiança em seu próprio conhecimento, ou seja, sua autonomia.

Nesse sentido, se faz necessário pensar em uma Educação Matemática que contemple tais objetivos para o seu processo de ensino e que seja capaz de repensar alguns temas tradicionalmente presentes nos currículos. Enfim, é preciso pensar em um currículo mais flexível no qual o aluno possa: desenvolver as atividades e habilidades acima descritas, ter uma compreensão contextualizada e mais abrangente e, acima de tudo, estabelecer conexões entre os diversos conceitos matemáticos e diferentes formas de pensamento matemático.

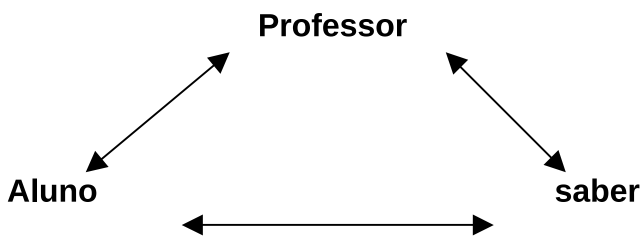
Acreditamos que os PCN, ao tratarem das competências e habilidades que devem ser desenvolvidas em matemática, sob o ponto de vista da representação e comunicação, indicam a capacidade que os alunos necessitam ter ao: ler e interpretar um texto da matemática, utilizar representações, transcrever mensagens da linguagem corrente para a linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas, etc.) e vice-versa, utilizar adequadamente os recursos tecnológicos como instrumentos de produção e de comunicação entre outras, oportunizando assim conexões e reflexões em torno dos conceitos matemáticos.

CAPÍTULO II

2 – REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 – Considerações sobre a Didática Francesa da Matemática

Iniciaremos nossas reflexões a partir da relação triádica (professor, aluno e saber), em que tais relações são entendidas como uma via de mão dupla, ou seja, não se aceita uma visão puramente objetivista e tampouco subjetivista desse processo.



Nesse sentido, consideraremos esses três elementos didáticos no entendimento de uma situação didática que, segundo Pais (2001:65), "(...) é formada pelas múltiplas relações pedagógicas estabelecidas entre o professor, os alunos e o saber, com a finalidade de desenvolver atividades voltadas para o ensino e para a aprendizagem de um conteúdo específico". Porém, sabemos que tais elementos não são suficientes para traduzir toda a complexidade do processo de ensino e aprendizagem e, assim, ligados às extremidades desse triângulo estão alguns procedimentos que vão oportunizar todo o processo como: recursos didáticos, as representações do conceito matemático, o planejamento, a metodologia, a avaliação e outros.

Procuraremos a partir deste momento, compreender melhor a questão da aprendizagem da matemática e dos elementos que estão presentes ao longo desse processo.

Para Duval (2003), ao levantarmos a questão da aprendizagem da matemática devemos tentar compreender suas dificuldades e a natureza das mesmas. Para tanto, acreditamos que a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (1995) possa servir de suporte teórico para investigarmos o funcionamento cognitivo do aluno frente aos registros de representação, buscando um modelo que seja pertinente para analisar e interpretar tais registros.

Assim, conduzimos nossos trabalhos, buscando uma compreensão mais ampla do nosso objeto de pesquisa em torno de um processo de ensino e aprendizagem que permita, a partir de uma abordagem cognitiva, responder nossos questionamentos.

Buscamos a partir desse momento uma análise mais aprofundada, com base nos dados coletados em um teste diagnóstico e de nossas análises preliminares para tentar identificar algumas dificuldades que esses alunos possuem, e que possam impedir, ou dificultar, suas ações sobre os registros.

A fundamentação teórica dessa pesquisa está alicerçada em autores da Didática Francesa, que desenvolvem pesquisas teóricas e práticas, visando compreender o processo de ensino e aprendizagem. E, dessa forma, refletiremos também sobre questões que tratam da teoria das Situações Didáticas, revisitando teorias como a de Obstáculo Epistemológico de Brousseau (1986), e, principalmente, aprofundando nosso entendimento sobre a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval (1995).

Primeiramente, consideramos importante uma reflexão sobre o conceito de Obstáculo Epistemológico. Essa noção foi introduzida na Didática da Matemática por Brousseau, em 1976, inspirado nas idéias do filósofo francês Bachelard, apresentadas em 1938.

Acreditamos que a noção de obstáculo possa contribuir para um maior entendimento do processo de ensino e aprendizagem da matemática, na medida em que tomamos a decisão de trabalhar conceitos matemáticos através da análise de algumas dificuldades encontradas na evolução dos mesmos, permitindo assim, uma espécie de confrontação das dificuldades enfrentadas ao longo do processo e, conseqüentemente, uma maior compreensão dos erros cometidos em sala de aula na construção do conhecimento matemático.

Brousseau (1986), introduz a noção de obstáculo epistemológico como sendo aquele obstáculo ligado à resistência de um saber mal-adaptado e o vê como um meio de interpretar alguns dos erros recorrentes e não aleatórios cometidos pelos alunos. A partir dessa noção consideraremos essa teoria na construção de uma Seqüência Didática que possa prever e descrever determinados erros e, assim, tentar interpretá-los como conhecimentos arraigados de nossos alunos que dificultam o entendimento, uma maior aproximação, de um outro conhecimento mais evoluído.

Consideramos também, nessa fase inicial de delimitação do nosso quadro teórico, a necessidade de voltarmos nossos olhares à teoria das Situações Didáticas proposta por Brousseau, da qual tentaremos destacar alguns pontos que devem estar presentes num ambiente pedagógico que possam favorecer a aprendizagem, desfazendo assim, alguns equívocos no ensino da matemática, em que muitos pensam a prática educativa como uma simples reprodução de conhecimentos. Segundo o autor, para que essa concepção seja mudada é preciso que a simples comunicação do conteúdo seja substituída pela *devolução*[3] de um bom problema.

Nesse sentido, concebemos uma seqüência didática, esperando que suas atividades favoreçam o surgimento de situações adidáticas e, assim, permitam uma análise dos dados coletados levando-se em consideração vários elementos presentes no processo de ensino e aprendizagem.

Para Freitas (1999), uma prática pedagógica, nesses termos, não deve permanecer no nível de transmissão de um conhecimento. Devemos trabalhar com a apresentação e devolução de bons problemas, pois, “se o

---

[3] Na Teoria das Situações Didáticas, o termo *devolução* é usado no sentido de transferência de responsabilidade, o professor além de comunicar o enunciado, procura agir de forma que o aluno aceite o desafio de resolvê-lo como se o problema fosse seu.

aluno consegue uma boa resolução do problema, pode-se concluir que ele possui um determinado conhecimento, caso contrário, é sinal de que ele precisa evoluir para atender às expectativas do contexto” (Freitas 1999, p.73).

2.2 – Semiótica e Representação Semiótica

Ao optarmos por um referencial teórico, que trata dos registros de representação semiótica, proposto por Duval (1995), temos a consciência de que o processo de aprendizagem tem muito de não-semiótico (Por exemplo as imagens mentais); porém, no momento abordaremos o processo de aprendizagem do objeto matemático *função do 1º grau* a partir das articulações feitas por alunos em torno de algumas formas de representações semióticas (numérica, algébrica, língua natural e gráfica). A seguir apresentamos algumas reflexões que permitirão um maior entendimento do referencial adotado.

- *Semiótica.*

A partir do conceito de que a semiótica é a ciência dos signos, Peirce (1972), daremos início à fundamentação teórica específica desta pesquisa, esclarecendo alguns conceitos como: semiótica, representação semiótica, sistemas de representações e registros das representações semióticas.

A origem da semiótica pode ser encontrada na filosofia com Platão, que já se preocupava com os signos nos seus diálogos sobre a linguagem. No século XVII, John Locke postulou uma doutrina dos signos com o nome *semiotik*, no entanto, só em 1964, é que Thomas Sebeok, publicou uma coletânea chamada *Approaches to Semiotics*, dando à palavra a forma plural que, no inglês caracteriza a denominação de uma ciência.

A semiótica é a ciência dos signos e dos processos significativos na natureza e na cultura. A investigação semiótica abrange todas as áreas do conhecimento envolvidas com linguagens ou sistemas de significação, tais como, a lingüística (linguagem verbal), a matemática (linguagem dos números), a biologia (linguagem da vida) etc.

Peirce (1972) foi um dos primeiros a abordar essa questão na linguagem. Para esse autor, um determinado signo é algo que sob certo aspecto representa alguma coisa para alguém, dirige-se a alguém; isto é, cria na mente dessa pessoa um signo equivalente ou talvez até um signo melhor desenvolvido, não sob todos os aspectos; mas, com referência a um tipo de idéia, que Peirce denomina o *fundamento* do signo. Assim o signo relaciona significante e significado.

- *representação e representações semióticas.*

Ao longo da Educação Básica, muitos conceitos relacionados às ciências estão subordinados à linguagem matemática. A simples memorização e aplicação de fórmulas matemáticas não garante que o aluno tenha efetivamente assimilado tais conceitos. Na maioria das vezes, estamos diante de uma aprendizagem mecânica e, portanto, o verdadeiro significado do objeto de estudo fica comprometido.

Para Duval (1999), a Matemática é uma área do conhecimento que trabalha com objetos abstratos, ou seja, não são diretamente acessíveis pela percepção, necessitando para sua compreensão do uso de uma representação e, como tal ocorre a partir de um processo mental, em que o sujeito constrói o conhecimento em sua mente. Assim, a representação de símbolos, signos, tabelas, gráficos e outros – representação semiótica – devem permitir a comunicação entre os sujeitos envolvidos num processo de ensino/aprendizagem.

A abordagem de um objeto matemático, sob o ponto de vista das representações semióticas, segundo Duval (2003), deve levar em conta alguns aspectos que exigirão do pesquisador uma análise *a priori*, que contemple os vários registros de representação semiótica e as transformações dessas representações ao longo de uma seqüência didática que possa, cuidadosamente, levantar os aspectos mais significativos de tais transformações.

Para Pais (2001), independente da escolha de registro do objeto matemático, “é importante persistir na transparência de uma descrição fidedigna com a realidade em que a experiência foi realizada". Na fase da análise *a posteriori*, que se refere ao refinamento das informações levantadas na seqüência didática, estaremos interessados em compreender a partir desses discursos, como esses alunos articulam as representações semióticas a respeito do conceito de função do 1º grau.

Duval apud Damm (1999), nos oferece uma maior aproximação do conceito de representação, considerando que:

- **as representações como representação subjetiva e mental** (que são tratadas na mesma perspectiva das concepções prévias – os primeiros estudos foram realizados no ano de 1924 por Piaget em sua obra: *A representação do mundo na infância*).
- **as representações internas ou computacionais** (são estudadas juntamente com as teorias que privilegiam os tratamentos e não são representações conscientes do sujeitos, geralmente os sujeitos as executam sem pensar em todos os seus passos para sua realização).
- **as representações semióticas** (que surgiram como uma tentativa de modelização de linguagem, foram ampliadas mais tarde para sistemas semióticos. Essa forma de representação é externa e consciente do sujeito).

Destacamos ainda, que tais formas de representação possuem funções diferenciadas e no momento fixaremos nossos esforços para compreender as representações semióticas que segundo a autora, possuem uma função de objetivação e uma função de expressão, realizando de alguma forma, uma função de tratamento, função fundamental para a aprendizagem humana.

Para Duval, apud Damm (1999), as representações semióticas "são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação, os quais têm suas dificuldades próprias de significado e de funcionamento" (Damm, 1999, p.143).

> (....) as representações (semióticas) não são somente necessárias para fins de comunicação, elas são igualmente essenciais para as atividades cognitivas do pensamento. (Duval, apud Damm, 1999, p.143)

Duval (1995) chama de *semiósis* a apreensão ou a produção de uma representação semiótica e *noésis*, os atos cognitivos, como a apreensão conceitual de um objeto.

Ao se referir a um objeto matemático, Duval diz que para sua apreensão é necessário que a *noésis* (conceitualização) ocorra através de significativas *semiósis* (representação). Quanto maior for sua capacidade de articular diferentes registros de representação do mesmo objeto matemático, maior será o seu entendimento sobre o objeto.

Duval (2003) nos alerta para o fato que uma das características da atividade matemática sob o ponto de vista cognitivo, é que os bloqueios de compreensão, diante de experiências epistemológicas, de alguns alunos podem ser explicadas pela história de suas descobertas. E, para tanto, estaremos compartilhando e observando com esse autor a importância do desenvolvimento e o tratamento dos registros de representações semióticas como condição necessária para a evolução do pensamento matemático.

Para Duval, o processo de ensino da matemática ou da comunicação, se estabelece sobre objetos matemáticos, a partir das representações que esses alunos possuem em relação ao objeto. Para o autor, é fundamental destacar a diferença entre representação do objeto matemático e o próprio objeto.

2.3 – Registros de Representação Semiótica

O termo "registro" foi utilizado, primeiramente, por René Descartes em 1637, para distinguir a escrita algébrica das curvas e suas representações figurativas.

Para Duval (1999), as representações semióticas "são relativas a um sistema particular de signos, linguagens natural, formal, escrita algébrica ou de gráfico cartesiano, figuras, de um objeto matemático". E, dessa forma, os registros comportariam uma ou mais dessas representações semióticas, por exemplo: as representações por tabelas e algébricas estariam dentro de um registro simbólico que ora faz uso da escrita numérica, ora da escrita algébrica.

Nesta pesquisa consideraremos algumas formas de representação semiótica do conceito função do 1º grau e seus registros, utilizados por alunos do Ensino Médio, durante a aplicação de uma seqüência didática previamente avaliada e direcionada para tais representações, conforme pudemos observar na figura 01.

A partir da utilização da teoria de Raymond Duval, buscamos descrever o funcionamento cognitivo dos alunos no tratamento de um sistema de representação semiótica ou na passagem de um sistema para outro sistema de representação (conversão).

Para compreendermos o modelo teórico proposto por Raymond Duval nesta pesquisa, alguns questionamentos se fazem necessários. Quais as representações desses alunos sobre o conceito função do 1º grau? Tendo disponíveis tais representações, até que ponto são capazes de articulá-las diante de situações-problema diversificadas? Durante os registros, são capazes de evidenciar os dois tipos de transformações (tratamento e conversão) dessas representações? Quais atividades cognitivas são evidenciadas ao longo dessas transformações?

Buscamos um maior esclarecimento dessas questões, entendendo que na Matemática, diferentemente das outras áreas de conhecimento científico, os objetos não são acessíveis pela percepção ou por instrumentos, o seu acesso passa, necessariamente, por representações semióticas, que devem ser significativas na estrutura cognitiva do aluno, permitindo que esse, crie condições para a aquisição de outros conhecimentos matemáticos e, assim, promova uma apreensão mais significativa do conceito matemático.

Pudemos compartilhar com os autores (Duval,1995 e Damm,1999) o fato de que dificuldades enfrentadas por alunos nos registros de representação semiótica e conseqüentes articulações, estão relacionadas a aspectos do funcionamento cognitivo frente à aquisição dos conhecimentos matemáticos, ou seja, “sem as representações semióticas torna-se impossível a construção do conhecimento pelo sujeito que aprende”(Damm, 1999:143).

Para Duval (1995), as aquisições funcionais devem considerar na formação do indivíduo o aspecto funcional do sistema orgânico que, no caso, estão relacionados aos nossos sentidos: a audição (a voz), a visão (percepção), o tato (escrita), a memória e as aquisições relativas aos sistemas semióticos, que são usados pelos indivíduos de uma mesma cultura para a comunicação.

Devemos destacar também a importância das representações mentais frente às semióticas. Tais representações podem ser imagens ou concepções que um indivíduo tem a respeito de um determinado objeto matemático. Dessa maneira acreditamos que uma representação semiótica seja a forma pela qual os sujeitos podem expressar os seus pensamentos num processo de comunicação. Por outro lado, essa não é a sua única função, nem a mais importante, mas essencial para o desenvolvimento da atividade cognitiva do pensamento como dissemos anteriormente.

Uma abordagem cognitiva do problema nos remete a uma análise que contemple características e funções internas a cada registro e, assim, buscaremos compreender melhor as dificuldades enfrentadas por esses alunos ao longo das transformações realizadas nos registros e entre registros.

Nesse sentido, entendemos que o movimento entre um registro na língua natural e um outro, por exemplo, mobiliza um conjunto de atividades cognitivas que podem permitir ao aluno exprimir, desenvolver ou até mesmo, “controlar” um conhecimento matemático a partir de regras e códigos próprios desse registro.

Duval (2003), nos apresenta uma classificação para esses registros de representação como sendo de quatro tipos: as representações discursivas, não-discursivas, multifuncionais e monofuncionais; conforme quadro a seguir.

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO-DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: Os tratamentos não são algoritmizáveis.	Língua Natural Associações verbais (conceituais) Forma de raciocinar: • argumentação a partir de observações, de crenças...; • dedução válida a partir de definições ou de teoremas.	Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configu-rações em dimensão 0, 1, 2 ou 3). • apreensão operatória e não somente perceptiva; • construção com instrumentos.
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: Os tratamentos são principalmente algoritmos.	Sistemas de escritas: • numéricas (binária, decimal, fracionária...); • algébricas; • simbólicas (línguas formais). Cálculo	Gráficos cartesianos • mudanças de sistema de coordenadas; • interpolação, extrapolação.

Fonte: Duval (2003, p.14)

De acordo com Duval (1999), a apreensão conceitual dos objetos matemáticos somente acontece a partir da coordenação dos vários registros de representação mobilizados pelos sujeitos e, nesse sentido, o autor chama a atenção para as atividades cognitivas, relacionadas à produção de uma representação semiótica e que garantirão uma conceitualização do objeto matemático. Nesse sentido, para que um sistema semiótico seja um registro de representação é necessário observar aspectos como: a formação de uma representação identificável, o seu tratamento e possíveis conversões.

2.4 – Transformações por tratamento e conversão.

Para Duval (2003), a originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo.

Passaremos a tratar, nesse momento, do entendimento da formação de uma representação semiótica e das transformações por tratamento e conversão, compartilhando Duval apud Damm (1999):

- *A formação de uma representação identificável* está relacionada a regras de conformidade e, portanto, não cabe aos sujeitos criá-las, mas, utilizá-las no reconhecimento das representações de acordo com regras que possibilitem o seu tratamento, através de um enunciado compreensível numa determinada língua natural, na composição de um texto, na escrita de uma fórmula ou de um gráfico.

- *O tratamento* de uma representação que é a transformação desta no interior do mesmo registro em que foi formada. Por exemplo, nas estruturas simbólicas (cálculo numérico, cálculo algébrico...); existem regras de tratamentos próprias a cada registro, sua natureza e número variam consideravelmente de um registro para outro. É importante destacar que muitos alunos encontram dificuldades ao tratar das regras próprias de um determinado tipo de registro. Voltemos ao exemplo da resolução de uma equação algébrica, em que a linguagem dos sinais não seja de pleno domínio desse aluno. Por exemplo, ao tentar resolver a igualdade de $2.x= -4$ ele pode responder $x = -4/-2 \Rightarrow x = 2$.

Assim, os tratamentos estão relacionados à forma e não ao conteúdo do objeto matemático. Nesse sentido, quando um aluno trabalha no registro simbólico a partir da escrita numérica, um tratamento pode ser realizado na forma racional (1/4 + 3/4) ou na forma decimal (0,25 + 0,75), o que não significa ter o mesmo empenho cognitivo, ou ainda, esse aluno pode não reconhecer o mesmo objeto matemático nessas duas representações.

Para Duval (1995), essa transformação deve ser pensada, levando-se em conta a economia dos procedimentos e a limitação que cada registro impõe aos tratamentos e a sua conceitualização que para o autor, são essenciais para a compreensão de um determinado registro de representação semiótica.

- e a *conversão* de um registro de representação que é a transformação deste para um outro, conservando a totalidade ou uma parte do objeto matemático em questão. Para Damm (1999), a conversão é um passo fundamental no trabalho com representações semióticas que não deve ser confundido com o tratamento.

Segundo Duval (2003, p.15), "este tipo de transformação enfrenta os fenômenos de não-congruência. Isso se traduz pelo fato de os alunos não reconhecerem o mesmo objeto através de duas representações diferentes".

Ainda, nessa atividade de conversão, devemos levar em conta a natureza dos registros de representação e o sentido da conversão. Por exemplo, o fato de um aluno realizar a passagem do registro simbólico algébrico para o registro gráfico não garante que o mesmo possa realizar o caminho inverso, isso porque o custo cognitivo para os sentidos da conversão é diferenciado.

Freitas (2003), fazendo uma análise dos discursos de alunos da última série escolar de Collège na França (correspondente à 8ª série) e também, da 1ª série de Lycée na França (correspondente à 1ª série do Ensino Médio) descreve como o aluno nesse nível de escolaridade articula a passagem da aritmética para álgebra, através do tratamento e conversão de registros de representações na resolução de uma classe de problemas.

Com base nesses procedimentos, identifica três tipos de registros: linguagem natural, numérica e algébrica; utilizados na produção de provas "pragmáticas" e "intelectuais", nos quais observou tanto o *tratamento* de um determinado registro, como também *conversões* entre os três tipos de registros. A partir dos resultados apresentados pelo autor, podemos concluir que as conversões verificadas em sua pesquisa, possuem níveis de congruência diferenciados.

Nesta pesquisa, consideraremos os seguintes registros para o conceito de função do 1º grau:

- Registro Simbólico (utilizando a linguagem numérica e a algébrica, que segundo Duval (2003), os seus tratamentos são algoritmizáveis);
- Registro da Língua Natural (que, assim como o anterior, possui característica discursiva; porém, os seus tratamentos não são algoritmizáveis) e
- Registro Gráfico (não são algoritmizáveis).

Diante dessa variedade de registros e representações, destacamos a importância de uma abordagem didática que possibilite ao aluno diferenciar o objeto matemático *função do 1º grau* de suas representações, o que para Duval (1995), deve acontecer a partir de uma coordenação consciente desses representantes. Nesse sentido, o autor destaca que a capacidade de converter implica a coordenação de pelo menos dois registros mobilizados.

Como vimos, essas transformações podem ocorrer num mesmo sistema de representação (tratamentos) ou de um sistema de representação para outro (conversão). Para Duval (2003), essa distinção é decisiva na análise do funcionamento cognitivo do aluno, uma vez, que as duas transformações são radicalmente diferentes.

Duval (2003), nos chama a atenção para aspectos que diferenciam esses dois tipos de transformações. No primeiro, quase sempre fica evidente um procedimento de justificação (refinamento) de um único registro; no segundo, destaca a importância de reconhecer um mesmo objeto através de duas ou mais representações em registros diferentes, implicando ao aluno uma maior capacidade na coordenação (articulação) desses registros.

2.5 – Análises de textos didáticos

Nesta etapa da pesquisa analisamos como o conteúdo *função do 1º grau* é trabalhado por alguns textos didáticos (Livros e Apostilas) do Ensino Fundamental. Procuramos relacionar o trabalho de alguns autores com o referencial teórico utilizado nesta pesquisa, orientados também pela análise do PNLD/2005 que acreditamos, seja uma radiografia do que se deseja realizar nesse nível de escolaridade.

Em relação à escolha dos autores de livros, decidimos por aqueles que costumam ser adotados, tanto nas escolas da rede pública, quanto nas da rede particular. Buscamos destacar em seus trabalhos, pontos que consideramos importantes para essa pesquisa como: as formas de representação utilizadas, suas articulações e, também, a mobilização entre o conteúdo de função e outras áreas de conhecimento.

Consideramos também em nossa análise, a apostila do Sistema Objetivo de Ensino, adotada pela escola em que trabalho em todas as séries do Ensino Médio, onde realizamos a aplicação dessa pesquisa. A seguir, passaremos a expor algumas reflexões sobre esses os textos didáticos abaixo relacionados:

1) BIGODE (2000) – Matemática hoje é feita assim. Editora FTD.
2) IEZZI et al (2000) – Matemática e Realidade. Atual Editora.
3) IMENES e LELLIS (2002) – Matemática para todos. Editora Scipione.
4) PIRES et al (2002) – Educação Matemática. Atual Editora.
5) GIOVANNI e PARENTE (2000)– Aprendendo Matemática. Editora FTD.
6) APOSTILA DO SISTEMA OBJETIVO DE ENSINO (2005) – Editora Sol.

1 – Bigode (2000), introduz o conceito de função, destacando a importância das formas de linguagens como: fórmulas, tabelas e gráficos e sua utilização em outras áreas do conhecimento.

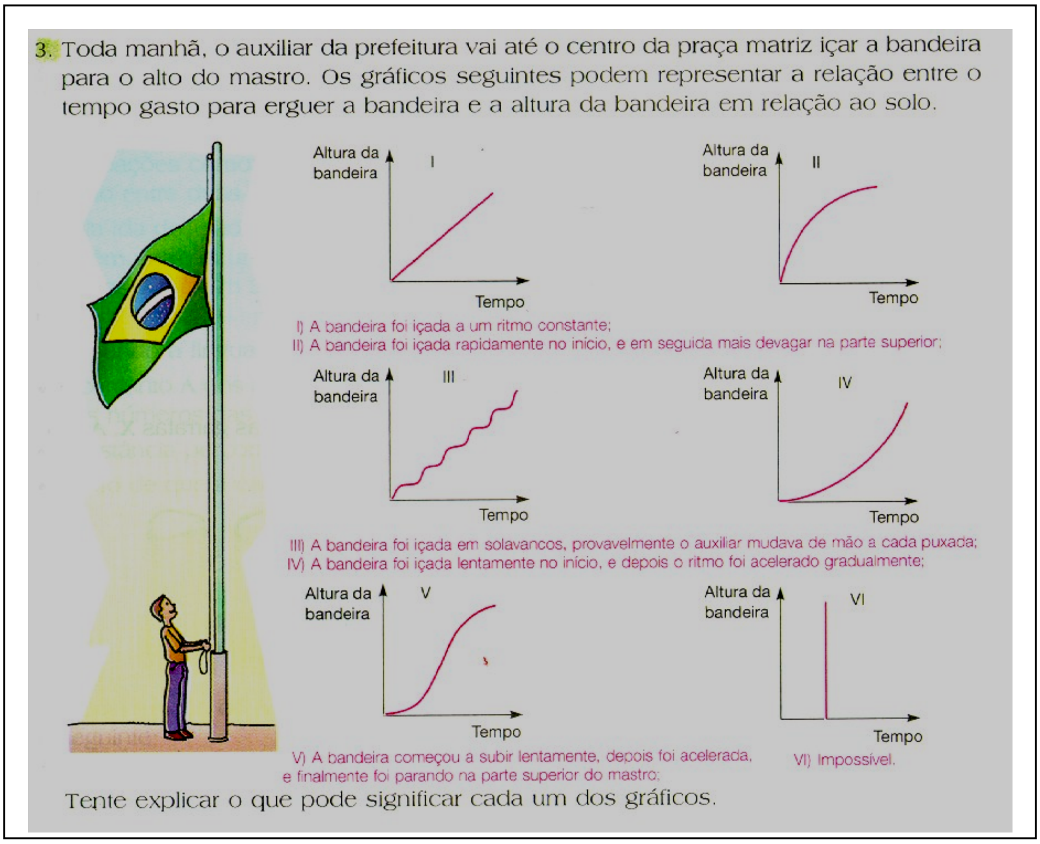
O autor esclarece, no início do capítulo, as transformações que serão exploradas durante as atividades, a partir de dois esquemas:

- Fórmula → Tabela → Gráfico
- Tabela → Fórmula → Gráfico

Primeiramente, Bigode faz a apresentação de fórmulas e tabelas através de exemplos que relacionam a geometria, a física e outras situações do cotidiano para, em seguida, trabalhar as atividades que tratam dos tratamentos entre a fórmula (registro da escrita algébrica) e a tabela (registro da escrita numérica) e vice-versa.

