UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PERSON GOUVEIA DOS SANTOS MOREIRA

JOGOS DE LINGUAGEM E GEOMETRIA EUCLIDIANA PLANA: UM OLHAR TERAPÊUTICO WITTGENSTEINIANO PARA DOIS MANUAIS DIDÁTICOS USADOS EM CURSOS DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

CAMPO GRANDE – MS

2018

PERSON GOUVEIA DOS SANTOS MOREIRA

JOGOS DE LINGUAGEM E GEOMETRIA EUCLIDIANA PLANA: UM OLHAR TERAPÊUTICO WITTGENSTEINIANO PARA DOIS MANUAIS DIDÁTICOS USADOS EM CURSOS DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática, sob orientação do Prof. Dr. Thiago Pedro Pinto.

CAMPO GRANDE – MS

2018

PERSON GOUVEIA DOS SANTOS MOREIRA

JOGOS DE LINGUAGEM E GEOMETRIA EUCLIDIANA PLANA: UM OLHAR TERAPÊUTICO WITTGENSTEINIANO PARA DOIS MANUAIS DIDÁTICOS USADOS EM CURSOS DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Thiago Pedro Pinto (Orientador) Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS

Profa. Dra. Carolina Tamayo Osório Universidade Federal de São Carlos - UFSCAR

Prof. Dr. Thiago Donda Rodrigues Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS

Profa. Dra. Heloísa Laura Queiroz Gonçalves da Costa Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS (suplente)

Campo Grande, 25 de Maio de 2018.

À minha esposa Rayane Moreira, que mesmo com a saúde fragilizada arrumou forças para me apoiar e seguir até o fim.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter sido a minha condição em todos os momentos.

Aos meus pais, Zeferino e Vandi (in memória) que sempre batalharam para que eu tivesse a oportunidade de estudar.

A meus filhos Murilo e Luísa, que são o motivo de sempre seguir em frente e nunca desistir.

Ao meu amigo, Amilton Carneiro, que dedicou seus momentos de descanso para ensinar Matemática e Física para um menino suburbano, dando a ele a oportunidade de chegar até aqui.

A meu amigo Dan Philippe que, mesmo pelo distanciamento ocasionado pelo curso natural da vida, mostrou que a verdadeira amizade é capaz de transpor esses entreveros.

Aos amigos do PPGEduMat: Jéssica, Magno, Endrika, Vivian, Marcos Tatiane e Vladimir. Obrigado a todos por ouvirem inúmeras vezes sobre minha pesquisa e se mostrarem sempre dispostos para além dela.

Aos colegas na minha turma, ingressantes em 2016, foram 1 ano e meio juntos, bons momentos com histórias para a vida toda.

Aos professores do PPGEduMat, pelas lições acadêmicas e não-acadêmicas.

Aos professores Luis Carlos Pais, João Ricardo Viola, Ângela Guida, Edilene Simões e Márcio Antônio, pelo cuidado e atenção despendidos e as muitas contribuições dadas a este trabalho.

A meu orientador, professor Thiago Pedro Pinto, que me acolheu e foi muito mais do que orientador, um grande conselheiro e amigo que me ajudou em todos os momentos de minha jornada.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

RESUMO

Esta pesquisa foi desenvolvida no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PPGEduMat), no curso de Mestrado da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul vinculada ao Grupo HEMEP – História da Educação Matemática em Pesquisa e tem como objetivo descrever os jogos de linguagem de dois títulos de Geometria Euclidiana Plana, conteúdo das grades curriculares dos cursos de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS). Optamos por estudar as obras: *Geometria Euclidiana Plana* de João Lucas Barbosa (2006) e *Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométrica* de Eliane Quelho Frota Rezende e Maria Lúcia Bontorim de Queiroz (2000). Na perspectiva dos *jogos de linguagem* de Ludwig Wittgenstein, de modo a procurar semelhanças e diferenças entre os jogos usados pelos autores em suas obras. Contudo, diante do processo de desenvolvimento de nossa pesquisa, entendemos que os manuais didáticos que foram colocados por nós em um movimento Terapêutico Bibliográfico, são partes integrantes de uma determinada forma de vida que é o curso de Licenciatura em Matemática e estão em uso de variadas formas, conforme professor, turma etc. Buscamos realizar a leitura deles vislumbrando sempre um licenciando do curso de Matemática, conflitos e aproximações que poderiam ser notadas com o uso conjunto destes dois manuais. No corpo da pesquisa, trouxemos alguns quadros que sugerem um distanciamento entre os jogos praticados em ambos os manuais didáticos, para um, certas afirmações são tomadas como axiomas/postulados, já para o outro, como definições – em alguns momentos o contrário. A ordenação dessas afirmações e a distribuição nos capítulos e dos capítulos também se apresenta diferente, sugerindo uma outra ordem axiomática. Por fim observamos que ao olhar ambos os manuais por uma perspectiva wittgensteiniana, entendemos que esses apresentam jogos de linguagem diferentes, em certo sentido, Geometrias Euclidianas Planas também diferentes.

Palavras-chave: jogos de linguagem; manuais didáticos; Geometria Euclidiana Plana.

ABSTRACT

This research was developed in the Program Master of Sciences in Mathematical Education (PPGEduMat), in the Master's course of the Federal University of Mato Grosso do Sul linked to the HEMEP Group - History of Mathematical Education in Research and aims to describe the language games of two titles of Euclidean Flat Geometry, content of the curricular curricula of the Mathematics Degree courses of the Federal University of Mato Grosso do Sul (UFMS). We chose to study the works: Flat Euclidean Geometry by João Lucas Barbosa (2006) and Flat Euclidean Geometry and Geometric Constructions by Eliane Quelho Frota Rezende and Maria Lúcia Bontorim de Queiroz (2000). From the perspective of the language games of Ludwig Wittgenstein, in order to look for similarities and differences between the games used by the authors in their works. However, in the process of developing our research, we understand that the textbooks that were placed by us in a Therapeutic Movement Bibliography, are integral parts of a certain way of life that is the degree course in Mathematics and are in use of varied shapes, according to teacher, class etc. We seek to read them always envisaging a licenciando of the course of Mathematics, conflicts and approximations that could be noticed with the joint use of these two manuals. In the body of the research, we have brought some pictures that suggest a gap between the games practiced in both textbooks, for one, certain statements are taken as axioms / postulates, already for the other, as definitions - at times the opposite. The ordering of these statements and the distribution in the chapters and chapters also presents different, suggesting another axiomatic order. Finally we observe that when looking at both manuals from a Wittgensteinian perspective, we understand that they present different language games, in a sense, also different Euclidean Geometries.

Keywords: Language Games; textbooks; Flat Euclidean Geometry.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Geometria dos ventos

Eis que temos aqui a Poesia,
a grande Poesia.
Que não oferece signos
nem linguagem específica, não respeita
sequer os limites do idioma. Ela flui, como um rio.
como o sangue nas artérias,
tão espontânea que nem se sabe como foi escrita.
E ao mesmo tempo tão elaborada -
feito uma flor na sua perfeição minuciosa,
um cristal que se arranca da terra
já dentro da geometria impecável
da sua lapidação.
Onde se conta uma história,
onde se vive um delírio; onde a condição humana exacerba,
até a fronteira da loucura,
junto com Vincent e os seus girassóis de fogo,
à sombra de Eva Braun, envolta no mistério ao mesmo tempo
fácil e insolúvel da sua tragédia.
Sim, é o encontro com a Poesia.

(Poesia feita em homenagem ao poema Geometria dos Ventos de Álvaro Pacheco)

Rachel de Queiroz

Existe um ditado popular que diz: “há males que vem para bem”, para que possamos explicar como surgiu esta pesquisa, precisamos nos referenciar a esse ditado. Quando fui aprovado no processo seletivo para ingressar no mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, me convidaram para participar do grupo HEMEP (História da Educação Matemática em Pesquisa). Este grupo é coordenado pelos professores Thiago Pedro Pinto e Luzia Aparecida de Souza, e tem por projeto central produzir uma historiografia a respeito da formação de professores que ensinam e ensinaram matemática no estado. Para tanto usam como referencial metodológico a História Oral, que é uma metodologia que visa a produção de fontes históricas a partir da oralidade, não descartando outros tipos de fonte históricas como material impresso, audiovisual e registros, em um movimento historiográfico.

No HEMEP, os projetos maiores (também chamados de projetos guarda-chuva) estão voltados para a Historiografia, Narrativas e produções de fontes históricas, contudo, há no grupo espaço para pesquisas em outros ramos como a filosofia, assim, o grupo já vem caminhado em um movimento voltado para esse direcionamento, o que culminou na abertura de uma nova linha de pesquisa em meados de 2017: **Filosofia, História e Educação Matemática**.

Nossa pesquisa não faz uso da História Oral, mas se insere no grupo como esta constante interface com a Filosofia, particularmente em nosso caso, com a filosofia de linguagem de Wittgenstein, mas há no grupo aqueles que usam outros pensadores: Michael Foucault, Jacques Derrida, Paul Thompson entre outros.

Iniciando meus estudos no programa, tínhamos a intenção de pesquisar sobre a Matemática em turmas do 3º ano do Ensino Fundamental. Ao ser admitido como orientando do Prof. Thiago, fui convidado a conhecer um pouco sobre os jogos de linguagem e desenvolver leituras nesta temática, particularmente o livro "Investigações Filosóficas", obra de Ludwig Wittgenstein publicada em 1953, após sua morte.

A partir daí, passei a ler autores que usavam os jogos de linguagem e as semelhanças de família em seus trabalhos, até chegar à leitura da tese de Denise Vilela (2007), encontrei na pesquisa dela uma grande semelhança à minha intenção de estudo. Apesar de não se tratar da mesma pesquisa, senti-me desanimado, pois de forma inocente imaginei que estaria trabalhando em uma pesquisa inédita, inovadora, inocência essa que se dissolve na prática de pesquisa. Na ocasião senti-me muito incomodado, ao passo que expondo para meu orientador o descontentamento, me sugeriu que direcionássemos nossa pesquisa para um manual didático de Geometria Euclidiana Plana, com a intenção de observar o jogo de linguagem estabelecido/proposto pelo autor no manual.

A ideia parecia interessante, porém o tempo não estava a nosso favor, tínhamos apenas 20 dias para escrever um artigo e submeter ao EBRAPEM de 2016, que foi sediado em Curitiba-PR. Não foi uma tarefa fácil, pois estávamos começando uma nova pesquisa, será que conseguiríamos produzir um material suficiente para o evento? Depois de muito trabalho, leitura e produções, conseguimos concluir o texto para submissão.

Nesse momento, já havíamos selecionado os manuais didáticos para o estudo: *Geometria Euclidiana Plana* de João Lucas Barbosa (2006) e *Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométrica* de Eliane Quelho Frota Rezende e Maria Lúcia Bontorim de Queiroz (2000), a escolha foi motivada pelo fato do meu orientador ser professor no curso de Licenciatura Plena em Matemática na modalidade EAD da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul e teve como experiência trabalhar com estes dois livros nestas turmas, percebendo diferenças em suas abordagens que poderiam (ou não) se mostrar significativas, a partir de um trabalho científico.

Passamos então a olhar os manuais, tendo como inspiração os jogos de linguagem de Ludwig Wittgenstein, dessa forma, nossa pesquisa visa descrever os jogos de linguagem usados nestes manuais didáticos, com a intenção de pontuar semelhanças e dessemelhanças nessa nossa leitura. Algumas perguntas ocorriam neste momento inicial: seriam os dois constituintes/participantes de um mesmo jogo de linguagem? Seriam jogos diferentes? Um aluno que estudasse por um dos livros, como se sairia ao fazer uma prova elaborada a partir do outro livro?[1]

Na tentativa de olhar para minúcias e não para um panorama dos dois livros – acreditávamos que, se houvesse mesmo diferença entre os livros ela estaria nas minúcias, visto que há um “consenso” de que a Geometria Euclidiana é uma “coisa só” – delimitamos que iríamos até o equivalente ao Quinto Postulado de Euclides, observando os jogos de linguagem que cada autor estabeleceu/propôs em seu manual didático. Pautamo-nos em possíveis efeitos dessas minúcias em um estudante que se norteasse por um ou outro manual.

Dessa forma, essa dissertação é dividida em quatro capítulos:

No primeiro capítulo, apresentamos a pesquisa, seus objetivos e um breve apanhado das leituras realizadas para entender e detalhar os objetos de estudo. Trazemos uma revisão bibliográfica e uma breve discussão a respeito das pesquisas desenvolvidas na educação matemática e em nossa linha de pesquisa.

---

[1] Esta última pergunta tem particular importância no trabalho, visto que a problemática surge ao mudarem (por questões logísticas) o livro que era adotado no curso de licenciatura em Matemática EAD da UFMS, até o ano de 2012 usava-se o livro de João Lucas Barbosa, após este ano, os polos de apoio presencial adotaram o livro de Rezende & Queiroz. Nesta situação, os professores se viram na necessidade de repensar os vídeos e aulas que haviam sido produzidas para a disciplina nos anos anteriores. Surgia então a questão: seriam estes materiais ainda adequados para auxiliar os alunos no estudo desta disciplina, agora com outro livro?

No segundo capítulo, dialogamos com as teorias que nortearam nossa pesquisa, trazendo o embasamento teórico usado na composição da pesquisa. Também apresentamos nosso objeto de estudo, ou seja, os livros didáticos. Quais são eles, quem são seus autores, como chegamos a seus títulos, entre outros detalhamentos necessários para o desenvolvimento do trabalho.

Já no terceiro capítulo, apresentamos o estudo que fizemos dos manuais didáticos. Este capítulo foi subdividido em dois tópicos nos quais verificamos os cinco postulados, e suas possíveis ocorrências nos dois manuais estudados, também o aparecimento de termos comuns entre os dois manuais e a semelhanças e dessemelhanças: postulado, axiomas, corolários e suas aplicações na Geometria Euclidiana Plana. Essa leitura (como toda leitura) é situada e enviesada, partimos sempre de pensar que estes livros são efetivamente usados em cursos de Licenciatura em Matemática, ou seja, para a formação de professores, e tomamos sempre como uma linguagem completa[2] e não referencial, um jogo completo, no qual as regras são, em geral, tácitas aos usuários.

Assim, não pretendemos estudar o "livro pelo livro", como um texto ideal sem que haja alguém para lê-lo. Pensamos neles como um elemento de uma prática cultural de formação de professores de matemática, um processo vivo e dinâmico. Chegamos a pensar na possibilidade de acompanhar aulas nas quais se utilizam esses materiais, mas, estrategicamente, em função do pouco tempo de um mestrado, optamos por focar na leitura dos manuais.

[2]"Pode-se dizer que o conceito "jogo" é um conceito com contornos imprecisos. – "Mas, um conceito impreciso é realmente um conceito?" – Uma fotografia pouco nítida é realmente a imagem de uma pessoa? Sim, pode-se substituir com vantagem uma imagem pouco nítida por uma nítida? Não é a imagem pouco nítida justamente aquela de que, com frequência, precisamos? (WITTEGENSTEIN, 1984, p. 40, § 71).

1. NOSSA PESQUISA: UMA *TERAPIA*

Quando nos propomos a realizar uma determinada pesquisa, duas perguntas nos surgem dentre tantas: quais os trabalhos já realizados sobre o tema que pretendemos pesquisar? E como pretendemos conduzir nossa pesquisa?

Para respondermos à primeira questão buscamos inicialmente as dissertações defendidas no programa de pós-graduação no qual estamos inseridos. Não tínhamos uma metodologia consolidada, mas no desenrolar da pesquisa caminhávamos para o que chamamos de uma ‘Terapia Bibliográfica’ com um olhar wittgensteiniano, dessa forma respondendo nossa segunda pergunta. Assim, lemos diversos trabalhos já defendidos em nosso Programa, mas direcionamos nosso foco em trabalhos que contribuíssem com nossa pesquisa, sendo assim delimitamos quatro tópicos em nossa busca: Geometria, Livro Didático, jogos de linguagem e Educação Matemática. Era de nossa preferência trabalhos que tratassem de pelo menos dois tópicos simultaneamente. Em seguida, ampliamos nossas buscas a nível nacional, focando trabalhos que usaram os *jogos de linguagem* no campo da Educação Matemática. Ao final da apresentação de cada um desses trabalhos tecemos alguns comentários que pensamos auxiliar nosso leitor na compreensão de nossa pesquisa, no modo como estamos pensando o referencial aqui adotado, traçando aproximações e distanciamentos com estes trabalhos.

Como é de nosso interesse descrever os jogos de linguagem nos manuais didáticos de uso no ensino superior, tomando que são parte de um movimento para o ensino/aprendizagem de alunos que saíram do Ensino Médio, nos pareceu necessário conhecer um pouco da Geometria que aquele aluno usuário dos manuais descrito em nossa pesquisa conhece. Iniciamos então, com aquelas que versam diretamente sobre Geometria em sala de aula, esses trabalhos se aproximam do modelo na forma de demonstração de (BALACHEFF, 1986 apud PICELLI, 2010), em sua tipologia, diferencia as provas matemáticas em dois grupos, as quais intervém na aprendizagem da demonstração: segundo Balacheff (1986) as Provas Pragmáticas e as Provas Intelectuais. As provas pragmáticas são provas baseada no uso de exemplos nas quais são diferenciadas em três níveis:

O **Empirismo Ingênuo**: Não aparecem indícios de processo de validação, geralmente a afirmação é obtida no uso de alguns casos em específico. A **Experiência Crucial**: Esse nível se caracteriza pela verificação de uma proposição por meio de um caso, no qual se diz que se ela funciona em uma determinada situação, funcionará sempre. O **Exemplo Genérico**: Nesse caso há uma explicação das razões da validade da afirmação por meio de um objeto seguida de uma generalização.

Já as Provas Intelectuais, se caracterizam pelo distanciamento em relação a ação. Nesse nível podemos destacar o **Experimento Mental**: Que propõe a ação, interiorizando-a e afastando-se da sua realização sobre um representante particular, e o **Exemplo Genérico** que, segundo (BALACHEFF, 1986 apud PICELLI, 2010), é dada uma afirmação com o uso em uma proposição. Dado que após a manipulação de algum caso particular de uma forma que esse caso fique com uma característica que possa ser representante de um conjunto de objetos.

Uma das primeiras dissertações estudadas por nós foi a de Paulo Picelli (2010), que propôs investigar a elaboração e validação de Conjecturas em Geometria Plana por alunos do Ensino Médio, usando como instrumento de pesquisa a Engenharia Didática. Ele elaborou uma sequência didática que tinha por objetivo estudar as dificuldades dos alunos em propor validações de algumas conjecturas e também contribuir com a aprendizagem desse aluno, como por exemplo, o Teorema de Tales. A sequência formada por ele era dividida em 6 (seis) sessões, subdivididas em 17 (dezessete) atividades. Nessas atividades era utilizado o *software Cabri-Géomètre,* partindo da hipótese que o referido programa pode auxiliar a elaboração das conjecturas em estudos.

Na organização da pesquisa, Picelli (2010), baseando-se no referencial teórico de Balacheff (1986), estrutura uma tabela expondo os níveis de prova para a validação, tomando como princípio a Teoria das Situações Didática (TSD) de Brousseau (1986), aplicando em específico a parte que trata das situações adidáticas. Ao fim, observou que os alunos de seu estudo não estavam habituados com atividades de validações, sendo necessário sua intervenção, abrindo com a turma uma discussão sobre o que significava validar uma afirmação.

Picelli (2010) em sua experimentação, registrou uma notável evolução no nível de prova por alguns alunos, levando-o a crer que é possível encaminhar o aluno a uma argumentação sistemática com uma linguagem científica de conjecturas, assim ele conclui:

> Apesar da maioria dos grupos terem permanecido no *Empirismo Ingênuo,* alguns grupos conseguiram alcançar o *Experimento Crucial* e o *Exemplo Genérico.* Isso mostra que durante o processo, houve evolução no nível de prova utilizado por alguns alunos. Logo, a investigação realizada mostra que é possível fazer com que os alunos

> evoluam nos tipos de argumentações, podendo até mesmo, num prazo mais longo, fazer uma demonstração. (PICELLI, 2010, p. 91-92).

Em suas considerações, Picelli (2010) diz que não foram todos os alunos que alcançaram o *Experimento Mental* da pesquisa, e muitos deles atingiram o *Experimento Crucial* após a intervenção do pesquisador, notando que esses alunos não estavam familiarizados com a linguagem aplicada para o uso das demonstrações, assim, através de questionamentos o pesquisador direcionou os alunos a provarem as conjecturas elaboradas.

Picelli (2010) fala sobre seu anseio de que o aluno pare de repetir as explicações dadas pelo professor e passe a pensar e “fazer Matemática”. e acredita que é de grande importância que esse aluno se familiarize com a linguagem matemática.

> Acreditamos que o professor é peça fundamental nesse processo, pois ele deve incentivar o aluno criando situações para que esse passe de espectador a pesquisador. Com isso surge o seguinte questionamento: Como elaborar situações em que o aluno seja um pequeno pesquisador e que o professor se torne um orientador, de forma que o primeiro adquira conhecimento com sua própria pesquisa? Como propor situações desse tipo para os níveis Fundamental e Médio? (PICELLI, 2010, p.16)

Também, entendemos enquanto usuários da filosofia de Wittgensteins que levar o aluno a fazer matemática é mais produtivo do que apenas apresentar a matemática a ele: “...aprendemos o jogo, observando outros jogando, mas só pode compreender a regra do jogo pela *práxis*, ou seja, aprendemos a jogar jogando.” (WITTGENSTEIN, 1984, p. 32).

De forma semelhante, outro trabalho que estudamos foi de Anete Lima (2009), que se propôs a tratar das validações algébricas por alunos do 3º ano do Ensino Médio no conjunto dos números inteiros, nele ela relata um pouco de sua experiência como coordenadora pedagógica em uma unidade escolar pública, na qual constatou, com sua equipe de professores, que seus alunos apresentavam grande dificuldade na resolução de problemas, e se agravava quando envolvia a validação algébrica. Segundo a fala de seus professores, tornava-se “impossível ensinar” resolução de problemas. Lima (2009) aplicou uma sequência didática para analisar validações algébricas em uma turma de 3º Ano do Ensino Médio de uma escola pública na cidade de Campo Grande em Mato Grosso do Sul. Seguindo a Tipologia de Balacheff (1988) para categorizar a evolução dos alunos o autor diz não ter obtido uma evolução significante, mas pôde observar uma tímida evolução que, para Balacheff (1988), é um progresso que caminha para a demonstração matemática.

> Ao analisarmos o desempenho dos alunos nessas sessões, consideramos que houve alguma evolução entre os tipos de provas categorizados por Balacheff (1988), assim

> como as provas categorizadas por Freitas (1993). Muitas vezes, no decorrer de suas atividades, os alunos evoluíam na elaboração de uma prova, mas não chegavam a atingir um nível mais elevado. No entanto, para Balacheff (1988), esta produção mostra indícios de uma demonstração matemática. (LIMA, 2009, p. 107)

Lima (2009) comenta que em alguns momentos era necessário auxilio do pesquisador para garantir a execução da tarefa, pois muitos alunos não possuíam habilidade com a linguagem algébrica. A esse respeito, Lima (2009) buscou identificar os tipos e os níveis de provas produzidos, bem como investigar possibilidades de ampliação da aprendizagem, tanto no que concerne ao uso da linguagem matemática, quanto ao nível de generalidade envolvido na produção de provas.

Isso não quer dizer que, familiarizando o aluno com a linguagem matemática terá resolvido o problema da deficiência na aprendizagem de Matemática. O autor acrescenta que o uso de atividades exploratório/investigativas no ensino de álgebra contribui de forma expressiva no desenvolvimento do pensamento algébrico e da linguagem algébrica dos alunos.

Lima (2009) acredita que através de um processo de validação algébrica pode ser potencializada a aprendizagem matemática do aluno e um trabalho voltado para a linguagem matemática pode ser um elemento facilitador desse processo. Concordamos com Lima (2009), pois acreditamos que quanto mais aluno compreender as regras estabelecidas para os jogos da Matemática, maior será suas chances de aprender, isso o motivará a continuar jogando e, quanto mais se joga, mais se aprende a jogar.

A compreensão das linguagens matemáticas pode ser um dos elementos possíveis para promover uma aprendizagem, em nossa pesquisa descrevemos os jogos de linguagem em dois manuais didáticos de Geometria Euclidiana Plana de uso nos campi da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, não buscamos uma qualificação entre eles, mas sim descrevemos os usos de suas linguagens para o acadêmico/usuário desse material didático.

Outro trabalho que nos embasamos para suster nossa pesquisa foi o de Susilene Oliveira (2009), que se propõe acompanhar a evolução das argumentações nas validações de atividades envolvendo Construções Geométricas. A pesquisadora elabora uma sequência didática com o tema de “Construções Geométricas” envolvendo pontos notáveis do triângulo, onde os alunos deveriam justificar essas construções. Tais argumentações foram também analisadas com o uso da Tipologia de Balacheff (1988). No decorrer da pesquisa Oliveira (2009) observa que atividades de Construções Geométricas são tópicos pouco explorados pelos livros didáticos e os alunos apresentam muitas dificuldades em produzirem argumentações de provas.

> E o outro fator a considerar é a falta de subsídio didático, ou seja, o livro didático adotado ou qualquer outro material de apoio utilizado em sala não privilegiam essa prática. O resultado foi que mesmo quando ficava explícita, na atividade, a necessidade de justificar muitos alunos não o faziam, ou quando isso acontecia às justificativas não passavam inicialmente de um empirismo ingênuo. (OLIVEIRA, 2009, p. 166).

Há aproximadamente duas décadas, o Governo Federal vem buscando aumentar os índices de resultados de nossos alunos através de medidas, avaliações e programas educacionais, é o que aponta Oliveira (2009). Uma dessas mudanças pretendidas para o ensino da matemática é a valorização da Geometria. Segundo a autora, o ensino da Geometria na educação básica não vem apresentando resultados satisfatórios, também é notório que tanto seu ensino como também a sua aprendizagem apresentam dificuldades. Apesar de ser uma das áreas da Matemática mais antiga, superando até mesmo a aritmética, hoje tem ficado um pouco de lado no contexto escolar:

> A Geometria, comparada com o ensino de outras áreas da Matemática, ainda é muito ausente nas salas de aula no Brasil, não apenas na escola elementar, mas também ao longo de todo o Ensino Fundamental e Médio. Na prática, seu ensino foi consideravelmente reduzido. Isso ocorreu por muitos motivos; dentre eles, Miguel & Miorim (1986) ressaltam que os tópicos geométricos acabam por aparecer em menor número em relação aos demais assuntos em alguns livros didáticos. (OLIVEIRA, 2009, p.13)

Oliveira (2009) observa também que a geometria, mesmo com o direcionamento dado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais, não está integralizada a qualquer outra disciplina, e nas escolas municipais da cidade de Aquidauana, em Mato Grosso do Sul, não estão relacionadas nem aos outros conteúdos de Matemática.

Seguindo o mesmo agrupamento de trabalhos, temos os que desenvolveram suas pesquisas segundo os parâmetros da Engenharia Didática de Artigue (1996), e na maioria dos casos embasavam-se nos Registros de Representação Semiótica de Duval (1988, 2003 e 2008), como é o caso da pesquisa de Pablo Queiroz (2014), que se propôs investigar o processo de aprendizagem de funções por alunos do 9º ano do ensino fundamental com o uso de situações didáticas que permitem a articulação entre a álgebra e a geometria analítica. Assim, elaboraram uma sequência didática nos moldes da Engenharia Didática, e fundamentaram sua pesquisa nos Registros de Representação Semiótica de Duval (1988, 2003 e 2008).

Buscando fundamentação em pesquisas que investigavam ensino e a aprendizagem do conceito de funções e geometria, Queiroz (2014) encontra em alguns trabalhos o auxilia no direcionamento de sua pesquisa:

> Essas pesquisas relatam que abordagens realizadas em sala de aula pautada na repetição, memorização e definição têm se mostrado ineficientes na construção do saber matemático em questão. Na busca de compreender o processo de construção desse conhecimento, autores como Ardengui (2008) e Markovits, Eylon e Bruckheimer (1995) dedicam-se ao estudo das dificuldades de aprendizagem do conceito de função e buscam propor possibilidades de superação dessas. (QUEIROZ, 2014, p. 17)

O autor observa também que, em outros casos, os professores reduzem o ensino de determinado conteúdo a pequenas exemplificações, tratando o tópico de forma superficial.

Não é de nosso interesse discutir metodologias de ensino, tão pouco estender a pesquisa para funções algébricas, mas a pesquisa de Queiroz (2014) nos chamou a atenção pela articulação das linguagens algébricas e geométricas. Em nossa pesquisa, olhamos diretamente para linguagens, pontuando como os autores Barbosa (2006), Rezende & Queiroz (2000) usam/estabelecem estas linguagens, na intenção de converter um raciocínio de uma prova geométrica em um texto lógico para o entendimento do leitor/usuário.

A pesquisa de Queiroz (2014) mostrou também que apensar da dificuldade usual em contextualizar as funções algébricas, o problema se agrava quando é preciso converter a ideia de função em dados estatísticos, em um gráfico cartesiano, o aluno apresenta grande dificuldade em fazer uma relação biunívoca entre os valores algébricos e os pontos no plano cartesiano. A esse respeito ele comenta:

> A construção da representação gráfica, em um sistema de coordenadas cartesianas, da relação entre variáveis se mostrou fonte de dificuldades em algumas atividades analisadas. A presença dessa dificuldade nos fez reestruturar a sequência didática incluindo atividades de construção de plano cartesiano, localização de pontos nesse plano e análise de representações gráficas produzidas pelos alunos. (QUEIROZ, 2014, p. 133)

Queiroz (2014) observa que grande parte dos alunos envolvidos em sua pesquisa, além da dificuldade de contextualização das funções algébricas, ainda não conseguia trabalhar com um sistema de coordenadas cartesianas, fazendo com que ele viesse a reorganizar sua estrutura didática.

Olhando agora para o trabalho de Adnilson De Paula (2011), que faz uma relação dos conceitos de Geometria Euclidiana Plana e Álgebra para o estudo da Geometria Analítica. Ele se utiliza dos Registros de Representações Semiótica (DUVAL, 1988, 2003 e 2008) e da

Engenharia Didática (ARTIGUE, 1996). O autor aplica a sequência didática com quatro acadêmicos do primeiro ano de Licenciatura em Matemática e observa que eles tiveram dificuldade em converter os registros geométricos e algébricos para os analíticos. Pois, mesmo no ensino superior é notada a dificuldade do aluno com as propriedades de conversão da linguagem algébricas para o plano cartesiano:

> Em outras palavras, essa dificuldade pode ser traduzida como uma dificuldade de conversão do registro algébrico para o gráfico. Além disso, mais especificamente sobre a atividade 15, os alunos não conseguiram representar de forma adequada, por meio do registro discursivo, os procedimentos utilizados para a construção da atividade quando solicitamos que justificassem suas estratégias de construção do problema. (DE PAULA, 2011, p. 20).

Diante dos apontamentos de De Paula (2011), transpomos essa dificuldade para nossa pesquisa, uma vez que descrevemos manuais didáticos de geometria para uso em sala de aula, é importante que possamos partir da possibilidade que alunos podem apresentar dificuldades na conversão de registros geométricos para algébricos. De outra forma, poderiam os alunos da licenciatura que utilizam os manuais didáticos (objeto de nossa pesquisa) apresentarem dificuldades em converter seus esboços, desenhos, em uma linguagem lógica, minimamente formal, a fim de construir suas demonstrações?

O autor também apresenta algumas dificuldades identificadas no decorrer de sua pesquisa e observa que o conhecimento dos alunos está resumido à memorização de equações prontas, remetendo mais uma vez à inversão da importância do ensino da matemática escolar, colocando novamente o aluno como um indivíduo incapaz de aprender matemática.

> Podemos perceber uma contradição entre o que está sendo ensinado e o que deveria ser ensinado. Por um lado, temos a Geometria que possibilita a construção do conhecimento e por outro, um ensino que se limita, muitas vezes, a dedução de fórmulas. Nesse sentido é importante buscar e/ou pensar possíveis contribuições, para o estudo da Geometria, que valorizem a compreensão dos conceitos. (DE PAULA, 2011, p. 17).

De Paula (2011) reforça o uso inadequado por parte do professor, dos livros de ensino médio que focam o ensino na memorização de técnicas e fórmulas, deixando de lado a prática do raciocínio lógico/matemático. Em nossa pesquisa, trabalhamos com livros de uso didático no nível superior.

Mas existe a possibilidade de que os acadêmicos na graduação em Licenciatura Matemática que usam estes manuais didáticos hoje, tenham sido habituados a outros jogos de linguagem como os descritos por De Paula (2011) e isso pode causar dificuldade de aprendizagem por parte desses acadêmicos. Mudar de jogo pode ser muitas vezes uma tarefa difícil, especialmente se as diferenças não forem explicitadas, como muitas vezes não são.

Seguindo o mesmo eixo que são os livros didáticos que tratam de Geometria, o trabalho de Maxlei Freitas (2015) realiza um estudo sobre volume de sólidos geométricos em quatro coleções de livros didáticos do Ensino Médio. Tomando a ótica da organização praxeológica e tendo como metodologia a Teoria Antropológica do Didático (TAD) de Chevallard (1992, 1998, 1999, 2002) observou em sua pesquisa que todas as coleções analisadas priorizavam o ensino através de técnica de solução de exercícios, de forma indireta, ele atribui aos livros didáticos certa responsabilidade pela mecanização da Matemática, pois no desenvolvimento de sua pesquisa sobre sólidos geométricos deparou-se com essa resistência de seus alunos em desenvolver o raciocínio lógico/matemático:

> Os livros didáticos ao darem ênfase às atividades que envolvem basicamente a memorização e aplicação de fórmulas, podem não possibilitar o desenvolvimento de determinadas habilidades, como visualização e argumentação lógica. Esse fato vem ao encontro do pensamento de Pais (2001), ao afirmar que no ensino de matemática o que se valoriza é o excesso de memorização de fórmulas, regras e definições, em vez de conceitos significativos para o aluno. (FREITAS, 2015, p. 20)

Freitas (2015) critica a desvalorização dos manuais didáticos no tocante à promoção do raciocínio lógico/matemático, os autores de livros de educação básica investem seus recursos na elaboração de atalhos para o aluno resolver exercícios com maior facilidade, trazendo assim uma ilusão de aprendizagem, pois, segundo ao autor, decorar uma técnica não garantirá que ele saberá como utilizá-la na solução de outras situações problemas. Dessa forma, o aluno fica condicionado a resolver problemas apenas pela aplicação de técnica ou fórmula, qualquer mudança nas condições do problema inviabiliza sua solução, tornando o problema insolúvel para esse aluno.

Dentre tantas possibilidades que nos vem à cabeça ao lermos estas pesquisas, chegamos a pensar na possibilidade de produzir uma situação hipotética onde um aluno do ensino médio, habituado a usar livros didáticos cheios de modelos e técnicas, sai do nível médio partindo para o ensino superior, e se depara com os livros de nossa pesquisa, repletos de postulados, teoremas e definições. Como se daria tal interação? Que efeitos ela causaria? Por outro lado, vale sempre lembrar que estes livros constam da bibliografia oficial de algumas disciplinas para formar professores que, futuramente, entrarão em contato com materiais como os descritos por Freitas (2015).

A Geometria possui grande importância não somente na Matemática, mas também em outras áreas como as Engenharias, Agricultura e Astronomia, e essa importância não está apenas nos dias atuais, como relata Pablo Queiroz (2014) em sua pesquisa, não somente a Geometria já era aplicada na antiga Babilônia, como também a noção de função já demonstra traços de existência de uso e aplicações matemáticas da época, conforme descreve Queiroz (2014 apud VÁZQUEZ, REY e BOUBÉE (2008)).

> Segundo esses autores já na Época Antiga podem ser encontradas manifestações que implicitamente contém a noção de função. Essas manifestações podem ser observadas nas tabelas babilônicas (2000 a. C – 500 a. C) nas quais estão presentes, entre outros, resultados de multiplicações e de divisões caracterizadas como funções de duas variáveis além de fórmulas para o cálculo da soma de *n* termos de uma progressão geométrica (QUEIROZ, 2014, p. 15).

De forma geral, ao que escreve Queiroz (2014) as origens da Matemática coincidem com as necessidades humanas de evolução da civilização: dividir terras férteis às margens dos rios, na construção de casas e observar/estudar os movimentos dos astros, são essas algumas das muitas atividades que dependem da geometria e suas ferramentas. Este trecho se afasta um pouco do entendimento filosófico de Wittgenstein, pois o uso da palavra 'evolução' naquele jogo contradiz aquilo que entendemos das Investigações Filosóficas, uma vez que pressupõe jogos mais evoluídos que outros, ou seja, tomando um como referência do outro e não findos em si mesmos, completos.

Houve trabalhos que fizeram uso das tecnologias para o ensino/aprendizagem da geometria, como já citamos Picelli (2010) que propôs uma sequência formada por 6 (seis) sessões, subdivididas em 17 (dezessete) atividades, dado que estas eram realizadas utilizando o *software Cabri-Géomètre,* tendo como hipótese que o referido programa auxiliaria a elaboração das conjecturas em estudos. Também, Ádamo Oliveira (2012) se propôs a analisar como ocorre a reconstrução do conceito de paralelogramo com alunos do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental em uma escola pública estadual na cidade de Terenos, em Mato Grosso do Sul, com o auxílio de um *software* chamado Klogo, disponível nos laptops distribuídos nas escolas contempladas pelo Projeto Um Computador por Aluno (UCA). Oliveira (2012, p. 57) elabora uma tabela segundo seu estudo do Referencial Curricular de Matemática da Rede Estadual de Ensino de Mato Grosso do Sul, apontando os conteúdos de geometria os quais devem ser estudados nas respectivas séries e que estão ligados a uma figura simples, o paralelogramo:

Ano de Escolaridade	Conteúdo que pode se relacionar ao tema Paralelogramo
6° Ano	-Figuras Planas - Polígonos - Ângulos
7° Ano	- Figuras Planas - Perímetro e Área dos Quadriláteros -Ângulos
8° Ano	- Ângulos opostos pelo Vértice - Ângulos formados por duas retas paralelas e uma transversal -Polígonos (Quadriláteros)
9° Ano	- Teorema de Tales

Figura 1:Quadro 2
Fonte: OLIVEIRA, 2012, p. 57.

Em nossa pesquisa, assim como Oliveira (2012), observamos livros de uso em sala de aula, porém, ao contrário do que a autora parece defender, nossa perspectiva não aponta para a obrigatoriedade de uma sequência pré-estabelecida de conteúdos no ensino de Matemática (ou de Geometria). Acreditamos que é possível um aluno apreende a jogar um determinado jogo em contato com este, não há necessariamente jogos que são pré-requisitos a outros – ainda que isso possa facilitar. A Figura 1 nos mostra que o ensino da Geometria tem sido dado de forma sequencial, a partir de critérios pré-estabelecidos.

Entendemos também que nossa pesquisa, apesar de não tratar diretamente do ensino/aprendizagem, estuda manuais didáticos usados para o ensino/aprendizagem em sala de aula, logo, acreditamos que é necessário que tenhamos esse olhar voltado para o acadêmico no ambiente da sala de aula.

Há também outra preocupação, em tese, os livros didáticos são suporte para a metodologia do professor, mas, na prática, pesquisas como a de Thiago Siqueira (2013), afirmam que tais livros acabam sendo utilizados como manuais de instruções, ou seja, a didática utilizada pelo professor é exatamente o que sugerem os autores do livro. O autor realizou um levantamento com 4 livros de Matemática do Ensino Fundamental, separando aspectos importantes que um professor deveria tratar no momento do ensino da trigonometria para alunos do 9º ano do ensino fundamental.

A pesquisa de Siqueira (2013) se desenvolveu através de investigação qualitativa, realizada em uma universidade pública com formandos de Licenciatura em Matemática, buscando investigar o potencial de mobilização de conhecimentos dos futuros professores para ressignificar os conhecimentos científicos em conhecimentos para o ensino.

O motivo pelo qual elencamos essa pesquisa em nossa análise bibliográfica é para ressaltar a importância do manual didático hoje para a escolarização, por conseguinte, a linguagem usada pelo autor pode diminuir ou aumentar a dificuldade do aluno em determinada aprendizagem. Destacaremos de forma breve o título dos livros analisados por Siqueira (2013) e em seguida a tabela com os aspectos no qual é viável que se esteja no manual didático no momento do ensino, segue:

Livro 1 - Matemática e Realidade (Iezzi, Dolce e Machado)

Livro 2 - Matemática (Imenes e Lellis)

Livro 3 - A Conquista da Matemática (Giovanni Jr. e Castrucci)

Livro 4 - Matemática (Bianchini)

Siqueira (2013) faz um resumo das especificações de cada um dos livros, porém para nossa pesquisa essas particularidades não são tão relevantes, importa-nos, para a discussão que propomos, o direcionamento que cada autor faz ao apresentar o conteúdo de trigonometria no triângulo retângulo.

	Livro 1	Livro 2	Livro 3	Livro 4
Significado da palavra "Trigonometria"	Ausente	Presente	Presente	Presente
Como surgiu	Ausente	Ausente	Presente	Ausente
Importância que teve na antiguidade	Ausente	Presente	Presente	Ausente
Construção das tábuas trigonométricas	Ausente	Presente	Presente	Presente
Problemas históricos	Ausente	Apresenta como eram, mas não especifica nenhum	Apresenta como eram, mas não especifica nenhum	Presente
Onde se originou	Ausente	Presente	Presente	Presente

Figura 2: Quadro 4 Elementos Históricos e Epistemológicos
Fonte: SIQUEIRA, 2012, p.21.

Conteúdos Presentes

	Livro 1	Livro 2	Livro 3	Livro 4
Razões trigonométricas seno, cosseno e tangente	Presente	Presente	Presente	Presente
Relações entre razões trigonométricas	Presente	Ausente	Ausente	Ausente
Seno, cosseno e tangente dos ângulos principais (30, 45, 60)	Presente	É pedido que se calcule na seção de exercícios	Presente	Presente
Demonstrações	Demonstrou as relações trigonométricas e o seno, cosseno e tangente dos principais ângulos	É pedido que se faça na seção de exercícios.	Somente a da lei dos senos e dos cossenos.	Demonstrou as relações trigonométricas e o seno, cosseno e tangente dos principais ângulos.
Aplicações do conteúdo contextualizadas	Presente	Só vai aparecer nos exercícios.	Aparecem alguns exemplos.	Pouco aparece
Relações trigonométricas em um triângulo qualquer (lei dos senos e cossenos)	Ausente	Ausente	Presente	Ausente

Figura 3: Quadro 5 Conteúdos Presentes
Fonte: SIQUEIRA, 2013, p.21.

Siqueira (2013) mostra através das tabelas acima que os livros não são padronizados, apesar de apresentarem um tema semelhante (semelhança de triângulos), diferem em alguns tópicos. Um de nossos atravessamentos nas quais nos motivou a realizar nossa pesquisa, foi observar de forma empírica no cotidiano em sala de aula, que dois livros de Geometria Euclidiana Plana não tinham os mesmos jogos de linguagens, e isso nos motivou a pesquisar sobre suas semelhanças e dessemelhanças.

Os trabalhos que vêm a seguir tratarão especificamente da filosofia de Wittgenstein e estão inseridos no campo da Educação Matemática, abordando principalmente os jogos de linguagem, e seus usos nas referidas pesquisas. De alguma forma estes trabalhos poderiam ser citados no tópico seguinte, pois já trazem apontamentos sobre o nosso entendimento dos jogos de linguagem, contudo, como já viemos inserindo a filosofia wittgensteiniana de forma diluída em tópicos anteriores entendemos ser estratégica essa abordagem, pensando em um leitor/usuário pouco ávido à filosofia de Wittgenstein.

No campo da Educação Matemática voltado para a filosofia dos jogos de linguagem de Wittgenstein, encontrando autores como Thiago Pedro Pinto (2009) que se utiliza dos jogos de linguagem de Wittgenstein e do Modelos dos Campos Semânticos de Rômulo Lins (1999), para olhar a sala de aula de Matemática nos níveis de Ensino Fundamental e Médio, procurando mapear os jogos de linguagem existentes ali. De forma mais precisa, como os professores fazem uso da linguagem para comunicar-se com seus alunos no processo de ensino/aprendizagem.

A partir de suas observações, Pinto (2009) destacou nos vídeos por ele gravados na sala de aula de Matemática em variadas turmas, “eventos” que destacou pela constância: **Conflitos de significados e uso de termos em outros contextos** - Termos matemáticos em situações diferentes das usuais na matemática formal; **Diferentes enunciações** – evento onde o professor “re-enuncia” a mesma proposta por diversas vezes, alterando nela uma palavra ou outra; **Repetições sistemáticas** – consiste na repetição sistemática de enunciados, ocorrida muitas vezes para fixar determinada regra ou conceito; **Definições dadas no/pelo uso** – alguns conceitos são postos não pelo esclarecimento “do que é”, mas sim no entendimento de “como se usa”; **Preocupação com registro de representações gráficas** – consiste na preocupação da professora com os desenhos que utiliza na resolução do exercício; **Coisificação dos objetos matemáticos** – neste evento os objetos matemático são tratados como objetos físicos na fala dos professores; **Foco na execução de procedimentos** - neste evento, nota-se que o professor parte de questões abrangentes para indicar a solução de problemas; **Representação** – a utilização de diferentes formas de escrita para representação do mesmo valor; **“ELE” o autor** – evento onde o professor usa o ELE referindo-se ao exercício ou material didático usado; **O “NÓS”** – nesse evento, os professores acabam colocando objetivo no exercício de forma conjunta, como se o aluno estivesse o interesse em resolvê-lo; **Referência a objetos “concretos”, “cotidiano”** – neste evento os professores fazem referência a objetos concretos do cotidiano para falar de Matemática; **Linguagem gestual** – neste evento os professores se utilizam de movimentos e gestos corporais para promover uma linguagem matemática.

Elencamos de forma breve uma pequena parte do mapeamento realizado por Pinto (2009) com o intuito de situar o leitor no tocante aos eventos linguísticos observado pelo autor, contudo, optamos por trazer mais demoradamente apenas os dois que julgamos mais relevantes para nossa discussão.

Quando Pinto (2009) elenca o evento “Conflitos de significados e uso de termos em outros contextos”, está referindo-se a palavras que podem trazer um sentido para o aluno, diferente do desejado pelo professor, caso ele não compreenda seu uso no jogo estabelecido pelo professor para a aprendizagem, pois para Wittgenstein (1984), as palavras não carregam significados, o que define uma palavra é seu uso e este pode variar de acordo com a forma de vida, conforme escreve no § 40:

> Permita-nos falar primeiramente sobre o ponto desta argumentação: a palavra não tem significação quando nada lhe corresponde. – É importante constatar que a palavra “significação” é usada incorretamente, quando se designa com ela a coisa que ‘corresponde’ à palavra. Isso é, confunde-se a significação de um nome com o portador do nome. (WITTGENSTEIN, 1984, p.27)

Pinto (2009) exemplifica, fazendo referência a palavra “reta” que, fora do uso da linguagem matemática, pode possuir outro significado, assim, quando ele estabelece este evento, está fazendo apontamentos para situações onde o aluno pode não compreender o que a palavra “reta” pode significar naquele jogo.

> Podemos pensar, então, que a palavra “reta” pode ser usada de diferentes formas em diferentes jogos de linguagem, possuindo assim, segundo Wittgenstein, diferentes significados. Se consultarmos, por exemplo, um dicionário (um registro de jogos de linguagem e, ele próprio, um jogo de linguagem particular), encontraremos algumas formas diferentes de se usar a palavra “reta”, ou seja, alguns significados diferentes para diferentes jogos de linguagem. Isto significa que “Reta” pode ser usada (a) para falar de um objeto matemático; (b) como adjetivo para coisas ou pessoas; (c) é possível (é lícito) tanto falar que “uma pessoa é reta com seus deveres” quanto, como na frase de Voltaire: (d) “Um genealogista prova a um príncipe que este descende em linha reta de um conde...” etc. (PINTO, 2009, p. 73)

Este evento nos remete a nossa pesquisa, porém em uma situação oposta, pois em nossos apontamentos temos duas palavras distintas que possuem o mesmo significado em jogos diferentes, Barbosa (2006) e Rezende; Queiroz (2000), fazem uso de termos diferentes que possuem o mesmo uso em seus respectivos manuais didáticos, a saber: “Postulados” e “Axiomas” nos manuais descritos, ganham o mesmo uso, apresentam o mesmo significado. Acreditamos que se um aluno faz uso de um livro e por algum motivo resolve usar o outro, poderá sentir certa estranheza.

Outro evento apontado por Pinto (2009) é “Definições dadas no/pelo uso”, o autor cita um determinado trecho de suas gravações onde a professora pergunta para turma o que era “mediana” e já atrelada à pergunta indaga: “O que a gente tem que fazer?”. Ou seja, para propor um entendimento da palavra mediana a professora propõe o seu uso, uma ação “o que fazer”. Pinto (2009) aponta também para outras palavras como por exemplo, mesa, vassoura e talher, onde ele faz uma pesquisa em um dicionário popular na internet escrito por pessoas comuns chamado Wikipédia, e neste, procurou o significado popular dos objetos citados acima, ao que constatou que as respostas mais comuns à sua busca, estavam voltadas ao uso do objeto pesquisado.

> Note que a “definição” dos dois objetos, logo de início, vem atrelada ao uso, o mesmo acontece com o termo “Talher” e outros tantos. Podemos perceber que, exceto a vassoura, os outros dois objetos não apresentam características físicas obrigatórias para que objetos “sejam” mesa ou talher, e mesmo ao termo vassoura, teríamos uma série de objetos que chamamos atualmente de vassoura e que vão além das características descritas neste “verbete”. (PINTO, 2009, p. 80)

Algumas terminologias usadas nos manuais que nos propomos a descrever como: teorema, corolário, proposição entre outros, são de pouco uso em outras aplicações, fora do contexto da Matemática, e mesmo na graduação, apenas algumas disciplinas as utilizam. Pode-se inicialmente encontrar certa dificuldade para usá-las, pela pouca familiaridade, visto ter este uso restrito, no entanto, aos poucos, mesmo sem uma explicitação fortemente delineada, vai se aprendendo seu uso naquele ou em outro jogo (conforme se joga).