Em relação ao estudo dos gráficos, Bigode (2000) apresenta, a partir de vários exemplos, situações do cotidiano que podem ser analisadas pela variação grandezas. Nesse sentido, o aluno é levado a realizar conversões entre enunciados na língua natural, figuras e tabelas e o registro gráfico.

Podemos observar na atividade proposta a seguir, que o aluno é induzido a fazer "mentalmente", conversões entre gráficos e linguagem natural, estabelecendo relações entre os crescimentos das duas variáveis, o tempo e a altura da bandeira (Resoluções em vermelho apresentadas no Livro do Professor).


3. Toda manhã, o auxiliar da prefeitura vai até o centro da praça matriz içar a bandeira para o alto do mastro. Os gráficos seguintes podem representar a relação entre o tempo gasto para erguer a bandeira e a altura da bandeira em relação ao solo.

I) A bandeira foi içada a um ritmo constante;
II) A bandeira foi içada rapidamente no início, e em seguida mais devagar na parte superior;

III) A bandeira foi içada em solavancos, provavelmente o auxiliar mudava de mão a cada puxada;
IV) A bandeira foi içada lentamente no início, e depois o ritmo foi acelerado gradualmente;

V) A bandeira começou a subir lentamente, depois foi acelerada, e finalmente foi parando na parte superior do mastro;
VI) Impossível.

Tente explicar o que pode significar cada um dos gráficos.

Fonte: Bigode, 2000, p.241

Em seguida, utiliza-se de exemplos para a conversão entre o registro da escrita algébrica e o registro gráfico, através de relações representadas por meio de uma função do 1° grau.

Numa outra parte do capítulo, Bigode inicia o uso de uma linguagem mais formal, dando ênfase à definição de função a partir da linguagem de conjuntos.

> “Chama-se função de um conjunto A em um conjunto B, conhecidos, qualquer relação entre esses conjuntos que faça corresponder a cada elemento de A um único elemento de B”. (Bigode, 2000:243)

Antes de iniciar à classificação de função, em relação ao Universo de sua variável, Bigode (2000) apresenta o sistema cartesiano, destacando a representação de pontos, intervalos e regiões do plano, a partir de uma seqüência de exercícios. Encerra o capítulo, mostrando elementos visuais da representação gráfica como: inclinação da reta e intersecções com os eixos coordenados que, sem dúvida contribuem para uma maior apreensão dessa forma de linguagem.

No manual do professor, dentre outras coisas, Bigode destaca a importância da linguagem por tabelas, fazendo um resgate histórico e sugestões de trabalho para uma maior apreensão dessa forma de linguagem.

De modo geral, a contextualização e a articulação são utilizadas para dar significado ao desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos, facilitando a compreensão dos mesmos. Enfim, uma obra de linguagem acessível, que explora atividades para a aprendizagem de transformações entre as formas de linguagens que se propõem a realizar no início do capítulo.

2 - Iezzi et all (2000), apresentam uma obra que, para a avaliação do PNLD/2005, está marcada por uma apresentação mais formal e sistematizada dos conteúdos matemáticos, com algumas inovações para o ensino da disciplina através da História da Matemática.

Tratam do conceito de equações e sistemas do 1º grau, no volume 7ª série e iniciam o estudo de funções no volume da 8ª série.

Iniciam o capítulo de funções apresentando as representações por tabelas, expressões algébricas e gráficos, a partir de situações que tratam da correspondência de duas grandezas x e y. Os autores chamam a atenção para a definição "se para cada valor de x fica determinado um único valor de y, dizemos que y é função de x". Em nota ao professor, Iezzi et al (2000), lembram que a noção de função foi introduzida no volume da 6ª série a partir da correspondência entre grandezas.

Após uma seqüência de exercícios que tratam de situações que, levam os alunos a realizarem transformações entre a linguagem natural, fórmulas (escrita algébrica) e tabelas sugere também, uma lista de exercícios de reforço nos mesmos moldes.

A seguir, introduzem a notação f(x) a partir de exemplos da Geometria que exploram a variação entre duas grandezas e, finaliza essa parte do capítulo, com uma proposta do tipo desafio, em que o aluno pode promover um trabalho de transformações entre as representações por língua natural, tabelas e fórmulas.

Adiante, realizam um trabalho de revisão do sistema cartesiano e, assim, iniciam uma discussão sobre gráficos de grandezas discretas e contínuas que consideramos interessante para esse nível de escolaridade, e que também, pode proporcionar uma melhor compreensão da representação gráfica.

Finalizam o capítulo, com exercícios de reforço que envolvem as formas de linguagens já tratadas, anteriormente, a partir de exemplos de aplicações gráficas para funções variadas.

Num outro capítulo, dedicam uma atenção especial para as funções cuja representação gráfica é uma reta como: função constante, linear e afim, promovendo a articulação entre várias formas de linguagens através de questões que, em sua maioria, solicitam a conversão de enunciados na linguagem natural para tabelas, gráficos e/ou expressões algébricas conforme podemos observar a seguir.

57. Para editar um livro, uma editora tem um custo de R$ 2 000,00 mais uma quantia de R$ 2,00 por exemplar.

a) Copie e complete a tabela:

Nº de livros editados	500	1 000	1 500	2 000	2 500
Custo (R$)	?	?	?	?	?

3 000 4 000 5 000 6 000 7 000

b) O custo, *y*, é função do número, *x*, de livros editados. Qual é a fórmula dessa função? $y = 2\,000 + 2x$

c) Represente graficamente essa função.

d) Qual é a taxa de variação do custo? 2 reais/livro

Fonte: Iezzi et al, 2000, p.280.

A articulação entre o conteúdo de função com situações-problema está presente em alguns momentos. Observa-se, também, uma boa diversidade de representações, com o uso tanto de língua materna quanto de simbolismo matemático, além de gráficos, tabelas, diagramas, desenhos, entre outros.

3 - Imenes e Lellis (2002), abordam o conteúdo de Funções de uma forma ampliada e equilibrada, na qual os assuntos são progressivamente retomados, configurando-se, segundo o PNLD/2005, numa boa proposta de organização do currículo em forma de espiral.

Tratam o conceito de função do 1º grau, juntamente com outros tipos de funções, no volume 8ª série. Consideramos que a proposta de Imenes e Lellis (2002), possui uma boa articulação entre as representações tratadas nesta pesquisa, permitindo ao professor mobilizar os conhecimentos prévios dos alunos, a partir de situações do cotidiano e contextualizadas.

Em relação ao conteúdo de função, Imenes e Lellis (2002) apresentam, primeiramente, a idéia de variação entre duas grandezas a partir de situações que utilizam representações por tabelas, expressões algébricas e a língua natural.

Oferecem uma variedade de exercícios que pode propiciar uma maior familiarização, principalmente, do registro algébrico, através da observação de seqüências de figuras, tabelas e enunciados que tratam do conteúdo de funções, convidando os alunos a trabalharem transformações (tratamentos e conversões) para o registro algébrico.

A seguir, podemos observar um dos problemas sugeridos pelos autores.

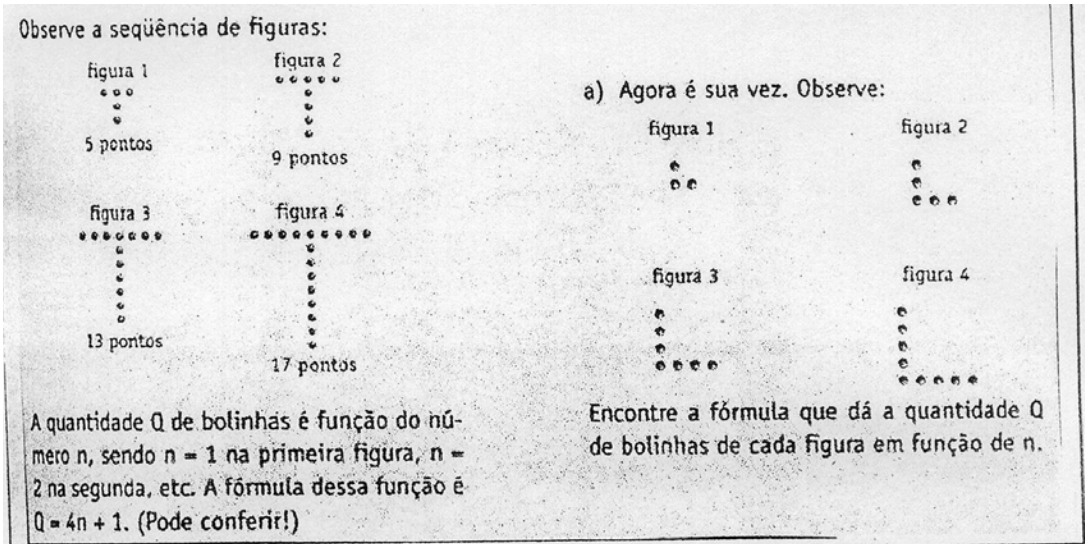

Observe a seqüência de figuras:

figura 1 — 5 pontos
figura 2 — 9 pontos
figura 3 — 13 pontos
figura 4 — 17 pontos

A quantidade Q de bolinhas é função do número n, sendo n = 1 na primeira figura, n = 2 na segunda, etc. A fórmula dessa função é Q = 4n + 1. (Pode conferir!)

a) Agora é sua vez. Observe:

figura 1
figura 2
figura 3
figura 4

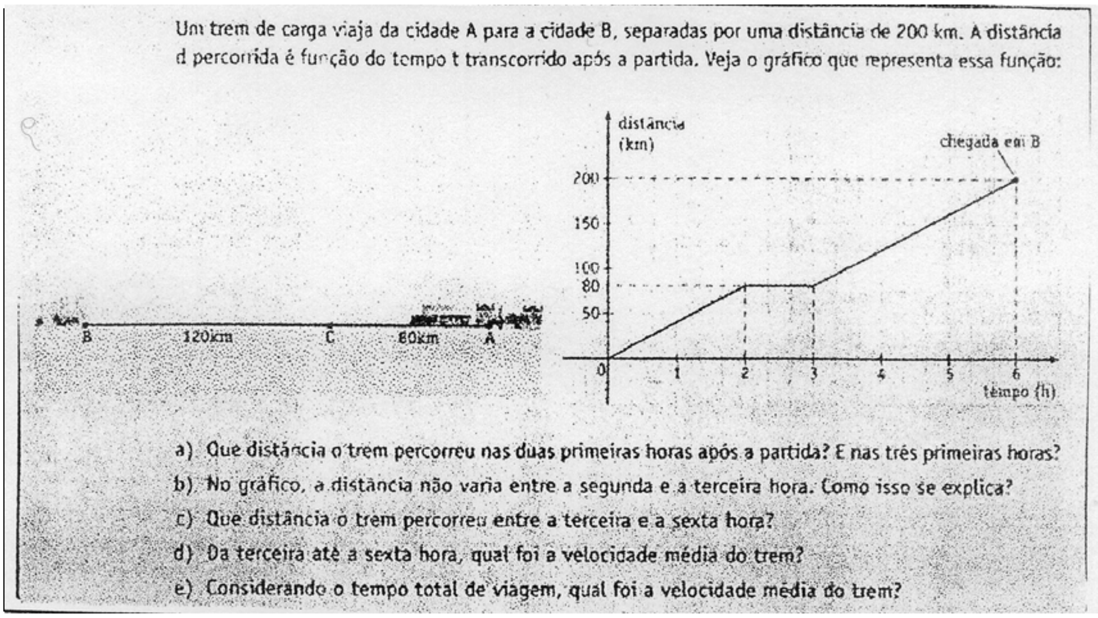
Encontre a fórmula que dá a quantidade Q de bolinhas de cada figura em função de n.

Fonte: Imenes e Lellis, 2002, p.83.

Reservam uma parte da sessão de problemas para o trabalho “em casa”, no qual os autores, mais uma vez, proporcionam atividades de aprendizagem a partir de representações variadas e que, de um modo geral, os alunos são levados à transformação para a representação algébrica.

Na segunda parte do Capítulo de Funções fazem a apresentação do sistema cartesiano para, em seguida, iniciarem um trabalho mais detalhado com a representação gráfica que, basicamente, seguiu a seguinte orientação: a partir de uma fórmula geral, construir a tabela, marcar os pontos no plano e, em seguida, unir os pontos para a obtenção do gráfico.

Tratam nessa parte do capítulo, de maneira bem articulada, a diversidade de representações a partir de: gráficos, desenhos, diagramas, símbolos matemáticos e textos em língua natural. A seguir, podemos observar uma atividade proposta que permite o trabalho com as formas de representações consideradas nessa pesquisa.



Um trem de carga viaja da cidade A para a cidade B, separadas por uma distância de 200 km. A distância d percorrida é função do tempo t transcorrido após a partida. Veja o gráfico que representa essa função:

a) Que distância o trem percorreu nas duas primeiras horas após a partida? E nas três primeiras horas?
b) No gráfico, a distância não varia entre a segunda e a terceira hora. Como isso se explica?
c) Que distância o trem percorreu entre a terceira e a sexta hora?
d) Da terceira até a sexta hora, qual foi a velocidade média do trem?
e) Considerando o tempo total de viagem, qual foi a velocidade média do trem?

Fonte: Imenes e Lellis, 2002, p.196.

Encerram o capítulo com a sessão “um toque a mais”, onde realizam uma discussão sobre alguns exemplos de curvas matemáticas, apresentando aspectos construtivos e históricos das mesmas.

No manual do professor sugerem o trabalho da representação gráfica a partir do uso do computador e de programas que permitam aos alunos, visualizarem a variação entre duas grandezas. Advertem também, que algumas características gráficas exigem um maior amadurecimento por parte do aluno e, assim, deverão ser trabalhadas no Ensino Médio.

4 - Pires et al (2002), na obra Educação Matemática (vol. 8ª série) iniciam os módulos, procurando relacionar os conteúdos trabalhados com sua História e os pensadores que contribuíram para sua descoberta.

No módulo 10, reservado para introduzir o conceito de função, proporcionam atividades voltadas à variação de grandezas, através de problemas que primam pelo preenchimento de tabelas, elaboração de expressões algébricas e construção de gráficos.

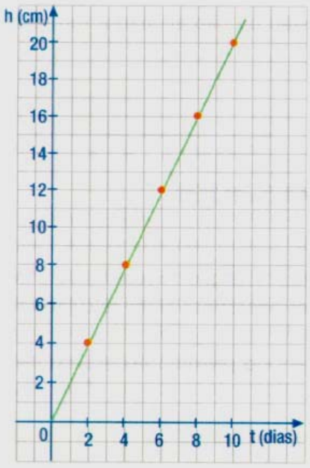
Em geral, os problemas apresentados seguem os seguintes esquemas de transformação:

- Gráfico → Tabela→ Fórmula algébrica
- Linguagem natural → Tabela → Gráfico → Fórmula algébrica
- Tabela → Gráfico → Fórmula algébrica

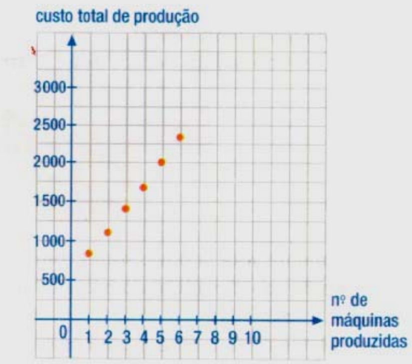
Observamos em todos os problemas apresentados, que existe uma preocupação dos autores, em relação à continuidade, quando questionam ao final de cada problema, se faz sentido unir os pontos do gráfico.

A seguir, realizam um trabalho de apresentação da noção de função, a partir de uma linguagem mais formal, utilizando-se de exemplos por diagramas de flechas e gráficos em forma de retas e pontos, em que levantam uma discussão sobre grandezas discretas e contínuas que, como dissemos anteriormente, pode contribuir para uma melhor compreensão do conceito de função e de sua representação gráfica. Conforme exemplo abaixo são apresentadas duas propostas para a reflexão da continuidade.

- O gráfico do problema 1 passa pela origem do sistema cartesiano, o ponto (0, 0), e isso vai acontecer para todas as funções do tipo y = ax.



- O gráfico do problema 2 não passa pela origem do sistema cartesiano, e isso vai acontecer para todas as funções do tipo y = ax + b, com b ≠ 0.



- Com relação ao fato de unirmos ou não os pontos do gráfico, é importante comentar que no caso do gráfico do crescimento da planta, por exemplo, os pontos do gráfico foram unidos porque a planta cresce continuamente nos diferentes intervalos de tempo considerados. Assim, podemos saber qual é a sua altura após um dia e meio, por exemplo. Já no caso do custo das máquinas, os pontos do gráfico não foram unidos porque ninguém compra uma máquina e meia ou três quartos de máquina. Mesmo sem unirmos os pontos é possível verificar que todos eles estão alinhados (pertencem a uma mesma reta).

Fonte: Pires et al, 2002, p.280

Adiante apresentam uma sessão "É preciso saber fazer" de exercícios propostos que permite um resgate das representações tratadas, através de situações que promovem, desde a análise da variação de duas grandezas para a obtenção de uma fórmula algébrica, até conversões como: tabelas e gráficos e enunciados (na língua natural) e a escrita algébrica.

Ao final, fazem um trabalho de complementação para a linguagem gráfica a partir de questões que solicitam a observação de seqüências de gráficos de funções linear e afim, objetivando o trabalho com algumas características do gráfico como: coeficientes escalares, crescimento ou decrescimento, intersecção com os eixos coordenados, bem como as expressões algébricas correspondentes aos mesmos.

5 - Giovanni e Parente (2000), iniciam a unidade 3, reservada ao estudo de funções, trazendo exemplos de grandezas que variam entre si, em que as transformações seguem o seguinte esquema:

- Registro numérico (por tabelas) ⟷ Registro da escrita algébrica (Lei de formação)

Nessa parte do trabalho, as atividades propostas primam pelos tratamentos indicados acima e também, por algumas situações de conversão entre o registro da língua natural e o da escrita algébrica.

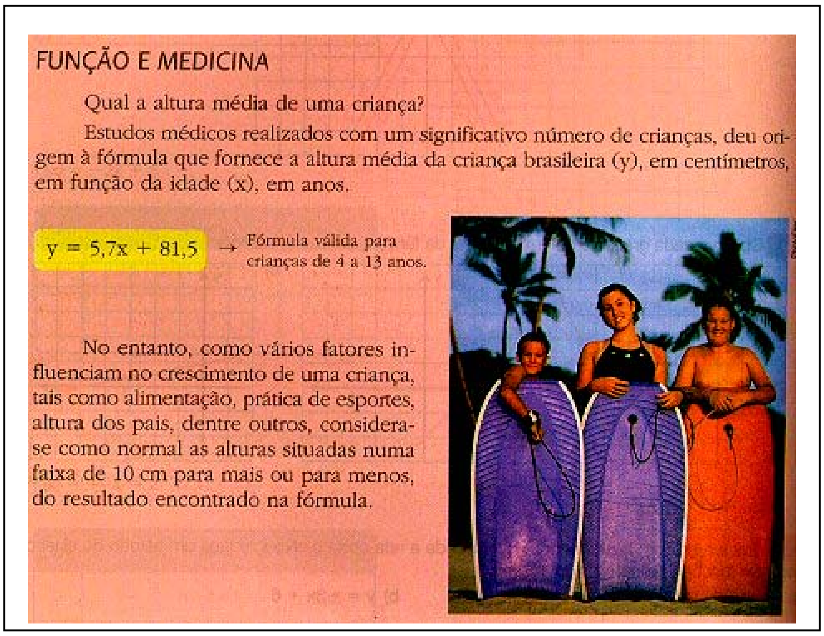
A seguir, fazem a apresentação do conceito de função a partir da linguagem de conjuntos, explorando a representação por diagramas de flechas, através de exemplos e exercícios propostos até a definição de domínio e imagem de uma função.

Apresentam o conceito de função do 1º grau logo após um capítulo reservado ao sistema de coordenadas cartesianas à representação gráfica, a partir da leitura de gráficos e do seu estudo de sinais.

Para o capítulo destinado à função do 1º grau realizam um trabalho envolvendo a variação entre duas grandezas através do uso de tabelas e gráficos.

A conversão entre o registro da escrita algébrica e o registro gráfico passa a ser considerada, com maior profundidade, a partir de conceitos como: raiz e estudo de sinais. Porém, fazem isso de maneira isolada, sem a articulação dos mesmos com situações-problema. Acreditamos que a apresentação de propostas que articule o maior número de representações possa promover uma maior apreensão do conceito de função.

Encerram o capítulo de função do 1º grau, apresentando uma proposta de trabalho, que tenta contextualizar a função do 1º grau e a Medicina, conforme podemos observar a seguir. Essa atividade é explorada a partir da sugestão de alguns valores de x e, assim, o aluno deve avaliar o comportamento da variável dependente y de acordo com o enunciado da questão, de maneira que o aluno construir tabelas e gráficos para a referida função.


FUNÇÃO E MEDICINA

Qual a altura média de uma criança?

Estudos médicos realizados com um significativo número de crianças, deu origem à fórmula que fornece a altura média da criança brasileira (y), em centímetros, em função da idade (x), em anos.

$y = 5{,}7x + 81{,}5$ → Fórmula válida para crianças de 4 a 13 anos.

No entanto, como vários fatores influenciam no crescimento de uma criança, tais como alimentação, prática de esportes, altura dos pais, dentre outros, considera-se como normal as alturas situadas numa faixa de 10 cm para mais ou para menos, do resultado encontrado na fórmula.

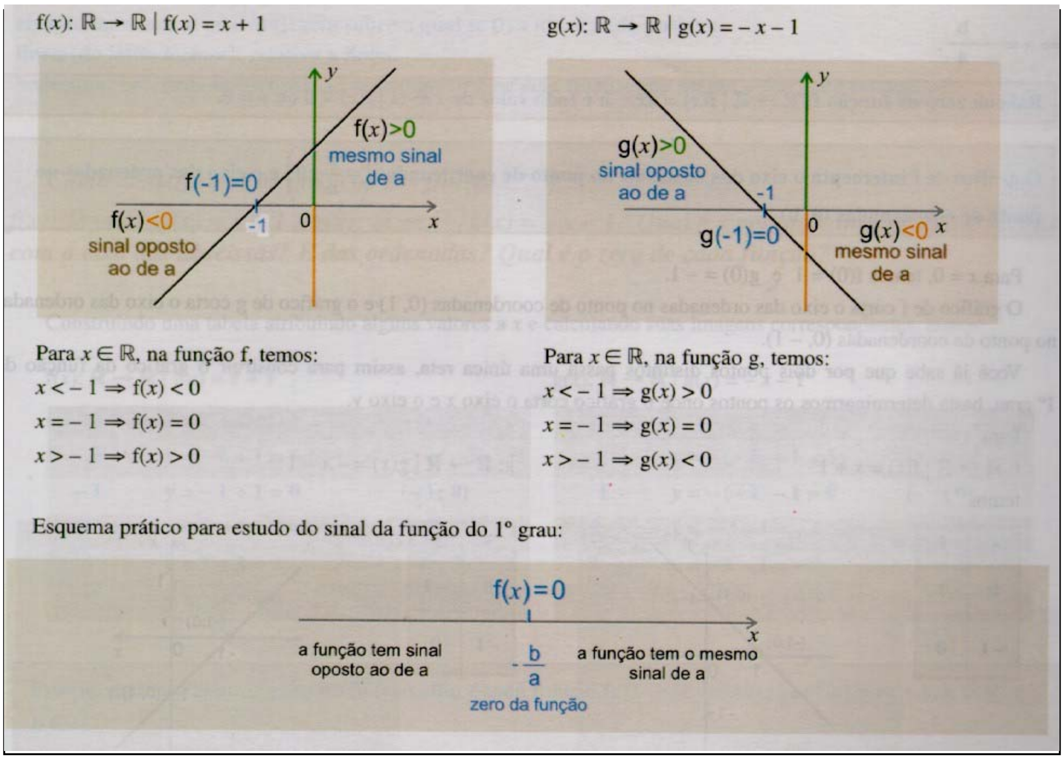
Fonte: Giovanni e Parente, 2000, p.134

No final do capítulo, lançam um desafio na forma de pesquisa, sugerindo que os alunos busquem outras situações relacionáveis a esse tipo de função, devendo fazer um relato da situação pesquisada e a sua construção gráfica.

6 - O material apostilado do sistema Objetivo realiza, no caderno da 8ª série (4º bimestre), um estudo sobre o conceito de função do 1º grau, primeiramente, através de relações construídas a partir da observação de dois conjuntos e seus respectivos pares ordenados, representados no plano cartesiano. Em seguida, tratam algumas relações a partir da representação por diagramas de flechas e tabelas até a apresentação da definição de função.

> "dizemos que uma relação é uma função (f) de A em B (f: A → B) se e somente se associa cada x Є A com um único y Є B, ou seja, para todo y Є B, ou seja, para todo x Є A, existe um único correspondente y Є B". (Apostila do sistema Objetivo, 2005, p.34).

Adiante, realizam um estudo de sinais para a função do 1º grau, a partir de "esquemas práticos" que, acreditamos poderiam ser deixados para uma discussão futura no Ensino Médio, onde o aluno pode apresentar uma maior capacidade de compreensão, juntamente com outros conceitos relacionados à definição de função como: Domínio, Contra-Domínio, Imagem e outros. A seguir, podemos observar uma parte dessa atividade.



Fonte: Apostila do Sistema Objetivo de Ensino (Cad.4º bim-8ª série), 2005, p.36.

De modo geral, observamos que as representações gráficas, algébricas e por tabelas, são tratadas de forma isolada, o que pode dificultar a relação das mesmas com o objeto matemático (função do 1º grau).

Finalizam o capítulo com uma proposta de leitura complementar sobre função linear e afim, através de uma sessão de exercícios que solicita, em todos os itens, a identificação de elementos geométricos a partir dos coeficientes das expressões algébricas e depois, que se construa o gráfico para um estudo de sinais.

Em nenhum momento, notamos uma preocupação dos autores com a articulação do conceito de função com situações-problema que pudessem promover a mobilização de diferentes registros de representação. Dessa forma, a apresentação do conceito de função pode ser considerada bem diferente dos demais autores.