Em outra pesquisa usando os jogos de linguagem de Wittgenstein Denise Vilela (2007) faz um estudo sobre as adjetivações da matemática na literatura da Educação Matemática, tais como: matemática escolar, matemática da rua, matemática acadêmica, matemática popular e matemática do cotidiano, cada uma delas oriundas de uma determinada forma de vida. Vilela (2007) analisou um dossiê de 60 (sessenta) documentos/textos buscando observar os jogos de linguagem neles contidos e a medida do possível identificar as relações de famílias existentes nas diversas matemáticas. A autora apresenta algumas diferenças e ligações entre as matemáticas, destacamos então algumas peculiaridades entre a matemática escolar e a matemática da rua.

Vilela (2007) nos apresenta a visão de Lins & Gimenes (1997*)*, na qual existem conceitos de aritmética exclusivo da rua, como cita, número de coisas reais, e existem outros típicos e exclusivos da escola, como os números irracionais, números complexos e números muito grandes, a autora atribui a essa distinção a nomenclatura de: *Diferença entre os pólos da expressão*. Ou seja, um dos atravessamentos apresentados pelos autores, segundo Vilela (2007), é de não haver integração entre o que se aprende na escola com o que se usa na rua, aparentando aí uma grande separação entre a matemática escolar e da rua, evidenciando diferentes significados entre elas.

> Os significados para o filósofo austríaco estão nos usos, eles podem variar, não estão definitivamente fixados. Em oposição a uma essência que garantiria um significado único, a perspectiva wittgensteiniana assume o ponto de vista de que os significados se constituem e se transformam em seus usos em diferentes contextos, e, neste sentido, podem variar conforme o *jogo de linguagem* de que participam. Desse modo, os significados não estão fora da linguagem, no mundo externo ou numa estrutura mental universal e necessária, mas no uso da linguagem. (VILELA, 2007, p.12)

Assim como a autora, nos indagamos também se os significados dos termos usados na Geometria Euclidiana Plana, os modos de uso, são os mesmos ou se assemelham aos usos fora deste ramo da matemática e fora do próprio ambiente acadêmico. Pensando particularmente na formação de professores de Matemática, estes usos aprendidos na universidade serão os mesmos a serem levados para a sala de aula da Educação Básica, ou lá serão outros usos? O quão igual ou diferente serão essas geometrias? Nesta pesquisa não tentaremos responder a tais questionamentos, mas esses atravessamentos se colocam como significativos em nossa formação.

Outro trabalho que atende as especificações que estabelecemos para nossas revisões é a pesquisa de Júlio Corrêa (2015) que faz uso da filosofia de Wittgenstein para revisar textos de Paul Ernest, de como a matemática se constitui a partir das guerras, visando investigar as condições de emergência da Educação Matemática, partindo do enunciado de Ernest que sugere que esta emergência está ligada a Guerra Fria. Além dos textos, Corrêa (2015) rastreou também pesquisas realizadas sobre a história da pesquisa em Educação Matemática e sobre a história da *New Math*. Constataram que no período da Guerra Fria houve um aumento do número de periódicos, grupos, conferências e instituições relativas a Educação Matemática e principalmente às práticas de pesquisa em Educação Matemática.

Apesar de todos esses indicadores, Corrêa (2015) afirmou não ser suficiente para esclarecer as condições de emergência da Educação Matemática enquanto campo autônomo de investigação acadêmica, pois observou que os jogos linguagem apresentados nos textos não remetiam aos jogos de linguagem situados no contexto da Guerra Fria.

> Acontecia que os textos destes indicadores nos remetiam, frequentemente, a outros jogos de linguagem que não estavam situados no contexto da Guerra Fria. E, mesmo que concordássemos que tal emergência teria ocorrido em meio ao debate internacional de reforma curricular da matemática escolar em nome de uma nova matemática, a questão "*Afinal de contas, por que veio a matemática moderna*?" continuava a nos inquietar. (CORRÊA, 2015, p. 141, 142)

Não acreditavam que era suficiente supor uma modificação no currículo da matemática escolar que afetasse diversos países do ocidente, pautados na separação de uso entre a matemática acadêmica e a matemática escolar, mesmo que esse "abismo" fosse repetidamente citado nos textos de seu dossiê que ele chama de "*warquivo*", não pareciam aceitar que modificações "internas" no campo da matemática teriam levado a modificações no campo da Educação Matemática.

Corrêa (2015), atravessado por esse descontentamento no uso dos jogos de linguagem de seus "warquivos" que apresentavam dessemelhanças aos jogos de linguagem em uso no contexto da Guerra Fria, saiu da observação interna dos jogos de linguagem nos textos relativos à matemática e a Educação Matemática, e passou a buscar significados em estruturas de diferentes campos da atividade humana. Nessa nova busca, acabou percebendo certo "embate" entre estruturas de atividade humanas muito próximas, ao que ele nomeou de "guerra fria" entre seus respectivos jogos de linguagem.

> Nesse rastreamento, fomos percebendo que esses jogos estruturalistas de linguagem demonstravam seus efeitos performáticos na guerra fria que travaram contra outros jogos de linguagem: os jogos de linguagem da pintura cubista travaram uma guerra fria contra jogos de linguagem centrados em uma representação especular da realidade; os jogos de linguagem da literatura oulipiana travavam uma guerra fria contra jogos de linguagem centrados em cânones literários; os jogos de linguagem da música dodecafônica travavam uma guerra fria contra os jogos de linguagem centrados na hierarquia da escala tonal; e os jogos de linguagem estruturalmente descentráveis da matemática bourbakista travavam uma guerra fria contra os jogos de linguagem de estrutura fixa do formalismo euclidiano clássico. (CORRÊA, 2015, p.142)

Nossa pesquisa se deu em uma outra forma de vida, meu orientador enquanto professor no Instituto de Matemática (INMA) da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, estava habituado a usar o livro de Barbosa (2006), até que, por questões logísticas, lhe é apresentado o livro de Rezende & Queiroz (2000) para ser usado com as novas turmas na disciplina de Elementos de Geometria no curso de Licenciatura em Matemática na Modalidade EAD. A partir do uso daquele novo material, ele passou a observar dessemelhanças – em meio a muitas semelhanças - entre os jogos de linguagem dos manuais de Barbosa (2006) e de Rezende & Queiroz (2000). Não tivemos aqui um "embate", como o sugerido por Corrêa (2015), mas tratamos de jogos aparentemente semelhantes que quanto mais aprofundávamos nossa pesquisa, mais percebíamos dessemelhanças. Dali em diante, fomentou-se a intenção de aprofundar neste estudo, e assim, de forma bastante sucinta, resultou nossa pesquisa.

Voltando ao texto de Corrêa (2015), essa dicotomia observada por ele aliada a um movimento terapêutico dessa nova abordagem na pesquisa, o levou a perceber o uso constante dos termos: moderno, modernista e modernismo. Passaram então a rastrear estilhaços[3] de significado das palavras moderno, modernista e modernismo, procurando conectar jogos modernista de linguagem com jogos estruturalistas de linguagem. Essa distinção ajudou-os a compreender os jogos modernos de linguagem como jogos que promoveram a concepção de estrutura centrada, criando assim a ideia comparativa de uma máquina mecânica. Já os jogos modernistas de linguagem entendidos como jogos estruturalmente descentrados de linguagem, como tais que promoveram a concepção de estrutura descentrada e a ideia comparativa de uma máquina algorítmica ou estrutural combinatória. E nessa chamada guerra fria da linguagem, perde a estrutura mecanicista centrada na linguagem em um confronto com a visão arquitetônico linguístico, que é descentralizado da linguagem.

> Na guerra fria entre jogos modernos de linguagem e jogos modernistas de linguagem, perde força a visão arquitetônico mecanicista do mundo, promovida pelos jogos estruturalmente centrados de linguagem, e emerge a visão arquitetônico-linguístico-estrutural do mundo, promovida por jogos estruturalmente descentrados de linguagem. (CORRÊA, 2015, p. 143)

Assim, ao que afirma Corrêa (2015), sendo possível dizer que as condições nas quais teriam proposto a emergência da educação matemática como campo autônomo de pesquisa acadêmica foram se estabelecendo em paralelo à emergência do poder performático de jogos

[3] Terminologia usada por Corrêa (2015) para referir-se à linha investigativa, objeto/ideia/conceito.

de linguagem estruturalmente descentrados em diferentes campos de atividade humana. Contudo, ao que Paul Ernest afirmou dizendo que Educação Matemática é filha da Guerra Fria, Corrêa (2015) conclui que além de realmente ser filha da Guerra Fria, também é neta das duas Grandes Guerras mundiais, e bisneta da guerra fria que os jogos estruturalmente descentrados travaram com jogos estruturalmente centrados de linguagem desde a segunda metade do século XIX e no decorrer do século XX.

2. JOGOS DE LINGUAGEM

A linguagem está no cerne de nossas ações, daquilo que chamamos de conhecimento, desta forma, está também no centro de nossas atenções neste trabalho. Mas o que é a linguagem? O que podemos falar dela?

Se procurarmos essa definição em um dicionário ou em algum site de pesquisa na internet, encontraremos algo como “Expressão do pensamento pela palavra, pela escrita ou por meio de sinais”[4]. Acreditamos que seja então importante discutir um pouco de nossa visão sobre a linguagem, que diverge desta e está, em grande medida, apoiada em nossas leituras de Wittgenstein em sua segunda fase e de trabalhos que o utilizam. Daremos especial destaque à ideia de jogos de linguagem.

2.1 APONTAMENTOS TEÓRICOS E METODOLÓGICOS

Ludwig Wittgenstein (1889-1951) é considerado por muitos estudiosos como um dos filósofos mais importantes do século XX, foi ele o principal responsável pela chamada *virada linguística* da filosofia, movimento este que colocou a linguagem no cerne da reflexão filosófica, deixando de ser apenas um catálogo para nomear as coisas ou transmitir pensamentos. Com Wittgenstein a linguagem passa a ser usada no cerne dos questionamentos filosófico, expandindo a indagações filosóficas, pois para Wittgenstein não há problemas filosóficos e sim de linguagens.

Wittgenstein era determinado, rigoroso e totalmente focado naquilo que se propunha a fazer, era também descrito como excêntrico e pouco sociável, muitas vezes até arrogante, pois achava desnecessário explicar aquilo que para ele era óbvio. No ano 1914, com a eclosão da Primeira Guerra Mundial, alistou-se no exército austríaco, sendo enviado às trincheiras para lutar na linha de frente do exército contra a Itália. Durante os momentos de descanso, em meio à guerra, escreveu o que seria um esboço de sua primeira obra filosófica, intitulada “Tratado Lógico Filosófico”, este esboço foi resultado de longos debates com seu mentor Bertrand Russell, antes de ir para a guerra.

Em 1918 é ferido e preso pelos italianos e só é libertado em 1919. Segundo João da Penha (2013), Wittgenstein aproveita o cárcere para concluir seu livro. O Tractatus é um livro

[4]“Expressão do pensamento pela palavra, pela escrita ou por meio de sinais ”, ver Dicionário do Aurélio on-line: <https://dicionariodoaurelio.com/linguagem> acesso: 05/05/2018

escrito em aforismos, Wittgenstein sofria de uma dislexia e era incapaz de produzir um texto longo, assim, encontrou uma solução lógica compondo seu livro em aforismos. Dessa forma, não existe uma sequência a ser seguida na leitura de seus livros, o leitor pode fazer a leitura por diversos pontos de partida, independente da estrutura impressa.

Ao que escreveu Penha (2013), Wittgenstein realizou uma profunda revisão de sua própria teoria, mesmo enquanto filósofos e pensadores da época admiravam sua obra, ele a questionava, e a modificou a tal ponto que muitos estudiosos a dividem em dois períodos: o "primeiro Wittgenstein", com seu livro "Tractatus Logico-Philosophicus", publicado em 1921, e o "segundo Wittgenstein", cuja obra é a modificação e o questionamento de pontos cruciais da primeira obra, e esta é intitulada "Investigações Filosóficas", organizada e publicada postumamente – desta vez organizada em um texto linear. Sua atuação era no estudo da filosofia da linguagem, filosofia da matemática e lógica, com ele expande a ideia da filosofia analítica tomando lugar da filosofia tradicional presente na época. Embora se tratem de "dois Wittgensteins", que influenciaram escolas filosóficas diferentes, a linguagem é o tema fundamental de sua reflexão e o que estabelece unidade a sua obra.

A linguagem vai muito além da interpretação de códigos linguísticos e está muito além de sílabas, palavras e frases, ela está nos gestos, na entonação da fonética, nas expressões faciais e corporais, no sentimento expresso muitas vezes sem proferir uma palavra sequer. A língua é apenas uma parte do que podemos entender como linguagem.

Antes de Wittgenstein, era comum pensar que o significado de uma palavra estava ligado ao objeto denominado por ela (ainda hoje encontramos este modo de pensar). Com a virada linguística, abandona-se a ideia de universalidade da linguagem. A palavra ou frase passa a ser compreendida sempre em certo contexto, ou seja, sendo respeitada a particularidade de cada situação, valendo sempre perguntar: como está sendo usada aquela palavra ou expressão naquela forma de vida?

O saudoso poeta pantaneiro Manoel de Barros[5] certa vez escreveu: "Poesia não é para entender e sim para incorporar, entender é parede: procure ser uma árvore". O uso da linguagem na poesia de Barros (2011) nesse trecho nos remete a uma compreensão vívida, saímos da visão

[5] BARROS, M. Poesia Completa. São Paulo: Leya, 2011.

cartesiana e euclidiana de elencar e definir as coisas mais básicas para construir nosso edifício de conhecimento e partimos para o uso liberto/vivo da linguagem.

O parágrafo anterior parece contradizer tudo que se diz sobre linguagem matemática, que tenta, cada vez mais, ser "parede", tomada como envolta por regras e definições rígidas, longe de ambiguidades e independente do "ser humano" que a lê ou escreve. A linguagem não pode e nunca poderá ser limitada por uma regra única e geral que estabeleça seus critérios e suas aplicações, muito pelo contrário, Wittgenstein apresentou os jogos de linguagem que podem ser infinitos e serem usados paralelamente em um mesmo contexto.

> Podemos também imaginar que todo o processo do uso das palavras em (2) é um daqueles jogos por meio dos quais a crianças aprendem sua língua materna. Chamarei esses jogos de "jogos de linguagem", e falarei muitas vezes de uma linguagem primitiva como de um jogo de linguagem. (...). Chamarei também de "jogos de linguagem" o conjunto da linguagem e das atividades com as quais está interligada. (WITTGENSTEIN, 1984, p.12)

Os jogos de linguagem se estabelecem imbricados com o meio em que ele é jogado, com regras que não são definidas em um momento específico (prévio ao jogo), onde os participantes param de jogar e começam a estabelecer definições para os termos utilizados em uma determinada conversa. Segundo Wittgenstein, essas regras não estão definidas em um dicionário ou manual, "aprende-se o jogo assistindo como os outros jogam." (§ 54). Dizemos que as regras foram compreendidas a partir do momento em que se joga "corretamente" o jogo em questão, não faz sentido definir uma palavra fora de seu uso, é o seu uso que define seu significado: aprender uma língua é aprender uma forma de vida.

Como podemos exemplificar, um grupo social bastante heterogêneo é o grupo da construção civil, neste, podemos encontrar membros de diversas classes sociais, religiões, localização geográfica, raças e formações acadêmicas. Nele há também subgrupos hierarquizados, como os grupos dos engenheiros, dos arquitetos, dos mestres de obras, dos pedreiros e dos serventes. Cada um desses subgrupos usa algumas palavras que não fazem sentido para outros subgrupos – ou melhor, que produz efeitos diversos nestes outros grupos que não aqueles esperados - , mas em um contexto geral há muitas outras palavras que são compreendidas por todos destes grupos, há semelhanças como as de família, assim o usuário reconhece essas diferenças e semelhanças e age de forma diferente em cada contexto.

Podemos apresentar algumas palavras que são comuns a todos os subgrupos citados acima, como por exemplo: prumo, nível e alinhamento. Nos jogos de linguagem da construção civil tais palavras apresentam usos próximos por todos os subgrupos, há pequenas variações quanto a seu uso, mas todos os subgrupos encontram semelhanças de uso desta palavra em seu jogo de linguagem. Há outros grupos fora da forma de vida da construção civil que também usam estas palavras, como em uma borracharia, o termo alinhamento é bastante usado, mas não da mesma forma que nas construções civis.

É importante ressaltar que o uso da palavra alinhamento ocorre em muitos outros jogos de linguagem, variando de acordo com a forma de vida que a usa, por esse motivo é impossível conseguir estabelecer uma definição para palavras sem que se apresente o contexto/forma de vida que a usa.

Fazendo uma relação comparativa entre o futebol e o *handebol*, ambos os jogos possuem regras semelhantes e objetivos idênticos (fazer gols), mas não se trata em nenhum momento do mesmo jogo. Assim, é possível um jogador de futebol encontrar certas características de seu esporte no *handebol* e vice-versa, estes jogos formam uma família:

> Não posso caracterizar melhor essas semelhanças do que por meio das palavras 'semelhanças familiares'; pois assim se sobrepõem e se entrecruzam as várias semelhanças que existem entre os membros de uma família: estatura, traços fisionômicos, cor dos olhos, andar, temperamento, etc. – E eu direi: os 'jogos' formam uma família. (WITTGENSTEIN, 2009, §67).

Observando o aluno no contexto da aprendizagem da matemática, será que este reconhece semelhanças a algumas regras, estruturas e até mesmos códigos que são ou foram utilizados em outros jogos de linguagem para o ensino da Matemática? Como podemos exemplificar, no estudo da área de figuras planas o aluno compreende que a área de um retângulo é dada pelo produto da base com a altura. Em outro momento, estudando área de triângulos, é apresentada a ele a área do triângulo como o produto da base pela altura, dividindo o resultado por dois. O aluno pode reconhecer ali, a relação do retângulo que ele estudou anteriormente?

Outro exemplo prático que podemos apresentar parte de minha forma de vida no convívio familiar, sou casado e tenho dois filhos, o Murilo de 4 (quatro) anos e a Luísa de 2 (dois) anos. Assim, depois que passei a ler e usar a filosofia dos jogos de linguagem, isso ficou impregnado em mim, e passei a ver "eventos"[6] nas ações cotidianas e entre meus filhos também.

---

[6] Ao escrever Evento, estou remetendo ao uso que Pinto (2009) faz em sua dissertação, no qual já foi apresentado anteriormente.

Estando eu em casa, brincando com as crianças, em certo momento Luísa vem até mim chorando e reclamando que o Murilo havia batido nela, ao que o Murilo replicou dizendo. – Papai, ela começou primeiro, eu apenas **descontei**.

Destacamos a palavra 'descontei' colocando-a em negrito para trazer ao leitor a importância do contexto do uso da palavra, pois consultando um dicionário[7], encontramos três definições neste jogo de linguagem do dicionário, que são: 1) Deduzir, Abater; 2) Trocar com desconto; 3) Não meter em conta, Prescindir (Passar sem, Renunciar, Dispensar e Pôr de parte). Logo, nenhuma das definições dadas pelo dicionário pôde me explicar/justificar a resposta dada pelo meu filho, no entanto, o contexto no que o uso se deu e eu ter participado em minha vida de jogos semelhantes, me propiciou participar/compreender o uso que era dado por ele. Poderia, certamente, ter usado a palavra revidar caso fosse um outro jogo. Isso não significa afirmar que "o que ele queria realmente dizer era revidar", isso iria contra nosso entendimento do uso da linguagem, para Murilo, talvez a palavra revidar não faça nenhum sentido, bem como as definições do dicionário para descontar também podem não fazer.

Voltando para a consulta ao dicionário, acreditamos que as definições apresentadas por ele não são capazes de representar com precisão uma palavra, pois ela em si não carrega significado algum, qualquer significado de uma palavra está no seu uso, no seu modo de uso em um determinado jogo. Também, de forma alguma refutamos a importância do dicionário, apenas cremos que ele apresenta mais limitações do que normalmente se supõe.

> Santo Agostinho descreve, podemos dizer, um sistema de comunicação; só que esse sistema não é tudo aquilo que chamamos de linguagem. E isso deve ser dito em muitos casos em que se levanta a questão: "Essa apresentação é útil ou não?". A resposta é, então: "sim, é útil; mas apenas para esse domínio estritamente delimitado, não para o todo que você pretendia apresentar". (WITTGENSTEIN, 2009, §3).

Dessa forma, acreditamos que mais importante do que estabelecer uma definição para a palavra (que segundo Wittgenstein é insuficiente), deve-se observar o contexto (jogo de linguagem) no qual ela foi empregada.

Não somente palavras, mas símbolos e abreviações, que são elementos da linguagem também dependem do uso e da forma de vida em que ela está sendo empregada. Como podemos citar o símbolo 'P.A.', esta é uma abreviação que varia muito de acordo com a forma de vida

---

[7] Disponível em: ‹https://dicionariodoaurelio.com/descontei›. Acesso em: 13 Jan. 2018

que a usa, por exemplo: na matemática escolar ela é entendida como progressão aritmética; nas engenharias é nomeada como ponto de apoio; na física é entendido com unidade de medida para pressão dada como a razão entre força sobre a área, unidade de medida Pascal; na área médica esta simbologia é entendida como pressão arterial. Note que a relevância deste símbolo varia muito de uma forma de vida para a outra.

Assim, as pessoas podem participar de mais de uma forma de vida, de inúmeros jogos de linguagem, e entre esses jogos é possível que encontremos semelhanças como de família e também dessemelhanças entre eles. Não existe uma universalidade linguística que atenda a todas as formas de vida e jogos de linguagem.

> Pode-se, para uma grande classe de casos de utilização da palavra "significação" – se não para todos os casos de sua utilização -, explicá-la assim: a significação de uma palavra é seu uso na linguagem. (WITTGENSTEIN, 2009, §43).

Ao que nos espera em nossa pesquisa, descrevemos jogos de linguagem em dois manuais didáticos distintos que apresentam semelhanças e dessemelhanças, dessa forma não é nossa intenção direta realizar uma comparação entre eles– no sentido de tomar um como referência para análise do outro -, mas de forma natural os jogos de linguagem tendem a essa equivalência, e isso ressaltará nossos apontamentos, como Wittgenstein escreve.

> Nossos claros e simples jogos de linguagem não são estudos preparatórios para uma futura regulamentação da linguagem, - como que primeiras aproximações, sem considerar o atrito e a resistência do ar. Os jogos de linguagem figuram muito mais como *objetos de comparação*, que, através de semelhanças e dessemelhanças, devem lançar luz sobre as relações de nossa linguagem. (WITTGENSTEIN, 2009, §130).

Dessa forma, o que pretendemos é descrever, em um movimento terapêutico, sempre pensando em um possível aluno usuário destes manuais, estas nuances, minúcias da linguagem "empregada" (constituinte) destes manuais. Por mais que em um movimento bibliográfico, poderíamos chamar aqui de uma Terapia Bibliográfica, sempre temos nesta leitura um horizonte pautado em alguma forma de vida, seja a nossa, enquanto leitores, seja na dos alunos – mesmo que de forma imaginativa – não se trata, portanto, de um processo hermenêutico. Não pretendemos nesse exercício buscar validar ou fundamentar estes jogos, como discorre Wittgenstein,

> A filosofia não deve, de modo algum, tocar no uso efetivo da linguagem; em último caso, pode apenas descrevê-lo. Pois também não pode fundamentá-lo. A filosofia deixa tudo como está. Deixa também a matemática como está, e nenhuma descoberta

> matemática pode fazê-la progredir. Um “problema central da lógica matemática” é para nós um problema de matemática como um outro qualquer. (WITTGENSTEIN, 2009, §124).

Outra aplicação da filosofia de Wittgenstein é o uso da Terapia como um processo metodológico de investigação. Em nossa pesquisa, tendemos para um movimento terapêutico bibliográfico, na intenção de nos afastar de um conceito metafísico, como descreve Miguel (2015):

> (...) Associei esta imagem àquela que Wittgenstein faz da filosofia, porque ela me parece representar bem a batalha incansável travada por esse filósofo contra os modos metafísicos de pensar. Se as passagens mencionadas parecem sugerir que Wittgenstein estaria reduzindo, até quase ao esvaziamento, a importância e o propósito da Filosofia, as que se seguem parecem sugerir que ele estaria, na verdade, redefinindo o seu papel. (MIGUEL, 2015, p. 03).

Levar ao divã essas duas literaturas embasadas em um modelo axiomático não é uma tarefa simples, descrever os jogos a partir de seus usos olhando para as semelhanças e dessemelhanças entre eles é que trará luz aos apontamentos que pretendemos realizar. Nesse movimento terapêutico, colocamos os livros como um componente de um jogo de linguagem, praticando em uma sala de aula de formação de professores de matemática, assim, consideremos que este objeto estará em uso por outras pessoas, que por sua vez agregam outros jogos de linguagem a este.

3. PRODUÇÃO E ANÁLISE DE DADOS

Lemos os dois manuais buscando observar semelhanças e diferenças nesta leitura. Este movimento foi sempre pensado numa prática de estudo e/ou ensino deste conteúdo para uma turma de Licenciatura em Matemática, ou seja, futuros professores. Sendo este um conteúdo "axiomático", onde se deve respeitar o trajeto, como na construção de um edifício, onde cada postulado/axioma, teorema funcionaria como um "tijolo" deste edifício, buscamos primeiramente uma leitura sequencial, ponto a ponto, olhando para os dois manuais. Optamos então por restringir nossa leitura até o equivalente ao quinto postulado de Euclides. Esta escolha se deu muito em função da exequibilidade da pesquisa.

3.1 OS MANUAIS DIDÁTICOS E SEUS USOS

A Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS) é dividida em 11 campi, destes, 6 (seis) ofertam cursos de Licenciatura em Matemática na modalidade presencial e um deles oferta também na modalidade à distância. Realizamos um levantamento bibliográfico para descobrir a relevância dos manuais escolhidos para o estudo. Nesta busca, o livro: *Geometria Euclidiana Plana* de João Lucas Barbosa (2006) apareceu de forma majoritária como bibliografia básica, e o livro: *Geometria Euclidiana Plana: Construção Geométrica* de Elaine Quelho Rezende e Maria Lúcia Queiroz (2000) segue, tanto na bibliografia básica como na bibliografia complementar com relevância. Ambos os livros são propostos como referenciais nas disciplinas de Geometria no curso da maioria dos campi da Universidade.

É importante ressaltar que o livro de Barbosa (2006) se trata de um exemplar da décima edição que teve sua primeira tiragem em 1985 – com grande circulação em todo país -, já o livro de Rezende & Queiroz (2000), teve sua primeira edição no ano 2000 e se encontra atualmente na segunda edição, sexta reimpressão, no ano de 2016. Acreditamos que é importante frisar o espaço temporal entre as duas publicações, situar nosso leitor quanto às possíveis influências culturais, sociais e políticas no entorno das duas publicações, e também nos atermos ao fato de que, quando o livro de Rezende & Queiroz (2000) foi escrito, o livro de Barbosa (2006) já existia e, muito possivelmente, as autoras já tiveram algum tipo de contato com ele, visto que é utilizado na grande maioria dos cursos de graduação pelo país.

O livro de Rezende & Queiroz (2000) possui um formato retangular de dimensões (21x28) cm, é composto por 253 páginas, encadernado como brochura, sendo impressas frente e verso em preto e branco. Sua impressão foi realizada pela Editora Unicamp/Imprensa Oficial. Traz em sua capa um título em destaque para **Geometria Euclidiana Plana** e, mais abaixo, como subtítulo: **construções geométricas**, ela é colorida em verde e cinza contendo uma gravura helicoidal bidimensional no centro com detalhes triangulares organizados de forma a representar losangos formado pela união das bases desses triângulos.

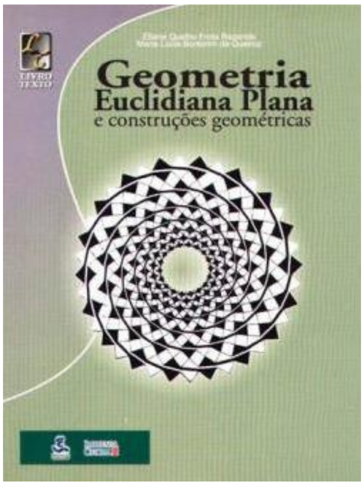


Figura 4: Capa Rezende; Queiroz (2000)
Fonte: Site Shop Fácil

Já o livro de Barbosa (2006) possui um formato retangular de dimensões (21x15) cm, composto por 222 páginas, encadernado em brochuras, sendo impressas frente e verso em preto e branco. Sua impressão foi realizada pela SBM (Sociedade Brasileira de Matemática). Traz em sua capa um título em destaque para **Geometria Euclidiana Plana** e mais abaixo o nome do autor do livro:

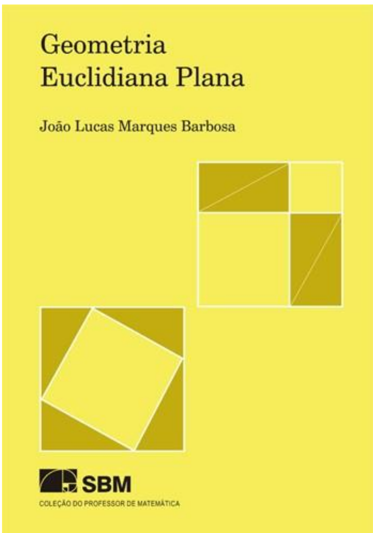


Figura 5: Capa Barbosa (2006)
Fonte: Site Estante Virtual

Apresentamos a seguir um quadro resultante de nossa pequena pesquisa bibliográfica realizada junto às coordenações dos cursos de Matemática – Licenciatura Plena da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Neste, apresentamos os núcleos que ofertam o curso, e a presença destes dois títulos na bibliografia.

Levantamento Bibliográfico - Campi UFMS			
Campus	**Curso de Matemática**	**Bibliografia Básica**	**Bibliografia Complementar**
Aquidauana	Licenciatura Plena	Barbosa (2006)	Rezende & Queiroz (2000)
	Prolind[8] Licenciatura Indígena	***	***
Bonito	-	-	-
Campo Grande	Licenciatura Plena (presencial)	Barbosa (2006)	Rezende & Queiroz (2000)
	Licenciatura Plena (EAD)	Rezende & Queiroz (2000)	Barbosa (2006)
Chapadão do Sul	-	-	-
Corumbá	Licenciatura Plena	Barbosa (2006)	Rezende & Queiroz (2000)
Coxim	-	-	-
Naviraí	-	-	-
Nova Andradina	-	-	-
Paranaíba	Licenciatura Plena	Barbosa (2006)	Rezende & Queiroz (2000)
Ponta Porã	Licenciatura Plena	Barbosa (2006)	Rezende & Queiroz (2000)
Três Lagoas	Licenciatura Plena	Barbosa (2006)	Rezende & Queiroz (2000)

Quadro 01: Licenciaturas Campi UFMS
Fonte: Elaborado no desenvolvimento da pesquisa.

Na sessão seguinte, apresentamos os apontamentos de nossas observações a respeito dos jogos de linguagem nos manuais didáticos que nos propomos a estudar, como já citamos, não iremos abordar os livros na íntegra, então, limitamos nossa leitura até o equivalente ao quinto Postulado de Euclides. Nesta análise, dividimos o texto em duas partes: na primeira tratamos dos quatro primeiros postulados, e seus usos nos manuais, e na segunda tratamos especificamente do quinto postulado e quais foram as regras que os autores usaram para jogar com outras geometrias em seus respectivos manuais.

[8]PROLIND é um programa do Governo Federal que tem como objetivo ofertar graduação de licenciatura para a comunidade indígena nas diversas áreas do conhecimento incluindo a Matemática, porém a grade curricular do curso de Matemática Licenciatura não faz uso dos manuais didáticos de nossa pesquisa.

3.2 PRIMEIROS POSTULADOS

Iniciando o primeiro capítulo, em ambos os manuais, observamos que os autores não se prendem muito a uma introdução mais demorada à Geometria Euclidiana Plana. De forma semelhante, falam sucintamente sobre ponto, reta e plano e, logo em seguida, apresentam seus postulados e axiomas.

Verificamos que cada autor ao apresentar seus postulados/teoremas, evidenciam peculiaridades nas quais podemos encontrar semelhança a outros jogos de linguagens, como podemos citar as autoras Rezende & Queiroz (2000), mesmo trazendo no título de seu manual a expressão: "Construções Geométricas", optam por uma linguagem que mais se aproxima da Teoria dos Conjuntos[9], optando por termos como: contém, contido, pertence, conjunto e subconjunto.

58 *Eliane Q. F. Rezende e Maria Lúcia B. Queiroz*

da reta paralela a uma reta dada, passando por um ponto fora dela, cuja existência já foi demonstrada no Teorema 4.2 e afirma que *por um ponto não pertencente a uma reta dada, passa no máximo uma reta paralela a essa reta.* A partir daqui usaremos livremente o Postulado das Paralelas de Euclides, embora boa parte dos resultados possa ser demonstrada em outras "geometrias" também. Embora seja um postulado apenas de unicidade da reta paralela, vamos enunciá-lo a seguir, da maneira como é usualmente conhecido.

Figura 6: Teorema 4.2
Fonte: REZENDE; QUEIROZ, 2000, p. 58.

O Postulado das Paralelas

Postulado 13. (Postulado das Paralelas) Por um ponto não pertencente a uma reta dada, passa uma única reta paralela a essa reta.

Figura 7: Postulado das Paralelas
Fonte: REZENDE; QUEIROZ, 2000, p. 58.

9 A Teoria dos Conjuntos está "atrelada a um ramo da matemática dedicado ao estudo dos conjuntos e de suas propriedades. Durante muito tempo a Teoria dos Conjuntos – ou a noção intuitiva da Teoria dos Conjuntos aparece em meados dos século XIX, com os edutos do matemático Georg Cantor (1845 -1918) que, juntamente com Rivhard Dedekind, pesquisava a respeito da continuidade e o infinito - conceitos rodeados de controvérsia – e correspondências biunívocas entre conjuntos numéricos e representações de funções variáveis real através de séries trigonométricas, tentando mostrar uma unicidade da representação para funções com infinitos pontos singulares, chegando a ideia de conjunto derivado." (CAMPOS, 2014, p. 18)

Já Barbosa (2006), quando olhamos para a linguagem proposta em seu manual, observamos que para apresentar o Axiomas das Paralelas faz uso de uma linguagem que muito se aproxima das construções geométricas, o uso de termos comuns ao jogo de linguagem no estudo das construções geométricas: corta, constroem-se, formam, passa, é possível construir etc.

Quando duas retas são cortadas por uma transversal formam-se oito ângulos como indicado na figura abaixo. Quatro deles são *correspondentes* aos outros quatro, a saber

Figura 8: Construções Geométricas
Fonte: REZENDE; QUEIROZ, 2000, p. 87.

86 GEOMETRIA EUCLIDIANA PLANA

Corolário 6.2 *Se uma reta corta uma de duas paralelas, então corta também a outra.*

Prova: Sejam n_1 e n_2 retas paralelas. Se uma reta m cortasse n_1 e não cortasse n_2, então m e n_2 seriam paralelas. Assim n_2 seria paralela a m e a n_1. Como m e n_1 não são paralelas entre si nem coincidentes, temos uma contradição com a proposição anterior. Logo m corta também n_2.

A nossa definição de retas paralelas não é tão simples de usar como aparenta. Desde que retas são infinitas em comprimento, como poderemos provar que duas retas não se intersectam? Por exemplo, as retas m e n da figura abaixo parecem ser paralelas. Como decidir se elas não se encontram em algum ponto do plano muito distante de A e B?

Figura 9: Corolário 6.2
Fonte: BARBOSA, 2006, p.86.

Ainda nas observações quanto à linguagem usada pelos autores em seus respectivos manuais, apontamos outra peculiaridade no que diz respeito à nomenclatura das afirmativas que devem ser tomadas como verdade “sem demonstrações”, as autoras Rezende & Queiroz (2000) chamam de POSTULADOS, já Barbosa (2006) opta pela palavra AXIOMA. Em nossa leitura, nos parece que os autores buscam sentidos semelhantes para estas duas palavras (postulado/axioma), elas parecem designar uma sentença que não deve ser questionada, tampouco provada.

Cabe salientar que se nossa referência fosse a obra de Euclides, ambos apresentariam divergências, visto que para Euclides há as duas nomenclaturas, tratando então de coisas diferentes. Não buscamos a obra de Euclides como referência para a leitura destes manuais, no entanto, ter tido contato com ela nas leituras assessórias de uma pesquisa nos fez perceber tais diferenças, que optamos aqui por explicitar, como um leitor/aluno que pudesse tentar encontrar na obra de Euclides um suporte para o entendimento da disciplina cursada e percebesse tal impossibilidade. Entendemos cada manual como completo, uma "proposta de jogo de linguagem" assim, cada minúcia pode nos indicar uma peça diferente nestes jogos.

Percebemos que Rezende & Queiroz (2000) apresentam um diálogo sobre como surgiram as primeiras ideias geométricas, mas já em seguida falam de termos indefinidos, classificando o plano como um grupo de retas e pontos e a reta como sendo um subgrupo desse plano.

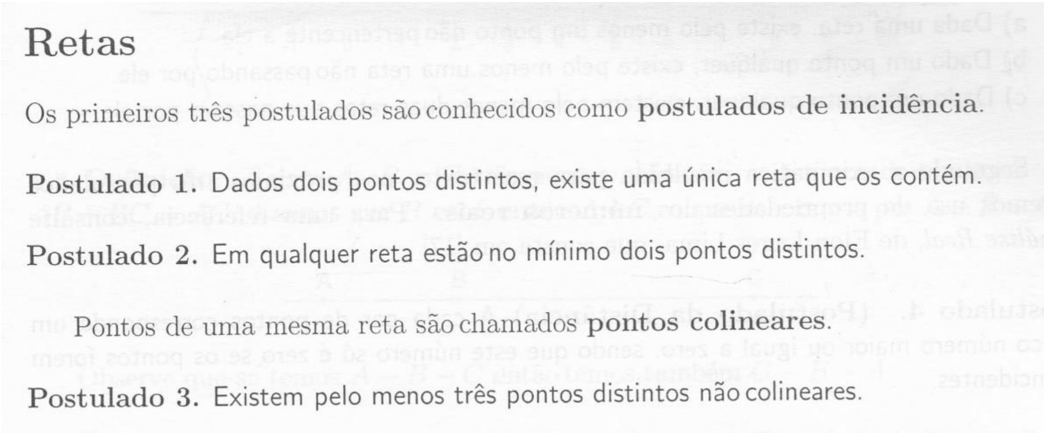
Barbosa (2006) faz uma classificação semelhante, estabelecendo o plano como um grupo, a reta como um subgrupo e o ponto como elemento desse subgrupo. O autor afirma que esses termos indefinidos: ponto, reta e plano, satisfarão cinco grupos de axiomas que ele apresentará em seguida. Dessa forma, Barbosa (2006), faz uma classificação estabelecendo cinco grupos de axiomas, os quais apresentaremos neste capítulo.

Notamos que os autores não usam efetivamente os postulados de Euclides que pode ser encontrado numa recente tradução do grego antigo (EUCLIDES, 2009). Nos parece que a forma como Euclides os escreveu já está bastante "divergente" do que encontramos nestes manuais. Com o passar dos anos, séculos e milênios, muitas modificações foram feitas nesta geometria, e daríamos especial destaque ao tratamento axiomático feito por David Hilbert[10],

[10] Em 1898-99, o matemático alemão David Hilbert (1862 a 1943) apresentou um sistema de axiomas completo para a Geometria Euclidiana plana e espacial numa série de conferências na Universidade de Göttingen. Isto significa que todos os resultados dos Elementos permaneciam válidos assumindo seus postulados. Seu sistema axiomático é um dos marcos na História da Matemática pois organiza os fundamentos da Geometria e Análise. A comparação mais próxima que pode ser feita é com a organização ocorrida na Álgebra ao ser introduzido o conceito de grupo. (MOREIRA, 2006, p. 6)

que estabeleceu um conjunto de 20 (originalmente 21) premissas propondo um tratamento moderno à geometria euclidiana.

As autoras Rezende & Queiroz (2000), iniciam a apresentação de seus postulados abrindo um subtítulo "Retas", indicando que os primeiros postulados fazem menção a elas. Assim separam os três primeiros postulados e os classificam como "Postulados de Incidência".



Retas

Os primeiros três postulados são conhecidos como **postulados de incidência**.

Postulado 1. Dados dois pontos distintos, existe uma única reta que os contém.

Postulado 2. Em qualquer reta estão no mínimo dois pontos distintos.

Pontos de uma mesma reta são chamados **pontos colineares**.

Postulado 3. Existem pelo menos três pontos distintos não colineares.

Figura 10: Postulados de Incidência
Fonte: REZENDE; QUEIROZ, 2000, p. 15.

As autoras mostram que com os postulados 2 e 3 garante-se que uma reta se estabelece pela "definição" de dois pontos distintos e que nem todos os pontos de um plano são colineares.

Acreditamos ser importante ressaltar que Barbosa (2006) estabelece como regra de seu jogo de linguagem uma classificação para os axiomas usando os algarismos romanos para classificar 5 grupos de axiomas, com uma subclassificação, na qual esses algarismos romanos são precedidos por números hindus arábicos subscrito, podendo variar de 1 (hum) até 6 (seis).

Barbosa (2006) também usa a mesma classificação apresentada pelas autoras Rezende & Queiroz (2000), porém tal termo é chamado de "Axiomas de Incidência". Outra peculiaridade referente aos manuais é que Barbosa usa dois axiomas para compor o grupo dos "Axiomas de Incidência", e não três como Rezende & Queiroz (2000).

CAPÍTULO 1

AXIOMAS DE INCIDÊNCIA E ORDEM

As figuras geométrica elementares, no plano, são os pontos e as retas. O plano é constituído de pontos e as retas são subconjuntos distinguidos de pontos do plano. Pontos e retas do plano satisfazem a cinco grupos de axiomas que serão apresentados ao longo deste e dos próximos capítulos.

O primeiro grupo de axiomas é constituído pelos *axiomas de incidência*.

Axioma I_1 Qualquer que seja a reta existem pontos que pertencem e pontos que não pertencem à reta.

Axioma I_2 Dados dois pontos distintos existe uma única reta que os contém.

Quando duas retas têm um ponto em comum diz-se que elas se *intersectam* ou que elas se cortam naquele ponto.

Figura 11: Axiomas de Incidência
Fonte: BARBOSA, 2006, p.01.

Seguindo, Barbosa (2006, p. 01) apresenta: “Proposição 1.1 *Duas retas distintas ou não se intersectam ou se intersectam em um único ponto*”. O autor, fazendo uso dos dois axiomas já apresentados, propõe a prova dessa proposição, garantindo assim duas possibilidades entre duas retas distintas, ou são paralelas, ou interseccionam em um único ponto.

Rezende & Queiroz (2000) percorrem um caminho mais alongado para garantir a mesma afirmação. Inicialmente apresentam:

> 1.1 Definição. Duas retas são paralelas se não se interseccionam, isto é, Se nenhum ponto pertence a ambas as retas. Duas retas distintas que se se interseccionam são chamadas retas concorrentes. (REZENDE; QUEIROZ, 2000, p.16)

As autoras primeiramente estabelecem uma definição para retas paralelas e retas concorrentes, colocando o ponto como a referência dessa distinção.

Já em seguida na mesma página as autoras Rezende & Queiroz (2000) propõe: “1.2 Teorema. Duas retas concorrentes interseccionam-se em um único ponto”. A partir da afirmação desse Teorema 1.2, as autoras propõem o Teorema 1.3 descrito na figura 6:

1.3 Teorema.

a) Dada uma reta, existe pelo menos um ponto não pertencente a ela.

b) Dado um ponto qualquer, existe pelo menos uma reta não passando por ele.

c) Dado um ponto qualquer, existem pelo menos duas retas que passam por ele.

Seguindo a axiomática escolhida para esse texto, nos próximos três postulados fazemos uso de propriedades dos **números reais.** Para uma referência, consulte *Análise Real,* de Elon Lages Lima, que consta em [17]

Figura 12: Teorema 1.3
Fonte: REZENDE; QUEIROZ, 2000, p. 16.

Notem no item (a) do Teorema 1.3: “Dado uma reta, existe pelo menos um ponto que não pertence a ela”, descrito na figura 6. Tal afirmação apresenta bastante semelhança com o Axioma I_1 de Barbosa (2006, p.01): “Qualquer que seja a reta existem pontos que pertencem e pontos que não pertencem à reta”. Também no item (c) do Teorema 1.3: “Dado um ponto qualquer, existem, pelo menos, duas retas que passam por ele” conforme descrito também na figura 6, tal afirmação não aparece no jogo proposto por Barbosa (2006), a maior aproximação a essa afirmação é vista na Proposição 1.1 de Barbosa (2006, p.01): “Duas retas distintas ou não se intersectam ou se intersectam em um único ponto”. Rezende & Queiroz (2000), como já relatamos, estende um pouco mais suas considerações e já faz uma conexão com os próximos três postulados, que fazem uso de propriedade de números reais.

Antes de seguirmos, consideramos importante apresentar a seguinte nota de Barbosa (2006):

Ao estudarmos geometria é comum fazer-se uso de desenhos. Nós mesmos faremos uso extensivo de desenhos ao longo destas notas. O leitor, no entanto, deve ser advertido, desde logo, que os desenhos devem ser considerados apenas como um instrumento de ajuda à nossa intuição e linguagem.

Utilizaremos letras maiúsculas $A, B, C, \ldots$ para designar pontos, e letras minúsculas $a, b, c, \ldots$ para designar retas. Por exemplo, na

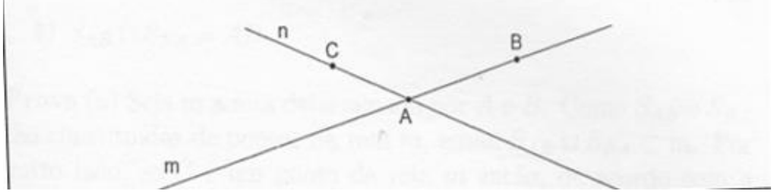


Figura 13: Nota de Barbosa
Fonte: BARBOSA, 2006, p. 02.

Barbosa (2006) preocupa-se em advertir seu leitor quanto ao uso de desenhos em suas notas, pois como ele afirma, os desenhos são usados apenas como recurso de compreensão da linguagem, para ele composta dos axiomas, teoremas proposições, demonstrações etc. Neste sentido, o autor nos parece advogar que tais desenhos não fazem parte da geometria em si, mas são acessórios a ela, defendendo uma geometria que se faz escrita em linguagem e simbologia própria da matemática.

Dando continuidade no manual de Rezende & Queiroz (2000), no Postulado 4 intitulado como: “Postulado da Distância”. As autoras fazem uso de algumas propriedades dos Números Reais. O que pode ser verificado também nos Postulados 5 e 6.

No postulado da “distância”, as autoras estabelecem um número maior ou igual a zero entre um par de pontos, e esse valor só pode ser zero se os pontos forem coincidentes.

Vejamos alguns resultados que podem ser obtidos com os três postulados anteriores e cujas demonstrações deixamos como exercício.

1.3 Teorema.

a) Dada uma reta, existe pelo menos um ponto não pertencente a ela.
b) Dado um ponto qualquer, existe pelo menos uma reta não passando por ele.
c) Dado um ponto qualquer, existem pelo menos duas retas que passam por ele.

Seguindo a axiomática escolhida para esse texto, nos próximos três postulados fazemos uso de propriedades dos **números reais**. Para uma referência, consulte *Análise Real*, de Elon Lages Lima, que consta em [17]

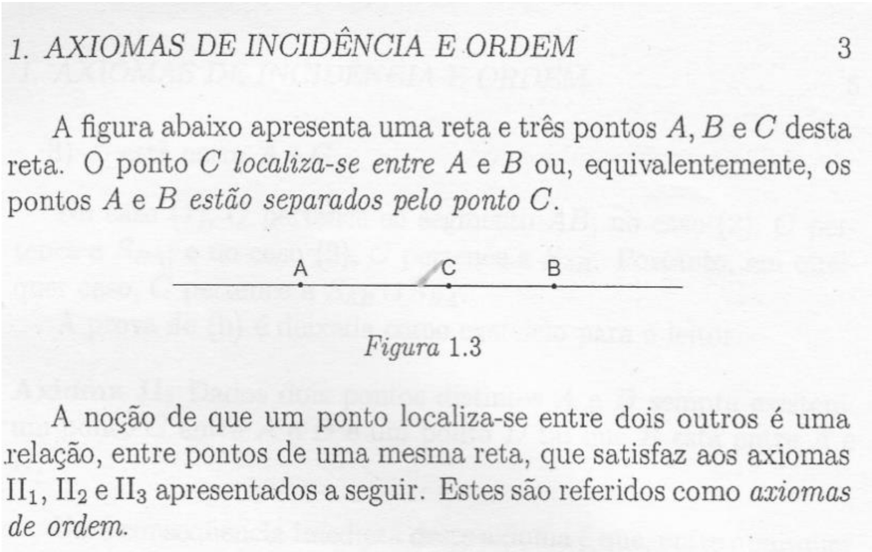
Postulado 4. **(Postulado da Distância)** A cada par de pontos corresponde um único número maior ou igual a zero, sendo que este número só é zero se os pontos forem coincidentes.

Este número obtido através do postulado acima é chamado **distância entre os dois pontos,** e os pontos são ditos **coincidentes** se forem o mesmo ponto.

Denotamos por PQ a distância entre os pontos P e Q.

Figura 14: Postulado 4
Fonte: REZENDE; QUEIROZ, 2000, p.16.

Barbosa (2006), não avança para distância entre pontos como faz as autoras Rezende & Queiroz (2000), ele explora um pouco o uso de pontos e reta, Barbosa (2006) falará sobre distância entre pontos e axioma da régua no capítulo 2 (dois) de seu manual didático.


1. *AXIOMAS DE INCIDÊNCIA E ORDEM* 3

A figura abaixo apresenta uma reta e três pontos A, B e C desta reta. O ponto C *localiza-se entre* A e B ou, equivalentemente, os pontos A e B *estão separados pelo ponto* C.