- Algumas Conclusões sobre os textos analisados:

Um dos aspectos observados em nossa análise, diz respeito à forma em que o conceito de função é apresentado nesse nível de escolaridade. A maior parte dos textos didáticos analisados, trata do conceito de função a partir de uma forma operacional, ou seja, através de situações que exploram a variação entre duas grandezas e sua dependência, deixando para mais tarde, no Ensino Médio, o que seria uma abordagem mais formal.

A seguir, apresentamos um resumo de cada texto analisado, destacando as representações trabalhadas e as transformações que os autores procuram "induzir" em suas atividades.

Livro 1

expressões algébricas, gráficos, linguagem natural, seqüências de figuras e tabelas.

expressão algébrica $\longleftrightarrow$ tabela
seqüência de figuras $\rightarrow$ tabela $\rightarrow$ expressão algébrica
expressão algébrica $\rightarrow$ gráfico
linguagem natural $\rightarrow$ gráfico
tabela $\rightarrow$ gráfico

Livro 2

expressões algébricas, gráficos, linguagem natural e tabelas.

linguagem natural $\rightarrow$ tabela
linguagem natural $\rightarrow$ expressão algébrica
tabela $\rightarrow$ gráfico
expressão algébrica $\rightarrow$ gráfico
expressão algébrica $\rightarrow$ tabela $\rightarrow$ gráfico

Livro 3

expressões algébricas, gráficos, linguagem natural e tabelas.

linguagem natural → tabela
tabela ←→ expressão algébrica
seqüência de figuras → expressão algébrica
tabela ←→ gráfico
linguagem natural → tabela → gráfico

Livro 4

expressões algébricas, gráficos, linguagem natural e tabelas.

gráfico → tabela → expressão algébrica
linguagem natural → tabela → expressão algébrica
expressão algébrica ←→ gráfico

Livro 5

diagramas de flechas, expressões algébricas, gráficos, linguagem natural e tabelas.

tabela ←→ expressão algébrica
linguagem natural → gráfico
expressão algébrica → diagrama de flechas
expressão algébrica → gráfico

Apostila

diagramas de flechas, expressões algébricas, gráficos e tabelas.

tabela ←→ expressão algébrica
expressão algébrica → diagrama de flechas
expressão algébrica → tabela → gráfico

De modo geral, os textos didáticos analisados possibilitam o uso dos registros e das representações tratados nesta pesquisa, através de tratamentos e de conversões. Podemos destacar uma atenção especial para os registros algébrico e gráfico, discutidos e oportunizados nos materiais observados, através de vários exercícios resolvidos e propostos. O primeiro, que é geralmente trabalhado a partir da familiarização de duas grandezas, normalmente apresentado em tabelas e o segundo, no qual as conversões são oportunizadas através de expressões algébricas ou tabelas.

Acreditamos que nossas análises apontem para uma certa limitação de alguns trabalhos, no que diz respeito a algumas formas de tratamentos e conversões oportunizados em suas atividades. Em geral, são atividades que não contemplam as idas e vindas dessas transformações, podendo provocar dificuldades de aprendizagem em relação a alguns registros de representação e, principalmente, a não identificação do objeto matemático (função do 1º grau) nos diferentes representantes.

CAPÍTULO III

3.1 – Referencial metodológico

Entendemos por metodologia, o caminho do pensamento e a prática exercida na abordagem de um fenômeno. Dessa forma, acreditamos que a metodologia e a teoria devam caminhar sempre juntas, evitando-se os seus extremos.

Diante de tal preocupação, optamos nesta pesquisa por um paradigma que permita uma abordagem qualitativa do problema, e que venha a responder a questões que numa pesquisa puramente quantitativa não seria possível com tal eficácia. Uma pesquisa qualitativa, segundo Minayo (1998), aborda um universo de significados, motivos, aspirações, crenças, valores e atitudes; o que responde a um espaço mais profundo das relações, dos processos e dos fenômenos que não podem ser reduzidos à operacionalização de variáveis.

Com o objetivo de reforçar nosso referencial teórico, nos baseamos em alguns princípios da Didática da Matemática, desenvolvida na França e, em algumas pesquisas sobre o tema para, aplicar e interpretar um teste diagnóstico, fixando assim, nosso problema de pesquisa e planejando uma seqüência didática que permita compreender as concepções em torno do conceito de função do 1º grau, expostas nos discursos produzidos pelos alunos, bem como suas articulações, em torno de seus registros de representação semiótica.

Na concepção de nossa engenharia didática, optamos por um trabalho mais intenso dos alunos, adotando uma estratégia de trabalho que possa propiciar um ambiente pedagógico mais adequado à análise do processo de ensino e aprendizagem, permitindo assim, uma reflexão dos dados coletados e, principalmente, a confrontação de nossas hipóteses de pesquisa com o quadro teórico de Duval.

> A engenharia didática vista como metodologia de pesquisa, se caracteriza, em primeiro lugar, por ser um esquema experimental baseado em realizações didáticas em classe, isto é, sobre a concepção, a realização, a observação e análise de seqüência de ensino.(Artigue, 1990:283)

Nesse sentido, classificamos nossa metodologia como uma micro-engenharia que tem por objetivo o estudo de alguns registros de representação semiótica do conceito de função do 1º grau por alunos da 1ª série do Ensino Médio.

No que se refere à escolha e planejamento de nossa engenharia, compartilharemos de questões levantadas por Artigue (1990) que, ao tratar da Engenharia Didática, destaca a importância da realização de um projeto que possua um referencial teórico adequado e que permita a realização de uma prática que seja submetida a um controle sistemático**.** Ou seja, um estudo que, diferentemente de outras metodologias, possui uma validação interna, que será realizada com a confrontação da análise *a priori* e a análise *a posteriori*.

Ainda para a autora, é importante que se preserve as características de uma atividade científica, através de uma ação racional sobre o ensino, baseando-se em conhecimentos didáticos previamente analisados e na observação de um processo de aprendizagem que venha a tratar de situações de pesquisa e que coloque em destaque as relações mútuas entre professor, alunos e o conteúdo matemático.

> “uma seqüência didática é formada por um certo número de aulas planejadas e analisadas previamente com a finalidade de observar situações de aprendizagem, envolvendo os conceitos previstos na pesquisa didática. (....) é preciso estar atento ao maior número possível de informações que podem contribuir no desvelamento do fenômeno investigado.” (Pais, 2001, p.102)

Nesse ambiente, em que os sujeitos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem interagem de forma consciente, buscando uma educação matemática mais significativa e que permita uma análise mais ampla e exaustiva dos sujeitos envolvidos nessas relações didáticas, buscamos na Engenharia Didática uma forma de organizar nossos procedimentos metodológicos.

Dessa maneira, esperamos que os alunos trabalhem o conceito de função do 1º grau através de uma seqüência didática que tem como objetivo principal, investigar os registros de representação semiótica utilizados por eles, bem como as transformações que são capazes de realizar nesses registros e entre esses registros.

Sistematizaremos a aplicação de nossa pesquisa, buscando uma aproximação com as fases da Engenharia Didática, proposta por Artigue (1990): análises preliminares; concepção e análise *a priori*; aplicação da seqüência didática, e análise *a posteriori* e validação.

- *Análises preliminares*:

Nessa primeira etapa da pesquisa buscamos levantar elementos que pudessem traduzir concepções desses alunos em torno do conceito de função do 1º grau e, dessa maneira, levamos em consideração:

- Os questionamentos feitos no início de nossos trabalhos;
- Nossa análise dos textos didáticos;
- Teste Diagnóstico;
- A análise da Proposta Curricular Nacional para o ensino de Matemática no Ensino Fundamental e Médio e de algumas competências apresentadas para serem trabalhadas nesse nível de escolaridade a partir de diferentes formas de representação de um objeto matemático (tabelas, gráficos, expressões, textos etc);
- O levantamento histórico do desenvolvimento da álgebra e de alguns aspectos epistemológicos do conceito de função;
- Pesquisas que investigam, de algum forma, as dificuldades de alunos em relação à diversidade de registros de representação semiótica e suas possibilidades de coordenação.

- *Concepção e análise a priori*:

Nesta etapa da pesquisa voltamos nossos olhares para a construção de uma seqüência didática que visasse compreender a importância do planejamento das diferentes atividades propostas nas sessões, especificando os elementos que devam estar presentes nessa etapa como: os objetivos, os procedimentos previstos, os recursos necessários, o comportamento esperado dos alunos e a identificação de variáveis didáticas.

Segundo Damm (1999), ainda nessa fase podemos considerar:

- A descrição de nossas escolhas e eventuais características de situações didáticas que tais escolhas possam promover;
- Análise da postura de alguns alunos em relação a uma possível validação dos seus conhecimentos durante o processo de experimentação;
- A previsão de comportamentos desses alunos diante do conteúdo trabalhado relacionando-os com o nosso referencial teórico.

Enfim, em nossas análises *a priori* promoveremos um trabalho descritivo e previsivo do papel do aluno diante do conceito de função do 1º grau e dos registros de representação semiótica trabalhados na seqüência didática.

- *Experimentação*:

Na terceira fase da engenharia temos a aplicação da seqüência didática, na qual são feitas as explicitações sobre os objetivos e as condições de realização da pesquisa à população de alunos que participará da experimentação, no caso, alunos da 1ª série do Ensino Médio de uma escola particular de Campo Grande – MS. Essa etapa contará com a aplicação dos instrumentos de pesquisa e o registro das observações feitas durante a experimentação pelo pesquisador e observadores previamente orientados. Ainda nessa fase, promoveremos uma análise *a posteriori* local que, confrontada com as análises *a priori*, possa provocar eventuais correções da “rota prevista”.

- *Análise a posteriori e validação*:

Na fase da análise *a posteriori*, que se refere ao refinamento das informações colhidas na seqüência didática, estabeleceremos confrontações entre a análise *a priori* e *a posteriori*, objetivando a validação das hipóteses levantadas a partir de reflexões trabalhadas juntamente com o quadro teórico de Duval (1995).

Para Pais (2001, p.103), independente da escolha de registro do objeto matemático, "é importante persistir na transparência de uma descrição fidedigna com a realidade em que a experiência foi realizada". Nessa fase da análise *a posteriori*, estivemos interessados em compreender a partir dessas produções, como esses alunos trabalham o conceito de função e, também, como articulam as representações semióticas a respeito do conceito de função do 1º grau.

3.2 - A Seqüência Didática.

A seqüência didática desta pesquisa tem como objetivo principal, a investigação dos registros de registros de representação semiótica do conceito de *função do 1º grau* por alunos da 1ª série do Ensino Médio, de uma escola particular de Campo Grande-MS.

Para tanto, consideramos inicialmente, a aplicação e interpretação de um teste diagnóstico que veio corroborar nossas análises preliminares. Em seguida, passamos à elaboração dos conjuntos de atividades, a partir de situações-problema de nossa autoria e também de atividades extraídas de trabalhos como: Cândido (2000) e da Proposta Curricular para o ensino da Matemática - 2º grau do Estado de são Paulo; procurando relacioná-los com o referencial teórico utilizado, no caso, a teoria de registro de representação semiótica de Raymond Duval.

O processo de elaboração e seleção das atividades procurou contemplar, o que para Duval seria uma abordagem cognitiva do problema. Esse trabalho "consiste em procurarmos inicialmente descrever o funcionamento cognitivo que possibilite ao aluno compreender, efetuar e controlar ele próprio a diversidade dos processos matemáticos que lhe são propostos em situação de ensino" (Duval 2003, p.12).

Segundo o autor, a análise do desenvolvimento cognitivo e as dificuldades encontradas na aprendizagem estão relacionadas a três fenômenos interligados, aos quais consideramos na elaboração dessa seqüência de atividades relativas à construção do conceito de função do 1º grau:

- ✓ A existência de diversos registros de representação semiótica – o conceito de função do 1º grau, quando introduzido no Ensino Fundamental, aparece representado em vários tipos de registros de representação, como pudemos observar em nossa análise de textos didáticos e de pesquisas sobre o tema: registro por tabelas, gráficos, seqüências de figuras, a escrita algébrica, diagramas de flechas e o registro da língua natural.

- ✓ A capacidade de diferenciar o objeto representado e seus registros de representação semiótica – como dissemos anteriormente, o acesso a objetos matemáticos passa necessariamente por representações semióticas e, nesse sentido, Duval nos alerta que esse é um ponto decisivo e que é raramente observado: "o conteúdo de uma representação depende mais do registro de representação do que do objeto representado". (Duval 2003, p.22). O autor salienta ainda, que duas representações de um mesmo objeto, produzidas em dois registros diferentes, não têm de forma alguma o mesmo conteúdo.

- ✓ A coordenação entre diferentes registros de representação semiótica – etapa em que observamos os tipos de transformações disponíveis e envolvidas ao longo da aplicação de uma seqüência didática como: *conversão* e *tratamento*. Nesse movimento, o aluno pode não saber, por exemplo, que um determinado gráfico corresponda a uma tabela ou vice-versa; ou ainda, não reconhecer como outro representante, a equação algébrica dessa mesma função.

A seqüência didática foi dividida em três partes, que chamamos de conjuntos de atividades, nos quais as atividades pudessem ser trabalhadas individualmente ou por grupos de alunos. O acompanhamento das atividades aconteceu na presença do pesquisador e de observadores que estavam, previamente orientados por fichas de observação (Anexo 5).

Primeiramente, com objetivo de familiarização de grandezas, abordamos a variação das mesmas a partir da interpretação de tabelas e seqüência de figuras, objetivando a construção das "leis" de associação (representação algébrica) e gráficos correspondentes. Lembramos que essa forma de apresentação do conceito de função, considerada por nós como operatória, foi encontrada na maioria dos livros didáticos analisados.

No segundo conjunto de atividades, voltamos nossa atenção para situações que proporcionem a identificação de diferentes representações semióticas a partir de transformações por tratamento e conversões, conforme figura 01.

E, finalmente, tratamos da coordenação desses registros a partir de um problema proposto, procurando compreender o trabalho desses alunos frente a essa diversidade de registros.

Levamos também em consideração a natureza de cada registro para que as transformações (tratamento ou conversões) pudessem ser compreendidas e analisadas segundo suas especificidades cognitivas e, desse modo, termos um maior entendimento, por exemplo, sobre situações de congruência e de não-congruência dos registros.

3.2.1 – Aplicação da Atividade Diagnóstica

Iniciamos essa etapa da pesquisa, aplicando uma atividade que denominamos de Teste Diagnóstico para um grupo de 255 alunos da 1ª série do Ensino Médio, que foram convidados a resolver uma atividade que teve como principal objetivo reforçar nossas questões levantadas inicialmente. Dentre elas: Quais as representações que esses alunos possuem em torno do objeto matemático *função do 1º grau*? Tendo disponíveis tais representações, são capazes de articulá-las a partir de um problema proposto?

Em função da quantidade de alunos optamos por uma análise qualitativa e quantitativa das informações coletadas. Apresentamos a seguir algumas reflexões sobre essa atividade e algumas conclusões que evidenciaram a pertinência de nossa pesquisa e, também, do referencial teórico escolhido.

O teste diagnóstico foi constituído de três questões que buscavam, basicamente, colocar em evidência algumas representações e transformações entre as mesmas. A atividade foi proposta para ser resolvida individualmente e sem consulta. A seguir, passamos a expor nossas análises, logo após a apresentação de trechos da atividade diagnóstica:

01. Considere as grandezas **x** e **y** que variam de acordo com as informações as informações a seguir:

X	1			-5		15	20
Y	4	-6	10		22		42

a) Você deverá preencher os espaços da tabela abaixo.

b) Encontre a relação entre os valores das grandezas **x** e **y**.

Na **Primeira questão** solicitamos aos alunos que completassem uma tabela envolvendo duas grandezas **x** e **y**, tendo a função (y = 2.x + 2) como variável didática, que foi omitida.

De modo geral, os professores responsáveis pela aplicação do teste, relataram que os alunos se mostraram em sua maioria motivados e concentrados, tentando encontrar a relação entre as grandezas enquanto outros se mantiveram inicialmente apáticos, levando alguns instantes para assumir o problema, e buscar algum tipo de solução para a questão.

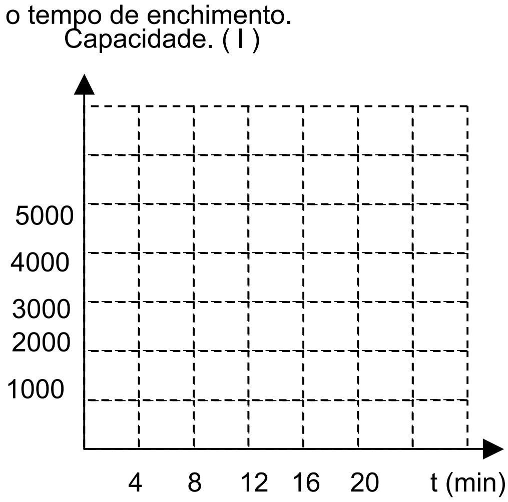
Contudo, a maior parte dos alunos não foi capaz de encontrar um padrão de regularidade que viesse ao encontro da função proposta, demonstrando certa dificuldade no trabalho com números negativos. Alguns alunos procuraram verificar a regularidade para os valores de x e y a partir de uma possível proporcionalidade, demonstrando dificuldades de compreensão da questão o que acarretou um baixo índice de acerto da questão (em torno de 4%). Tal índice nos mostra que algumas formas de tratamentos são praticamente inexistentes e precisam ser estimulados para que futuras conversões possam ser trabalhadas.

02. Uma caixa de água de capacidade 5000 l está vazia. Um registro é aberto e a caixa enche a uma vazão de 250 l/min. O registro é imediatamente fechado ao atingir a capacidade total da caixa.

a) Em quanto tempo (min.) a caixa se encherá?

b) Complete a tabela em relação à capacidade da caixa d’água em litros e construa um gráfico que relaciona a capacidade de água na caixa e o tempo de enchimento.

Tempo(min)	Capac.(l)
0	
1	
2	
3	
4	
8	
12	
16	
20	



c) É possível escrever uma equação que relacione a quantidade de água na caixa em relação ao tempo? Qual é essa relação?

A **Segunda questão** apresentou uma proposta que envolvia a compreensão de um enunciado para que pudessem responder a um primeiro item (completar a tabela), induzindo o aluno a converter o registro da língua natural para o registro simbólico numérico. Em seguida, o aluno deveria realizar a transformação entre (tabela e gráfico).

A maior parte dos alunos demonstrou ter compreendido o enunciado do problema, porém, na segunda parte da questão isso não se confirmou. Destaque especial para elaboração dos gráficos que em boa parte ficou restrita a marcação de pontos de semi-retas. O quadro abaixo resume o comportamento dos alunos nessa segunda questão.

Questão 02. a) • demonstraram uma compreensão correta e solucionaram o problema: 217 alunos • buscaram algum tipo de solução, porém, inadequada: 28 alunos • não tentaram nenhum tipo de solução: 10 alunos
b) • Foram capazes de executar com sucesso as transformações do enunciado para a tabela e, depois para o gráfico: 112 alunos • Completaram corretamente a tabela e não foram capazes de converter da tabela para o gráfico: 87 alunos • Cometeram algum tipo de erro no preenchimento da tabela e não conseguiram transferir as informações do problema para o gráfico: 27 alunos • Não foram capazes de completar a tabela, porém, obtiveram sucesso na transformação do enunciado para o gráfico: 10 alunos. • Não preencheram a tabela e também não construíram o gráfico: 19 alunos.

c)

- Expressaram corretamente a representação algébrica envolvendo o tempo e a capacidade da caixa: 45 alunos
- Optaram por uma conversão entre o registro da língua natural e o registro simbólico algébrico: 39 alunos.

Reforçando a questão anterior, percebemos que a compreensão do problema foi parcialmente atingida, evidenciando em alguns casos a incapacidade de converter do registro da língua natural para o registro algébrico.

Percebemos também, que uma parte significativa dos alunos preferiu realizar tratamentos, buscando justificar o seu raciocínio a partir do registro da língua natural ou do registro simbólico numérico, sinalizando uma certa capacidade de realizar processos de validação. Novamente, tivemos alunos que apresentaram dificuldades com tratamentos envolvendo números negativos.

03. A troposfera, que é a primeira camada da atmosfera, estende-se do nível do mar até a altitude de 40000 pés; nela, a temperatura diminui 2°C a cada aumento de 1000 pés na altitude. Suponha que em um ponto A, situado ao nível do mar, a temperatura seja de 20°C. Pergunta-se:

a) Em que altitude, acima do ponto A, a temperatura é de 0°C ?
Resp.:
b) Qual é a temperatura a 35000 pés acima do mesmo ponto A ?
Resp.:

Na **Terceira questão** procuramos trabalhar o conceito de função do 1º grau a partir da linguagem natural. Uma proposta em que os alunos poderiam construir uma função do tipo $y = a.x + b$ ($y = - 2.x + 20$) na qual, y representa a temperatura em ºC e x é dado em milhares de pés para o intervalo compreendido entre o nível do mar e a altitude de 40.000 pés.

Dos 255 alunos, apenas 44 encontraram a temperatura correta para a altitude solicitada e, desses, nenhum fez uso do registro simbólico algébrico ou do registro gráfico, evidenciando mais uma vez, dificuldades com tratamentos e conversões para o caso de função do 1º grau decrescente. Dos 44 alunos que responderam a questão, todos fizeram a opção por um trabalho dentro do registro simbólico numérico, ou seja, buscaram a conversão entre o registro da língua natural e o registro simbólico numérico (por tabelas).

Obviamente que esta análise preliminar não garante nossa compreensão para um fenômeno cognitivo tão complexo. No entanto, nosso objetivo parece ter sido atingido, na medida em que pudemos proporcionar uma discussão mais ampla em torno do nosso problema, a partir de análises das atividades e dos indicadores levantados em nosso Teste Diagnóstico. Assim, decidimos pelo início das análises *a priori* das atividades que serão trabalhadas ao longo da seqüência didática.

3.2.2 – ANÁLISES *À PRIORI* DAS ATIVIDADES

As atividades analisadas a seguir estão divididas em três conjuntos. Para uma melhor apreciação do leitor, apresentaremos nossas análises *a priori* logo após os trechos das atividades que foram entregues aos alunos, procurando um maior aprofundamento a partir de previsões e descrições daquilo que se espera que aconteça ao longo dos encontros.

Lembramos que essa seqüência de atividades não possui como objetivo maior aprendizagem do conceito de função, mas, o de levantar elementos, a partir dos registros de representação semiótica, que contribuam para a compreensão do trabalho desses alunos em torno do conteúdo de função do 1º grau.

Nos anexos as atividades poderão ser encontradas na íntegra.

3.2.2.1 – Análises das atividades do conjunto I:

Esse conjunto de atividades teve como objetivo promover a investigação de representações nos registros simbólicos (da escrita algébrica, numérico), língua natural e gráfico. A partir de transformações por tratamento e conversão, analisaremos o trabalho desses alunos primeiramente com situações de familiarização entre grandezas dependente e independente e, assim, a dependência entre elas. Optamos pelo trabalho em grupo, o que para nós, deve facilitar a troca de experiências e as discussões entre eles.

Buscamos com essas atividades, promover generalizações entre grandezas discretas e contínuas, de maneira que as mesmas possam ser relacionadas com o conteúdo de função do 1º grau de uma forma operacional.

Nesse sentido, estaremos propondo atividades que levem em consideração as formas de linguagens tratadas nesta pesquisa e, também, identificando algumas variáveis didáticas que serão explicadas ao longo de nossas análises para uma melhor compreensão das atividades de cada encontro.

Atividade 1:

01. Estamos convidando você a participar de um jogo que consiste em tentar adivinhar o que o outro está pensando. Vocês me falam um número e eu respondo outro. Ao final, vocês deverão dizer o que eu pensei para modificar cada número dito por vocês.

a) Preencha atentamente as tabelas a seguir de acordo com os valores tratados.

I, II, III e IV.

Vocês					
Eu					

b) Com base nas tabelas anteriores você deverá construir, no papel quadriculado, os gráficos correspondentes a cada situação.

c) Comparando o que foi preenchido nas tabelas e os seus gráficos, responda o que eu estava pensando em cada situação, ou seja, a expressão algébrica correspondente a cada situação.

I: ______________ II: ________________

III:______________ IV:________________

Optamos nesta primeira questão pela seguinte ordem dos itens: o preenchimento da tabela, a construção dos gráficos e a obtenção das expressões algébricas. Após o preenchimento das tabelas, os alunos ficarão totalmente à vontade para o término da questão. Como variável didática tivemos, nessa primeira atividade, a escolha das funções que foram utilizadas pelo pesquisador para o preenchimento das tabelas.

Espera-se que a familiarização dessas grandezas, por meio da análise do seu comportamento, permita aos alunos identificarem, primeiramente, padrões e regularidades que levem à iniciação de processos de generalização e, conseqüentemente, à realização de conversões para o registro simbólico algébrico.

Nesse sentido, apresentamos a primeira questão que foi desenvolvida com a participação do pesquisador, auxiliando num jogo que consistia em adivinhar o que o outro estava pensando, respondendo um valor correspondente que permitisse ao aluno investigar a expressão algébrica (função do 1º grau) equivalente aos valores abordados. Por exemplo:

Vocês (x)	1	2	4	5	10
Eu f(x)	3	5	9	11	21

Resp.: $f(x) = 2x + 1$

Acreditamos que em alguns momentos os alunos possam questionar sobre os números sugeridos por eles mesmos, demonstrando uma preocupação, mesmo que informal, com a existência da função.

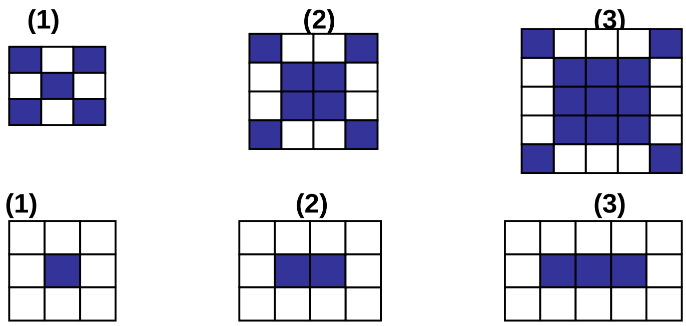
Provavelmente, as sugestões ficarão restritas ao conjunto dos números inteiros, o que é perfeitamente compreensível, em função das dificuldades que muitos possuem com as regras internas do registro simbólico numérico e, também, porque números fracionários ou irracionais são menos relacionáveis a situações do cotidiano.

Ao responderem as questões propostas nesta atividade, esperamos que percebam a linguagem algébrica como um importante instrumento para expressar regularidades e, dessa forma, possam realizar as transformações entre a representação por tabelas e a representação algébrica.

Atividade 2:

Material utilizado: lápis, borracha e papel milimetrado.

02. Responda as questões a seguir observando as seqüências de figuras abaixo:



a) Construa no papel milimetrado um desenho que corresponda à 4ª figura de cada seqüência.

b) De acordo com as seqüências preencha a tabela a seguir:

(1ª seqüência)

Nº de ordem da figura	Nº de □	Nº de ■	Total de quadradinhos
1ª			
2ª			
3ª			
4ª			
10ª			
nª			

(2ª seqüência)

Nº de ordem da figura	Nº de □	Nº de ■	Total de quadradinhos
1ª			
2ª			
3ª			
4ª			
10ª			
nª			

c) Observando a sucessão de figuras e o preenchimento das tabelas, decida quantos quadradinhos escuros e brancos tem a 12ª figura (sem construí-la) para cada seqüência.

d) Esboce, no papel milimetrado, o gráfico que representa a variação do número de quadradinhos brancos com o número de ordem da figura.

Com essa atividade os alunos poderão perceber o significado de **n** no contexto do problema e os valores que pode assumir e assim, promoverem conversões a partir de seqüências de figuras para os registros da escrita numérica e algébrica.

O preenchimento das tabelas para as duas seqüências deve provocar diferentes níveis de dificuldades, em relação ao processo de generalização e, nessa atividade, pudemos eleger como variável didática a seqüência de quadradinhos.

De uma forma organizada espera-se que a contagem dos quadradinhos brancos, escuros ou do total deles, permita a descrição das relações que expressam a dependência do número de quadradinhos escuros, (brancos ou total) e o número de ordem da figura para cada situação. Por exemplo, na primeira seqüência, o número de quadradinhos escuros para a enésima figura é dado por (n.n + 4), enquanto que o número de quadradinhos brancos pode ser expresso por (n. 4).

Esperamos que os mesmos possam identificar e generalizar os cálculos numéricos envolvidos em cada seqüência, estabelecendo fórmulas gerais e nesse sentido estaremos observando não apenas as tentativas de conversões, mas também, os tratamentos realizados ao longo do registro simbólico (numérico/algébrico).

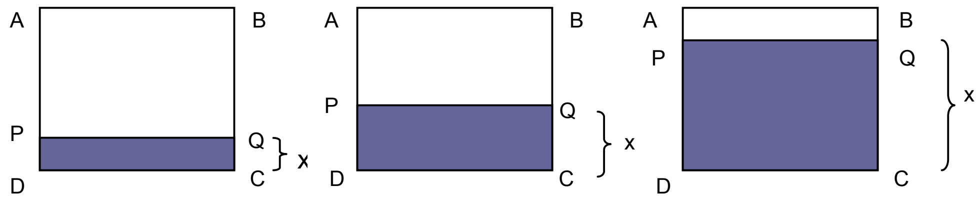
Para o item b), acreditamos que os alunos façam uso da representação algébrica, demonstrando ter disponíveis a utilização de tal registro. Em contra-partida, poderemos encontrar alunos que não consigam superar os tratamentos numéricos, inviabilizando a transformação mencionada.

Finalmente, para o item (c) os alunos deverão encontrar algumas dificuldades em relação ao registro gráfico, no que diz respeito ao trabalho com grandezas discretas. E, assim, pontos de semi-retas poderão se tornar segmentos de semi-retas.

Atividade 3:

Material utilizado: Lápis, borracha e papel milimetrado.
01. O quadrado ABCD tem lado de 5 cm. O ponto P se move de D para A, de modo que PQ se conserva paralelo a AB.
a) Calcule a área da figura sombreada para x = 1,2,3,4 e 5 em cm e indique os resultados na tabela a seguir:

x	Área do retânguloPQCD
1	
2	
3	
4	
5	



b) Encontre a expressão algébrica que determina a área do retângulo em função de x.

c) Represente essa dependência descrita na expressão algébrica acima, num gráfico cartesiano. (Utilize o papel milimetrado)

Temos nessa atividade uma preocupação no que concerne ao domínio e, assim, como os alunos reagirão quando a área da figura PQCD variar a partir do movimento do ponto P. Acreditamos que seja necessária uma interferência por parte do pesquisador, no que diz respeito ao cálculo da área de um retângulo, em função da dificuldade apresentada por alguns alunos, nesse nível de escolaridade, com o cálculo de áreas de figuras planas.

Em relação ao trabalho com a tabela, esperamos que os alunos preservem os cálculos das áreas para cada valor de **x**, facilitando assim, sua generalização e, também, a compreensão de x como uma variável contínua, diferentemente, da atividade anterior.

Esperamos ainda, que os alunos percebam, durante a construção do gráfico, os valores possíveis de **x**, demonstrando mais uma vez uma preocupação com a existência da função.

É bom ressaltar que nessa parte da pesquisa não temos como objetivo abordar significados como: f(x), D(f), Im(f), CD(f), de uma maneira mais formalizada, acreditamos que tal procedimento só deverá aparecer quando, idéias que dão suporte a esses conceitos estejam sendo trabalhadas ao longo do Ensino Médio, permitindo aos alunos construir tais conceitos a partir de uma linguagem mais formal, interpretando-os algébrica e graficamente.

Como pudemos contemplar em nossa análise de materiais didáticos, a noção de variável discreta e contínua não vem sendo explorada no Ensino Fundamental e, assim, acreditamos que muitos alunos tratem a variável x como grandeza discreta ou que pensem que a letra da expressão algébrica serve apenas para indicar um valor desconhecido (uma incógnita). Tais comportamentos podem dificultar a compreensão do registro gráfico e, conseqüentemente, sua conversão.

Ao final desse conjunto de atividades promoveremos, na medida do possível, uma discussão na qual buscamos resgatar os “conceitos” mais relevantes abordados ao logo das atividades, mostrando assim, que tais conceitos deveriam constituir uma base sólida para que, no futuro, tivessem uma melhor compreensão dessa diversidade de representações do conceito de função do 1º grau e, assim, uma apreensão mais significativa do mesmo.

3.2.2.2 – Análises das atividades do conjunto II:

O conjunto II é composto de duas atividades para serem trabalhadas em grupos, com a utilização de lápis e papel milimetrado. Observaremos no desenvolvimento das mesmas, se os alunos conseguem fazer uso das representações tratadas nessa pesquisa.

Esperamos constatar, ao longo dessas atividades, que a construção do conceito de função é marcada pelas idas e vindas de suas representações, proporcionando transformações por tratamento entre a representação algébrica e por tabelas (ou vice-versa) e, também, a conversão entre o registro da língua natural e o registro gráfico. Para tal objetivo, consideramos como variável didática, quatro exemplos de função do 1º grau que contemplam diversificadas situações de comportamento envolvendo as grandezas x e y.

Atividade 1:

Material utilizado: Lápis, borracha e papel.
01. Observe atentamente as expressões algébricas e as tabelas a seguir e responda as questões abaixo.
Identifique a tabela que se relaciona com cada expressão algébrica, descrevendo os procedimentos utilizados para tal associação.

I) $y = 2x + 3$ ( ) II) $y = x – 3$ ( ) III) $y = 2 – x$ ( ) IV) $y = x + 1$ ( )

Tabelas:

(1)

x	y=f(x)
10	23
11	25
15	33
20	43

(2)

x	y=f(x)
2	3
4	5
5	6
7	8

(3)

x	y=f(x)
1	-2
2	-1
3	0
4	1

(4)

x	y=f(x)
-2	4
-1	3
0	2
1	1

Primeiramente, esperamos que, a partir da substituição de valores de x da tabela na expressão algébrica, os alunos iniciassem o processo de transformação. Dessa forma, poderão confirmar o valor de y=f(x) e, assim, realizar uma “codificação”, o que seria segundo Duval (2003), uma simples forma de tratamento que permite “traduzir” as informações através da correspondência.

Ainda em relação a essa atividade, ao recorrerem às representações algébricas e por tabelas, esperamos que as transformações sejam realizadas com sucesso a partir do relacionamento das mesmas.

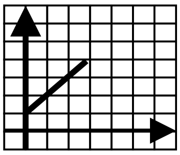
$\boxed{\text{Registro Simbólico Algébrico}} \longleftrightarrow \boxed{\text{Registro por Tabela}}$

Acreditamos que alguns alunos possam apresentar dificuldades para relacionar a função y = 2 – x por ter um coeficiente de x negativo e que não aparece imediatamente após o sinal de igualdade.

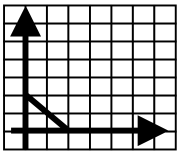
De modo geral, acreditamos que a maioria tenha êxito nesta atividade, apresentando talvez algumas dificuldades com os cálculos numéricos.

02. (1ªParte) Relacione os gráficos a seguir com os seus textos correspondentes, descrevendo os procedimentos utilizados para tal associação.

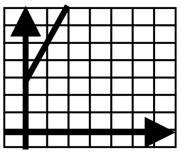
(I)



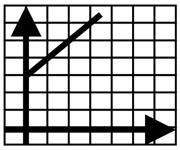
(II)



(III)



(IV)



Texto 1: Em uma corrida de táxi é cobrado R$ 3,00 de taxa fixa (bandeirada) mais R$ 2,00 por quilômetro rodado. Encontre a representação gráfica da função que melhor represente o valor pago ao taxista em função do número de quilômetros rodados. **( )**

Texto 2: A altura da água em uma piscina é de 2 m. O nível de água está abaixando na razão de 1 metro por hora. A altura da água na piscina em função do tempo. **( )**

Texto 3: João foi contratado pelo seu vizinho para molhar seu jardim enquanto este viajava. Ele cobrou uma taxa fixa de R$ 1,00 pelo seu serviço, mais R$ 1,00 por hora trabalhada até ele voltar. O valor que seu vizinho lhe pagou, quando retornou, foi em função do número de horas trabalhadas. **( )**

Texto 4: Quando Paulo nasceu seu irmão Marcos tinha 3 anos de idade. A relação que expressa a idade de Marcos em função da de Paulo, em anos é: **( )**

Com essa atividade oportunizaremos aos alunos, realizarem conversões entre o registro gráfico e o registro da língua natural ou vice-versa. Para o primeiro sentido de conversão, as variáveis visuais dos gráficos podem se apresentar como verdadeiros entraves, uma vez que nesse nível de escolaridade, normalmente os alunos não possuem maturidade para trabalhar tal representação. Para Duval (2003), nos registros figurativos (gráficos) a questão do tratamento se torna mais complexa na medida em que os seus tratamentos não são algoritmizáveis.

Enquanto que no outro sentido, Duval (1995) nos chama a atenção para o seguinte aspecto; a passagem de um enunciado em língua natural para uma representação gráfica, que se encontra em um outro registro, deve proporcionar um conjunto de elementos com uma maior complexidade, o autor o classifica como multifuncional.

Provavelmente, muitos alunos manifestarão dificuldades para iniciar essa etapa independentemente do sentido escolhido e dessa maneira podemos corroborar com o referencial teórico desta pesquisa, no que diz respeito às conversões entre um registro de representação não-discursivo (gráficos) para outro discursivo (textos).

Nesse sentido, acreditamos que essa parte da atividade possa apresentar um maior nível de dificuldade para muitos alunos, já que os mesmos não estão acostumados a trabalhar com textos, conforme pudemos constatar em nossa análise de livros.

(2ª Parte) Construa as expressões algébricas correspondentes aos textos e as tabelas analisadas anteriormente.

Esperamos nessa parte da atividade que os alunos iniciem um trabalho de conversão a partir dos gráficos. Pode ser que alguns alunos recorram à construção de tabelas, o que favoreceria, primeiramente, a conversão do gráfico para a representação por tabelas para, em seguida, realizarem a conversão entre a tabela e o registro simbólico algébrico.

A mobilização desses registros pelos alunos pode proporcionar processos internos de validação e, assim, observaremos ao longo da atividade um aspecto cognitivo considerado importante na teoria de Duval, ou seja, o modo com que os alunos realizam suas escolhas, priorizando determinados sentidos nas conversões e, até que ponto conseguimos identificar situações de não congruência.

3.2.2.3 – Análises das atividades do conjunto III:

Atualmente temos nos PCN, um destaque especial para o trabalho com problemas que privilegiem situações do nosso cotidiano, permitindo estabelecer relações entre o conteúdo trabalhado e uma determinada situação-problema.

Nos interessava aqui, observar como as representações semióticas são coordenadas durante essas situações-problema e, mais especificamente, investigar o movimento desses alunos entre os vários registros de representação, com a perspectiva de levantar elementos que nos ajudem compreender o seu funcionamento cognitivo.

Dessa maneira, acreditamos que a identificação e a coordenação dessas representações semióticas (linguagem natural, gráficos, tabelas e expressões algébricas) possam promover uma melhor apreensão do objeto função do 1º grau a partir de suas possíveis conversões.

Atividade 1:

Material utilizado: Lápis, borracha e papel.
01. Suspendendo um corpo numa mola, ela sofrerá um alongamento A em função do peso P do corpo suspenso. Em 1660, o inglês Hooke descobriu experimentalmente que, dentro de certos limites, tal função é polinomial do 1º grau, dada por A = k . P, onde k é uma constante. A tabela seguinte se efere ao caso de uma mola para o qual k = 0,1 cm/gf, até atingir 500 gf.

Peso(gf)	0	100	200	300	400	500
Alongamento(cm)	0	10	20	30	40	50

a) Para cada aumento de 100 gf de quanto se alonga a mola?
Resp.:

b) Encontre o gráfico correspondente a uma função que apresente a constante k = 0,5 cm/gf até atingirmos 2000 gf.

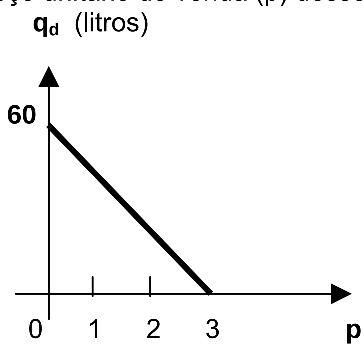
c) As grandezas alongamento e peso do item anterior são diretamente proporcionais? Justifique sua resposta.
Resp.:

Para essa atividade esperamos que os alunos observem a lei de associação entre o peso e o alongamento, a partir do registro por tabela e, assim, “percebam” a variação e o comportamento de tais grandezas, como variáveis didáticas que devem potencializar o tratamento dessas informações até a chegada no registro simbólico algébrico.

Em seguida, esperamos que a conversão para o registro gráfico aconteça através do uso do registro por tabela e não de um outro registro (algébrico ou língua natural).

Finalmente, após terem trabalhado em vários registros, acreditamos que a noção de proporcionalidade se confirme positivamente.

02. A quantidade demandada de um bem de consumo (q_d) depende do preço unitário de venda (p) desse bem, como mostra o gráfico.



a) Como o gráfico dessa função é um segmento de reta, complete a tabela seguinte que também descreve essa situação.

p	0	1	2	3
q_d				

b) Sabendo que, nesse caso as variações iguais de **p** correspondem variações iguais de $\mathbf{q_d}$, escreva uma lei algébrica que descreve essa função.
Resp.:

Em geral, os livros didáticos trazem questões que relacionam Economia com o conteúdo de função. Nesse sentido, a atividade 02 procura promover essa relação a partir de uma situação que envolve um exemplo de função do 1º grau, com um intervalo de existência para p ($0 < p \leq 3$), e que deverá ser tratada a partir da familiarização de suas grandezas.

Esperamos que a transformação para o registro algébrico ocorra, principalmente, para aqueles alunos que consigam construir a tabela com os valores p e q_d (item a), conforme solicita a questão, evidenciando assim, a necessidade de conversões intermediárias. Desse modo, acreditamos que a opção pela construção da tabela se confirme como uma importante variável didática.

Em relação à conversão a partir do registro gráfico, Duval (2003) apresenta resultados de pesquisas realizadas com adolescentes, mostrando que, mesmo os alunos em final de Ensino Médio possuem dificuldades que estão relacionadas à falta de compreensão de elementos geométricos da função como: coeficiente angular ou declividade da reta, coeficiente linear e os pontos de intersecção da reta com os eixos coordenados, por exemplo.

Segundo Duval (2003, p.17), “a conversão entre gráficos e equações supõe que se consiga levar em conta as variáveis visuais próprias dos gráficos (inclinação, intersecção com os eixos etc.) e, de outro, os valores escalares das equações (coeficientes positivos ou negativos, maior, menor que ou igual a 1)”.

Nessa perspectiva, buscamos observar como tais variáveis didáticas, relativas ao registro gráfico, são trabalhadas pelos alunos durante o processo de conversão. Procurando, assim, comparar a representação no registro de partida (gráfico) com a representação terminal no registro de chegada (algébrico), na tentativa de compreender o seu grau de congruência.

03. Compondo a produção de um folheto verificamos um custo fixo de R$ 7,50 mais R$ 0,25 para cada cópia desse folheto.

a) Construa uma tabela que dê o custo total *y* para produzir *x* folhetos, onde *x* = 10, 20, 30, 40 e 50.

x	10	20	30	40	50
y					

b) Faça um gráfico, no sistema cartesiano xOy, que corresponda à tabela do item anterior.

c) Escreva a equação "lei" que dá *y* em função de *x*.
Resp.:

d) Qual o custo total, no caso de uma produção de 500 folhetos?
Resp.:

Esperamos para o terceiro exercício, que envolve as quatro formas de linguagens tratadas nesta pesquisa, que tratamentos e conversões sejam trabalhados de maneira diversificada.

Acreditamos que a conversão do registro gráfico para o registro algébrico deva acontecer em menor freqüência em relação ao tratamento tabela/expressão algébrica, uma vez que esse tipo de conversão, normalmente, não é trabalhada pelos materiais didáticos do Ensino Fundamental, e também porque os alunos, nesse nível de escolaridade, ainda não tiveram um trabalho específico para as variáveis visuais do gráfico ou com os escalares de sua equação, o que deverá ocorrer, geralmente, na 2ª série do Ensino Médio com o estudo da Geometria Analítica.

Atividade 2:

Material utilizado: Lápis, calculadora, borracha e papel.

01. O dono da loja decidiu dar um desconto de 10% sobre o preço a varejo para quem comprar suas mercadorias no atacado e elaborou uma tabela com o preço de custo, o preço no varejo e o do atacado para cada um dos produtos. Sabendo-se que o preço de varejo foi acrescido de 40% em relação ao preço de custo, você deve preencher a tabela e determinar uma expressão algébrica que permita calcular o preço no atacado em função do preço de custo.

Produto	P: preço de custo (R$)	V: preço no varejo (R$)	A: preço no atacado (R$)
I	5,80		
II	7,10		
III	9,45		
IV	12,95		
V	15,00		

Acreditamos que seja necessário discutir inicialmente a idéia de majorar um determinado valor em 40% e, nesse sentido, a descrição dos cálculos em uma tabela poderia dar uma noção de variável para que pudessem indicar genericamente, por exemplo, o preço de venda (V) em função do preço de custo (P): V = P + 0,4P.

No capítulo seguinte apresentamos a outra parte dos procedimentos metodológicos desta pesquisa que é a aplicação de nossa seqüência didática bem como a análise a posteriori e validação.

CAPÍTULO IV

- Aplicação da Seqüência Didática, Análises *a posteriori* e validação.

Após a realização da Atividade Diagnóstica, fomos a todas as nove salas da 1ª série do Ensino Médio para apresentarmos nossa proposta de pesquisa. E, dessa maneira, na presença do coordenador e da supervisora pedagógica da escola, expusemos alguns aspectos de nossa pesquisa como: a forma em que o trabalho seria conduzido (metodologia), o número previsto de encontros, a condição de voluntários na pesquisa com seus direitos e responsabilidades, os dias e horários para a realização dos trabalhos etc.

Tivemos, primeiramente, um grupo de 24 alunos interessados, porém, o início dos trabalhos se deu com um grupo de 16 alunos. É importante destacar que a participação desses alunos foi totalmente voluntária e que os mesmos poderiam interromper sua participação a qualquer momento e, por se tratar de uma pesquisa qualitativa, o número baixo de alunos não nos preocupou e assim, decidimos pelo início dos trabalhos.

Antecedendo a aplicação da primeira atividade foi possível conversar, informalmente, com os sujeitos da pesquisa para que pudéssemos conhecer maiores detalhes dos integrantes do grupo. Praticamente, todos reconheceram que tinham uma certa simpatia pela disciplina de Matemática apesar de dificuldades enfrentadas em séries anteriores. Nesse sentido, estavam ansiosos e curiosos para o início dos trabalhos, fazendo da motivação uma das principais características do grupo.

Antes de iniciarmos as atividades do primeiro encontro foi reforçada, mais uma vez, pela supervisora pedagógica, a minha presença como professor e pesquisador da escola, no qual tivemos a oportunidade de detalhar melhor os objetivos de nossa pesquisa.

A aplicação da seqüência foi programada para seis encontros semanais, realizados no período vespertino, contando com a minha participação e mais um observador, no caso a supervisora pedagógica da escola que nos auxiliou durante quatro sessões. A seguir, podemos observar um quadro resumo dos trabalhos.

Quadro resumo dos encontros:

Encon - tros	**Nº de alunos**	**Forma de trabalho nos grupos**	**Duração (min.)**	**Presença de observador**	**Objetivos pretendidos**
1	16	duplas	60	sim	Observar os tratamentos entre a representação por tabela e a algébrica e as conversões entre essas e a representação gráfica a partir da representação por tabelas.
2	11	três grupos de 03 alunos mais uma dupla	50	não	Avaliar a capacidade de generalização a partir de seqüências de figuras a partir das representações por tabela, algébrica e gráfica.
3	15	um grupo de 03 alunos mais seis duplas	45	sim	Observar algumas formas de representação semiótica no trabalho com áreas de figuras planas, fazendo a distinção entre variável contínua e discreta.
4	10	individual	50	sim	Relacionar algumas formas de representação, utilizando-se de transformações por tratamentos e conversões.
5	8	individual	50	sim	Utilizar os registros de representação semiótica na resolução situações-problema.
6	6*	individual e duplas	50	não	Coordenar registros de representação semiótica no contexto de porcentagem.

***** Esse encontro foi realizado em dois momentos. Primeiro, com uma sala de 41 alunos, dos quais três haviam participado das sessões anteriores e, um segundo momento, com mais três alunos que já vinham participando da seqüência. Optamos por considerar apenas os seis alunos.

4.1 – Descrição do 1º Encontro.

Logo após reforçarmos algumas orientações, demos início aos trabalhos, separando aleatoriamente os alunos em duplas. Cada integrante recebeu uma cópia do material e foi sugerido que as duplas dialogassem, buscando assim, uma maior interação e troca de experiências.

O grupo se mostrou extremamente motivado pela nossa proposta e, principalmente, pelas atividades oferecidas. Nesse sentido, acreditamos que ocorreu uma *devolução* do problema.

Como estávamos contando com a participação de 8 duplas, optamos pela observação coletiva dos alunos, na qual pudemos contar com a participação da supervisora pedagógica, que também é professora de Matemática, e que muito contribuiu com suas observações registradas em uma ficha de observação (Anexo 5).

4.1.1 – Análises *a posteriori* e validação - Atividades (1º Encontro).

- Atividade 1

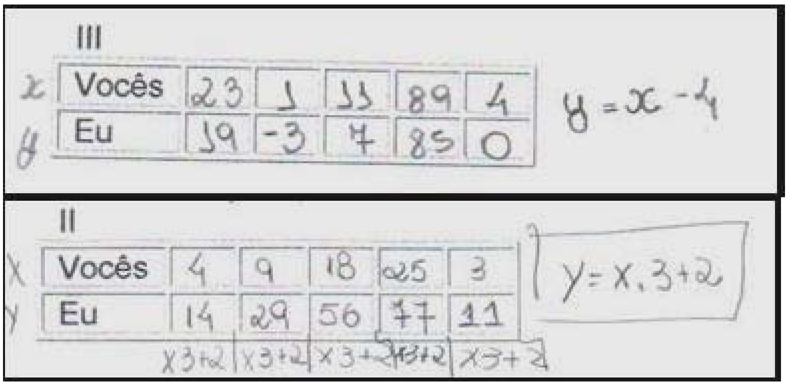
De acordo com o que a atividade solicitava, os alunos foram convidados a preencherem tabelas com a minha participação, num jogo que consistia em: a partir de valores por eles informados eu lhes dava uma resposta, tendo uma função do 1º grau implícita, que relacionasse os valores tratados. Esses valores foram sendo registrados nas tabelas e, logo de início, percebeu-se uma preocupação dos alunos em relação aos números informados.

Conforme previsto em nossas *análises a priori*, o trabalho dos alunos ficou restrito aos números inteiros, confirmando nossa preocupação em relação aos conjuntos numéricos. Para esses alunos, em nenhum momento se pensou em números fracionários ou irracionais, o que é perfeitamente aceitável nesse nível de escolaridade, uma vez que os professores, em geral, exemplificam com números inteiros, deixando de lado os números fracionários ou irracionais que, normalmente, são menos relacionáveis a objetos concretos.

Adiante, definimos que as variáveis x e y, respectivamente, o que "vocês" e "eu" falamos, deveriam ser consideradas para a construção dos gráficos (conversões) e, depois, para a obtenção das expressões algébricas (tratamentos) correspondentes às tabelas. Vale a pena destacar, que a ordem das questões foi escolhida de propósito com o objetivo de observar o comportamento dos alunos diante dessa escolha.

Durante a atividade, continuaram analisando e discutindo nas duplas a regularidade entre os valores registrados nas tabelas e, assim, optaram primeiro pela identificação da representação algébrica que, de modo geral, se mostrou disponível para esse tipo transformação (tratamento).

Podemos observar no protocolo 1, alunos que foram capazes de perceber a regularidade dos valores e, assim, realizar a transformação entre o registro por tabela e o registro algébrico correspondente a cada situação.


III

x	Vocês	23	1	11	89	4
y	Eu	19	-3	7	85	0

$y = x - 4$

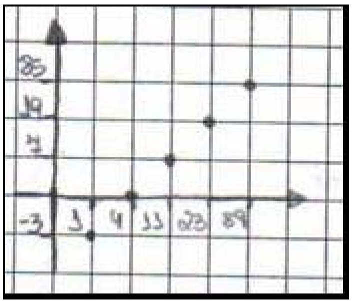
II

x	Vocês	4	9	18	25	3
y	Eu	14	29	56	77	11
		x3+2	x3+2	x3+2	x3+2	x3+2

$y = x.3+2$

Protocolo 01: Generalização dos valores das tabelas.

A conversão para o registro gráfico não foi realizada com sucesso, provavelmente, em função dos altos valores informados pelos alunos e, assim, a dificuldade enfrentada pela maioria nesse tipo de conversão (entre tabelas e gráficos) pareceu estar evidente. Primeiramente, por não perceberam que, de acordo com os valores informados (relativamente altos), o trabalho na construção dos gráficos poderia apresentar algumas dificuldades, como de fato ocorreu. E, em segundo lugar, porque não tinham claro o conceito de continuidade conforme podemos observar no protocolo 2.



Protocolo 02: Dificuldades para a construção do gráfico.

Acreditamos que para esses alunos, a questão da continuidade ainda não se apresente de uma forma clara em sua estrutura cognitiva. Conforme pudemos observar no protocolo anterior para alguns, o gráfico tinha o significado de pontos enquanto para outros, segmentos de retas. Isso nos fez iniciar uma reflexão quanto ao entendimento desses alunos em relação ao conjunto dos Reais.

Ainda em relação a esse tipo de transformação, Duval (1995) nos alerta que, quando o aluno é submetido a uma transformação por conversão, no caso, entre o registro gráfico e o registro da escrita algébrica, a dificuldade é maior, por se tratar de uma transformação entre uma representação não-discursiva e outra discursiva, diferentemente dos tratamentos que, em geral, ocorrem a partir de representações discursivas.