Figura 1.3

A noção de que um ponto localiza-se entre dois outros é uma relação, entre pontos de uma mesma reta, que satisfaz aos axiomas II_1, II_2 e II_3 apresentados a seguir. Estes são referidos como *axiomas de ordem.*

Figura 15: Axiomas de Incidência e Ordem
Fonte: BARBOSA, 2006, p. 03.

E nessa relação entre pontos Barbosa (2006) traz os Axiomas II_1, II_2 e II_3, esse subgrupo de Axiomas posto por Barbosa (2006), deverá explorar algumas propriedades de pontos e retas, a este subgrupo ele nomeia de “Axiomas de Ordem”.

Logo em seguida ele já apresenta Axioma $II_{1:}$ “Dados três pontos distintos de uma reta, um e apenas um deles localiza-se entre os outros dois.” (BARBOSA, 2000, p.03). A partir desse axioma, o autor apresenta uma definição que tem o objetivo de dar nome ao segmento de reta a partir de dois pontos, tornando aquele segmento originário pelos pontos dados.

> Definição 1.2 O conjunto constituído por dois pontos A e B e por todos os pontos que encontram se entre A e B é chamado de segmento AB. Os pontos A e B são denominados extremos ou extremidades do segmento. (BARBOSA, 2006, p.03)

Note que Barbosa (2006) preocupa-se em estabelecer a existência de pontos entre pares de pontos, para que, ao referir-se a determinado segmento de reta construído a partir de um par de pontos, todos os pontos que estão entre o referido par de pontos estariam inclusos nesse segmento de reta.

Na sua axiomática, no subgrupo dos “Axiomas de Ordem”, Barbosa (2006) traz logo em seguida o segundo axioma do subgrupo Axioma $II_{2:}$ “Dado dois pontos distintos A e B sempre existem: um ponto C entre A e B e um ponto D tal que B está entre A e D.” (BARBOSA, 2006, p.05). A partir desse axioma, Barbosa (2006) acrescenta como propriedade do segmento de reta uma característica de continuidade, ou seja, uma vez que se estabeleçam quaisquer dois pontos X e Y, sempre haverá um ponto Z entre X e Y, e sempre teremos um ponto W além de Y, com isso, coloca-se o segmento de reta como sendo parte limitada de uma reta infinita, e ainda sugere a ideia de semiplano a partir da Definição 1.5.

> Sejam m uma reta e A um ponto que não pertence a m. O conjunto constituído pelos pontos de m e por todos os pontos B tais que A e B estão em um mesmo lado da reta m é chamado de semiplano determinado por m contendo A, e será representado por P_{mA}. (BARBOSA, 2006, p.05).

A partir da Definição 1.5, Barbosa (2006) segue com o terceiro axioma desse subgrupo no qual ele sugere a existência de dois semiplanos a partir de uma reta m qualquer.

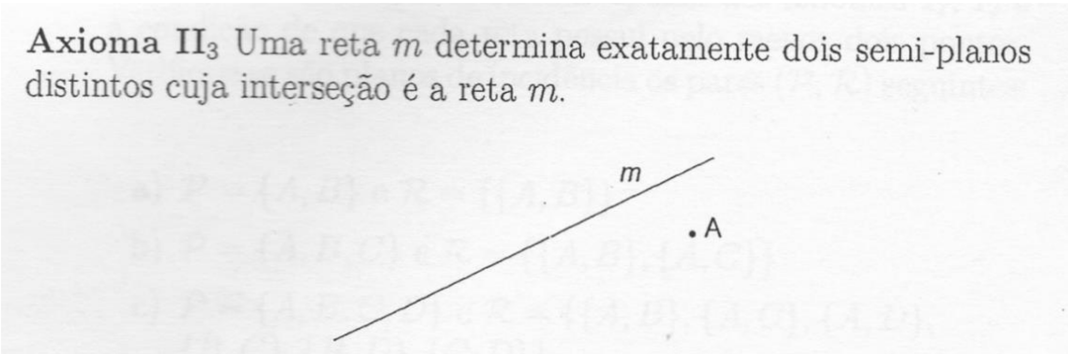

Axioma II$_3$ Uma reta m determina exatamente dois semi-planos distintos cuja interseção é a reta m.

Figura 16: Axioma II$_3$
Fonte: BARBOSA, 2006, p. 05.

Dessa forma, Barbosa (2006) finaliza o Capítulo 1, porém antes faz um comentário sobre relação da Geometria com as regras de um jogo de tabuleiro, como o jogo de damas, por exemplo. Ele inicia o comentário ressaltando a importância de se conhecer as regras do jogo para que se possa jogá-lo e de como algumas sistematizações são extremamente importantes para poder jogar.

> Para se aprender a jogar algum jogo, tal como damas, firo, xadrez, etc., **temos que, inicialmente, aprender as suas regras**. Um pai tentando ensinar seu filho a jogar damas dirá algo como: “Este é o tabuleiro de damas e estas são as pedras com que se joga”, “São 12 para cada jogador”, “As pedras são arrumadas no tabuleiro assim”, e arrumará as pedras para o filho. Aí já terá recebido uma enxurrada de perguntas do tipo: “Por que as pedras só ficam nas casas pretas?”, “Por que só são doze pedras?”, Eu acho mais bonitas as pedras brancas nas casas pretas e as pretas nas casas brancas, por que não é assim?”, etc. Todas essas perguntas têm uma única resposta; Porque esta é uma regra do jogo. Se alguma delas for alterada, o jogo resultante, embora possa ser também muito interessante, não será mais um jogo de damas. Observe que, ao ensinar tal jogo, você dificilmente deter-se ia em descrever o que são pedras. **O importante são as regras do jogo**, isto é, a maneira de arrumar as pedras no tabuleiro, a forma de movê-las, a forma de “comer” uma pedra do adversário, e etc. Qualquer criança, após dominar o jogo, improvisará tabuleiros com riscos no chão e utilizará

> tampinhas de garrafa, botões, cartões e etc., como pedras. (BARBOSA, 2006 p. 11, grifo nosso).

Nesta analogia que Barbosa (2006) faz dos jogos de tabuleiro com a Geometria, observamos uma semelhança com a argumentação de Wittgenstein para explicar os jogos de linguagem.

> Quando se mostra a alguém a figura do rei no jogo de xadrez e se diz: "Este é o rei do xadrez", não se elucida por meio disso o uso dessa figura, a menos que esse alguém já conheça a regra do jogo, até esta última determinação: a forma de uma figura de rei. Pode-se pensar que já aprendera a regra do jogo, sem que lhe tenha mostrado uma figura real. A forma da figura correspondente aqui ao tom, ou à configuração de uma palavra. Pode-se também imaginar que alguém aprendeu os jogo sem aprender todas as regras nem sua formulação. Aprendeu primeiramente talvez, por observar jogos de tabuleiro bem simples e progrediu sempre para os mais complicados. Também essa elucidação ensina-lhe o uso da figura apenas porque, como poderíamos dizer, já estava preparado o lugar no qual foi colocada. (WITTGENSTEIN, 2009, §31).

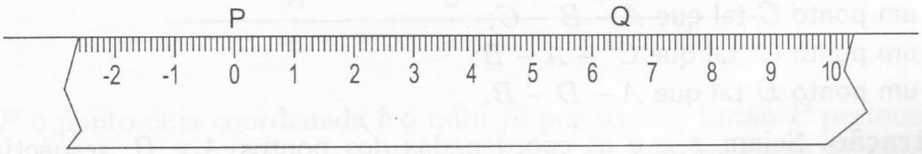
Vimos que tanto para Barbosa (2006) quanto para Wittgenstein (2009) a linguagem é tomada como (ou aproximada a) um jogo e o entendimento de suas regras vai além (mais para Wittgenstein do que para Barbosa neste ponto) da explicitação de suas peças, tabuleiros etc.

> Geometria, como qualquer sistema dedutivo, é muito parecido com um jogo: partimos com certos conjuntos de elementos (ponto, retas, planos) e é necessário aceitar algumas regras básicas que são chamadas de axiomas. O objetivo final deste jogo é o de determinar as propriedades das figuras planas e dos sólidos no espaço. Tais propriedades, chamadas Teoremas ou Proposições, devem ser deduzidas somente através do raciocínio lógico a partir dos axiomas fixados ou a partir de outras propriedades estabelecidas. **De fato, existem várias geometrias distintas dependendo do conjunto de axiomas fixado**. A geometria que iremos estudar nestas notas é chamada de Geometria Euclidiana, em homenagem a Euclides que a descreveu no seu livro, denominado "Elementos". (BARBOSA, 2006 p. 12, grifo nosso).

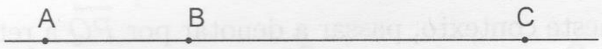
Retomando a axiomática do jogo de Rezende & Queiroz (2000), as autoras estabelecem o Postulado 5 como o "Postulado da Régua". Neste postulado as autoras fazem uma relação direta entre os pontos de uma reta e os números reais, seguindo os parâmetros: (1) cada ponto da reta corresponde exatamente a um Número Real; (2) cada Número Real corresponde exatamente a um ponto da reta; (3) a distância entre dois pontos é o valor absoluto da diferença entre os números correspondentes.

Este postulado em específico, traz uma ideia de continuidade da reta, ou seja, de forma intuitiva podemos descrever uma régua infinita e para cada ponto dessa régua corresponde um Número Real. Outra correspondência muito importante entre a ideia intuitiva de régua e os pontos de um segmento de reta é o chamado "sistema de coordenadas da reta", o número correspondente ao ponto na reta é chamado de coordenada do ponto. Logo, se temos dois pontos A e B, a distância entre os pontos A e B é dado por AB=| a-b |.

Já no Postulado 6, proposto pelas autoras Rezende; Queiroz (2000), elas titularam como: “Postulado da Colocação da Régua”, conforme segue: “Dado dois pontos P e Q numa reta, pode ser escolhido um sistema de coordenadas de modo que a coordenada de P seja zero e a coordenada de Q seja positiva”, (REZENDE; QUEIROZ, 2000 p.17).



1.4 Definição. Sejam A, B e C três pontos colineares e distintos dois a dois. Se $AB+BC=AC$, dizemos que B **está entre** A e C, o que denotamos por $A-B-C$.



Observe que se temos $A-B-C$ então temos também $C-B-A$.

Figura 17: Definição 1.4
Fonte: REZENDE; QUEIROZ, 2000, p.17.

Com a Definição 1.4, as autoras estabelecem uma relação direta entre os pontos de um segmento de reta e as coordenadas associadas a ela, como apresentam no Teorema 1.5.

1.5 Teorema. Sejam dados uma reta r e três pontos A, B e C pertencentes a ela, com coordenadas x, y e z, respectivamente. Se $x-y-z$, então $A-B-C$.

Demonstração. Se $x<y<z$, então $AB=|y-x|=y-x$; $BC=|z-y|=z-y$; e $AC=|z-x|=z-x$. Logo temos $AB+BC=(y-x)+(z-y)=z-x=AC$. Logo temos $A-B-C$. Se $z<y<x$, procedendo análogamente obtemos $C-B-A$.

Figura 18: Teorema 1.5
Fonte: REZENDE; QUEIROZ, 2000, p. 17.

Rezende & Queiroz (2000), após apresentar os Postulados 4, 5 e 6, explora as propriedades de pontos e retas, assim como Barbosa (2006) usou nos Axiomas II_1, II_2 e II_3. Pontuamos também uma dessemelhança entre os jogos estabelecido pelos autores, pois em uma mesma afirmação é dada relevância diferente, como podemos notar no Teorema 1.6 das autoras Rezende & Queiroz (2000) que diz: “1.6 Teorema. Dados três pontos distintos pertencentes à mesma reta, um e apenas um deles está entre os outros dois” (REZENDE; QUEIROZ, 2000, p.18). Voltando um pouco ao texto de Barbosa (2006), em seu Axioma II_1 escreve: “Axioma

II1 Dados três pontos distintos de uma reta, um e apenas um deles localiza-se entre os outros dois” (BARBOSA, 2006, p.03). Entendemos que os textos não são iguais, mas dado em um determinado jogo acreditamos que tratar-se da mesma regra, o que torna confuso a equivalência em ambos os jogos, pois para um jogo esta afirmação é um uma verdade absoluta que não se questiona, e para o outro jogo, é uma afirmação que pode ser provada, e as autoras Rezende & Queiroz (2000) demonstram, como podemos notar na figura 19.

18 *Eliane Q. F. Rezende e Maria Lúcia B. Queiroz*

1.6 Teorema. Dados três pontos distintos pertencentes à mesma reta, um e apenas um deles está entre os outros dois.

Demonstração. Sejam A, B e C três pontos colineares distintos. Vamos mostrar inicialmente que um deles está entre os outros dois.

Sejam x, y e z as coordenadas dos pontos A, B e C, respectivamente. Por propriedades de números reais, apenas um, entre os números x, y e z, está entre os outros dois. Pelo teorema anterior obtemos que o correspondente ponto A, B ou C está entre os outros dois.

Agora vamos mostrar a unicidade, isto é, considerando que um dos pontos, por exemplo B, está entre os pontos A e C, vamos mostrar que não podemos ter que A está entre B e C e nem que C está entre A e B.

De fato, se A estivesse entre B e C, teríamos $BA + AC = BC$. Como por hipótese B está entre A e C, temos $AB + BC = AC$. De ambos resulta $2AB = 0$, o que é impossível, visto que A e B são pontos distintos. Analogamente, demonstramos que C não pode estar entre A e B.

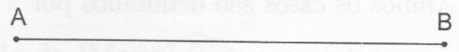
Figura 19: Teorema 1.6
Fonte: REZENDE; QUEIROZ, 2000, p. 18.

Note que as autoras demonstram inclusive a unicidade, ou seja, se o ponto B está entre os pontos A e C, logo o ponto A não pode estar entre os pontos B e C, e nem o ponto C estar entre os pontos A e B.

Rezende & Queiroz (2000), segue apresentando a Definição 1.8 contendo 3 (três) subitens, conforme as figuras 20 a seguir:

1.8 Definições. Sejam A e B pontos distintos.

a) O **segmento de reta** AB, **ou simplesmente segmento** AB, o qual é denotado por $\overline{AB}$, é definido como sendo o conjunto dos pontos A e B, e dos pontos X tais que $A - X - B$. Os pontos A e B são denominados *extremidades do segmento* AB.



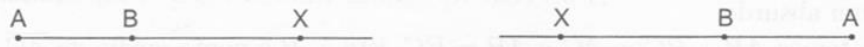
b) A **medida** ou **comprimento** de um segmento $\overline{AB}$ é definida como a distância entre os pontos A e B e, como tal, é denotada por AB.

c) A **semi-reta de origem** A **contendo o ponto** B, a qual é denotada por $\overrightarrow{AB}$, é definida como a união dos pontos do segmento $\overline{AB}$ com o conjunto dos pontos X tais

Figura 20: Definição 1.8
Fonte: REZENDE; QUEIROZ, 2000, p. 18.

Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas

que $A - B - X$. O ponto A é denominado *origem* da semi-reta.



Se A está entre B e C, então $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são chamadas **semi-retas opostas**.

Figura 21: Definição 1.8 item C
Fonte: REZENDE; QUEIROZ, 2000, p.19.

As Definições 1.8 apresentadas por Rezende & Queiroz (2000), possuem semelhanças com: “Definição 1.2 O conjunto constituído por dois pontos A e B e por todos os pontos que se encontram entre A e B é chamado de segmento $\acute{AB}$. Os pontos A e B são denominados extremos ou extremidades do segmento” (BARBOSA, 2006, p.03) e também, “Definição 1.3 Se A e B são pontos distintos, o conjunto constituído pelos pontos do segmento $\acute{AB}$ e por todos os pontos C tais que B encontra-se entre A e C, é chamado de semirreta de origem A contendo o ponto B, e é representado por S_{AB}. O ponto A é então denominado origem da semirreta S_{AB}” (BARBOSA, 2006, p.04).

As autoras Rezende & Queiroz (2000) seguem em seu manual o Postulado 7 titulado “Postulado da Separação de Planos”, cuja definição está na figura 22.

Postulado 7. (Postulado da Separação do Plano) Dada uma reta, os pontos que não pertencem a ela formam dois conjuntos disjuntos tais que
(1) cada um dos conjuntos é convexo,
(2) se P pertence a um dos conjuntos e Q ao outro, então o segmento PQ intersecciona a reta.

Figura 22: Postulado 7
Fonte: REZENDE; QUEIROZ, 2000, p. 20.

Trazemos com relevância a definição seguinte ao Postulado 7:

> 1.14 Definições. Dada uma reta r, os conjuntos determinados pelos postulados anteriores são chamados semiplanos, e r é chamado origem de cada um deles. **Dizemos que r separa o plano em dois semiplanos**. Se dois pontos P e Q estão no mesmo semiplano, dizemos que P e Q estão no mesmo lado de r; se P está num dos semiplanos e Q no outro, dizemos que P e Q estão em lados opostos de r. (REZENDE; QUEIROZ, 2000, p.20-21, grifo nosso).

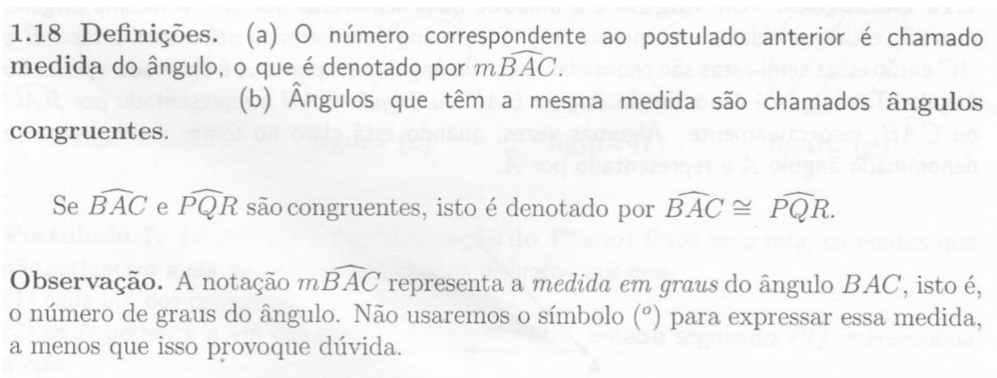
O texto referente a Definição 1.14 no manual didático de Rezende & Queiroz (2000), é semelhante ao texto do Axioma II_3 de Barbosa (2006) onde diz: “Uma reta m determina exatamente dois semiplanos distintos cuja intersecção é a reta m.” (BARBOSA, 2006, p.05).

Apesar do Axioma de Barbosa (2006) ser bastante sucinto, ambos definem semiplanos e dizem que uma reta os determina.

Após apresentar o Postulado 7, como vimos na figura 22, Rezende & Queiroz (2000) trazem uma definição em seu jogo sobre ângulo para usarem a seguir no Postulado 8.

> Um ângulo é a união de suas semirretas que têm a mesma origem, mas não estão contidas numa mesma reta. Se um ângulo é formado pelas semirretas AB e AC então essas semirretas são chamadas *lados* do ângulo, e o ponto A é chamado *vértice* do ângulo. Tal ângulo é denominado *ângulo BAC ou ângulo CAB* e representado por $B\hat{A}C ou C\hat{A}B$, respectivamente. Algumas vezes, quando está claro no texto, é simplesmente denominado ângulo A representado por $\hat{A}$. (REZENDE; QUEIROZ, 2000, p. 21)

Rezende & Queiroz (2000), apresentam o Postulado 8, ainda no Capítulo 1 com o título: "Postulado da Medida de Ângulos", seguido da afirmação: "A cada ângulo $B\hat{A}C$ corresponde um número real entre 0 e 180." (REZENDE; QUEIROZ, 2000, p.22). A partir desse postulado, as autoras apresentam a Definição 1.18 conforme as figuras 23 e 24.



1.18 Definições. (a) O número correspondente ao postulado anterior é chamado **medida** do ângulo, o que é denotado por $m\widehat{BAC}$.

(b) Ângulos que têm a mesma medida são chamados **ângulos congruentes**.

Se $\widehat{BAC}$ e $\widehat{PQR}$ são congruentes, isto é denotado por $\widehat{BAC} \cong \widehat{PQR}$.

Observação. A notação $m\widehat{BAC}$ representa a *medida em graus* do ângulo BAC, isto é, o número de graus do ângulo. Não usaremos o símbolo (^{o}) para expressar essa medida, a menos que isso provoque dúvida.

Figura 23: Definição 1.18
Fonte: REZENDE; QUEIROZ, 2000, p.22.

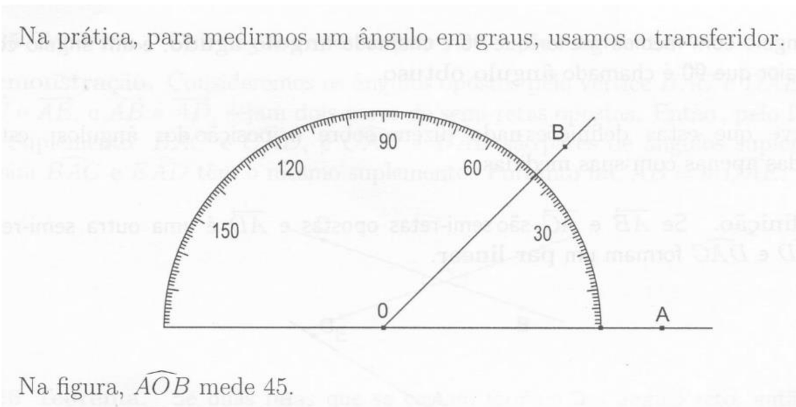
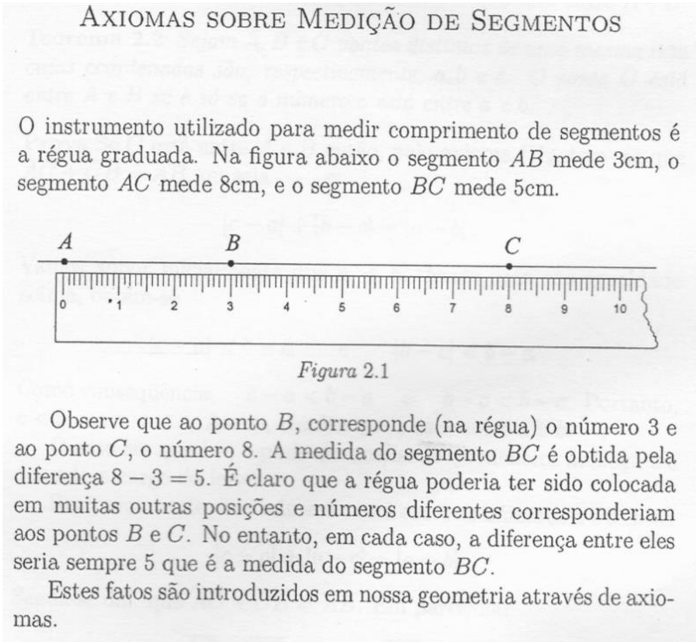


Figura 24: Transferidor
Fonte: REZENDE; QUEIROZ, 2000, p.23.

A partir do Postulado 8 as autoras definem algumas regras comuns a outros contextos, que entendemos como outros jogos de linguagem, de certa forma, a inclusão de novas regras aos jogos proposto por elas como: o uso da nomenclatura “grau” como unidade de medida para o ângulo, também o símbolo (^{0}), como referência ao ângulo; A denotação BÂC para referenciar o ângulo formado pelos segmentos de reta AB e AC, com o ângulo no ponto A, conforme visto nas figuras 23 e 24.

Barbosa (2006) abre o segundo capítulo com o título: “Axiomas Sobre Medição de Segmentos”, na introdução o autor cita a importância da colocação da régua, e como esta é relevante em uma Construção Geométrica.



AXIOMAS SOBRE MEDIÇÃO DE SEGMENTOS

O instrumento utilizado para medir comprimento de segmentos é a régua graduada. Na figura abaixo o segmento AB mede 3cm, o segmento AC mede 8cm, e o segmento BC mede 5cm.

Figura 2.1

Observe que ao ponto B, corresponde (na régua) o número 3 e ao ponto C, o número 8. A medida do segmento BC é obtida pela diferença $8 - 3 = 5$. É claro que a régua poderia ter sido colocada em muitas outras posições e números diferentes corresponderiam aos pontos B e C. No entanto, em cada caso, a diferença entre eles seria sempre 5 que é a medida do segmento BC.

Estes fatos são introduzidos em nossa geometria através de axiomas.

Figura 25: Axioma sobre Medição
Fonte: BARBOSA, 2006, p.13.

Barbosa (2006) segue com seu próximo Axioma III_1: “A todo par de pontos do plano corresponde um número maior ou igual a zero. Este número é zero se, e somente se, os pontos são coincidentes” (BARBOSA, 2006, p.13). Este Axioma possui grande semelhança ao Postulado 4 de Rezende & Queiroz (2000), Postulado 4 (Postulado da Distância): “A cada par de pontos corresponde um único número maior ou igual a zero, sendo que este número só é zero se os pontos forem coincidentes.” (REZENDE; QUEIROZ, 2000, p.16). Não somente os textos apresentam notável semelhança, como podemos citar também as figuras: 17 e 18 que apresentam semelhanças com a figura 25 e tratam do mesmo tópico, mas são usados em jogos diferentes.