Lembramos que para Duval, as representações discursivas possuem características próprias de justificação ou de prova. No nosso caso, estamos considerando como representações discursivas: a linguagem natural (escrita), a escrita algébrica e as tabelas.

Conforme observamos anteriormente, em relação à forma de tratamento dessas representações, Duval (1995) classifica a linguagem natural como um registro multifuncional, enquanto as representações por tabelas e a escrita algébrica seriam monofuncionais. (Ver quadro na pág. 43).

Acreditamos que, com essa atividade, foi possível levantar alguns indicadores para o fato de que alguns alunos não são capazes de reconhecerem o mesmo objeto matemático a partir de diferentes representantes.

Vale a pena destacar a autonomia de alguns alunos frente aos seus registros de representação. Para esses alunos, que realizaram com sucesso o tratamento entre a representação por tabela e a algébrica, a opção pela construção do gráfico foi tomada a partir da conversão do registro por tabelas, apesar das atividades estarem propostas em uma outra ordem de apresentação.

Decidimos retomar, no início do segundo encontro, alguns questionamentos e dificuldades observadas em relação à construção de gráficos a partir de expressões algébricas.

4.2 – Descrição do 2º Encontro.

Os Alunos foram convidados a formarem, aleatoriamente, três grupos de 3 alunos e uma dupla no qual cada integrante recebeu uma cópia do material. Reforçamos, novamente, que um diálogo mais intenso seria essencial para que o grupo tivesse uma maior compreensão das questões que iríamos tratar.

Iniciamos o segundo encontro fazendo uma reflexão da Atividade 1, destacando alguns aspectos de suas produções como, a importância da expressão algébrica para tratar da regularidade entre valores de tabelas.

Através de um novo exemplo, mostramos que os procedimentos adotados pela maioria das duplas, encontrando primeiramente a lei para depois buscar a representação gráfica, poderia ter sido realizado com maior eficiência se tivessem optado por outros valores de x (Ex.: -2, -1, 0, 1, 2) e, assim, poderiam encontrar valores correspondentes a y que estivessem contidos em um menor intervalo de variação dessas grandezas.

Durante as discussões, percebemos que alguns alunos apresentaram dificuldades para compreender duas representações de um mesmo objeto matemático. Duval (2003) nos chama a atenção para este fato, destacando a importância de não se confundir a representação de um objeto matemático com o próprio objeto.

Para exemplificar, foi discutido o exemplo abaixo, a partir de valores informados em duas tabelas que traziam a representação de um mesmo objeto matemático ($y = -2x + 4$) e que, para alguns alunos, não era possível a referida expressão algébrica corresponder a uma mesma reta, confirmando nossas análises *a priori*.

X	24	72	2	36	49
Y	-44	-140	0	-68	-94

$Y = -2x + 4$

X	-2	-1	0	1	2
Y	8	6	4	2	0

No exemplo dado, o tratamento entre a primeira tabela e a expressão algébrica ofereceu maiores dificuldades para alguns alunos enquanto que, para outros o processo não aconteceu. Diferentemente da segunda tabela, na qual todos os grupos foram capazes de realizar com sucesso o referido tratamento. Ao final do exemplo, praticamente todos os alunos se manifestaram favoráveis à construção do gráfico a partir da segunda tabela. Tivemos ainda, um grupo que quis expor "a sua própria tabela", o que para eles seria uma melhor opção para a conversão.

Nesse sentido, acreditamos que transformações como essas precisam fazer parte das atividades propostas para que os alunos possam estar identificando um determinado objeto matemático a partir de diferentes representantes.

4.2.1 – Análises *a posteriori* das Atividades (2º Encontro).

Atividade 2

Primeiramente, analisando uma seqüência de imagens escrita, a maioria dos grupos realizou com sucesso a construção da 4ª figura no papel milimetrado, indicando domínio nesse tipo de linguagem figural. Apenas um dos grupos não foi capaz de realizar a atividade. Assim, podemos pensar que esse grupo ainda se encontra num estágio de compreensão que inviabiliza qualquer tentativa de entendimento da letra como variável, como de fato acabou acontecendo no item seguinte.

No item b, o preenchimento das tabelas foi realizado parcialmente, pois em geral os alunos não conseguiram encontrar a generalização pedida em cada situação, demonstrando dificuldades na transformação para a linguagem algébrica. Nesse momento, passamos a considerar dois estágios de entendimento por parte dos alunos. Aqueles que superaram alguns tratamentos numéricos e compreenderam a seqüência das imagens, percebendo uma regularidade entre os valores preenchidos nas tabelas. Porém, não foram capazes de concluir o tratamento para a escrita algébrica. E, um segundo estágio, em que demonstraram um maior domínio da representação algébrica, o que nos fez acreditar que, para esses alunos a letra possuía um estatuto de variável.

Em alguns momentos, as intervenções foram necessárias, principalmente, para proporcionar àqueles que seriam do 1° grupo, mais elementos para que os mesmos não interrompessem a atividade e, desse modo, sempre que a nossa presença era solicitava, nos dirigíamos ao grupo a partir de outros questionamentos, buscando justificativas para tal raciocínio do grupo.

A seguir, apresentamos um protocolo extraído da produção de uma dupla, que foi capaz de encontrar algumas expressões algébricas, porém, o mesmo grupo, não foi capaz de efetuar corretamente um tratamento dentro do registro algébrico. Observemos que a soma dos quadradinhos que deveria ser $3.n + 6$, foi indicado como $2.n^2 + 6$; tal resultado pode estar relacionado a uma falta de amadurecimento desse registro e, também, a ausência de um processo de validação, o que permitiria ao grupo encontrar erros como: o número de quadradinhos brancos da 10ª figura e a resposta do item c.

(2ª seqüência)

x $y=x.2+6$ $y=x$

Nº de ordem Da figura	Nº de □	Nº de ■	Total de quadradinhos
1ª	8	1	9
2ª	10	2	12
3ª	12	3	15
4ª	14	4	18
10ª	32	10	42
nª	$2n+6$	n	$2n^2+6$

Protocolo 03: Preenchimento da tabela objetivando a generalização.

No item c, alguns grupos chegaram a demonstrar uma certa preocupação com o cálculo do número de quadradinhos brancos e escuros da 12ª figura, a partir da representação algébrica. Porém, em função das divergências nos grupos, mesmo aqueles que foram capazes de encontrar a expressão algébrica, acabaram cometendo erros no tratamento da escrita algébrica.

Podemos observar no protocolo a seguir, mais uma vez, a ausência de algum tipo de procedimento de validação, indicando que tal processo não vem sendo utilizado, provavelmente, em função das dificuldades com o registro algébrico.

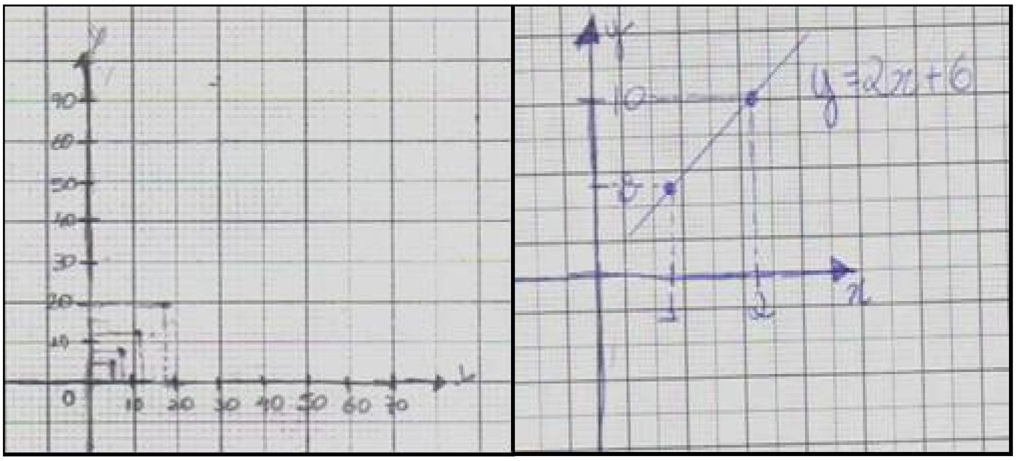
2ª sequencia = 36/12

Protocolo 04: Resposta apresentada por um dos grupos para o total de quadradinhos brancos e escuros da 12ª figura (item c na Atividade 2).

E, finalmente no item d, em que pretendíamos promover conversões para o registro gráfico, novamente, a questão da continuidade foi levantada pelos alunos com perguntas do tipo: Devo ligar os pontos? O gráfico é uma reta?

Percebemos que a compreensão dessa representação, no que diz respeito à continuidade, ainda deve estar em processo de formação e dessa maneira, decidimos retornar a essa discussão no final deste conjunto de atividades.

A seguir, podemos observar dois registros gráficos de dois alunos sobre essa questão:



Protocolo 05: Construção gráfica na Atividade 2.

4.3 – Descrição do 3º Encontro.

Realizamos a Atividade 3 com um grupo de 15 alunos separados em duplas e um grupo de 3 alunos e, assim, concluímos o primeiro conjunto de atividades.

Fomos comunicados pela Supervisora que após esse encontro as atividades deveriam ser interrompidas por três semanas consecutivas em função das provas bimestrais e do feriado prolongado.

4.3.1 – Análises *a posteriori* das Atividades (3º Encontro).

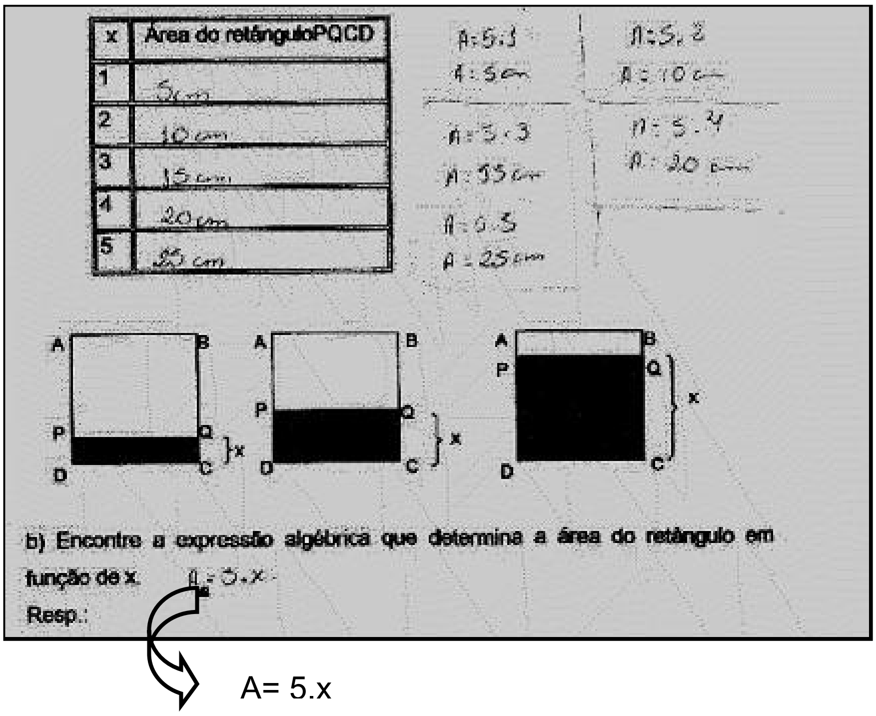
Atividade 3

Conforme estava previsto em nossas análises *a priori*, alguns alunos apresentaram dificuldades no que diz respeito à Geometria (cálculo de área). Nesse momento a nossa intervenção se mostrou necessária para o prosseguimento da atividade.

Após o esclarecimento do cálculo da área de um retângulo, os alunos seguiram preenchendo a tabela, facilitando assim, a transformação entre a representação por tabela e a escrita algébrica. De modo geral, os alunos não apresentaram dificuldades nesse tipo de conversão, demonstrando, nessa atividade, uma compreensão satisfatória para a variável independente x.

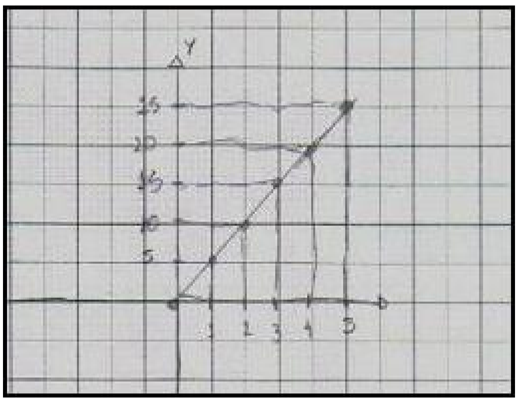
Em relação à existência de x (Domínio), um dos grupos se manifestou perguntando se poderia atribuir valores para a variável. No protocolo a seguir podemos observar o trabalho de uma dupla no interior de um registro discursivo que compreende as escritas algébrica numéricas (tabelas).

Percebemos ainda, um número crescente de alunos realizando as conversões entre representações algébricas, tabelas e gráficas. Destacamos as transformações (Tabela → Lei), (Lei → Gráfico) e (Tabela → Gráficos). Conforme podemos observar no protocolo abaixo.



Protocolo 06: O preenchimento da primeira parte da Atividade 3.

Em relação à conversão para o registro gráfico (tabela → gráfico), o entendimento da variável x, como uma grandeza contínua parece estar mais clara para a maioria dos alunos. Alguns grupos chegaram a se manifestar com posicionamentos como: Professor “esse” x pode assumir outros valores? – obviamente que nesse momento optamos pela não intervenção. A seguir apresentamos a construção gráfica realizada por uma dupla.



Protocolo 07: Conversão entre a tabela e a representação gráfica.

Assim, encerramos as atividades do primeiro conjunto, acreditando que nosso objetivo, que era investigar alguns conceitos prévios relativos a funções e também sobre grandezas discretas e contínuas envolvendo questões de nível operacional, foi atingido.

Em geral, aqueles alunos que apresentaram dificuldades de entendimento para tratamentos mais elementares, conservaram o mesmo comportamento em outras conversões. O que para nós veio corroborar questões ligadas a algumas formas de registros. Para muitos alunos, alguns tratamentos de representações só foram realizados a partir de uma abordagem mais operacional; enquanto que para outros o que seria uma argumentação mais formal já se faz presente em alguns momentos de seus discursos.

Decidimos realizar, após o término do primeiro conjunto de atividades, um levantamento das concepções desses alunos acerca das representações e das transformações tratadas ao longo dos três encontros, o que chamaremos de uma tentativa de institucionalização do conceito.

Tentamos realizar, em torno de cada representação trabalhada, uma reflexão que levasse em consideração: os discursos escritos e os questionamentos dos alunos, devidamente registrados em fichas de observação, as intervenções feitas pelo pesquisador e, principalmente, uma confrontação preliminar daquilo que era esperado com o que efetivamente ocorreu.

Apresentamos a seguir alguns aspectos importantes dessas reflexões, em que buscamos compreender melhor, o trabalho desses alunos acerca dos registros e, ao mesmo tempo, iniciar uma discussão que possa desestabilizar algumas concepções errôneas, em relação às representações trabalhadas por tabelas, linguagem algébrica, linguagem natural e a gráfica.

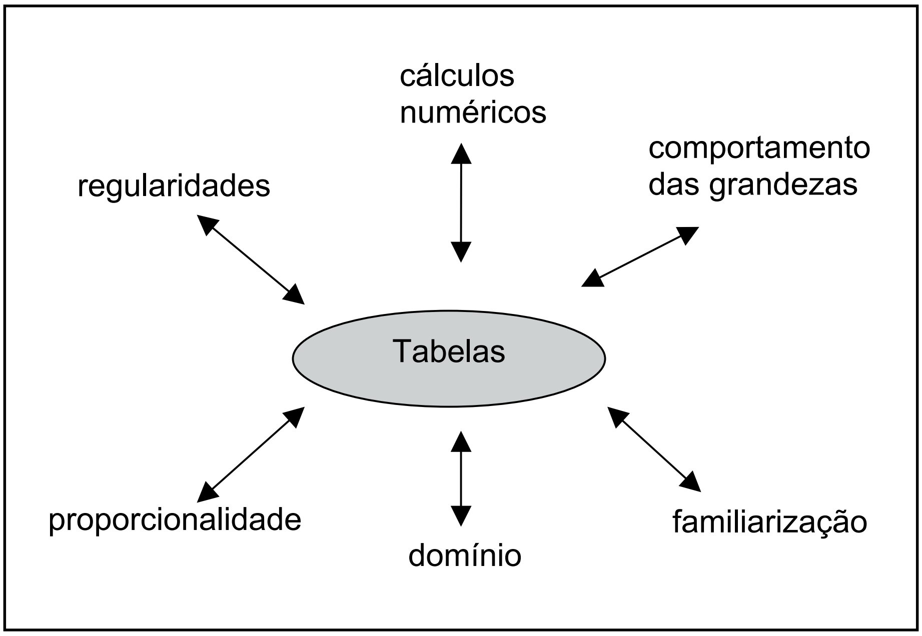


Figura 02

Em nossas observações foi possível perceber que a organização dos valores informações, na forma de tabelas, fez com que a compreensão de alguns elementos didáticos pudessem assumir um papel de destaque em nossas reflexões. Por exemplo, a percepção de regularidades entre os valores tratados nas tabelas facilitou em vários momentos a transformação entre essa representação e a escrita algébrica.

A observação dos valores que as grandezas poderiam assumir permitiu a alguns alunos que identificassem, não só o comportamento dessas grandezas, como também, tivessem um maior entendimento do conceito de *domínio de uma função* e, dessa maneira, podemos acreditar que os objetivos traçados foram atingidos.

Enfim, acreditamos que todos esses aspectos relacionados à representação por tabelas, na maioria dos casos, se apresentam de uma forma não linear e que muitas vezes não se intercomunicam, o que pode agravar a apreensão dessa representação.

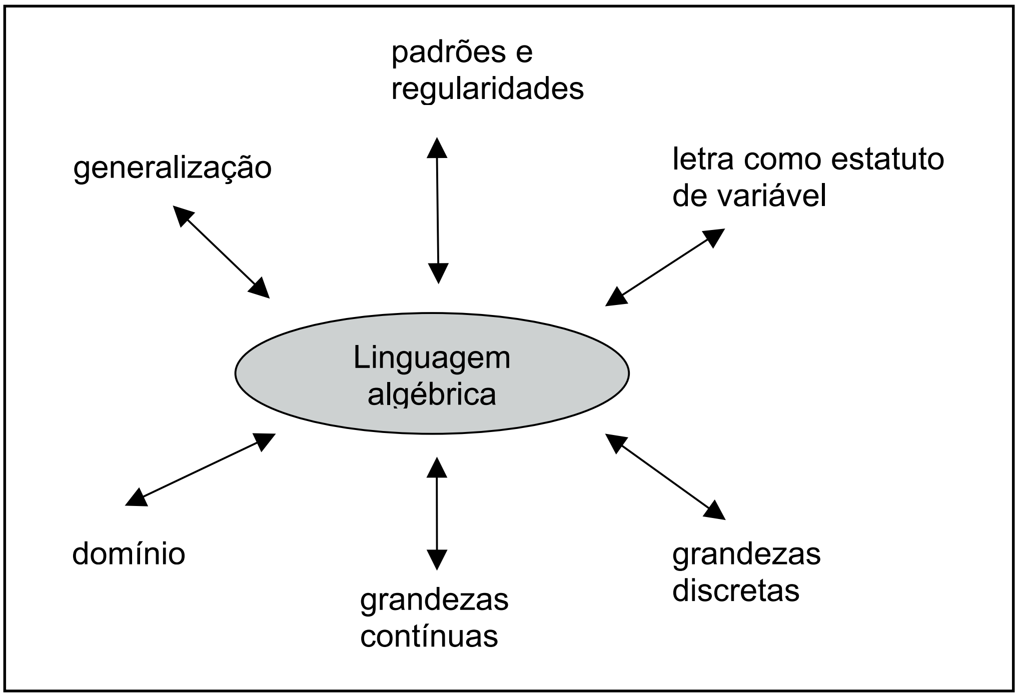


Figura 03

O processo de generalização, ou seja, a tentativa de se encontrar uma expressão algébrica que traduzisse o comportamento de valores ou de seqüências de figuras, foi acompanhado por questionamentos que estiveram presentes ao longo de todo o nosso trabalho com grandezas discretas e contínuas, promovendo nos grupos uma certa preocupação, mesmo que informal, com a existência da função e, conseqüentemente, sua compreensão da letra como variável.

Identificamos nas produções dos alunos, mais precisamente, na sua capacidade de generalização, um dos principais entraves para essa representação, uma vez que muitos não entendiam a variável como sendo uma letra a serviço da função; seja por valores discretos ou contínuos.

Também procuramos motivar outras situações envolvendo essa representação por acreditarmos que a mesma apresenta um elevado nível de dificuldade que envolve a utilização da letra, com estatutos diferentes do de incógnita e que muitos alunos ainda não atingiram; mesmo estando no Ensino Médio.

Nesse sentido, um trabalho bem sucedido dentro de um registro discursivo poderá significar uma garantia de conversão para outros registros que, do ponto de vista cognitivo, é uma atividade fundamental para a compreensão do conceito de função.

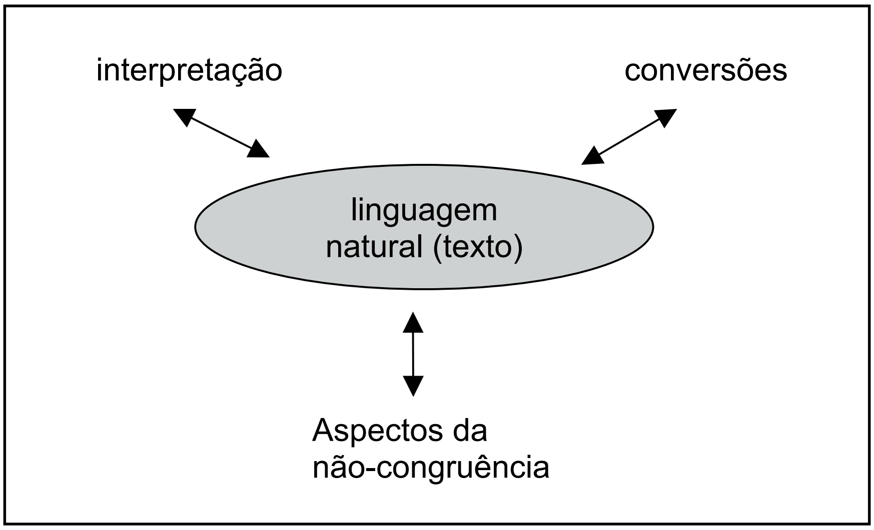


Figura 04

A dificuldade para transpor a linguagem natural (enunciado), realizando conversões para outros registros de representação semiótica está relacionada às situações que Duval (2003) descreve como representações mentais, que seriam representações semióticas interiorizadas.

> (....) As representações mentais úteis ou pertinentes em matemática são sempre representações semióticas interiorizadas em interação com um tratamento de produção externa de representações semióticas. Pois, em produção externa, pode-se tratar e controlar um número consideravelmente mais elevado de informações do que em produção interna (....) p. 31

Salientamos também que a interpretação nesse tipo de registro, considerado multifuncional, pode ficar comprometida quando não se reconhece o objeto representado através de outras representações, promovendo o que Duval chama de fenômeno de não-congruência. No entanto, o que poderia ser manifestado por meio de exposições verbais ou de raciocínios que argumentassem aspectos de um conceito matemático, pouco ocorreu.

Duval (1995), nos lembra que discursos argumentativos se apóiam em observações, crenças etc; a estruturação dos mesmos segue os princípios da linguagem natural. Nesta pesquisa, o registro da língua natural foi utilizado com o objetivo de promover conversões para representações numéricas (tabelas), gráficas ou algébricas.

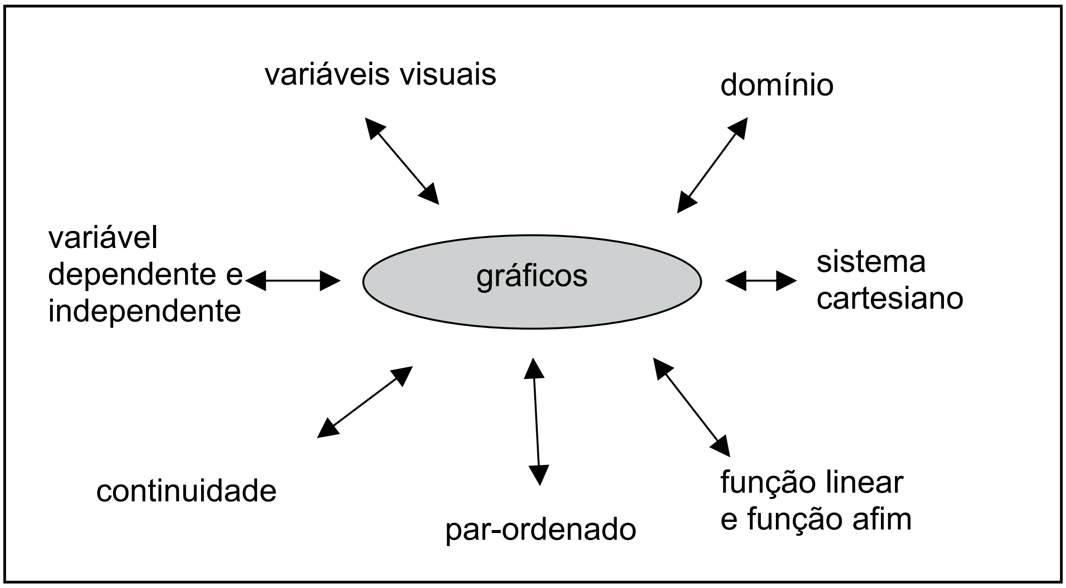


Figura 05

Apesar de realizarmos as atividades com alunos do Ensino Médio, em que a noção de Sistema Cartesiano já foi trabalhada, entendemos que essa noção ainda é bastante elementar, fazendo com que informações importantes dos gráficos não sejam significativas. Duval (2003) mostra que as variáveis visuais de um gráfico se apresentam como entraves no entendimento da representação gráfica, pois existe certa dificuldade, por exemplo, na associação dos escalares de um gráfico com sua equação.

> (....) Na realidade, a conversão entre gráficos e equações supõe que se consiga levar em conta, de um lado, as variáveis próprias dos gráficos (inclinação, intersecção com os eixos etc.) e, de outro, os valores escalares das equações (coeficientes positivos ou negativos, maior, menor ou igual a etc.). (Duval,2003:17)

Na maior parte dos materiais didáticos por nós analisados, a representação gráfica é trabalhada a partir de várias conversões, no entanto, acreditamos que algumas características gráficas não vêm sendo exploradas nesse nível de escolaridade como, a continuidade, os escalares de uma função, os seus interceptos e outros. No final do terceiro encontro procuramos discutir algumas dessas características e, também, refletir sobre as tentativas de construção dos gráficos.