De forma análoga o Axioma III_2 possui certa semelhança ao Postulado 5 de Rezende; Queiroz (2000):

> Os pontos de uma reta podem ser sempre colocados em correspondência biunívoca com os números reais, de modo que a diferença entre estes números meça a distância entre os pontos correspondentes. (BARBOSA, 2006, p.14)
>
> Postulado 5. (Postulado da Régua) Podemos estabelecer uma correspondência entre os pontos de uma reta e os números reais de modo que (1) cada ponto da reta corresponde a exatamente um número real, (2) cada número real corresponde a exatamente um ponto da reta, e (3) a distância entre dois pontos é o valor absoluto da diferença entre os números correspondentes. (REZENDE; QUEIROZ, 2000, p.16)

O texto de Barbosa (2006), apesar de ser mais sucinto, exprime ideias semelhantes ao do Postulado 5 de Rezende & Queiroz (2000). Barbosa (2006) escreve sobre correspondência biunívoca, o que se assemelha à união dos pontos (1) e (2) – ida e volta da relação entre pontos da reta e Números Reais - de Rezende & Queiroz (2000) e ambos falam em distância entre os pontos, Barbosa (2006) diretamente no corpo do axioma e Rezende & Queiroz (2000) no ponto (3).

Outro apontamento que acreditamos ser relevante para nossa descrição é o Axioma III_3, proposto por Barbosa (2006), Axioma $III_{3:}$ "Se o ponto C encontra-se entre A e B então AC + CB = AB" (BARBOSA, 2006, p.14). Este axioma possui semelhança com a Definição 1.4 de Rezende & Queiroz (2000) que diz: "Sejam A, B e C três pontos colineares e distintos dois a dois. Se AB + BC = AC, dizemos que B está entre A e C, o que denotamos por A-B-C" (REZENDE; QUEIROZ, 2000, p.17). Acreditamos ser importante trazer à luz que para Barbosa (2006) essa afirmação é posta como uma verdade inquestionável recebendo a rotulação de Axioma, mas para as autoras Rezende & Queiroz (2000), é categorizada em uma definição. Se pensarmos na forma de proposições da lógica clássica (se... então...) teríamos para Barbosa (2006): Se (entre) então (AC + CB = AB) e para Rezende & Queiroz (2000): Se (AC + CB = AB) então (entre), ou seja, há uma inversão no processo lógico nos dois manuais.

Barbosa (2006) segue em seu jogo com a seguinte Definição 2.3: "Chamamos de ponto médio do segmento AB a um ponto C deste segmento tal que AC = CB" (BARBOSA, 2006, p.16). Este texto também possui certa semelhança com uma definição de Rezende & Queiroz (2000): "1.11 Definição. Um ponto B é o ponto médio de um segmento AC se B está entre A e C, e AB = BC." (REZENDE; QUEIROZ, 2000, p.19). Novamente o texto de Barbosa (2006) na Definição 2.3 é bastante sucinto mas apresenta bastante semelhança à Definição 1.11 apresentada por Rezende & Queiroz (2000).

Fazemos estas idas e vindas na tentativa de explicitar semelhanças e dessemelhanças nos jogos estabelecidos por nossos autores. Não se trata de tomar um como referência, mas de entender quais regras de seus jogos são semelhantes e quais não são, pensando sempre na possibilidade de um aluno de licenciatura em Matemática se utilizando destes jogos, tentando jogá-los simultaneamente e percebendo tais semelhanças e diferenças. Também optamos por evidenciar tópicos dos manuais sem que estejamos seguindo uma determinada sequência, aplicamos os apontamentos pelo uso, ou seja, conforme nosso texto está desenvolvendo, apresentamos trechos dos jogos de linguagem usados pelos autores em seus respectivos manuais didáticos.

Seguindo com nossos apontamentos, evidenciamos agora o Teorema 2.4 de Barbosa (2006), que diz: "Um segmento tem exatamente um ponto médio" (BARBOSA, 2006, p.16). Olhando agora para o manual de Rezende; Queiroz (2000), podemos encontrar uma semelhança com o Teorema 1.12: "Todo segmento tem um único ponto médio" (REZENDE; QUEIROZ, 2000, p.19). Os dois manuais optam por provar a existência do ponto médio de forma algébrica, se valendo das propriedades e operações dos Números Reais:

Teorema 2.4 *Um segmento tem exatamente um ponto médio.*

Prova (*Existência*) Sejam a e b as coordenadas das extremidades do segmento. Considere o número $c = (a+b)/2$. De acordo com o axioma III_2 existe um ponto C da reta que tem c por coordenada. Como

$$\overline{AC} = |a-c| = \left|a - \frac{a+b}{2}\right| = \left|\frac{a}{2} - \frac{b}{2}\right|$$

$$\overline{CB} = |c-b| = \left|\frac{a+b}{2} - b\right| = \left|\frac{a}{2} - \frac{b}{2}\right|$$

concluímos que $\overline{AC} = \overline{CB}$. Como o número $(a+b)/2$ está entre os números a e b, segue-se da proposição anterior que C está entre A e B. Logo C é o ponto médio de AB.

Figura 26: Teorema 2.4
Fonte: BARBOSA, 2006, p.16.

1.12 Teorema. Todo segmento tem um único ponto médio.

Demonstração. Vamos inicialmente provar a existência do ponto médio. Consideremos o segmento AC. Queremos obter um ponto B tal que $AB + BC = AC$ e $AB = BC$.

Consideremos o número real positivo $x = \frac{1}{2}AC$. Pelo Teorema da Localização de Pontos, existe um único ponto B na semi-reta $\overrightarrow{AC}$ tal que $AB = x$.

Como B está em $\overrightarrow{AC}$, temos que B ou está em $\overline{AC}$ ou $A - C - B$, sendo $B \neq A$, e $B \neq C$.

Se B está em $\overline{AC}$ temos $A - B - C$, logo $AB + BC = AC$ e portanto

$$BC = AC - \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}AC = AB.$$

Figura 27: Teorema 1.12
Fonte: REZENDE; QUEIROZ, 2000, p. 19.

Outro item que nos prendeu a atenção, foi que, apesar dos manuais didáticos que usamos em nossa pesquisa trazerem em seus títulos “Geometria Euclidiana Plana”, não há uma relação direta entre os cinco Postulados propostos por Euclides em sua obra, “Os Elementos” - disponível na tradução de Bicudo (2009) -, com os Postulados/Axiomas apresentados nos manuais que pesquisamos. Com exceção do Primeiro e do Quinto Postulado de Euclides, os outros não aparecem nessa nova axiomática proposta nesses manuais, com uma ressalva para o Terceiro Postulado de Euclides: “E, com todo centro e distância, descreve um círculo” (EUCLIDES, 2009, p. 98). Tanto Barbosa (2006) quanto Rezende & Queiroz (2000) fazem menção ao círculo, mas de outra forma e em outra sequência. Como podemos perceber no texto de Barbosa (2006) “Definição 2.5 Seja A um ponto do plano e r um número real positivo. O círculo de centro A e raio r é o conjunto constituído por todos os pontos B do plano tais que AB = r.” (BARBOSA, 2006, p.17). E também podemos ver no texto de Rezende; Queiroz a respeito do círculo e da circunferência:

> 1.27 Definição. Sejam A um ponto e r um número real positivo. Definimos a circunferência de centro A e raio r, a qual denotamos por C(A,r), como sendo o conjunto de todos os pontos do plano que estão à mesma distância r do ponto A. O interior de C(A,r) é o conjunto de todos os pontos X tais que AX < r. um ponto desse tipo é chamado ponto interior da circunferência. o exterior de C(A,r) é o conjunto de todos os ponto X tais que AX > r. Um ponto desse tipo é chamado ponto exterior da circunferência. A união de uma circunferência com seu interior é chamada de região circular fechada ou círculo. (REZENDE; QUEIROZ, 2000, p. 25)

Nenhum dos autores trataram essa afirmação como um Postulado/Axioma, de forma semelhante, em seus jogos de linguagem esta foi colocada como uma definição, embasada nos Postulados e Axiomas que vieram antes.

Barbosa (2006) finaliza o capítulo 2 com a Definição 2.5 e faz algumas considerações a respeito do surgimento das primeiras noções geométricas e seu uso por civilizações antigas, como os Egípcios, Assírios e Babilônios que já conheciam algumas figuras geométricas e possuíam uma noção de ângulo.

> As primeiras noções geométricas surgiram quando o homem viu-se compelido a efetuar medidas, isto é, a comparar distâncias e determinar dimensões dos corpos que o rodeavam. Egípcios, Assírios e Babilônios já conheciam as principais figuras geométricas e a noção de ângulo que usavam nas medidas de área e na Astronomia. (BARBOSA, 2006, p.28)

Em seguida, abre o capítulo 3 intitulado "Axiomas sobre Medição de Ângulos" com a Definição 3.1 conforme a figura 28:

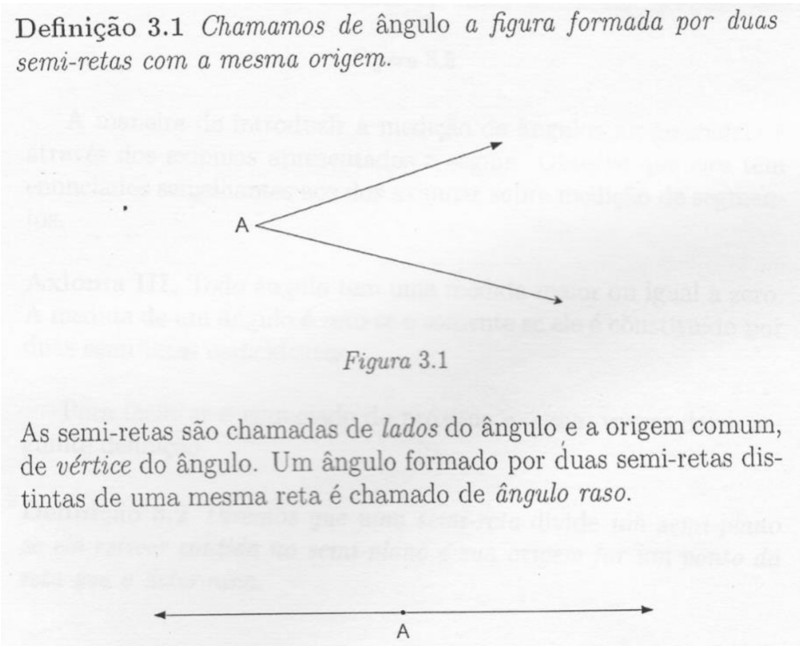

Definição 3.1 *Chamamos de* ângulo *a figura formada por duas semi-retas com a mesma origem.*

Figura 3.1

As semi-retas são chamadas de *lados* do ângulo e a origem comum, de *vértice* do ângulo. Um ângulo formado por duas semi-retas distintas de uma mesma reta é chamado de *ângulo raso*.

Figura 28: Definição 3.1
Fonte: BARBOSA, 2006, p. 29.

De forma análoga, as autoras Rezende & Queiroz (2000) também definem o ângulo:

> 1.16 Definições. Um ângulo é a união de duas semirretas que têm a mesma origem, mas não estão contidas numa mesma reta. Se um ângulo é formado pelas semirretas AB e AC então essas semirretas são chamadas lados do ângulo, e o ponto A é chamado vértice do ângulo. Tal ângulo é denominado ângulo BAC ou ângulo CAB e representado por $B\hat{A}C$ ou $C\hat{A}B$, respectivamente. Algumas vezes, quando está claro no texto, é simplesmente denominado ângulo A e representado por Â. (REZENDE; QUEIROZ, 2000, p.21)

Enquanto Barbosa (2006) trata deste tema no capítulo 3, as autoras Rezende & Queiroz (2000) tratam desse tópico ainda no capítulo 1. Olhando por uma perspectiva axiomática, tal ordem é de grande relevância, visto que muda a ordem do jogo, a partir de um momento, o que vale para um jogo não vale para o outro. É relevante também notar que Barbosa (2006) discute sobre ângulos no Axioma III, enquanto Rezende & Queiroz (2000) discutem o Postulado 8. Barbosa (2006) separa seus axiomas em subgrupos, como já apresentamos, e essa dinâmica nos leva a crer que ele, mesmo sabendo que cinco Axiomas não seriam suficientes para compor sua ideia de Geometria Euclidiana Plana, traça essa estratégia de subdivisão para garantir que, em síntese, o Postulado das Paralelas, também conhecido como Quinto Postulado de Euclides, coincida com seu Quinto Axioma.

Dali em diante, Barbosa (2006) passa a tratar dos ângulos e suas medidas apresentando seu próximo axioma: “Axioma III$_4$ Todo ângulo tem uma medida maior ou igual a zero. A medida de um ângulo é zero se e somente se ele é constituído por duas semirretas coincidentes.” (BARBOSA, 2006, p. 31). Rezende & Queiroz (2000) afirmam com o Postulado 8 que a medida de um ângulo está compreendida em um número real podendo variar de 0 a 180. Para a medida do ângulo esta é a maior aproximação que encontramos entre as regras nos dois manuais didáticos.

Logo em seguida, Barbosa (2006) propõe outra definição: “Definição 3.2 Diremos que uma semirreta divide um semiplano se ela estiver contida no semiplano e sua origem for um ponto da reta que o determina.” (BARBOSA, 2006, p.31). Logo em seguida o autor segue para o Axioma III$_5$.

> É possível colocar, em correspondência biunívoca os números reais entre zero e 180 e as semirretas da mesma origem que dividem um dado semiplano, de modo que a diferença entre estes números seja a medida do ângulo formado pelas semirretas correspondentes. (BARBOSA, 2006, p. 32)

Este axioma de Barbosa (2006) possui grande semelhança ao Postulado 9 descrito na figura 29.

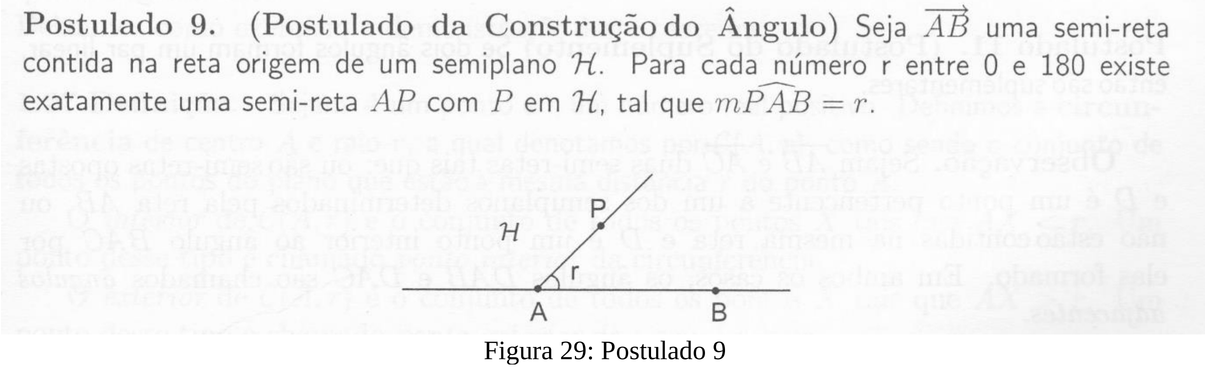
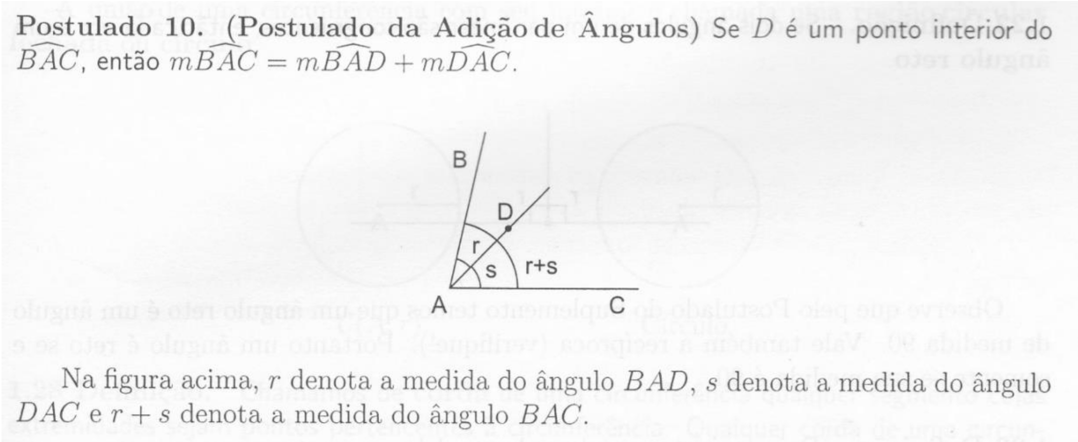

Postulado 9. (Postulado da Construção do Ângulo) Seja $\overrightarrow{AB}$ uma semi-reta contida na reta origem de um semiplano $\mathcal{H}$. Para cada número r entre 0 e 180 existe exatamente uma semi-reta AP com P em $\mathcal{H}$, tal que $m\widehat{PAB} = r$.

Figura 29: Postulado 9
Fonte: REZENDE; QUEIROZ, 2000, p. 23.

Já no Postulado 10, Rezende & Queiroz (2000) intitulam como “Postulado da Adição de Ângulos” conforme a figura 30:


Postulado 10. (Postulado da Adição de Ângulos) Se D é um ponto interior do $\widehat{BAC}$, então $m\widehat{BAC} = m\widehat{BAD} + m\widehat{DAC}$.

Na figura acima, r denota a medida do ângulo BAD, s denota a medida do ângulo DAC e $r+s$ denota a medida do ângulo BAC.

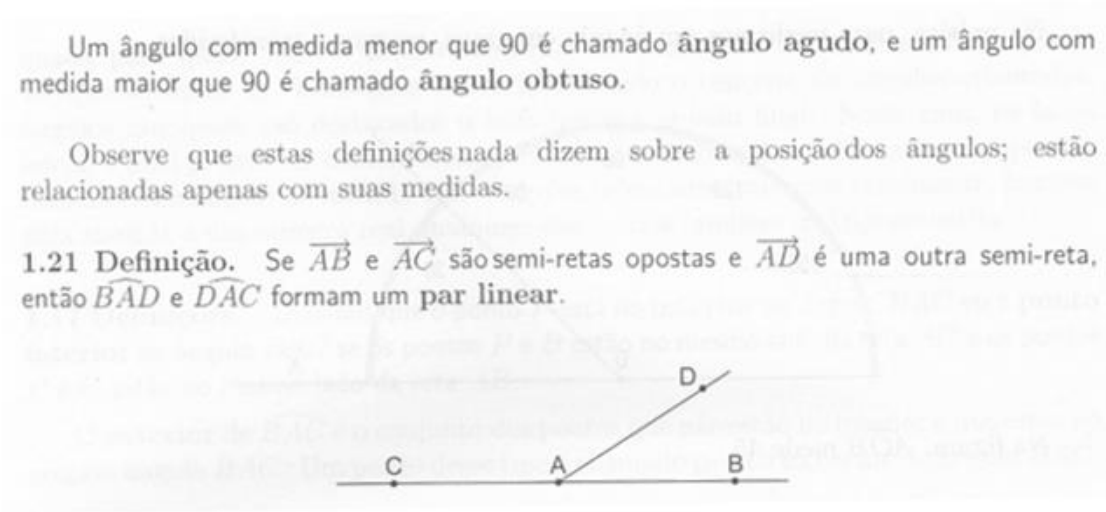
Figura 30: Postulado 10
Fonte: REZENDE; QUEIROZ, 2000, p. 23.

A apresentação deste postulado faz uma abertura para as autoras tratarem dos ângulos complementares e suplementares, conforme elas apresentam nas definições 1.19 e 1.20 nas figuras 31 e 32.

1.19 Definição. Se a soma das medidas de dois ângulos é 180, então dizemos que os ângulos são **suplementares** e que cada um é o **suplemento** do outro.

1.20 Definição. Se a soma das medidas de dois ângulos é 90, então os ângulos são chamados **complementares**, e cada um é o **complemento** do outro.

Figura 31: Definição 1.19 e 1.20
Fonte: REZENDE; QUEIROZ, 2000, p.23.



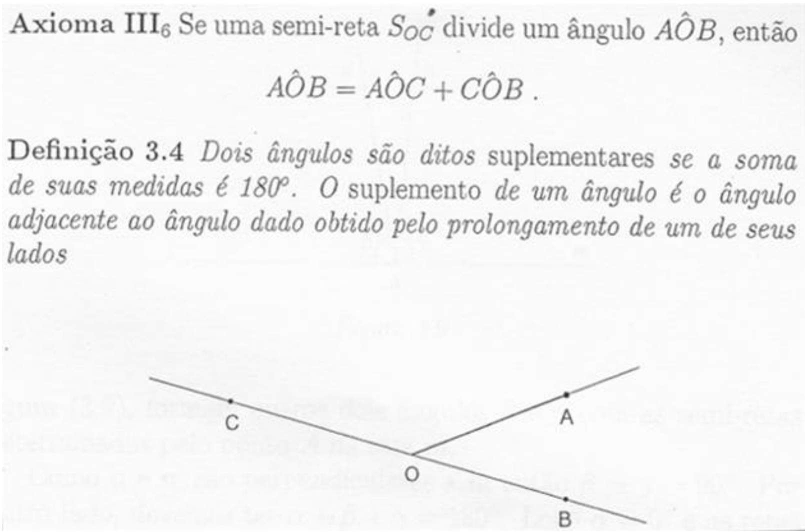
Um ângulo com medida menor que 90 é chamado **ângulo agudo**, e um ângulo com medida maior que 90 é chamado **ângulo obtuso**.

Observe que estas definições nada dizem sobre a posição dos ângulos; estão relacionadas apenas com suas medidas.

1.21 Definição. Se $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são semi-retas opostas e $\overrightarrow{AD}$ é uma outra semi-reta, então $\widehat{BAD}$ e $\widehat{DAC}$ formam um **par linear**.

Figura 32: Definição 1.21
Fonte: REZENDE; QUEIROZ, 2000, p. 24.

O último postulado apresentado pelas autoras Rezende; Queiroz (2000) no capítulo 1 é Postulado 11, intitulado “Postulado do Suplemento”; “Se dois ângulos formam um par linear, então são suplementares.” (REZENDE; QUEIROZ 2000, p.24). Barbosa (2006), em seu manual didático propõe o Axioma III_6, seguindo a Definição 3.4 conforme a figura 33.



Axioma III_6 Se uma semi-reta S_{OC} divide um ângulo $A\hat{O}B$, então

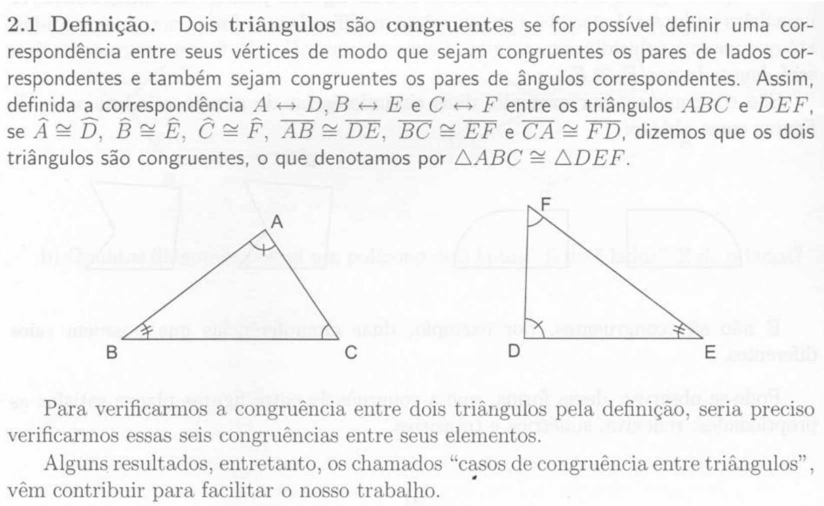
$$A\hat{O}B = A\hat{O}C + C\hat{O}B \, .$$

Definição 3.4 *Dois ângulos são ditos* suplementares *se a soma de suas medidas é 180°. O* suplemento *de um ângulo é o ângulo adjacente ao ângulo dado obtido pelo prolongamento de um de seus lados*

Figura 33: Axioma III_6
Fonte: REZENDE; QUEIROZ, 2000, p. 33.

Podemos notar grande semelhança entre o Postulado 10 (Figura 30) e o Axioma III_6 (acima), temos também modos semelhantes de abordar os ângulos suplementares (Postulado 11 e Definição 3.4).

A partir daí as autoras Rezende; Queiroz (2000) fecham o Capítulo 1 encerrando os estudos de ângulos e suas propriedades e abrem o Capítulo 2 com o título “Congruência de Triângulo”. Definem o termo “congruência de triângulo” como segue:



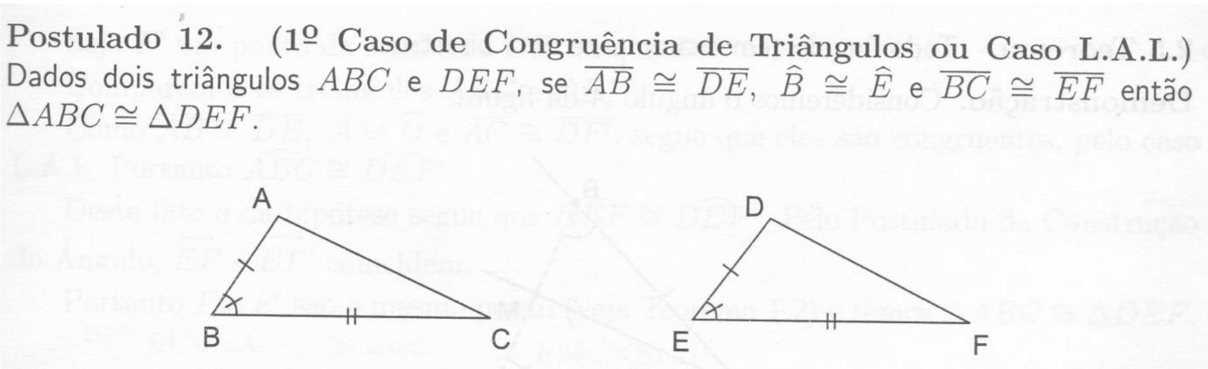
2.1 Definição. Dois **triângulos** são **congruentes** se for possível definir uma correspondência entre seus vértices de modo que sejam congruentes os pares de lados correspondentes e também sejam congruentes os pares de ângulos correspondentes. Assim, definida a correspondência $A \leftrightarrow D, B \leftrightarrow E$ e $C \leftrightarrow F$ entre os triângulos ABC e DEF, se $\widehat{A} \cong \widehat{D},\ \widehat{B} \cong \widehat{E},\ \widehat{C} \cong \widehat{F},\ \overline{AB} \cong \overline{DE},\ \overline{BC} \cong \overline{EF}$ e $\overline{CA} \cong \overline{FD}$, dizemos que os dois triângulos são congruentes, o que denotamos por $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Para verificarmos a congruência entre dois triângulos pela definição, seria preciso verificarmos essas seis congruências entre seus elementos.

Alguns resultados, entretanto, os chamados “casos de congruência entre triângulos”, vêm contribuir para facilitar o nosso trabalho.

Figura 34: Definição 2.8
Fonte: REZENDE; QUEIROZ, 2000, p. 32.

Após essa definição, Rezende & Queiroz (2000) trazem os “Três Primeiros Casos de Congruência de Triângulos e Consequências”, e o primeiro caso as autoras tomam como postulado, conforme a figura 35.



Postulado 12. **(1º Caso de Congruência de Triângulos ou Caso L.A.L.)** Dados dois triângulos ABC e DEF, se $\overline{AB} \cong \overline{DE},\ \widehat{B} \cong \widehat{E}$ e $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ então $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

Figura 35: Postulado 12
Fonte: REZENDE; QUEIROZ, 2000, p.33.

Barbosa (2006) inicia o Capítulo 4 intitulado “Congruência”, com a “Definição 4.1 Diremos que dois segmentos AB e CD são congruentes quando AB = CD; diremos que dois ângulos Â e $\hat{B}$ são congruentes se eles têm a mesma medida” (BARBOSA, 2006, p.45). A partir daí, o autor passa à congruência de triângulos pela Definição 4.2 :

> Dois triângulos são congruentes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes. (BARBOSA, 2006 p.45)

Após estabelecer este parâmetro para congruência, propõe o Axioma IV afirmando que este axioma é conhecido como o primeiro caso de congruência de triângulos. “Axioma IV Dados dois triângulos ABC e EFÃ, se AB = EF, AC = EG e Â = Ê então ABC = EFG.” (BARBOSA, 2006, p.46). Como vimos, Rezende & Queiroz (2000), usa o Postulado 12 para introduzir o primeiro caso de congruência de triângulos.

Logo em seguida, Barbosa (2006) apresenta o segundo caso de congruência de triângulos pelo Teorema 4.3, e o terceiro caso de congruência pelo Teorema 4.9 conforma as figuras 36 e 37.

Teorema 4.3 **(2º caso de congruência de triângulos)** *Dados dois triângulos ABC e EFG, se $AB = EF$, $\hat{A} = \hat{E}$ e $\hat{B} = \hat{F}$, então $ABC = EFG$.*

Prova: Sejam ABC e EFG dois triângulos tais que $AB = EF$, $\hat{A} = \hat{E}$ e $\hat{B} = \hat{F}$. Seja D um ponto da semi-reta S_{AC} tal que $AD = EG$.

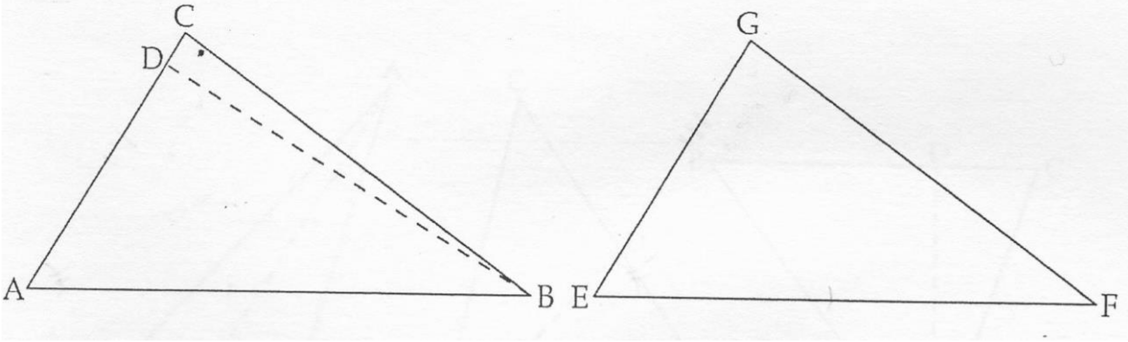


Figura 36: Teorema 4.3
Fonte: BARBOSA, 2006, p.47.

Teorema 4.9 **(3º caso de congruência de triângulos)** *Se dois triângulos têm três lados correspondentes congruentes então os triângulos são congruentes.*

Figura 37: Teorema 4.9
Fonte: BARBOSA, 2006, p.50.

Após abordarem os casos de congruências de triângulo, partem, no capítulo seguinte, para o axioma/postulado das Paralelas. Barbosa (2006) fala então do Axioma V (Axioma das Paralelas) no seu Capítulo 6, e Rezende & Queiroz (2000), fala do Postulado 13 (Postulado da Paralelas) no capítulo 4 de seu manual didático.

Tomando como eixo de nossa leitura estes Postulados/Axiomas, elaboramos um quadro que coloca a ordem em que esses termos aparecem nos dois livros, sem que haja, necessariamente, uma relação entre os postulados que aparecem na mesma linha, isso diz apenas que estariam na mesma sequência de cada livro:

Quadro 02: Apresentação dos Postulados/Axiomas

REZENDE & QUEIROZ (2000)		BARBOSA (2006)	
Postulados	Descrição	Axiomas	Descrição
1	Dados dois pontos distintos, existe uma única reta que os contém. **(Primeiro Postulado de Euclides)**	I_1	Qualquer que seja a reta existem pontos que pertencem e pontos que não pertencem à reta.
2	Em qualquer reta estão no mínimo dois pontos distintos	I_2	Dados dois pontos distintos existe uma única reta que os contém. **(Primeiro Postulado de Euclides)**
3	Existem, pelo menos, três pontos distintos não colineares	II_1	Dados três pontos distintos de uma reta, um e apenas um deles localiza-se entre os outros dois.
4	(Postulado da Distância) A cada par de pontos corresponde um único número maior ou igual a zero, sendo que esse número só é zero se os pontos forem coincidentes.	II_2	Dados dois pontos distintos A e B sempre existem: um ponto C entre A e B, e um ponto D tal que B está entre A e D.
5	(Postulado da Régua) Podemos estabelecer uma correspondência entre os pontos de uma reta e os números reais.	II_3	Uma reta m determina exatamente dois semiplanos distintos cuja intersecção é a reta m.
6	(Postulado da Colocação da Régua) Dados dois pontos P e Q numa reta, pode ser escolhido um sistema de coordenadas de modo que a coordenada de P seja zero e a coordenada de Q seja positiva.	III_1	A todo par de pontos de plano corresponde um número maior ou igual a zero. Este número zero se e só se os pontos são coincidentes
7	(Postulado da Separação de Planos) Dada uma reta, os pontos que não pertencem a ela formam dois conjuntos disjuntos tais que: (1) cada um dos conjuntos é	III_2	Os pontos de uma reta podem ser sempre colocados em correspondência biunívoca com os números reais, de modo que a

	convexo. (2) se P pertence a um dos conjuntos e Q ao outro, então o segmento PQ intersecciona a reta.		diferença entre estes números meça a distância entre os pontos correspondentes.
8	(Postulado da medida do Ângulo) A cada ângulo BAC corresponde um número real entre 0 e 180.	III_3	Se o ponto C encontra-se entre A e B então $\acute{A}C + \acute{C}B = \acute{A}B$
9	(Postulado da Construção de Ângulo) Seja $\overrightarrow{AB}$ uma semirreta contida na reta origem de um semiplano ϰ. Para cada número r entre 0 e 180 existe exatamente uma semirreta AP com P em ϰ, tal que m$P\hat{A}B$ = r.	III_4	Todo ângulo tem uma medida maior ou igual a zero. A medida de um ângulo é zero se e somente se ele é constituído por duas semirretas coincidentes.
10	(Postulado da Adição de Ângulos) se D é um ponto no interior de, então m$B\hat{A}C$= m$B\hat{A}D$+m$D\hat{A}C$.	III_5	É possível colocar, em correspondência biunívoca, os números reais entre zero e 180 e as semirretas da mesma origem que dividem um dado semiplano, de modo que a diferença entre estes números seja a medida do ângulo formado pelas semirretas correspondentes.
11	(Postulado do Suplemento) Se dois ângulos forma um par linear, então são suplementares.	III_6	Se uma semirreta S_{OC} divide um ângulo AÔB, então AÔB = AÔC + CÔB.
12	(1º Caso de congruência de Triângulos ou Caso L.A.L.) Dados dois triângulos ABC e DEF, se $\acute{A}B \cong \acute{D}E,\ \hat{B} \cong \hat{E} e \acute{B}C \cong \acute{E}F então \Delta ABC \cong \Delta \stackrel{\text{def}}{=}$.	IV	Dados dois triângulos ABC e EFG, se AB = EF, AC = EG e $\hat{A} = \hat{E}$ então ABC = EFG.
13	(Postulado das Paralelas) Por um ponto não pertencente a uma reta dada, passa uma única paralela a essa reta. **(5º Postulado de Euclides)**	V	Por um ponto fora de uma reta m pode-se traçar uma única reta paralela a reta m. **(5º Postulado de Euclides)**

Quadro 2: Apresentação dos Postulados/Axiomas
Fonte: elaborado para a pesquisa

3.3 AXIOMA V OU POSTULADO 13 (PARALELAS)

Para a apresentação deste axioma/postulado observamos que os autores adotam também abordagens diferentes entre eles, não somente no modo de escrita do postulado, como na organização do capítulo que o traz. Além disso, observamos diferenças no que é trazido sobre outras geometrias, as não-euclidianas.

Assim como já apontamos no tópico 3.2: “Primeiros Postulados”, os autores trazem as palavras: Axiomas e Postulados, tendo o mesmo uso nos manuais. Também se perpetua uma abordagem distinta na colocação dos Axiomas/Postulados pois, Barbosa (2006) inicia o capítulo 6 (seis) com a apresentação do Postulado das Paralelas e segue dizendo das consequências dele. Já Rezende & Queiroz (2000), apresentam o Postulado das Paralelas no capítulo 4 (quatro), mas diferente de Barbosa (2006), as autoras não trazem o Postulado das Paralelas de imediato, elas iniciam construindo a necessidade de postular tal afirmativa para a “volta” de determinados teoremas que apresenta, ou seja, vai construindo a necessidade da existência do quinto postulado.

Para melhor organizar nossas anotações dividimos esses apontamentos em torno do quinto postulado em três tópicos: Visão Geral, Ordenação e Outras Geometrias. No primeiro tópico, Visão Geral, apontaremos nossa leitura sobre a estratégia dos autores para inserir o postulado em seu manual didático, cada autor opta por uma apresentação usando estratégias bastante peculiares, ora trazendo algumas definições prévias, ora apresentando resultados para justificar a inserção dos postulados, nos propomos então, a apresentar essa relação dos dois manuais.

Na Ordenação trazemos as estratégias que os autores usam para apresentar o quinto postulado, bem como as diversas condições de paralelismo. Apontamos a relação de família entre os jogos e o método para fundamentar as provas propostas pelos autores. Uma vez que ambos os manuais tratam de Geometria Euclidiana, tendem a fazê-lo pelo método axiomático, através de teoremas, demonstrações e provas, assim, em uma primeira observação sem realizar apontamentos nos dois manuais, podemos cometer o equívoco de rotulá-los como manuais que usam as mesmas linguagens. Porém, focando nossos “óculos” teóricos para cada um dos livros, fica latente o quão podem serem distintos falando do mesmo tópico, e é neste direcionamento que seguiremos nossos apontamentos objetivando a argumentação dos autores.

Por fim, o Postulado das Paralelas traz uma abertura para outras geometrias, traremos alguns apontamentos sobre o modo que os autores abordam essa nova forma de se pensar a geometria.

3.3.1 O Postulado Das Paralelas: Visão Geral

Observamos que as autoras Rezende; Queiroz (2000) apresentam o quinto postulado como ‘Postulado das Paralelas’, e para o jogo de seu manual didático, ele acaba sendo enumerado como Postulado 13. É no Capítulo 4: “O Postulado das Paralelas”, na página 55, que elas estabelecem as primeiras condições de paralelismo apresentando o Teorema 4.1: “*Duas retas distintas perpendiculares a uma mesma reta são paralelas”* (REZENDE; QUEIROZ, p.

55). Em seguida elas apresentam o Teorema 4.2 e as Definições 4.3 e 4.4 reforçando as condições de paralelismo entre duas retas e retomando à ideia de ângulos alternos internos:

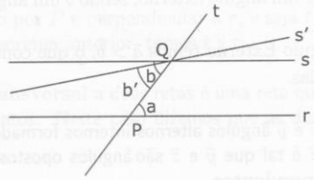
> 4.4 Definição. Seja *r* uma transversal às retas *s* e *t*, interseccionando-se nos pontos *P* e *Q*, respectivamente. Seja *A* um ponto de *s* e *B* um ponto de *t*, tais que *A* e *B* estejam em lados opostos de *r*. Os ângulos *APQ* e *BQP* são chamados de ângulos alternos internos formados por *s*, *t* e a transversal *r* (REZENDE; QUEIROZ, p. 56).

Esta definição fornece recurso para o Teorema 4.5: "*Se duas retas cortadas por uma transversal formam dois ângulos alternos internos congruentes, então as retas são paralelas*". Assim, as autoras apresentam o Postulado das Paralelas e justificam seu uso, fundamentando o Teorema 4.8: "Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, então os ângulos alternos internos são congruentes". Apresentamos assim a seguinte demonstração:

Postulado 13. (Postulado das Paralelas) Por um ponto não pertencente a uma reta dada, passa uma única reta paralela a essa reta.

4.8 Teorema. Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, então os ângulos alternos internos são congruentes.

Demonstração. Consideremos as retas paralelas r e s, e uma transversal t que as corta nos pontos P e Q respectivamente.



Suponhamos que os ângulos alternos internos a e b não sejam congruentes.

Seja s' uma reta que passa por Q formando com r e t os ângulos alternos internos a e b' congruentes.

Pelo Teorema 4.5, a reta s' é paralela a reta r. Disso e da hipótese temos, pois, passando por Q, duas retas s e s', ambas paralelas à reta r.

Isto contradiz o Postulado das Paralelas. Logo $\hat{a}$ e $\hat{b}$ são congruentes.

Figura 38: Teorema 4.8
Fonte: REZENDE; QUEIROZ, 2000, p. 58.

Quando observamos a figura acima, percebemos que as autoras Rezende & Queiroz (2000), sugerem que o leitor/usuário deva supor que os ângulos alternos internos *a* e *b* não sejam congruentes. Logo, se *s´* é uma reta que passa por *Q* formando com *r* e *t* os ângulos alternos internos *a* e *b´* congruentes. As autoras recorrem então ao Teorema 4.5, já citado no parágrafo anterior que valida a afirmação de que a reta *s´* é paralela a *r*, e que passando por Q, duas retas *s* e *s´*, ambas são paralelas à reta *r*. Assim elas explicam que tal afirmação contradiz o Postulado das Paralelas. Logo são congruentes.

Já Barbosa, inicia suas ponderações a respeito do axioma das paralelas no Capítulo 6: "O Axioma das Paralelas" (2006, p. 87). O uso desse axioma vem com a finalidade de embasar a prática da construção de paralelas, ele reforça a unicidade da reta paralela a partir dele, já que a existência de uma reta paralela a *m*, passando por um ponto dado, já havia sido provado anteriormente no Corolário 5.5 (p. 63). O autor aborda diretamente o uso do axioma cinco nas construções geométricas e aplicações práticas. Assim ele referencia a existência da condição de paralelismos, e já apresenta o Axioma V, como podemos observar na figura 39.

CAPÍTULO 6

O AXIOMA DAS PARALELAS

A existência de retas paralelas é uma conseqüência dos postulados já apresentados. O Corolário (5.5), além de garantir tal existência, fornece um método de, efetivamente, desenhar-se retas paralelas. O axioma que apresentamos a seguir diz, essencialmente, que duas retas paralelas a uma terceira e com um ponto em comum são coincidentes.

Axioma V Por um ponto fora de uma reta m pode-se traçar uma única reta paralela a reta m.

Deve-se observar que este axioma prescreve a *unicidade*, já que a existência de reta paralela a m, passando por um ponto dado, já era garantida por (5.5). Como conseqüência imediata deste axioma tem-se:

Proposição 6.1 *Se a reta m é paralela às retas n_1 e n_2, então n_1 e n_2 são paralelas ou coincidentes.*

Figura 39: Axioma das Paralelas
Fonte: BARBOSA, 2006, p. 85.

Ele traz por consequência imediata a Proposição 6.1: “Se a reta m é paralela a reta n1 e n2, então n1 e n2 são paralelas ou coincidentes”.

E mesmo apresentando o mesmo Postulado, podemos observar umas dessemelhanças entre os jogos de linguagem usados por Rezende & Queiroz (2000) e os jogos usados por Barbosa (2006).

Barbosa (2006) afirma: “Axioma V: Por um ponto fora de uma reta m pode-se traçar uma única reta paralela a reta m”.

As autoras Rezende & Queiroz (2000): “Postulado 13: Por pontos não pertencentes a uma reta dada, passa uma única reta paralela a essa reta”.

Quando apontamos para as seguintes orações: “Por um ponto fora” (BARBOSA, 2006) e “Por pontos não pertencentes” (REZENDE; QUEIROZ, 2000). Vemos que os autores explicitam uma regra de seus jogos de linguagem, pois nelas é possível encontrar uma semelhança de família em outras estruturas da matemática, como já citamos: Construções Geométricas e Teoria dos Conjuntos.

Pensando este livro como uma ferramenta em sala de aula, as formas de vida que estão em contanto com ele, fazendo uso de sua linguagem, podem estar mais habituados ao uso da linguagem das Construções Geométricas e outros com a Teoria dos Conjuntos, e isso pode estar ligado com a forma que este indivíduo entende a geometria.

Nos parece relevante também apontar para a diferença temporal dos dois livros, um produzido na década de 1980 e outro nos anos 2000. Não podemos ignorar as circunstâncias nas quais foram escritos como situações políticas, econômica, culturais, científica entre outras. O livro de Barbosa (2006) por exemplo, foi escrito em 1980, período onde a Matemática Moderna ainda era muito presente e incentivava amplamente o estudo das Teorias de Conjuntos, tendo inserção até mesmo nas primeiras séries. Com o tempo, tal aproximação foi sendo deixada de lado.

Assim, ao olhar para esses manuais observamos que, diferente das autoras Rezende; Queiroz (2006), Barbosa (2000) trata diretamente com a necessidade da aplicabilidade do Axioma. De certa forma ele prefere fazer inserção do postulado baseado em uma necessidade de uso na prática, assim ele comenta:

> A existência de retas paralelas é uma consequência dos postulados já apresentados. O Corolário (5.5), além de garantir tal existência, fornece um método de desenhar-se retas paralelas. O axioma que apresentamos a seguir diz, essencialmente, que duas retas paralelas a uma terceira e com pontos em comum são coincidentes. (BARBOSA, 2000, p. 85)

É possível observar no capítulo 6, intitulado “Axioma das Paralelas” do livro de (Barbosa, 2006) e no capítulo 4 do livro de (Rezende; Queiroz, 2000), que os autores exploram a condição de paralelismo entre duas retas. Para trabalhar tal condição, muitas vezes se utilizam de a hipótese dessas retas não serem paralelas e mostram que tal afirmação é um absurdo, portanto, obrigando assim a condição de paralelismo entre as retas estudadas. Isso decorre na definição dos tipos de retas que os autores trazem, dizendo que dados duas retas, ou serão concorrente ou serão paralelas, logo não sendo concorrentes, serão paralelas. A partir disso, outras definições e provas são apresentadas para aplicações tais como: triângulos, quadriláteros, relações proporcionais, entre outros.

3.3.2 Da Ordenação Dos Argumentos

Barbosa, de uma forma direta expõe o **Axioma V**, trazendo relevância para a **Proposição 6.1**, e já segue com o **Corolário 6.2** que afirma: “Se uma reta corta uma de duas paralelas, então também corta a outra”. Assim, o autor apresenta uma prova com a intenção de garantir uma determinada condição de paralelismo:

> Prova: Sejam n_1 e n_2 retas paralelas. Se uma reta m cortasse n_1 e não cortasse n_2, então m e n_2 seriam paralelas. Assim n_2 seria paralela a m e a n_1. como m e n_1 não são paralelas entre si nem coincidentes, temos uma contradição com a proposição anterior. Logo m corta também n_2 (BARBOSA, 2000, p. 86).

Acreditamos também que o autor, ao propor a **Definição 5.6** (p. 63), tenta fundamentar a **Proposição 6.3** (p.86), que afirma: “*Sejam m, n,*$\hat{1}$*e*$\hat{2}$ *e como na figura (6.1) Se, então as retas m e n são paralelas.*” Logo segue sua argumentação com a construção de duas retas *m* e *n* ditas paralelas, nas quais são cortadas por uma transversal, formando assim dois ângulos nas intersecções, ângulo 1 e ângulo 2. Através da Proposição 6.3, se $\hat{1} = \hat{2}$ então as retas *m* e *n* são paralelas, garantindo assim a condição de paralelismo na construção geométrica, conforme ele representa na figura 40:

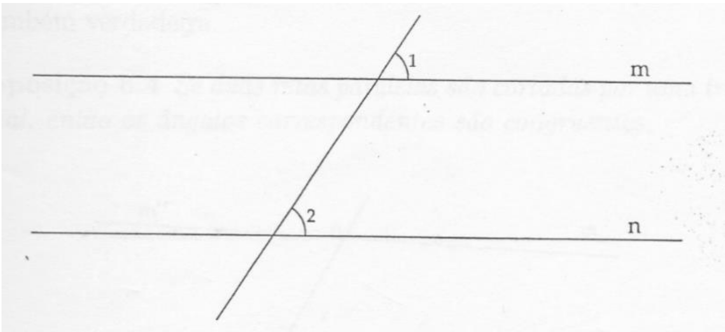


Figura 40: Condições de Paralelismo
Fonte: BARBOSA, 2006, p.86.

O autor segue fazendo uma outra suposição, apresentando a possibilidade dessas duas retas *m* e *n* se encontrarem em algum ponto, formando assim um triângulo, conforme cita a prova: “*De fato, se m interceptasse n em algum ponto P, como representado na figura seguinte, formar-se-ia o triângulo ABP*”.

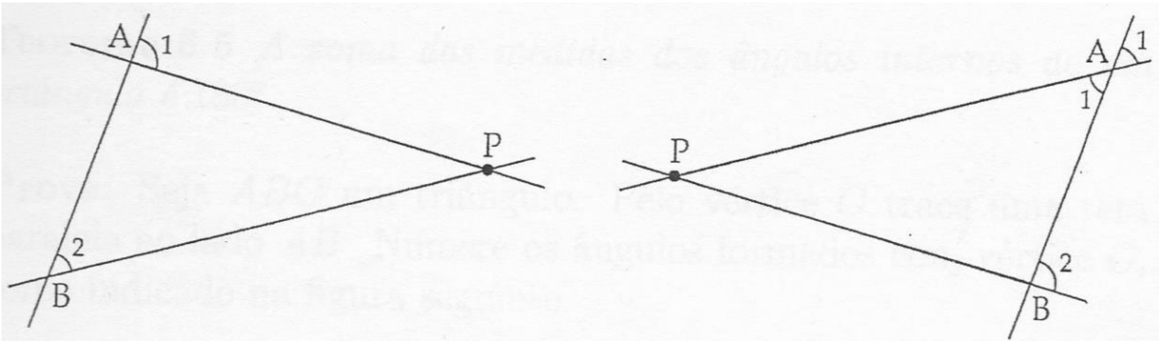


Figura 41: Triângulo ABP
Fonte: BARBOSA, 2006, p.87.