A partir dessa idéia pudemos detalhar questões relacionadas à definição de uma função do 1º grau como: distinguir função linear de função afim, o domínio e par ordenado.

4.4 – DESCRIÇÃO DO 4º ENCONTRO.

Após três semanas de recesso, por causa das Provas Bimestrais e Feriados, tivemos uma sensível evasão dos participantes. Retomamos a aplicação da seqüência com um grupo de 10 alunos e, por esse motivo, decidimos pelo trabalho individual, o que fez aumentar o número de solicitações do observador.

O tempo de resolução deste grupo de atividades foi o menor até então. Os alunos levaram em média 25 minutos para realizar as relações. Dois alunos não chegaram a completar as atividades; outros dois, não explicitaram algumas respostas dadas e os quatros restantes apresentaram respostas com um maior grau de compreensão, demonstrando um entendimento mais significativo dessas representações.

E, dessa forma, decidimos aproveitar o tempo restante com a discussão de algumas questões, em relação à representação gráfica, levantadas pelos próprios alunos, durante a sessão, como:

"Professor por que o senhor gosta tanto de gráfico?" ou,

"eu não consigo interpretar um gráfico";

e, assim, lembramos que algumas dessas repostas já tinham sido dadas no final do último encontro, mas, se quisessem poderíamos retomá-las juntamente com as questões que estaríamos discutindo no quarto encontro.

4.4.1 – ANÁLISES *A POSTERIORI* DAS ATIVIDADES (4º Encontro).

Atividade 4

(1ªQuestão)

De acordo com os nossos objetivos, procuramos apresentar nesta atividade, transformações entre a representação por tabelas e a escrita algébrica; a partir de questões do tipo relacione, em que o sentido da transformação pudesse ser escolhido pelo aluno. Assim, verificamos, no esquema a seguir, que o sucesso nessa transformação esteve quase sempre ligado à transformações intermediárias.

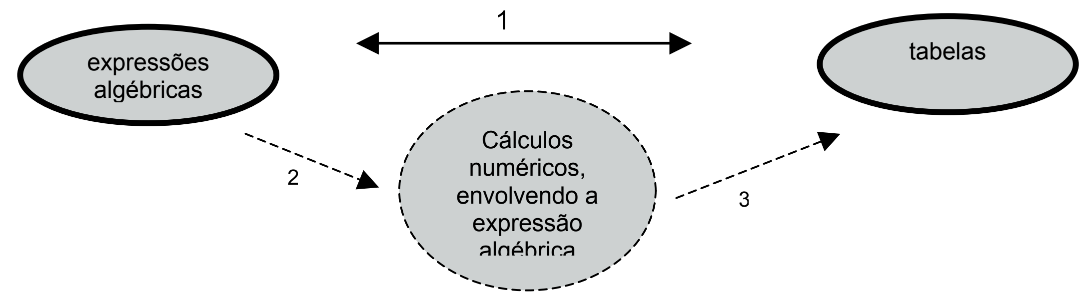
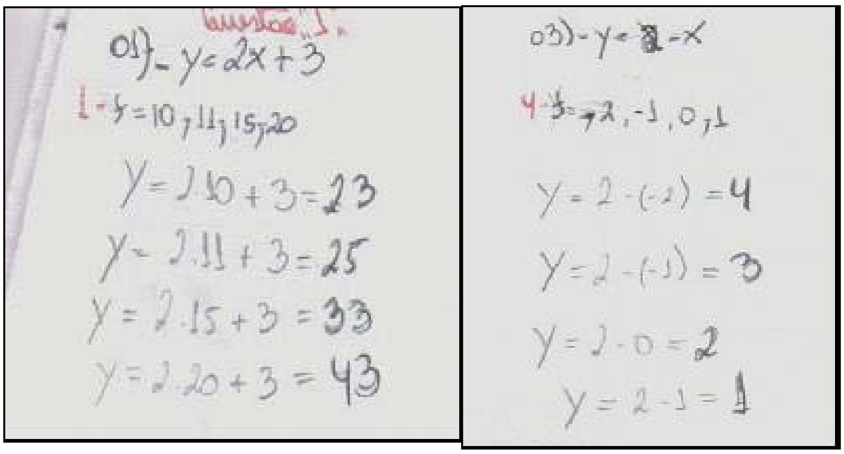


Figura 06

O esquema tratado na Figura 06 mostrou-se pertinente na medida em que as transformações realizadas pelos alunos, na tentativa de encontrar a tabela correspondente à expressão algébrica, demonstrou um empenho cognitivo diferenciado e, também, um certo privilégio no sentido da transformação. Todos os alunos que obtiveram êxito na atividade fizeram uso de um tratamento no registro numérico, conforme podemos observar nas transformações (2) e (3) da figura 06.



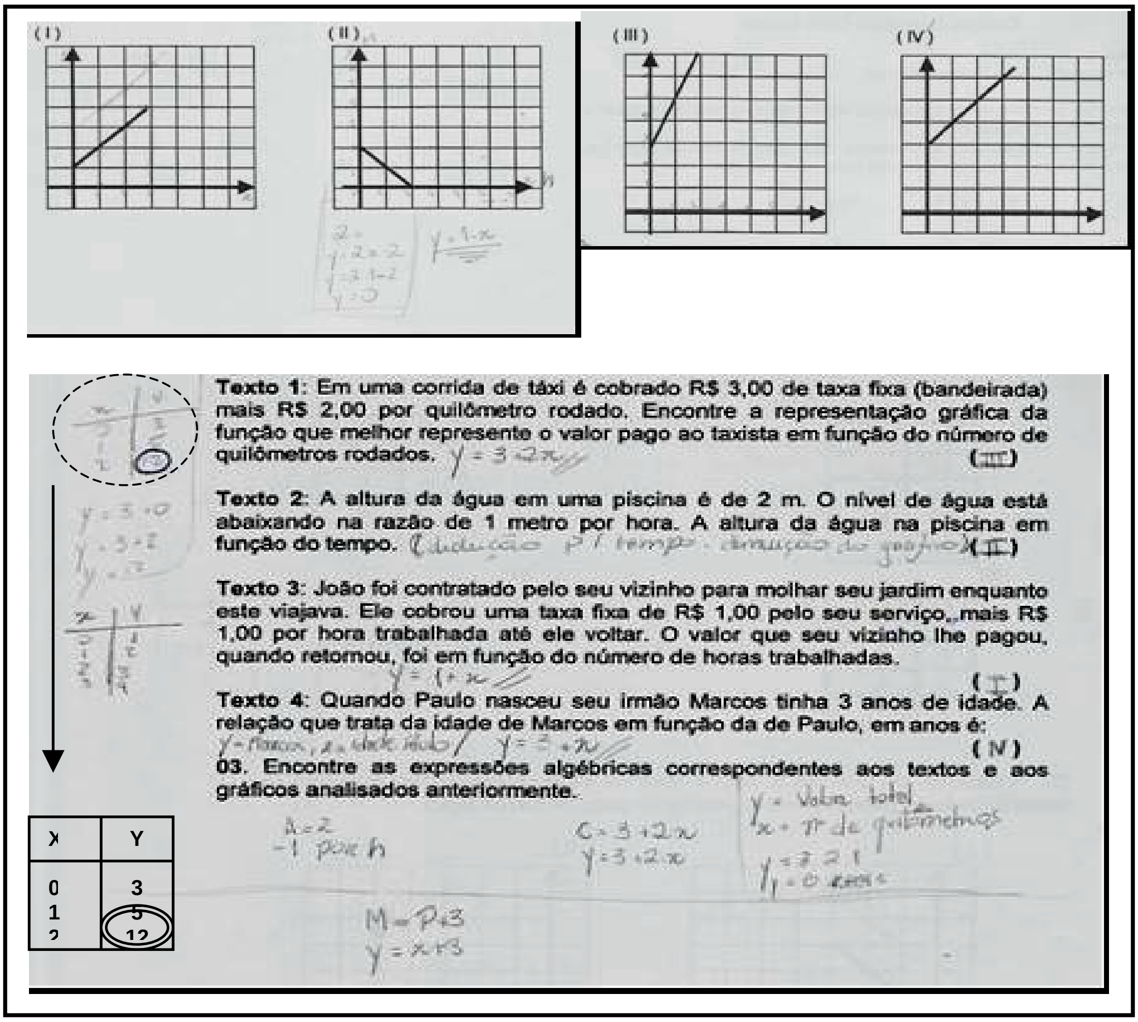
Protocolo 08: Alguns tratamentos numéricos correspondentes à 1ª questão.

(2ªQuestão)

Através da relação entre gráficos e textos verificamos que de um total de 06 alunos apenas 02 responderam a 2ª questão com sucesso e, também, apresentaram, de uma certa forma, resoluções mais elaboradas, realizando tratamentos e conversões. Lembramos que as dificuldades apresentadas já eram esperadas, pois a conversão envolvia um registro monofuncional (gráfico) e outro multifuncional (língua natural – texto)

Para Duval (2003:20), um dos fenômenos característicos da conversão está relacionado ao seu sentido. ‘’Nem sempre a conversão se efetua quando se invertem os registros de partida e chegada’’. Ainda para o autor a dificuldade é menor quando o trabalho de conversão é realizado entre o que chama de registros monofuncionais.

Podemos observar no protocolo 09, que o “aluno X” consegue percorrer as quatro representações, executando tratamentos e conversões, demonstrando assim, uma significativa apreensão do conteúdo de função.



(I) (II) (III) (IV)

Texto 1: Em uma corrida de táxi é cobrado R$ 3,00 de taxa fixa (bandeirada) mais R$ 2,00 por quilômetro rodado. Encontre a representação gráfica da função que melhor represente o valor pago ao taxista em função do número de quilômetros rodados. y = 3 + 2x (III)

Texto 2: A altura da água em uma piscina é de 2 m. O nível de água está abaixando na razão de 1 metro por hora. A altura da água na piscina em função do tempo. (II)

Texto 3: João foi contratado pelo seu vizinho para molhar seu jardim enquanto este viajava. Ele cobrou uma taxa fixa de R$ 1,00 pelo seu serviço, mais R$ 1,00 por hora trabalhada até ele voltar. O valor que seu vizinho lhe pagou, quando retornou, foi em função do número de horas trabalhadas. y = 1 + x (I)

Texto 4: Quando Paulo nasceu seu irmão Marcos tinha 3 anos de idade. A relação que trata da idade de Marcos em função da de Paulo, em anos é: y = 3 + x (IV)

03. Encontre as expressões algébricas correspondentes aos textos e aos gráficos analisados anteriormente.

X	Y
0	3
1	5
2	12

M = P + 3
y = x + 3

Protocolo 09: Mostra a coordenação de diversos registros de representação.

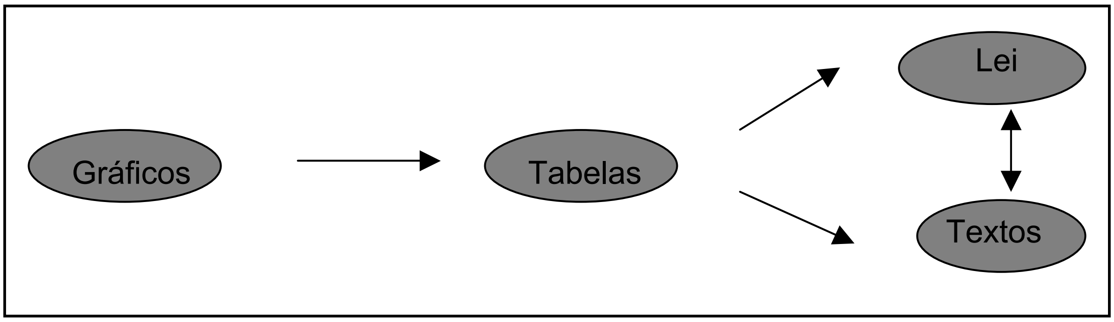


Figura 07

O esquema apresentado acima tenta traduzir o movimento desse aluno entre os diversos registros de representação.

Como a coordenação de vários registros se constitui uma condição necessária para a compreensão em matemática, podemos acreditar que o aluno citado no protocolo 09 possui uma compreensão satisfatória dessas representações essenciais do conceito de função.

Acreditamos que, para boa parte dos alunos, a limitação apresentada ao longo das transformações se fez presente não apenas no que concerne ao sentido da transformação, mas também, à dificuldade de se superar algumas formas de tratamentos, reforçando a idéia de que alguns alunos ficam restritos à algumas formas tratamentos intermediários, evidenciando o que para Duval seria uma espécie de um ‘’enclausuramento’’ dentro de um determinado registro**.**

4.5 – DESCRIÇÃO DO 5º ENCONTRO.

Esta atividade foi desenvolvida por 08 alunos, que trabalharam individualmente. Após uma atenta leitura de todos os itens e, de alguns esclarecimentos, iniciamos os trabalhos com a participação de um observador.

Alguns pontos foram questionados logo no início do encontro e, assim, pudemos observar que esta atividade contou com um maior número de solicitações, provavelmente porque as questões, além de relacionarem situações que envolviam conceitos da Física e da Matemática Financeira, exigiam uma capacidade de coordenar diferentes representantes (tabela, gráfico e a escrita algébrica).

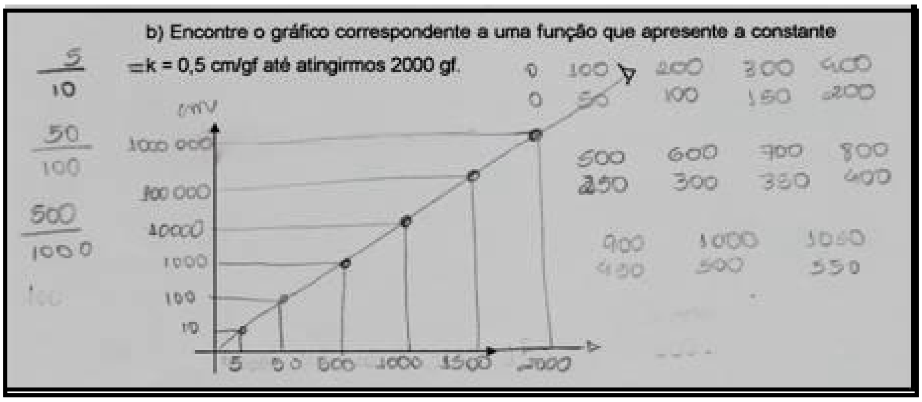
Percebemos ainda, que dois alunos se mostraram indiferentes a maior parte do tempo, talvez por terem dificuldades em algumas representações e, provavelmente com sua coordenação.

4.5.1 – ANÁLISES *A POSTERIORI* DAS ATIVIDADES (5º Encontro).

Atividade 1

A partir de uma situação envolvendo a Lei de Hooke (Função Linear), os alunos foram convidados a interpretar uma tabela de valores, analisando a variação das grandezas físicas ‘’alongamento de uma mola’’ e o ‘’peso’’ e, em seguida a construção de um gráfico. No item a) todos responderam corretamente o comportamento das grandezas, reconhecendo a relação de proporcionalidade.

No item b), alguns alunos apresentaram a representação gráfica na forma de grandezas discretas (04 alunos) e, para os demais as tentativas de construção da semi-reta esbarraram em alguns cálculos numéricos e também na interpretação desses cálculos. Podemos observar no Protocolo 10, um aluno que trabalhou corretamente a representação por tabela enquanto que a conversão para o registro gráfico não foi realizada com sucesso.



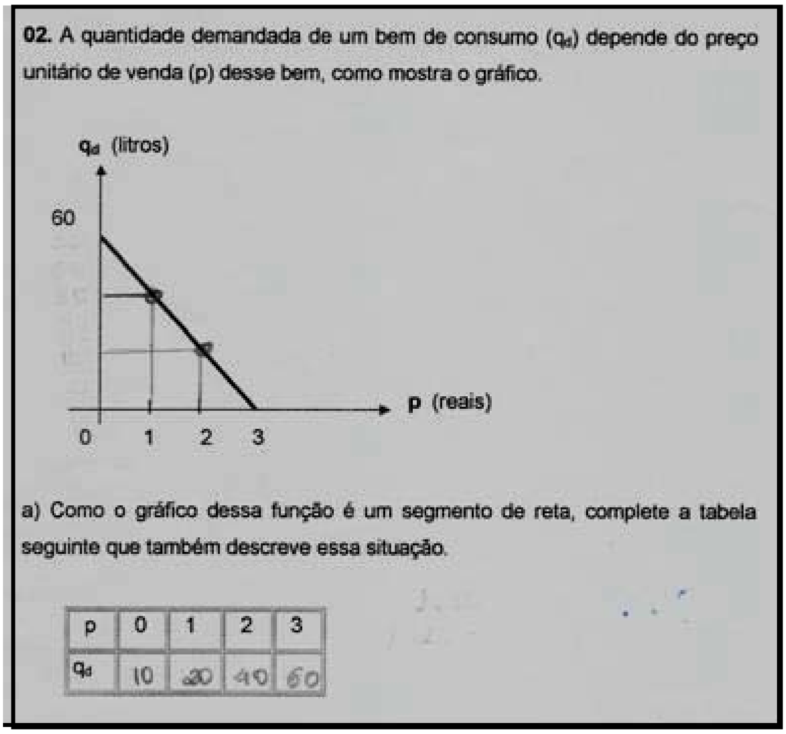
Protocolo 10: Tratamentos numéricos realizados para a construção do gráfico da função (A = k.P).

Ainda neste protocolo, percebemos uma confusão em relação ao trabalho com as variáveis dessa função. Por exemplo, se tomarmos em seu protocolo o alongamento de 500 cm, correspondente ao peso de 1000gf (conforme tabela construída pelo aluno), podemos observar que essa relação não aparece no gráfico, demonstrando um certo grau de incongruência entre os representantes e, também, a ausência de um procedimento de validação para os seus cálculos.

Para a 2ª Questão verificamos uma inversão dos valores correspondentes às grandezas p (reais) e q_d (litros) para a maioria dos alunos (06 alunos), esse procedimento não estava previsto em nossas análises a priori. No entanto, reforça nossas análises em relação à dificuldade no trabalho com o registro gráfico e sua conversão para um outro registro.

Tal dificuldade nos remete, mais uma vez, ao fenômeno de não congruência, no qual os alunos não identificam o mesmo objeto matemático a partir de diferentes representantes. Duval (1999), apresenta situações de não-congruência entre representações como um obstáculo, essa dificuldade para a conversão espontânea entre registros pode ser verificada em algumas pesquisas da área como, Catto (2000), verifica que, de modo geral as conversões não são exploradas no Ensino Fundamental tanto quanto os tratamentos. E, mesmo quando são solicitadas, geralmente, privilegiam um determinado sentido da conversão.

Um outro aspecto observado neste item foi à ausência de algum procedimento de controle, como o de validação, que pudesse resultar numa mudança de estratégia ou, até mesmo, uma reformulação dos procedimentos adotados. No protocolo 11, podemos observar como foi a interpretação desses alunos.



02. A quantidade demandada de um bem de consumo (q_d) depende do preço unitário de venda (p) desse bem, como mostra o gráfico.

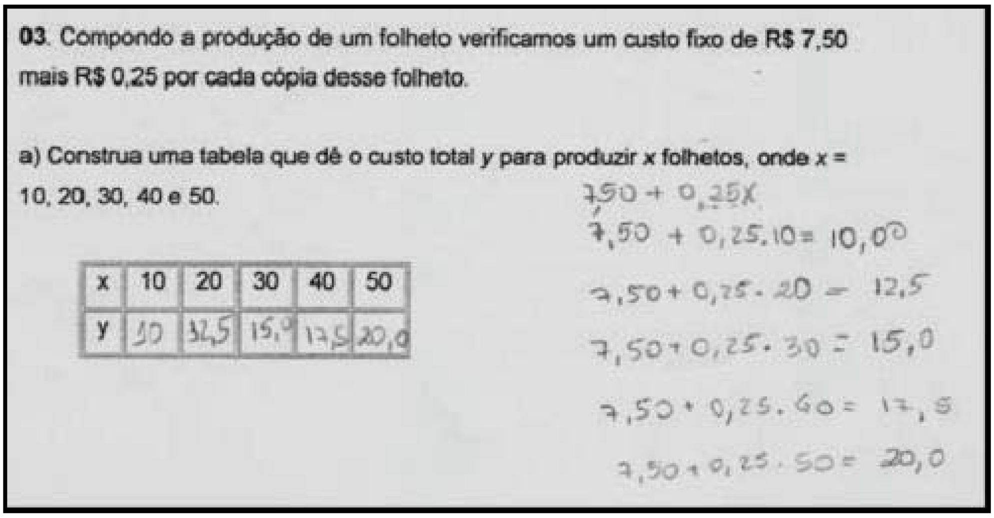
a) Como o gráfico dessa função é um segmento de reta, complete a tabela seguinte que também descreve essa situação.

p	0	1	2	3
q_d	10	20	40	60

Protocolo 11: Apresenta uma tentativa de conversão entre o registro gráfico e o de tabelas.

Na última questão (item a), analisando a conversão entre o registro da língua natural e o registro por tabelas, podemos verificar no protocolo 12, que o aluno, provavelmente, realiza primeiro, a conversão para o registro da escrita algébrica, demonstrando um bom nível de entendimento em relação a esse registro e, em seguida, realiza uma nova conversão.

Língua Natural → Escrita algébrica → Tabela



03. Compondo a produção de um folheto verificamos um custo fixo de R$ 7,50 mais R$ 0,25 por cada cópia desse folheto.

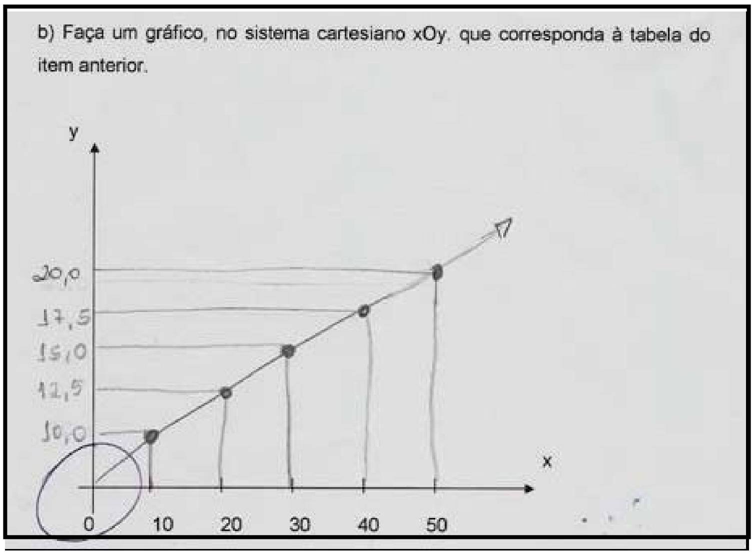
a) Construa uma tabela que dê o custo total *y* para produzir *x* folhetos, onde *x* = 10, 20, 30, 40 e 50.

x	10	20	30	40	50
y	10	12,5	15,0	17,5	20,0

7,50 + 0,25x
7,50 + 0,25.10 = 10,00
7,50 + 0,25 . 20 = 12,5
7,50 + 0,25 . 30 = 15,0
7,50 + 0,25 . 60 = 17,5
7,50 + 0,25 . 50 = 20,0

Protocolo 12: Conversão entre o registro da língua natural e o da tabela, utilizando como suporte a linguagem algébrica.

Ainda nesta atividade, podemos identificar no protocolo 13 uma tentativa de construção do gráfico (uma função afim), envolvendo as grandezas x e y, em que o aluno realizou com sucesso os tratamentos e as conversões envolvendo as representações algébrica, de tabela e o texto, mas, no que diz respeito à conversão para o registro gráfico algumas características desse registro como a intersecção do gráfico com o eixo das ordenadas e a inclinação da reta.



Protocolo 13: Tentativa de construção entre a representação por tabela e o gráfico de uma função afim.

4.6 – DESCRIÇÃO DO 6º ENCONTRO.

Demos início à última sessão desenvolvendo um trabalho prévio sobre porcentagem. Mesmo sem ter previsto tal procedimento em nossas análises *a priori*, optamos por essa mudança de rota, esperando que os dados coletados pudessem enriquecer nossos resultados.

O trabalho de coleta de dados ocorreu em dois momentos.

Primeiro, a aplicação da atividade foi realizada com uma sala de aula em horário normal (período matutino). Por causa da ausência de uma professora, a supervisora nos fez o convite e se prontificou para auxiliar na observação dos trabalhos.

A atividade foi aplicada para um grupo de 41 alunos, dos quais 03 haviam participado assiduamente de nossa seqüência didática. Os alunos foram separados em 19 duplas e um grupo de 03 alunos e, um integrante de cada grupo foi escolhido, por eles, para registrar os trabalhos. Orientamos os alunos para que utilizassem a calculadora.

Ao longo da exposição sobre porcentagem nenhum questionamento foi feito pela classe em relação ao assunto; acrescentei mais alguns exemplos e, em seguida, de posse do material: lápis, papel, régua e calculadora; iniciaram os trabalhos, ocupando um tempo máximo de 50 minutos.

O segundo momento, agora no horário vespertino, contou com a participação de mais 03 alunos que já estavam trabalhando na seqüência. Os trabalhos foram conduzidos com mesma dinâmica relatada acima, porém, em função do número reduzido de alunos optamos pelo trabalho individual.

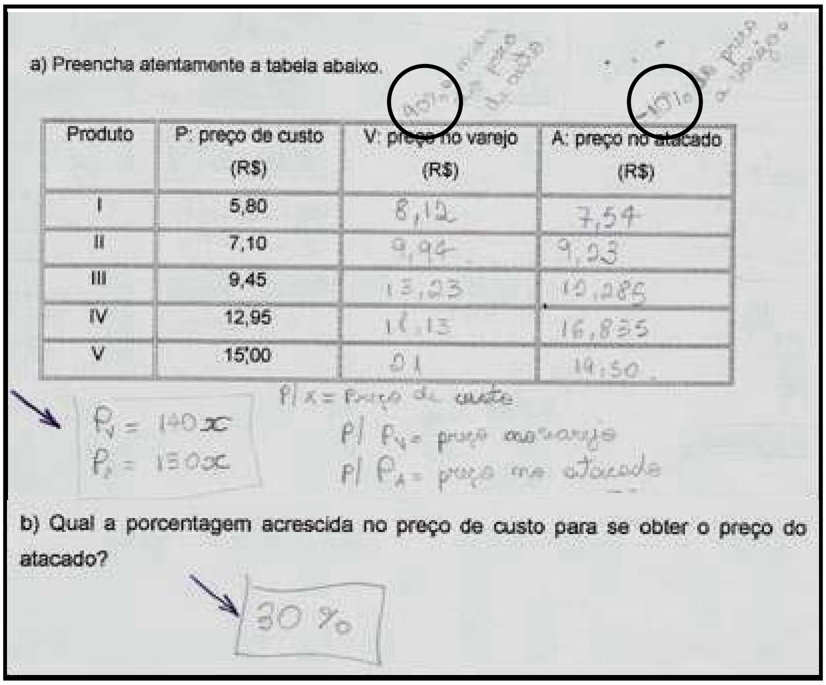
4.6.1 – ANÁLISES *A POSTERIORI* DAS ATIVIDADES (6º Encontro).

Atividade 1

Alguns alunos questionaram os valores decimais informados, manifestando sua dificuldade de tratamento com essa representação. No entanto, como era permitido o uso de calculadoras, a maioria foi capaz de realizar os cálculos.

Podemos observar nos protocolo 14 e 15, a produção de dois alunos em que os cálculos numéricos foram realizados com sucesso, porém, para os tratamentos relacionados à porcentagem a eficiência não foi a mesma. Para a maior parte dos alunos, aumentar em 40% e depois, deste resultado, diminuir em 10%, significou aumentar em 30% e, não, em 26%.

Acreditamos que tal dificuldade se justifique, na medida em que induzimos esses alunos a um trabalho que envolvia função composta, o que normalmente não é trabalhado nesse nível de escolaridade. Podemos observar no protocolo 14, a tentativa de transformação entre a representação por tabelas e a escrita algébrica apresentada por uma dupla, com os valores que julgavam estar correto.


a) Preencha atentamente a tabela abaixo.

Produto	P: preço de custo (R$)	V: preço no varejo (R$)	A: preço no atacado (R$)
I	5,80	8,12	7,54
II	7,10	9,94	9,23
III	9,45	13,23	12,285
IV	12,95	18,13	16,835
V	15,00	21	19,50

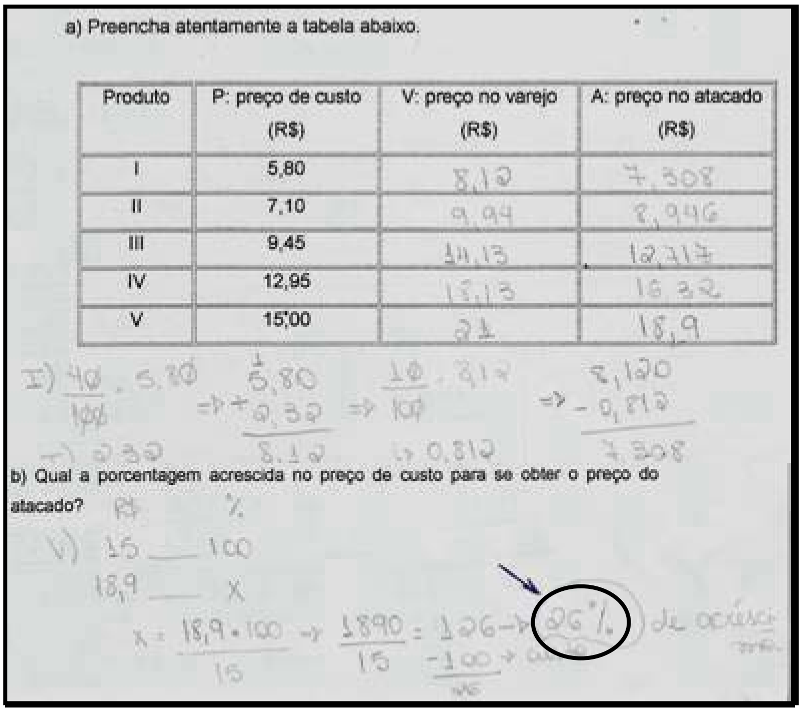
P/ x = Preço de custo
$P_V = 140x$
$P_A = 130x$
P/ P_V = preço no varejo
P/ P_A = preço no atacado

b) Qual a porcentagem acrescida no preço de custo para se obter o preço do atacado?

30 %

Protocolo 14: Mostra uma compreensão equivocada de uma dupla para o preenchimento da tabela (preço no atacado).

Enquanto que, para a outra dupla, a representação numérica, na forma de porcentagem, parecia disponível. Conforme podemos verificar no protocolo 15, a conversão para a representação algébrica não aconteceu; apesar de terem realizado com sucesso o tratamento que envolvia a linguagem de porcentagem.



a) Preencha atentamente a tabela abaixo.

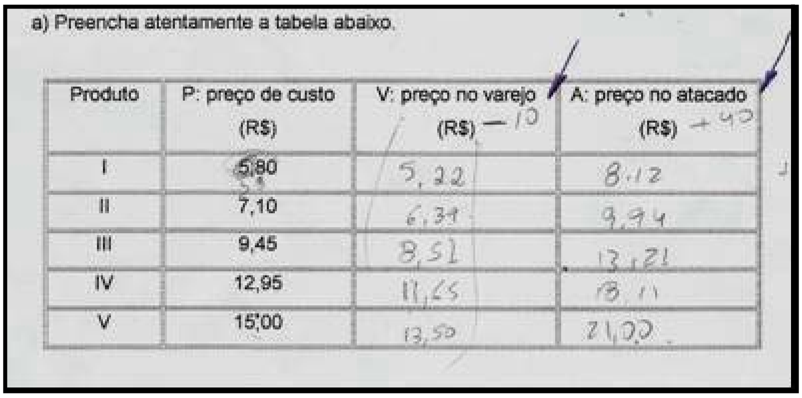
Produto	P: preço de custo (R$)	V: preço no varejo (R$)	A: preço no atacado (R$)
I	5,80	8,12	7,308
II	7,10	9,94	8,946
III	9,45	13,13	12,717
IV	12,95	18,13	16,32
V	15,00	21	18,9

b) Qual a porcentagem acrescida no preço de custo para se obter o preço do atacado?

Protocolo 15: Mostra o entendimento de uma dupla ao preencher corretamente a tabela (preço no atacado).

Ainda nesta atividade, pudemos constatar que boa parte dos alunos apresentou dificuldade em relação à conversão que envolveu o registro da língua natural e o registro por tabela. No protocolo 16, nos chama a atenção o fato de 40% das duplas (18 alunos) não terem sido capazes de realizar a referida conversão. Observemos que a aplicação das porcentagens seguiu a seqüência dos valores informados no enunciado e não o contexto do problema.

Para Duval, essa dificuldade se justifica por se tratar de um registro multifuncional (língua natural) e outro monofuncional (numérico-tabelas) e, nos lembra que problemas de compreensão dos mais simples enunciados em língua natural, envolvem um conjunto complexo de operações para designar os objetos (Duval 1995, pp. 98-110)

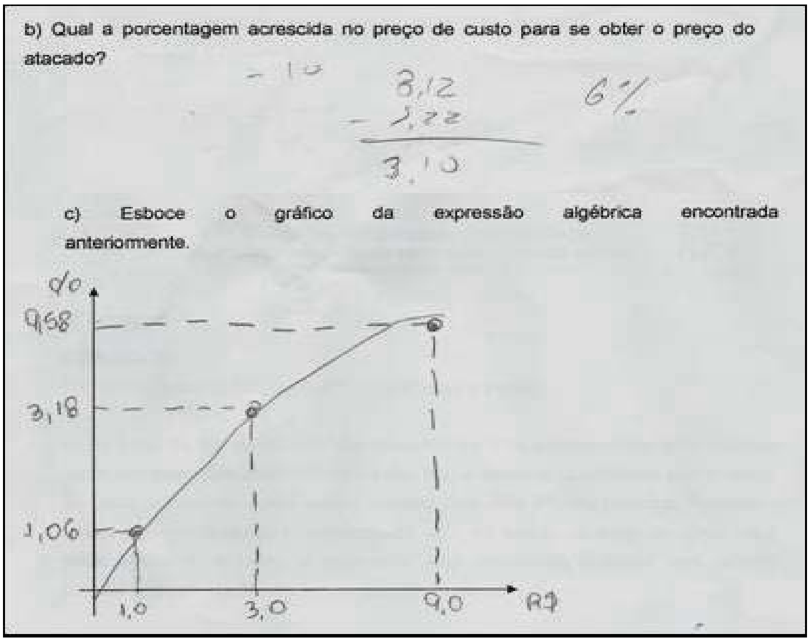


a) Preencha atentamente a tabela abaixo.

Produto	P: preço de custo (R$)	V: preço no varejo (R$) — 10	A: preço no atacado (R$) + 40
I	5,80	5,22	8,12
II	7,10	6,39	9,94
III	9,45	8,51	13,21
IV	12,95	11,65	18,11
V	15,00	13,50	21,00

Protocolo 16: Aplicação incorreta de porcentagem.

Apesar de não ter realizado a conversão anterior, a mesma dupla foi a única a esboçar um gráfico com alguma coerência. Podemos observar no protocolo 17 que, a relação de porcentagem encontrada pela dupla, aparece no gráfico a partir de um tratamento aritmético realizado com sucesso.



b) Qual a porcentagem acrescida no preço de custo para se obter o preço do atacado?

– 10

$$\begin{array}{r} 8,12 \\ -\ 5,22 \\ \hline 3,10 \end{array}$$

6%

c) Esboce o gráfico da expressão algébrica encontrada anteriormente.

Protocolo 17: Tentativa de construção do gráfico para o item c.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O referencial teórico adotado nesta pesquisa se mostrou pertinente na medida em que pudemos compreender melhor o processo de ensino e aprendizagem, no que diz respeito ao estudo de função do 1º grau. Foi possível identificar e analisar uma grande variedade de registros de representação, bem como dificuldades, tanto no nível dos tratamentos internos aos registros, como nas conversões de um registro para um outro.

Tal postura também nos fez refletir sobre concepções e dificuldades enfrentadas por alunos no início do Ensino Médio, em torno do conceito de *função do 1º grau*, na perspectiva de investigar o trabalho desses alunos, frente à diversidade de sistemas de linguagens e da necessidade de coordená-los, ao longo do processo de aprendizagem, para tornar possível a apreensão desse conteúdo.

Desse modo, ao optarmos por uma abordagem cognitiva do nosso problema, voltamos nossos olhares para questões que proporcionassem um maior conhecimento dessas formas de linguagens, e também, do processo de mobilização desses registros.

Tal abordagem exigiu, primeiramente, uma maior aproximação do processo de surgimento e evolução dessas formas de linguagens e, nesse sentido, nossa primeira etapa da pesquisa foi realizar um resgate histórico e uma análise de alguns livros didáticos por nós selecionados.

No que concerne aos livros didáticos, como observamos anteriormente, eles consideram as formas de representações tratadas nesta pesquisa, contudo, verificamos em alguns trabalhos que as transformações (por tratamento e conversão) oportunizadas pelas atividades, poderiam ser exploradas com uma maior variedade de representantes. Por exemplo, alguns autores trabalham determinadas formas de representação de maneira excessiva. Acreditamos que tal procedimento possa prejudicar o entendimento do aluno em relação ao objeto função do 1º grau, principalmente no que diz respeito à diferenciação do objeto representado e de seus possíveis representantes.

Como vimos anteriormente, a compreensão matemática depende da utilização de dois ou mais registros de representação e, nesse sentido, é preciso observar nessas transformações a diferença entre objeto representado e o próprio objeto matemático. Para Duval, “passar de um registro de representação a outro não é somente mudar de modo de tratamento, é também explicar as propriedades ou aspectos diferentes de um mesmo objeto” (Duval, 2003, p.22).

Os resultados das análises dos livros didáticos também se apresentaram significativos na medida em que pudemos reforçar nossas análises preliminares, no que diz respeito às representações utilizadas no Ensino Fundamental, e interpretar os resultados de um teste diagnóstico, verificando que as dificuldades dos alunos se mostravam variadas e crescentes, dependendo da complexidade da atividade e da diversidade de representações trabalhadas.

Nesse sentido, procuramos considerar na construção de nossa seqüência didática, situações que permitissem, a partir de uma apresentação mais operacional do conceito de função, a mobilização de diferentes registros de representação. E, assim, acreditamos que a aplicação e análise da seqüência de atividades nos permitiram uma visão mais ampla do nosso problema e, dessa maneira, responder as questões colocadas no início de nossa pesquisa:

- Quais as representações mobilizadas nesse nível de escolaridade?
- Tendo disponíveis tais representações, até que ponto são capazes de realizar transformações entre registros ou, ainda, efetuar articulações entre os mesmos?

Ao propormos situações que, de modo geral, envolveram transformações por tratamento e conversão dos registros gráfico, algébrico, da língua natural e linguagem por tabela pudemos relacionar os mesmos com o referencial teórico de Duval, na tentativa de compreender melhor o desenvolvimento cognitivo desses alunos e, dessa forma, tentar enxergar o processo de ensino e aprendizagem da matemática a partir de uma vertente que contemple não só a questão da diversidade de registros, mas, também, sua coordenação diante de problemas diversificados; sobretudo no que diz respeito às atividades cognitivas envolvidas nesse movimento.

E, dessa forma, acreditamos que o modelo teórico proposto por Duval, tem se apresentado como um referencial capaz de tratar das questões relativas ao funcionamento cognitivo dos alunos, e também, de alguns fenômenos ligados ao processo de aprendizagem; mais especificamente no caso das transformações realizadas ao longo dos registros desses alunos.

Dentre eles, pudemos observar ao longo da aplicação de nossa seqüência didática, aqueles relativos à conversão como: a não equivalência dos sentidos da conversão e a não-congruência das diferentes representações de um mesmo objeto matemático.

Concordamos com Duval quando diz que, problemas relativos ao ensino e aprendizagem da matemática ocorrem em boa parte por não levarmos em consideração as atividades cognitivas envolvidas nas conversões. Assim, uma significativa apreensão do conceito de função do 1º grau não deve estar apenas relacionada à diversidade de representações, mas, também, às várias possibilidades de coordenação dessas representações.

No capítulo IV, analisamos alguns recortes das produções de alunos que participaram da aplicação dos três conjuntos de atividades ou de parte deles. Adiante apresentaremos algumas conclusões extraídas dessas produções, considerando também, as discussões e reflexões promovidas durante os encontros e as fichas de observação por nós utilizadas.

Passamos agora a expor uma reflexão sobre os dados coletados, visando à validação interna de nossa engenharia, através da confrontação de nossas análises *a priori* e a *posteriori* para os três conjuntos de atividades.

Para o primeiro conjunto de atividades buscamos, inicialmente, mobilizar as formas de representação (tabelas, escrita algébrica e gráfico), a partir de situações que promovessem, não só a análise de processos de generalizações, como também a investigação dos conhecimentos desses alunos.

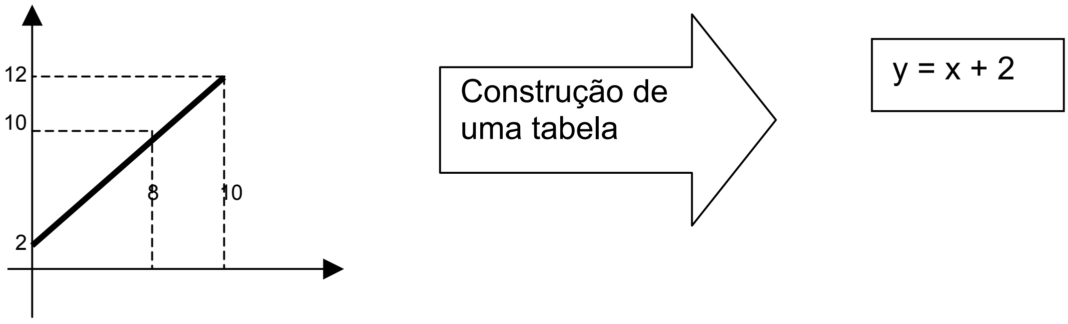
Durante a elaboração de nossa seqüência didática, foram mobilizadas algumas variáveis de comando. Em relação à escolha dessas variáveis tivemos, para as duas primeiras atividades, uma preocupação com os Conjuntos Numéricos e, também, com a continuidade das grandezas trabalhadas. Entendemos que tais questões foram contempladas em nossas análises *a priori* e confirmadas pelas análises *a posteriori*. Assim, com a aplicação da terceira atividade desse conjunto, pudemos constatar que a associação de valores inteiros para uma determinada variável pode gerar dificuldades de entendimento sobre a continuidade ou não da mesma.

Ainda para esse conjunto de atividades, nossas análises *a posteriori* reforçaram a idéia de que uma apresentação mais operacional do conceito de função pode permitir aos alunos terem maiores possibilidades de tratamento das variáveis, potencializando conversões no interior dos registros e, principalmente, entre os registros.

Entretanto, durante a aplicação do segundo conjunto de atividades, percebemos também, a necessidade de uma maior formalização de algumas formas de representação, como por exemplo, o caso da linguagem gráfica e a língua natural.

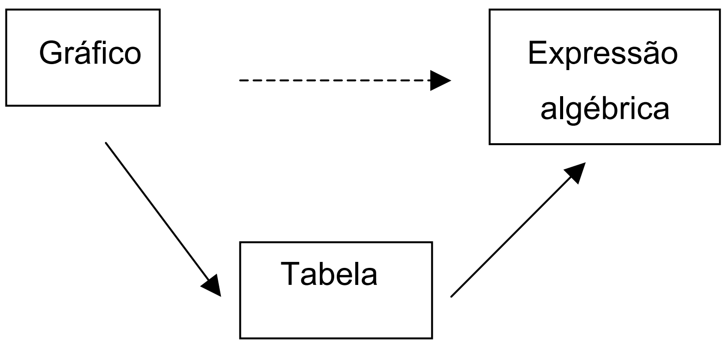
Para esse nível de escolaridade, acreditamos que as conversões a partir do registro da língua natural ou do registro gráfico parecem estar, quase sempre, ligadas a situações de não-congruência, dificultando o processo de conversão de um determinado registro para um outro qualquer.

Por exemplo: Na passagem de um registro gráfico para outro na escrita algébrica, percebemos a necessidade de se trabalhar primeiramente a representação por tabelas como suporte. Para esses alunos, elementos gráficos como coeficientes linear e angular se mostraram praticamente inexistentes.



Em relação ao terceiro conjunto de atividades o sucesso dos alunos, ao longo das conversões, esteve diretamente ligado a disponibilidades de diferentes representantes.

A utilização de transformações intermediárias parece que se apresentou como condição necessária para que os problemas propostos em nossa seqüência didática pudessem ser resolvidos. No exemplo anterior, podemos citar a recorrência do uso da linguagem por tabelas, como uma forma de validação e, também, como tentativa de conversão entre o registro gráfico e o algébrico.



(transformação que, em geral, apresentou um maior grau de não-congruência).

Nesse sentido, podemos dizer que a diversidade de representações e as transformações trabalhadas na seqüência didática contribuíram para que nossos questionamentos fossem respondidos ou, pelo menos, explorados com maior profundidade. Pode-se dizer que o objetivo desta pesquisa, que era de investigar dificuldades de alunos frente à diversidade de representações do conceito de função, foi alcançado na medida em que pudemos constatar que, de um modo geral, os alunos nesse nível de escolaridade não vem demonstrando um domínio satisfatório para algumas formas de representação.

Percebemos também, ao longo da aplicação da seqüência didática, que o entendimento sobre o conceito de função do 1º grau desses alunos poderia ser classificado, inicialmente, segundo dois níveis de complexidade. O primeiro, mais pragmático, em que o trabalho dos alunos se resume a algumas formas de tratamentos e tentativas de generalização, apresentando limitações quanto à disponibilidade de algumas representações que, em alguns casos, acabam inviabilizando qualquer possibilidade de conversão. E um segundo, que demonstrou um entendimento mais elaborado, superando tratamentos numéricos e algébricos e, realizando algumas conversões. Isso nos fez acreditar que algumas formas de linguagens se mostraram disponíveis para esse grupo e que, assim, foram capazes de proporcionar situações mais elaboradas, no que diz respeito ao tratamento das informações e conversões entre registros.

É importante destacar que essa distinção levou em consideração as representações mobilizadas pelos alunos durante a seqüência didática e, também, que a distinção entre os dois grupos foi se constituindo a medida em que os alunos foram avançando nas atividades propostas e, assim, suas concepções e dificuldades foram aparecendo progressivamente. Dificuldades que acreditamos, estejam diretamente relacionadas à diversidade de representações que a matemática impõe para acessarmos objetos matemáticos e, assim, nos permitiu construir nossa opinião quanto ao entendimento dos dois grupos.

É claro que poderíamos pensar em níveis de entendimento intermediários, no entanto, fizemos a opção por análise mais simplificada, podendo ser objeto de estudo para outros trabalhos, com uma exploração mais detalhada dos mesmos.

Pensamos que nossas considerações vêm corroborar outros resultados de pesquisas da área e, assim, esperamos estar contribuindo com alguns elementos didáticos que favoreçam a elaboração de atividades matemáticas que visem, não apenas as transformações entre os registros, mas, também, uma exploração mais intensa do funcionamento cognitivo dos alunos diante dessas transformações, diferentemente, do ensino tradicional que geralmente privilegia algumas formas de representação ou apresentam conversões que levam em conta apenas um dos sentidos da transformação.

Desse modo, julgamos importante deixar como sugestão para professores que estejam envolvidos com o trabalho de ensino e aprendizagem da matemática em sala de aula, que proponham atividades que levem em consideração não apenas a diversidade de representações semióticas, mas, também sua coordenação, através de atividades que contemplem tais fenômenos cognitivos. Essa não é uma tarefa fácil, pois demanda por parte do professor, um profundo conhecimento dessas representações. Exige também, uma conduta investigativa do processo de aprendizagem, principalmente, no que diz respeito ao entendimento do funcionamento cognitivo dos alunos.

Dessa forma, ao pensarmos em um trabalho pedagógico com o conceito de função que possa favorecer a aprendizagem, precisamos estar atentos a alguns elementos didáticos que possibilitem uma apreensão mais eficaz desse objeto e, nesse sentido, deixamos como sugestão aos professores:

- Primeiramente, que se promova situações que tratem da familiarização de grandezas e, assim, os alunos possam construir generalizações percebendo as letras como variáveis. Nesse estágio, as conversões já se constituem como uma atividade cognitiva necessária e fundamental para que o aluno possa transitar, por exemplo, entre os registros de tabelas, figural e algébrico.

- Em seguida, pensamos que as atividades desenvolvidas não devem privilegiar uma determinada representação, o que

> resultaria em prejuízos para conversões futuras. Entendemos que ao proporcionarmos aos alunos essa diversidade de representações, no ensino de função, o professor não só, amplia a capacidade de argumentação e tratamentos dos seus alunos, como também, os potencializa para um trabalho futuro de coordenação das mesmas, permitindo que processos de validação dos procedimentos possam ser instaurados e articulados pelos próprios alunos.

Acreditamos que a apresentação de atividades matemáticas, que considerem tais aspectos, poderá proporcionar uma maior conteúdo a ser ensinado, não apenas no que diz respeito às transformações que o aluno pode executar, mas também, de uma apropriação da linguagem matemática que seja mais significativa e duradoura ao longo de todo o Ensino Médio.

Entendemos ainda que tais dificuldades, relacionadas às conversões, poderiam ser minimizadas a partir de uma exploração mais efetiva desses fenômenos cognitivos e, no caso dos tratamentos, poderíamos pensar num maior detalhamento das regras de tratamentos e condutas internas a cada registro.

Contudo, é preciso observar também que, dificuldades relativas aos registros de representação semiótica não se apresentam apenas aos alunos da 1ª série do Ensino Médio, pelo contrário, estudos indicam que mesmo os alunos concluintes desse período escolar, têm demonstrado dificuldades para a utilização e coordenação desses registros, (Duval, 2003).

Dessa forma, se faz necessário pensar que o prosseguimento desta pesquisa, a partir de um olhar que contemple todas as séries do Ensino Médio, em torno do objeto de função, possa levantar discussões e reflexões que sirvam de aporte teórico e metodológico para subsidiar práticas pedagógicas relativas a esse conceito fundamental da matemática.

Enfim, nossas conclusões apontam para a necessidade de se construir uma base consistente, no que diz respeito à diversidade de linguagens dos objetos matemáticos, procurando identificar as representações mobilizadas pelos alunos e, explorá-las dentro de seus respectivos registros sob uma perspectiva que não se restrinja ao corpo dos conteúdos matemáticos ou à sua história, mas, como Duval nos alerta; que contemple uma abordagem cognitiva, contribuindo para o desenvolvimento de suas habilidades relativas ao raciocínio, análise e interpretação.

.

BIBLIOGRAFIA

ARTIGUE, Michele. Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 9, nº 3, pp. 281-307. Grenoble : La Pensée Sauvage, 1990.

BLECUA, José Manuel. Lingüística e Significação. Rio de Janeiro. Salvat Editora do Brasil, 1979.

BIGODE, Antonio José Lopes. Matemática hoje é feita assim. Editora FTD, 2000.

BOYER, Carl B. História da Matemática. São Paulo. Ed. Edgard Blücher Ltda, 1974.

BRAGA, Ciro. O Processo inicial de disciplinarização de função na Matemática do Ensino Secundário brasileiro. Dissertação de Mestrado. PUC/SP. São Paulo, 2003.

BRASIL. Secretaria de Educação e Tecnologia do Ministério da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacional para o Ensino Fundamental.* Brasília: SEMT/MEC. 1998.

BRASIL. Secretaria de Educação e Tecnologia do Ministério da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacional para o Ensino Médio.* Brasília: SEMT/MEC. 1999.

BROUSSEAU, Guy. Fondemens et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol. 7, nº 2, pp. 33-115. La Pensée Sauvage, 1986.

CÂNDIDO, Suzana Laino. Uma Aprendizagem sobre o Ensino e a Aprendizagem de Funções. *Educação Matemática em Revista.* São Paulo. SBEM, 2000, p. 47 – 56.

CATTO, G. Registros de representação e o número racional: Uma abordagem em livros didáticos. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. PUC/SP. São Paulo, 2000.

CHARNAY, Roland. Aprendendo (com) a resolução de problemas. *Didática da Matemática. Reflexões Psicopedagógicas.* Ed. Artes Médicas. Porto Alegre, 1996.

COXFORD, A. F. e SHULTE, A. P. – As Idéias da Álgebra, São Paulo. Editora Atual, 1994.

DAMM Regina Flemming. Registros de Representação. *Educação Matemática: uma introdução*. São Paulo. EDUC, 1999, p.135 -153.

DUVAL, Raymond. Sémiosis et pensée humaine*. Registres semiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang. S.A. Suisse: Editions scientifiques européennes, 1995.

DUVAL, Raymond. Aprendizagens intelectuais. Caderno do curso ministrado na PUC-SP, Fevereiro de 1999.

DUVAL, Raymond. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. *Aprendizagem em Matemática.* Ed. Papirus, 2003, p.11 – 34.

EVES, Howard – Introdução à História da Matemática. Editoca da Unicamp, Campinas, 1997.

FREITAS, José Luiz Magalhães. Situações Didáticas. *Educação Matemática:Uma Introdução*. São Paulo: EDUC, 1999. p. 65-87.

FREITAS, José Luiz Magalhães. Registros de Representação na Produção de Provas na Passagem da Aritmética para a Álgebra. *Aprendizagem em Matemática*. Ed. Papirus, 2003, p.113 – 124.

GIOVANNI, J.R. & PARENTE, E. – Aprendendo Matemática. Editora FTD, 2000.

IEZZI, Gelson et al. Matemática e Realidade. Ed. Saraiva/Ed. Atual, 2000.

IMENES, L.M.P. & LELLIS, M.C.T. Matemática para todos. Editora Scipione, 2002.

LIMA, E.L. et al. Exame de Textos: Análise de Livros de Matemática para o Ensino Médio. Rio de Janeiro. SBM, 2001.

LÜDKE, Menga. e ANDRÉ, Marli. E. D. A. Pesquisa em Educação: Abordagens qualitativas. E.P.U. São Paulo, 1986.

MACHADO, Nilson José. Matemática e Realidade. Ed. Cortez, 2001.

MACHADO, Silvia Dias Alcântara. Engenharia Didática. *Educação Matemática: Uma Introdução.* São Paulo: EDUC, 1999. p. 197-212.

MINAYO, Maria Cecília, org. Pesquisa Social. Petrópolis. Editora Vozes, 1998.

PAIS, Luis Carlos. Didática Francesa da Matemática. Belo Horizonte. Editora Autêntica, 2001.

PELHO, Edelweiss Benez Brandão. Introdução ao Conceito de Função: A Importância da Compreensão das Variáveis. Dissertação de Mestrado. PUC/SP. São Paulo, 2003.

PEIRCI, Charles Sanders. Semiótica e Filosofia. São Paulo: Editora Cultrix, 1972.

PNLD – Guia de Livros Didáticos 2005 – Volume 3 – 5ª a 8ª séries.

SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. *Proposta curricular para o ensino da Matemática - 2º grau.* São Paulo: SE/CENP, 1995.

SILVA, Benedito Antônio. Contrato Didático. *Educação Matemática: Uma Introdução*. São Paulo: EDUC, 1999. p. 43-64.

SIMÕES, Maria Helena Pinedo. Uma Seqüência para o Ensino/Aprendizagem de Função do 2º Grau. Dissertação de Mestrado. PUC/SP, São Paulo, 1995.

ANEXOS

1 – Teste Diagnóstico

01.Considere as grandezas x e y que variam de acordo com as informações as informações a seguir:

x	1			-5		15	20
y	4	-6	10		22		42

a) Você deverá preencher os espaços da tabela abaixo.

b) Encontre a relação entre os valores das grandezas x e y.

Resp.:____________________

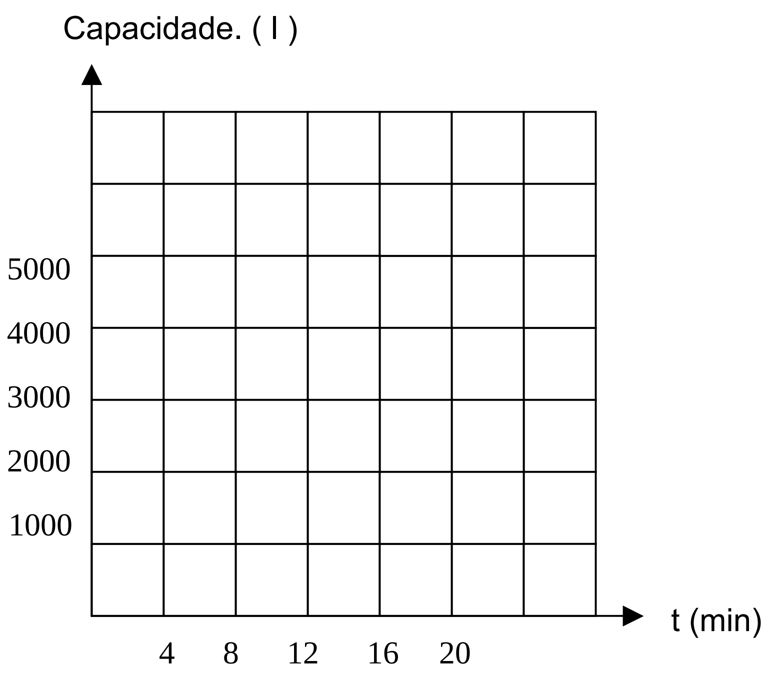
02. Uma caixa de água de capacidade 5000 l está vazia. Um registro é aberto e a caixa enche a uma vazão de 250 l/min. O registro é imediatamente fechado ao atingir a capacidade total da caixa.

a) Em quanto tempo (min.) a caixa se encherá?

Resp.:

b) Complete a tabela em relação à capacidade da caixa d'água em litros e construa um gráfico que relaciona a capacidade de água na caixa e o tempo de enchimento.

Tempo(min)	Capacidade(l)
0	
1	
2	
3	
4	
8	
12	
16	
20	



c) É possível escrever uma equação que relacione a quantidade de água na caixa em relação ao tempo? Qual é essa relação?

Resp.:

03. A troposfera, que é a primeira camada da atmosfera, estende-se do nível do mar até a altitude de 40000 pés; nela, a temperatura diminui 2°C a cada aumento de 1000 pés na altitude. Suponha que em um ponto A, situado ao nível do mar, a temperatura seja de 20°C. Pergunta-se:

a) Em que altitude, acima do ponto A, a temperatura é de 0°C ?

Resp.:

b) Qual é a temperatura a 35000 pés acima do mesmo ponto A ?

Resp.:

2 – PRIMEIRO CONJUNTO DE ATIVIDADES:

Atividade 1:

Material utilizado: lápis, borracha e papel quadriculado.

01. Estamos convidando você a participar de um jogo que consiste em tentar adivinhar o que o outro está pensando. Vocês me falam um número e eu respondo outro. Ao final, vocês deverão dizer o que eu pensei para modificar cada número dito por vocês.

a) Preencha atentamente as tabelas a seguir de acordo com os valores tratados.

I

Vocês					
Eu					

II

Vocês					
Eu					

III

Vocês					
Eu					

IV

Vocês					
Eu					

b) Com base nas tabelas anteriores você deverá construir, no papel quadriculado, os gráficos correspondentes a cada situação.

c) Comparando o que foi preenchido nas tabelas e os seus gráficos, responda o que eu estava pensando em cada situação, ou seja, a expressão algébrica correspondente a cada situação.

I: _______________ II: _________________

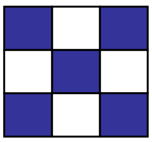
III:_______________ IV:_________________

Atividade 2:

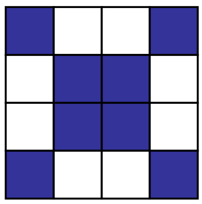
Material utilizado: lápis, borracha e papel milimetrado.

02. Responda as questões a seguir observando as seqüências de figuras abaixo:

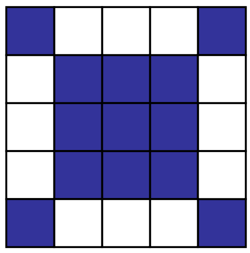
(1)



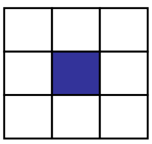
(2)



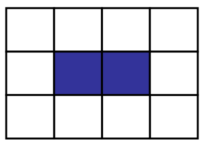
(3)



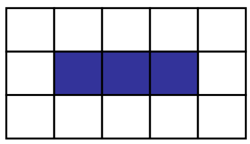
(1)



(2)



(3)



a) Construa no papel milimetrado um desenho que corresponda à 4ª figura de cada seqüência.

b) De acordo com as seqüências preencha a tabela a seguir:

(1ª seqüência)

Nº de ordem Da figura	Nº de □	Nº de ■	Total de quadradinhos
1ª			
2ª			
3ª			
4ª			
10ª			
nª			

(2ª seqüência)

Nº de ordem Da figura	Nº de □	Nº de ■	Total de quadradinhos
1ª			
2ª			
3ª			
4ª			
10ª			
nª			

c) Observando a sucessão de figuras e o preenchimento das tabelas, decida quantos quadradinhos escuros e brancos tem a 12ª figura (sem construí-la) para cada seqüência.

Resp.:

d) Esboce, no papel milimetrado, o gráfico que representa a variação do número de quadradinhos brancos com o número de ordem da figura.

Atividade 3:

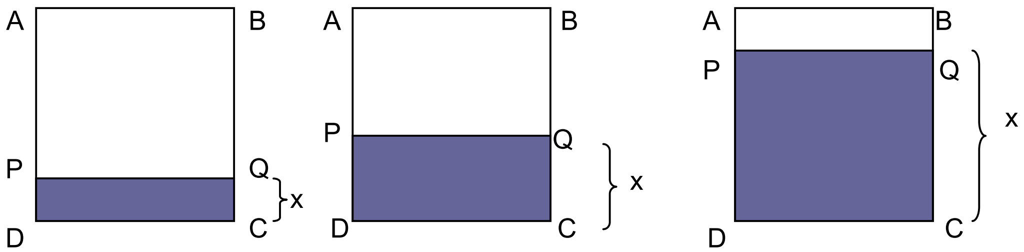
Material utilizado: Lápis, borracha e papel milimetrado.

01. O quadrado ABCD tem lado de 5 cm. O ponto P se move de D para A, de modo que PQ se conserva paralelo a AB.

a) Calcule a área da figura sombreada para x = 1,2,3,4 e 5 em cm e indique os resultados na tabela a seguir:

b)

x	Área do retânguloPQCD
1	
2	
3	
4	
5	



b) Encontre a expressão algébrica que determina a área do retângulo em função de x.

Resp.:

c) Represente essa dependência descrita na expressão algébrica acima, num gráfico cartesiano. (Utilize o papel milimetrado)

3 – SEGUNDO CONJUNTO DE ATIVIDADES:

Atividade 1:

Material utilizado: Lápis, borracha e papel.

01. Observe atentamente as expressões algébricas e as tabelas a seguir e responda as questões abaixo.

a) Identifique a tabela que se relaciona com cada expressão algébrica, descrevendo os procedimentos utilizados para tal associação.

I) $y = 2x + 3$ ( )   II) $y = x - 3$ ( )   III) $y = 2 - x$ ( )   IV) $y = x + 1$ ( )

Tabelas:

(1)

x	Y=f(x)
10	23
11	25
15	33
20	43

(2)

x	y=f(x)
2	3
4	5
5	6
7	8

(3)

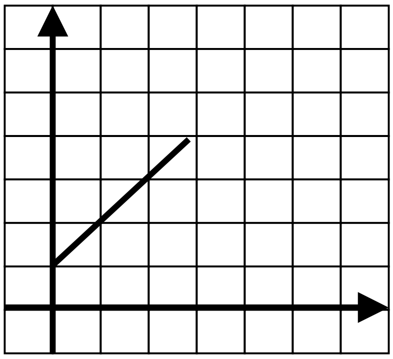
x	Y=f(x)
1	-2
2	-1
3	0
4	1

(4)

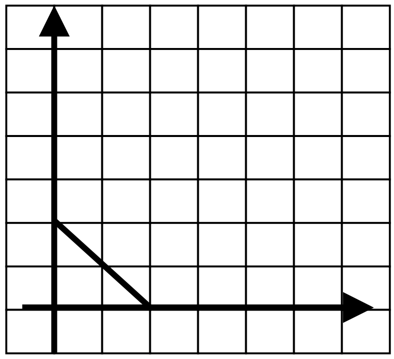
x	y=f(x)
-2	4
-1	3
0	2
1	1

02. (1ªParte) Relacione os gráficos a seguir com os seus textos correspondentes, descrevendo os procedimentos utilizados para tal associação.

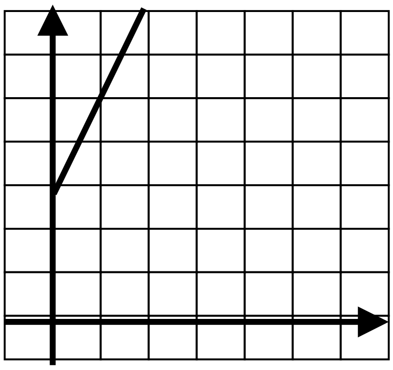
(I)



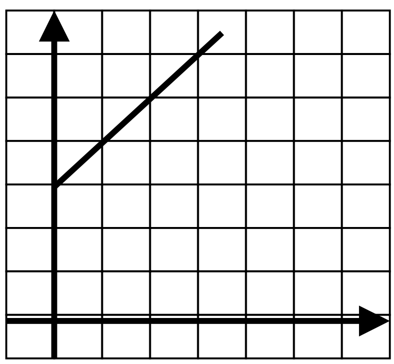
(II)



(III)



(IV)



Texto 1: Em uma corrida de táxi é cobrado R$ 3,00 de taxa fixa (bandeirada) mais R$ 2,00 por quilômetro rodado. Encontre a representação gráfica da função que melhor represente o valor pago ao taxista em função do número de quilômetros rodados. **( )**

Texto 2: A altura da água em uma piscina é de 2 m. O nível de água está abaixando na razão de 1 metro por hora. A altura da água na piscina em função do tempo. **( )**

Texto 3: João foi contratado pelo seu vizinho para molhar seu jardim enquanto este viajava. Ele cobrou uma taxa fixa de R$ 1,00 pelo seu serviço, mais R$ 1,00 por hora trabalhada até ele voltar. O valor que seu vizinho lhe pagou, quando retornou, foi em função do número de horas trabalhadas.

( )

Texto 4: Quando Paulo nasceu seu irmão Marcos tinha 3 anos de idade. A relação que expressa a idade de Marcos em função da de Paulo, em anos é:

( )

(2ª Parte) Construa as expressões algébricas correspondentes aos textos e as tabelas analisadas anteriormente.

4 – TERCEIRO CONJUNTO DE ATIVIDADES:

Atividade 1:

Material utilizado: Lápis, borracha e papel.

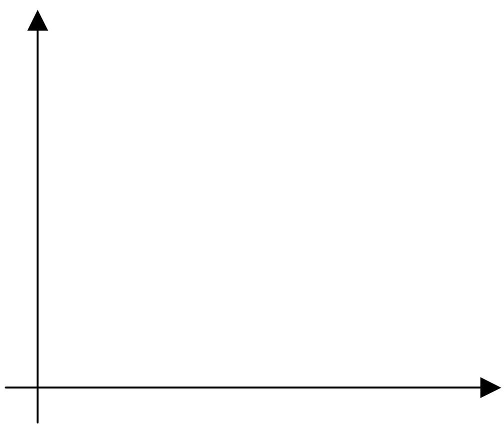
01. Suspendendo um corpo numa mola, ela sofrerá um alongamento A em função do peso P do corpo suspenso. Em 1660, o inglês Hooke descobriu experimentalmente que, dentro de certos limites, tal função é polinomial do 1º grau, dada por A = k . P, onde k é uma constante. A tabela seguinte se refere ao caso de uma mola para o qual k = 0,1 cm/gf, até atingir 500 gf.

Peso(gf)	0	100	200	300	400	500
Alongamento(cm)	0	10	20	30	40	50

a) Para cada aumento de 100 gf de quanto se alonga a mola?

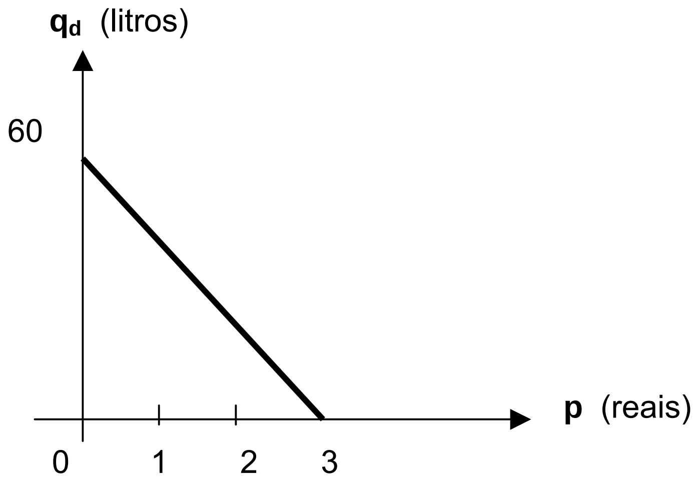
Resp.:

b) Encontre o gráfico correspondente a uma função que apresente a constante k = 0,5 cm/gf até atingirmos 2000 gf.



c) As grandezas alongamento e peso do item anterior são diretamente proporcionais? Justifique sua resposta.
Resp.:

02. A quantidade demandada de um bem de consumo (q_d) depende do preço unitário de venda (p) desse bem, como mostra o gráfico.



a) Como o gráfico dessa função é um segmento de reta, complete a tabela seguinte que também descreve essa situação.

p	0	1	2	3
q_d				

b) Sabendo que, nesse caso as variações iguais de **p** correspondem variações iguais de $\mathbf{q_d}$, escreva uma lei algébrica que descreve essa função.

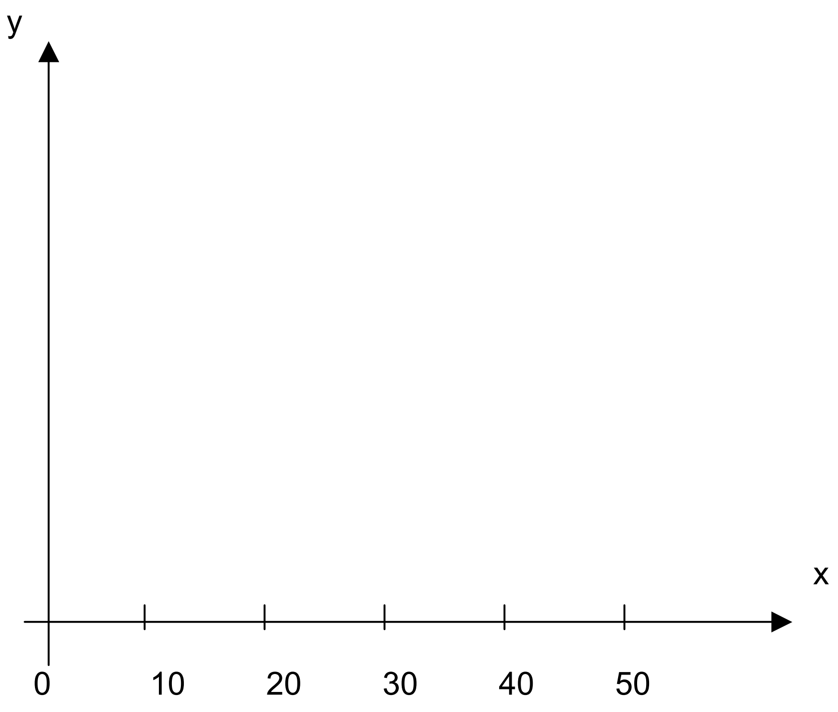
Resp.:

03. Compondo a produção de um folheto verificamos um custo fixo de R$ 7,50 mais R$ 0,25 por cada cópia desse folheto.

a) Construa uma tabela que dê o custo total *y* para produzir *x* folhetos, onde *x* = 10, 20, 30, 40 e 50.

x	10	20	30	40	50
y					

b) Faça um gráfico, no sistema cartesiano xOy. que corresponda à tabela do item anterior.



c) Escreva a equação “lei” que dá *y* em função de *x*.

Resp.:

d) Qual o custo total, no caso de uma produção de 500 folhetos?

Resp.:

Atividade 2:

Material utilizado: Lápis, calculadora, borracha e papel.

01. O dono da loja decidiu dar um desconto de 10% sobre o preço a varejo para quem comprar suas mercadorias no atacado e elaborou uma tabela com o preço de custo, o preço no varejo e o do atacado para cada um dos produtos. Sabendo-se que o preço de varejo foi acrescido de 40% em relação ao preço de custo. Primeiramente, você deverá preencher a tabela a partir dos preços informados. Em seguida, determinar uma expressão algébrica que permita calcular o preço no atacado em função do preço de custo.

a) Preencha atentamente a tabela abaixo.

Produto	P: preço de custo (R$)	V: preço no varejo (R$)	A: preço no atacado (R$)
I	5,80		
II	7,10		
III	9,45		
IV	12,95		
V	15,00		

b) Qual a porcentagem acrescida no preço de custo para se obter o preço de atacado?

Expressão Algébrica:

c) Esboce o gráfico da expressão algébrica encontrada anteriormente.

5 – FICHAS DE OBSERVAÇÃO

FICHA DE OBSERVAÇÃO

Nome do observador:

Número de Alunos:

Data:

ATIVIDADE 1

01. Houve algum tipo de preocupação com os valores informados?

( ) Sim ( ) Não

Observação:

____

____

02. Efetuaram corretamente a construção dos gráficos de acordo com os valores preenchidos na tabela?

( ) Sim ( ) Não

Observação:

____

____

03. Realizaram algum tipo cálculo para descobrir a expressão algébrica correspondente ao gráfico?

( ) Sim ( ) Não

Observação:

____

____

04.Apresentaram dificuldades para converter da tabela para a expressão algébrica?

( ) Sim ( ) Não

Observação:

____

____

05. Houve discussão no grupo em relação à linguagem utilizada?

( ) Sim ( ) Não

Observação:

____

____

06. Buscaram algum tipo de proporcionalidade entre os valores das tabelas?

(   ) Sim (   ) Não

Observação:

07. O grupo solicitou a presença do professor?

(   ) Sim (   ) Não

Observação:

08. Houve imposição de algum aluno no grupo?

(   ) Sim (   ) Não

Observação:

09. Houve divergências no grupo?

(   ) Sim (   ) Não

Observação:

FICHA DE OBSERVAÇÃO

Nome do observador:

Número de Alunos:

Data:

ATIVIDADE 2

01. Realizaram a corretamente o desenho da 4ª figura em cada seqüência?

(   ) Sim   (   ) Não

Observação:

____

____

02. Houve algum tipo de cálculo antes da construção do gráfico?

(   ) Sim   (   ) Não

Observação:

____

____

03. Apresentaram dificuldades no preenchimento das tabelas?

(   ) Sim   (   ) Não

Observação:

____

____

04. Houve discussão do grupo durante o preenchimento das tabelas?

(   ) Sim   (   ) Não

Observação:

____

____

05. Atingiram com sucesso a generalização de cada seqüência?

(   ) Sim   (   ) Não

Observação:

____

____

06. Utilizaram de padrões de regularidades das tabelas para buscar a enésima figura?

(   ) Sim   (   ) Não

Observação:

___

___

07. Apresentaram dificuldades na construção dos gráficos?

(   ) Sim   (   ) Não

Observação:

___

___

08. O grupo solicitou a presença do professor?

(   ) Sim   (   ) Não

Observação:

___

___

09. Houve imposição de algum aluno no grupo?

(   ) Sim   (   ) Não

Observação:

___

___

10. Houve divergências no grupo?

(   ) Sim   (   ) Não

Observação:

___

___

FICHA DE OBSERVAÇÃO

Nome do observador:

Número de Alunos:

Data:

ATIVIDADE 3

01. Apresentaram algum tipo de dificuldade na compreensão do enunciado do problema?

( ) Sim ( ) Não

Observação:

____

____

02. Houve necessidade de algum tipo de interferência do professor no que diz respeito à Geometria?

( ) Sim ( ) Não

Observação:

____

____

03. Souberam preencher a tabela de acordo com os valores solicitados?

( ) Sim ( ) Não

Observação:

____

____

04. Buscaram algum tipo de regularidade entre as áreas calculadas?

( ) Sim ( ) Não

Observação:

____

____

05. Optaram primeiro pela construção do gráfico e, em seguida, buscaram a expressão algébrica?

( ) Sim ( ) Não

Observação:

06. Apresentaram dificuldades para encontrar a expressão algébrica?

( ) Sim   ( ) Não

Observação:

07. Realizaram com sucesso a construção do gráfico?

( ) Sim   ( ) Não

Observação:

08. O grupo solicitou a presença do professor?

( ) Sim   ( ) Não

Observação:

09. Houve imposição de algum aluno no grupo?

( ) Sim   ( ) Não

Observação:

10. Houve divergências no grupo?

( ) Sim   ( ) Não

Observação:

FICHA DE OBSERVAÇÃO

Nome do observador:

Número de Alunos:

Data:

ATIVIDADE 4

01. Houve algum tipo de preocupação com os valores apresentados nas tabelas?

(   ) Sim   (   ) Não

Observação:

____

____

02. A correlação entre tabela e lei foi efetuada corretamente?

(   ) Sim   (   ) Não

Observação:

____

____

03. Apresentaram alguma dificuldade na interpretação dos gráficos?

(   ) Sim   (   ) Não

Observação:

____

____

04. Apresentaram alguma dificuldade na compreensão dos textos?

(   ) Sim   (   ) Não

Observação:

____

____

05. Efetuaram corretamente a conversão dos gráficos para os enunciados ou vice-versa?

(   ) Sim   (   ) Não

Observação:

____

____

06. Privilegiaram alguma representação (tabelas ou textos)?

( ) Sim ( ) Não

Observação:

07. Houve algum tratamento numérico durante a interpretação dos textos?

( ) Sim ( ) Não

Observação:

08. O grupo solicitou a presença do professor?

( ) Sim ( ) Não

Observação:

09. Houve imposição de algum aluno no grupo?

( ) Sim ( ) Não

Observação:

10. Houve divergências no grupo?

( ) Sim ( ) Não

Observação:

FICHA DE OBSERVAÇÃO

Nome do observador:

Número de Alunos:

Data:

ATIVIDADE 5

01. Apresentaram uma compreensão satisfatória do problema?

(   ) Sim   (   ) Não

Observação:

___

___

02. Tornou-se evidente para o grupo a questão da proporcionalidade?

(   ) Sim   (   ) Não

Observação:

___

___

03. Apresentaram outro tipo de raciocínio na obtenção da lei?

(   ) Sim   (   ) Não

Observação:

___

___

04. Para a segunda questão, o entendimento foi satisfatório?

(   ) Sim   (   ) Não

Observação:

___

___

05. Realizaram com sucesso o preenchimento da tabela?

(   ) Sim   (   ) Não

Observação:

___

___

06. Privilegiaram algum tipo de representação na obtenção da lei?

(   ) Sim   (   ) Não

Observação:

07. Para a terceira questão, o entendimento foi satisfatório?

( ) Sim ( ) Não

Observação:

08. Realizaram com sucesso o preenchimento da tabela?

( ) Sim ( ) Não

Observação:

09. Privilegiaram algum tipo de representação na obtenção da lei?

( ) Sim ( ) Não

Observação:

10. O grupo solicitou a presença do professor?

( ) Sim ( ) Não

Observação:

11. Houve imposição de algum aluno no grupo?

( ) Sim ( ) Não

Observação:

12. Houve divergências no grupo?

( ) Sim ( ) Não

Observação:

FICHA DE OBSERVAÇÃO

Nome do observador:

Número de Alunos:

Data:

ATIVIDADE 6

01. Houve necessidade de alguma interferência do professor, no que diz respeito ao conteúdo de porcentagem?

(   ) Sim   (   ) Não

Observação:

___

___

02. O grupo sabia utilizar corretamente uma calculadora?

(   ) Sim   (   ) Não

Observação:

___

___

03. Apresentaram dificuldades com os números decimais?

(   ) Sim   (   ) Não

Observação:

___

___

04. Optaram por outro tipo de linguagem durante o preenchimento da tabela?

(   ) Sim   (   ) Não

Observação:

___

___

05. O grupo mostrou-se solidário durante a execução dos trabalhos?

(   ) Sim   (   ) Não

Observação:

___

___

06. Houve imposição de algum aluno no grupo?

(   ) Sim   (   ) Não

Observação:

____

____

07. Houve divergências no grupo?

(   ) Sim   (   ) Não

Observação:

____

____