Como o autor partiu de uma condição de paralelismo tendo, essa demonstração parece ser uma contradição da **Proposição 6.3**, assim ele faz uma afirmação partindo de uma em provocação absurda, que é um ponto de interseção *P* entre as retas *m* e *n*. Assim ele comenta:

> Neste triângulo $\hat{1}$ é ângulo externo e $\hat{2}$ é um ângulo interno não adjacente ao ângulo $\hat{1}$ ou vice-versa. Assim, pelo teorema do ângulo externo teríamos $\hat{1} \neq \hat{2}$ o que contradiz nossa hipótese. Portanto m e n são se intersectam. (Barbosa, 2000, p. 87)

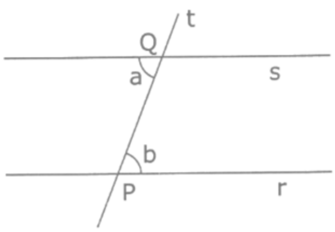
Já as autoras Rezende & Queiroz (2000), para introduzir o Postulado das Paralelas, primeiro apresentam os Teoremas 4.5- “Se duas retas cortadas por uma transversal formam dois ângulos alternos internos congruentes, então as retas são paralelas” Rezende & Queiroz (2000, p.57) e o Teorema 4.7 – “Se duas retas são cortadas por uma transversal, e se dois ângulos correspondentes são congruentes, então as retas são paralelas” (REZENDE; QUEIROZ, 2000, p.57).

Chamando a atenção para as recíprocas destes teoremas, que só serão possíveis a partir do uso do “quinto postulado” **(Postulado 13)**, antecipando uma das aplicações deste. Assim elas comentam:

> As recíprocas dos Teoremas 4.5 e 4.7 são verdadeiras, mas para demonstrá-las precisamos utilizar o Postulado das Paralelas. Este Postulado vai nos dar a unicidade da reta paralela a uma reta dada, passando por um ponto fora dela, cuja existência já foi demonstrada no Teorema 4.2 e afirma que *por um ponto não pertence uma reta dada, passa no máximo uma reta paralela a essa reta*. **A partir daqui usaremos livremente o postulado das Paralelas de Euclides, embora boa parte dos resultados possa ser demonstrada em outras “geometrias” também.** Embora seja um postulado apenas de unicidade da reta paralela, vamos enunciá-lo a seguir, da maneira como é usualmente conhecido. (REZENDE; QUEIROZ, 2006, p. 58, grifo nosso)

Em nossa leitura, fica forte a importância deste postulado para demonstrar as **recíprocas** dos teoremas, o que chamamos usualmente em sala de aula de “a volta”. Ainda assim ele é livremente chamado de Postulado das Paralelas.

Dessa forma novamente as autoras estabelecem uma nova condição de paralelismo por contradição de hipótese, conforme a figura 42:



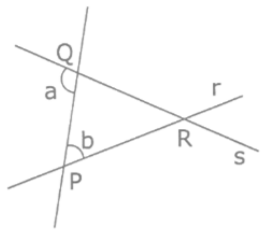


Figura 42: Condições de Paralelismo II
Fonte: REZENDE; QUEIROZ, 2000, p.57.

A figura 42 remete ao Teorema 4.5, seguindo a Demonstração:

> Sejam r e s duas retas cortadas por uma transversal nos pontos P e Q respectivamente. Sejam $\hat{a} e \hat{b}$ ângulos alternos internos congruentes. Se r e s interseccionam em algum ponto R, como na figura 2, elas formam um triângulo RQP no qual $\hat{a}$ é um ângulo externo sendo $\hat{b}$ um ângulo externo não adjacente a ele. Pelo Teorema do Ângulo Externo temos $\hat{a} > \hat{b}$, o que contradiz nossa hipótese. Logo r e s são paralelas. (REZENDE; QUEIROZ, 2000 p. 57)

Assim, elaboramos um quadro para que o leitor possa compreender com maior facilidade a condução adotada por cada autor no capítulo em que abordam o postulado/axioma das paralelas.

Quadro 03: Relação Posicional da Inserção dos Argumentos no Capítulo que Aborda o Postulado das Paralelas

REZENDE & QUEIROZ (2000) - Capítulo 4	BARBOSA (2006) - Capítulo 6
4.1 Teorema – Duas retas distintas perpendiculares a uma mesma reta são paralelas.	**Axioma V – Por um ponto fora de uma reta *m* pode-se traçar uma única reta paralela a reta *m*.**
4.2 Teorema – Por um ponto não pertencente a uma reta passa, no mínimo, uma reta paralela à reta dada.	Proposição 6.1 – Se a reta m é paralela às retas n_1 e n_2, então n_1 e n_2 são paralelas ou coincidentes.

4.3 Definição – Uma transversal a duas retas é uma reta que intersecciona essas duas retas em dois pontos distintos. Nesse caso dizemos que as duas retas são cortadas pela transversal.	Corolário 6.2 – Se uma reta corta uma de duas paralelas, então corta também a outra.
4.4 Definição - Seja *r* uma transversal às retas *s* e *t*, interseccionando-as no ponto P e Q, respectivamente. Seja A um ponto de *s* e B um ponto de *t*, tais que A e B estejam em lados opostos de *r*. Os ângulos APQ e BQP são chamados de ângulos alternos internos formados por *s* e *t* e a transversal *r*.	Proposição 6.3 – Sejam *m*, *n*,1 e 2 como na figura (6.1) Se 1=2, então as retas *m* e *n* são paralelas.
4.5 Teorema – Se duas retas cortadas por uma transversal formam dois ângulos alternos internos congruentes, então as retas são paralelas	Proposição 6.3.A – Se, ao cortarmos duas retas com uma transversal, obtivermos $3+2 =180^0$. então as retas são paralelas.
4.6 Definição - Sejam x e y ângulos alternos internos formados por duas retas cortadas por uma transversal. Se z é tal que y e z são ângulos opostos pelo vértice, então x e z são ditos ângulos correspondentes.	Proposição 6.3.B – Se, ao cortarmos duas retas com uma transversal, os ângulos correspondentes forem congruentes, então as retas são paralelas.
4.7 Teorema – Se duas retas são cortadas por uma transversal, e se dois ângulos correspondentes são congruentes, então as retas são paralelas.	Proposição 6.4 – Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, então os ângulos correspondentes são congruentes.
Postulado 13 (Postulado das Paralelas) - Por um ponto não pertencente a uma reta dada, passa uma única reta paralela a essa reta.	Teorema 6.5 – A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180^0.

4.8 Teorema – Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, então os ângulos alternos internos são congruentes.	Corolário 6.6 – a) A soma das medidas dos ângulos agudos de um triângulo retângulo é 90^0. b) Cada ângulo de um triângulo equilátero mede 60^0. c) A medida de um ângulo externo de um triângulo é igual a soma das medidas dos ângulos internos que não lhe são adjacentes. d) A soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360^0.
4.9 Teorema a – Duas retas paralelas cortadas por uma transversal formam pares de ângulos correspondentes congruentes. b- Duas retas distintas paralelas a uma mesma reta são paralelas entre si. c- Se uma reta é perpendicular a uma de duas retas paralelas, então é perpendicular à outra.	Teorema 6.7 – Se *m* e *n* são retas paralelas, então todos os pontos de *m* estão à mesma distância de *n*.
4.10 Teorema – A soma das medidas dos ângulos de um triângulo é 180^0.	Definição 6.8 – Um paralelogramo é um quadrilátero cujos lados opostos são paralelos.
4.11 Corolário a – Seja dada uma correspondência entre dois triângulos. Se dois pares de ângulos correspondentes são congruentes, então o terceiro par é também de ângulos correspondentes congruentes. b - Ângulos agudos de um triângulo retângulo são complementares.	Proposição 6.9 – Em um paralelogramo lados e ângulos opostos são congruentes.

c – Em todo triângulo, a medida de um ângulo externo é a soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes.	
4.12 Definição – Um quadrilátero é um polígono de quatro lados.	Proposição 6.10 – As diagonais de um paralelogramo se intersectam em um ponto que é ponto médio das duas diagonais.

Quadro 03: Relação Posicional Postulado/Axioma.
Fonte: elaborado para a pesquisa.

Como o quadro pôde explicitar, os jogos usados pelos autores não são os mesmos, ambos falam de Geometria Euclidiana Plana, mas isso não torna o jogo uno. Como em um jogo de cartas, um grupo joga truco, outro grupo joga *poker*, há uma semelhança de família que podemos identificar em ambos os jogos, como: a sequência das cartas, o nome das cartas, o uso fundamental do baralho e até mesmo o objetivo, mas isso não torna os jogos iguais. Apontaremos aqui algumas semelhanças de família nos jogos de linguagens usado pelos autores em seus respectivos manuais didáticos.

Iniciaremos com uma clara evidenciação dada pelos autores, ao propor uma certa relevância a uma proposição ou definição, os autores nomeiam esse destaque de Corolário. É evidente que eles não falam das mesmas coisas e tão pouco estão colocados nas mesmas posições, mas ambos usam essa regra em seus jogos. Assim, quando buscamos no livro de Barbosa (2006), observamos que seu primeiro uso do corolário, ele faz no capítulo 5 na pág. 63, Corolário 5.4 “Todo triângulo possui pelo menos dois ângulos internos agudos”. Já as autoras Rezende & Queiroz (2000), usam seu primeiro corolário no capítulo 2 na pág. 33: Corolário 2.3 “Todo triângulo equilátero possui seus três ângulos com a mesma medida”.

No tocante ao uso dos teoremas, apesar de não seguirem a mesma sequência, e nem usarem os mesmos textos, muitos teoremas são idênticos, assim, procuramos relacioná-los no quadro a seguir, como não estamos visando uma comparação entre os jogos, logo o quadro não está ordenado de forma a seguir a sequência, apenas expressos na forma em que se apresentam nos manuais.

Quadro 04: Semelhanças de proposições nos dois Manuais Didáticos

REZENDE & QUEIROZ (2000)		BARBOSA (2006)	
Postulado 13	Postulado das Paralelas - Por um ponto não pertencente a uma reta dada, passa uma única reta paralela a essa reta.	Axioma V	Por um ponto fora de uma reta *m* pode-se traçar uma única reta paralela a reta *m*.
Teorema 4.10	A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º	Teorema 6.5	A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180^0.
Corolário 4.11	a) Seja dada uma correspondência entre dois triângulos. Se dois pares de ângulos correspondentes são congruentes, então o terceiro par é também de ângulos correspondentes congruentes. b) Os ângulos agudos de um triângulo são complementares. c) Em todo triângulo, a medida de um ângulo externo é a soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes.	Corolário 6.6	a) A soma das medidas dos ângulos agudos de um triângulo retângulo é 90^0. b) Cada ângulo de um triângulo equilátero mede 60^0. c) A medida de um ângulo externo é igual a soma das medidas dos ângulos internos que não lhe são adjacentes. d) A soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360^0.
Definição 4.3	Uma transversal a duas retas é uma reta que intersecciona essas duas retas em dois pontos distintos. Neste caso dizemos que as duas retas	Corolário 6.2	Se uma reta corta uma de duas paralelas, então corta também a outra.

	são cortadas pela transversal.		
Teorema 4.5	Se duas retas cortadas por uma transversal formam dois ângulos alternos internos congruentes, então as retas são paralelas	Proposição 6.3 A	Se, ao cortarmos duas retas com uma transversal, obtivermos $\hat{3} + \hat{2} = 180^0$ então as retas são paralelas.
Teorema 4.8	Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, então os ângulos alternos internos são congruentes.	Proposição 6.4	Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, então os ângulos correspondentes são congruentes

Quadro 4: Semelhança de Proposições
Fonte: elaborado para a pesquisa

Entre as semelhanças e dessemelhanças entre os dois jogos, nos parece que há muitas coisas em comum, como jogos de baralho muito semelhantes, talvez os mesmos, mas jogados em diferentes regiões do país onde, por exemplo, a ordenação entre valete, dama e reis pode mudar. Não nos parece ser uma diferença como que jogada em baralhos diferentes, como baralhos de 52 ou 56 cartas, ou no jogo de truco, em que se retira as cartas 8, 9 e 10 e o coringa – visto que há uma equivalência no número de postulados e teoremas, mas sua ordenação, como vimos é diferente. Se observarmos o próprio truco, a ordem das cartas com relação ao seu “peso” no jogo é outro (da maior para a menor: 3; 2; A; K; J; Q; 7; 6; 5 e 4), por mais que tenhamos aqui as mesmas cartas, a relação entre o 3 e o 4 é diferente da usual de jogos como a caxeta, por exemplo.

3.2.3 As Geometrias Não-Euclidianas

> "Para aprender geometria todos tem que seguir o mesmo caminho. Não há estrada real para o saber."
> Euclides

Não é o foco principal de nosso trabalho discorrer sobre as geometrias não-euclidianas, mas quando estudamos o Quinto Postulado de Euclides como apresentado nos manuais e nosso conhecimento de outras versões dele e das polêmicas ao longo da história sobre sua validade enquanto postulado, nos parece necessário tocar, minimamente, tal discussão. Além disso, os próprios manuais fazem referência – de diferentes formas – a estas geometrias.

Apresentaremos uma introdução bastante resumida com a intenção de alcançar o leitor que não conhece esse ramo específico da Geometria, já para o leitor praticante dos diversos ramos da Geometria, esse trecho pode ser entediante. Mas convidamos a todos, do especialista ao leigo, para acompanhar nosso modesto resumo das geometrias não-euclidianas.

Como já havíamos dito, para falarmos das geometrias não-euclidianas temos que discutir a existência do Postulado das Paralelas (quinto postulado de Euclides), e para isso, devemos trazer à luz os outros quatro postulados, no qual apresentaremos a seguir:

> 1. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto; 2. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta; 3. E, com todo centro e distância, descrever um círculo; 4. E serem iguais entre si todos os ângulos retos; 5. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos. (EUCLIDES, 2009, p. 98)

Ao que se sabe sobre as Geometrias não Euclidianas, é que Euclides construiu um modelo axiomático tendo esses 5 (cinco) postulados, e a partir deles demonstra vários teoremas e provas estabelecendo assim a conhecida Geometria Euclidiana. Em particular o quinto postulado, conhecido como o postulado das paralelas, sempre foi muito investigado por matemáticos que vieram posteriormente a Euclides. Segundo Barbosa (2006) alguns matemáticos como Lobacho e Gauss chegaram a supor que este quinto postulado fosse, na verdade, um teorema, e pudesse ser demonstrado a partir de outros postulados. Para Ribeiro

(2012), os primeiros avanços significativos nessa direção se devem a Saccheri[11], que apresentou uma forma diferente de investigar o quinto postulado. Enquanto outros matemáticos tentaram demonstrar que o quinto postulado não era um postulado, Saccheri parte de uma afirmação “absurda” na qual analisando um ponto fora de uma reta dada, teria mais de uma reta paralela a esta reta.

Segundo Renato Ribeiro (2012), Saccheri esperava encontrar uma contradição em seus resultados, não a obtendo, obrigou-se a considerar que sua afirmação inicial não era absurda. Este resultado foi um avanço para os estudos da geometria axiomática. Matemáticos posteriores à Saccheri como Gauss, Lobatckevsky, fazendo uso da mesma proposição e observando que não obtinham resultados contraditórios propuseram outras afirmações para o quinto postulado, surgindo assim as Geometrias Não-Euclidianas, dentre as quais podemos destacar: Geometria Hiperbólica, Geometria Elíptica e Geometria do Taxista.

Todas elas apresentam afirmações e posicionamentos diferentes quanto ao quinto postulado proposto por Euclides. A Geometria Hiperbólica, por exemplo, defende que por um ponto fora de uma reta dada podem passar infinitas retas paralelas a reta dada:

> Por sua vez, a Geometria Hiperbólica Plana se desenvolve sobre uma superfície com curvatura negativa. Nesta superfície, por um ponto não pertencente a uma geodésica passam pelo menos duas geodésicas que não intersectam a primeira e que são, portanto, paralelas a ela. (CARLOS PEREZ, 2015, p. 26)

Já a Geometria Elíptica defende que dado um ponto fora de uma reta dada, não há nenhuma reta que seja paralela à reta dada.

> A Geometria Elíptica Plana tem como cenário uma superfície com curvatura positiva, o que implica em uma superfície finita, fechada em si mesma, como a superfície de uma esfera (no caso de a curvatura ser constante), ou de um elipsoide. Sobre essa superfície, a menor distância entre dois pontos é chamada de geodésica, que corresponderia à reta na Geometria Euclidiana. (PEREZ, 2015, p. 25)

A Geometria do Taxista ou Geometria Pombalina é capaz de descrever inúmeras situações reais que a Geometria Euclidiana não consegue prever. Por exemplo: Qual é a menor distância entre sua casa e a farmácia? Na visão Euclidiana, a menor distância entre dois pontos é uma reta. Mas, provavelmente, a distância entre sua casa e a farmácia, se não estiverem na

[11] Giovanni Girolamo Saccheri (1667 - 1733) foi um padre jesuíta e matemático italiano autor da obra: Euclides Liberto de Cada Falha publicado inicialmente 1733.

mesma rua, não descreve uma trajetória retilínea. Na geometria do taxista, a menor distância entre dois pontos de um plano nem sempre é a linha reta.

> Na Métrica Euclidiana a distância entre dois pontos é um segmento de reta que une esses dois pontos, já na Métrica do Taxi a distância entre dois pontos é determinada de forma distinta, por intermédio de linhas quebradas que vão unir esses dois pontos. A Métrica do Taxi induzirá uma nova geometria onde retas e pontos são os mesmos da Geometria Euclidiana e os ângulos são medidos na mesma forma, entretanto os objetos que dependem do conceito de distância se apresentam de forma distinta. (CARLOS LOIOLA, 2014 p. 44)

Examinando o livro escrito por Rezende & Queiroz (2000), podemos observar que as autoras escrevem brevemente sobre a importância desse quinto postulado ao dar possibilidades para a construção de outras geometrias. Ao olharmos para o que as autoras Rezende & Queiroz (2000) escrevem sobre esse tópico, notamos que iniciam o capítulo 4 com um breve preâmbulo ressaltando a existências de outras geometrias, tais como: Geometria Hiperbólica ou de Lobacho e Geometria Riemanniana, e a partir da possibilidade do quinto postulado ser questionável, assim elas comentam:

> Nos três primeiros capítulos apresentamos resultados que independem da Geometria Euclidiana. São verdadeiros tanto para ela como para alguma das chamadas Geometrias Não-Euclidianas. Por Geometria Não-Euclidiana, entendemos um sistema geométrico construído sem a ajuda da hipótese euclidiana das paralelas e contendo uma suposição sobre as paralelas, que é incompatível com a de Euclides. (REZENDE; QUEIROZ, 2000, p. 55)

Em seguida, as autoras explicitam as outras geometrias apontando de qual forma essas geometrias diferem da Geometria Euclidiana, para ser mais específico, no que se refere ao postulado das paralelas.

Na leitura do livro de Barbosa (2006), vemos que opta por colocar essa peculiaridade do Postulado das Paralelas ao final do capítulo, assim, o leitor/usuário que seguir criteriosamente seu jogo de linguagem, ficará alheio às novas geometrias até chegar à página 105, onde finaliza o capítulo. O autor faz algumas considerações a respeito dos Postulados de Euclides, dos Axiomas de Euclides e da existência de outras geometrias, ditas Geometrias Não-Euclidianas, a esse respeito ele escreve:

> Foi somente na primeira metade do século dezenove que os matemáticos chegaram à conclusão de que o quinto postulado não era demonstrável a partir dos outros quatro. Isso ocorreu com a descoberta das chamadas geometrias não-euclidianas em que o quinto postulado de Euclides é substituído por uma afirmação que é **contraditória**. Esta descoberta está associada com o nome de dois matemáticos que a obtiveram independentemente: Johann Bolyai (1802-1860) e Nikolai Lobachewsky (1793-1856). (BARBOSA, 2006, p. 107-108, grifo nosso)

Apesar de fazer tal apontamento apenas ao final do capítulo, Barbosa (2006) traz uma nota histórica pontuando a relevância dessa peculiaridade do quinto postulado, enfatizando a existência de outras geometrias.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho descrevemos os jogos de linguagem nos manuais didáticos de Barbosa (2006), *Geometria Euclidiana Plana,* e das autoras Rezende & Queiroz (2000), intitulado "*Geometria Euclidiana Plana: Construção Geométrica*". Estudando esses manuais, nos propomos a descrever as semelhanças e dessemelhanças existentes entre os dois manuais, em um movimento terapêutico bibliográfico que nos levou a um estudo, não estático, fazendo apontamentos do livro pelo livro, mas em um olhar dinâmico tendo estes manuais como sendo parte de um outro jogo de linguagem em um processo de ensino/aprendizagem em sala de aula.

Inspirados em uma perspectiva wittgensteiniana, nos propomos a descrever os livros até o quinto Postulado de Euclides, conhecido como "Postulado das Paralelas". Nosso estudo não se estendeu muito pelos livros, pois como já mencionamos nas análises o "Postulado das Paralelas", foi descrito no capítulo 4 (quatro) do livro de Rezende & Queiroz (2000) e no Capítulo 6 (seis) do livro de Barbosa (2006).

Usando uma metodologia que chamamos aqui livremente de "terapêutico bibliográfica" descrevemos os jogos de linguagem que entendemos terem sido estabelecidos pelos autores para seus manuais didáticos em nosso movimento de leitura. Neste processo separamos nossos apontamentos em duas partes: a primeira, do início dos livros até o que precede o equivalente ao quinto postulado de Euclides, e na segunda abordamos especificamente do Quinto Postulado de Euclides, da atenção que os autores dão para esse tópico em ambos manuais didáticos e como esses autores direcionam seus jogos para tratarem das Geometrias Não-Euclidianas.

Em uma primeira leitura não detalhada dos dois manuais, o leitor poderia classificá-los como semelhantes, pois ambos falam de Geometria Euclidiana Planas e ambos usam um método axiomático, mas ao passo que vamos nos atendo a detalhes desses manuais, focando nossa leitura em pontos específicos, percebemos que, apesar se haver semelhanças entre os manuais, as regras de seus jogos tendem a serem dessemelhantes, quanto mais olhamos para especificidades, mais os jogos desses manuais divergem.

Apesar de fazermos descrições pontuais, elaboramos alguns quadros para que nosso leitor possa também produzir visões mais panorâmicas sobre os dois manuais. Uma vez que os autores se propõem a falar sobre Geometria Euclidiana Plana, em senso comum, podemos até dizer que apesar de serem autores diferentes, formas de escrita diferentes, o conteúdo apresentado nos livros é o mesmo, e isso pode nos levantar três perguntas: A Geometria apresentada em ambos os manuais é a mesma? Poderia um aluno estudar se utilizando dos dois livros ao mesmo tempo? Poderia estudar os postulados/axiomas, teoremas por um e realizar um exercício ou uma prova elaborada a partir do outro? Se a resposta a esta pergunta for negativa, como acreditamos ao final destas análises, podemos seguramente falar em diferentes jogos de linguagem. Para além de trocas simples como “axioma” por “postulado”, temos algumas peças diferentes nestes “jogos de xadrez” (parafraseando Barbosa e também Wittgenstein), um tem mais peões que o outro, e o outro, talvez, três ou mais cavalos ou casas.

Poderíamos ainda nos perguntar, mesmo sob o risco de sermos anacrônicos, a Geometria Euclidiana Plana apresentada nos manuais didáticos estudados é a mesma Geometria apresentada no livro “Os Elementos” de Euclides, como na tradução do Grego antigo por Bicudo, Euclides (2009)? Guarda com eles quais semelhanças? (nos furtaremos a responder estas perguntas neste trabalho).

Para iniciar essa nossa discussão – sobre os dois manuais em voga -, vimos que ambos dão nomenclaturas diferentes para aquilo que entendemos com verdade absoluta livre de questionamentos ou de necessidade de demonstrações. As autoras Rezende & Queiroz (2000), chamam de Postulado, já Barbosa (2006), em seu jogo de linguagem – segundo nossa leitura -, prefere chamar de Axioma. Também, quando olhamos para os postulados apresentados pelas autoras Rezende & Queiroz (2000), entendemos como um jogo diferente daquele estabelecido por Barbosa (2006). Uma semelhança de família que encontramos entre os Postulados e Axiomas, é que há a mesma quantidade de Postulados e de Axiomas nos dois manuais didáticos, no entanto, eles não são os mesmos, e poucos tópicos coincidem. Os autores usam a mesma quantidade de Postulados/Axiomas para apresentar seus jogos, o Quando 2 na página 61 os apresentamos, um total 13 (treze) e cada manual faz uso de uma estratégia para distribuí-los, Rezende; Queiroz (2000), apenas os enumeram de 1 (hum) a 13 (treze), já Barbosa (2006) opta por uma classificação em grupos e subgrupo, ou seja, os grupos são classificados com algarismos romanos, nos quais variam de I a V, e entre eles Barbosa (2006) estabelece alguns subgrupos que são identificados por algarismos hindu arábicos subscrito variando de 1 (hum) a 6 (seis), de acordo com os agrupamentos que Barbosa (2006) propôs em seu jogo.

Outro apontamento relevante é quanto à linguagem usada pelos autores em seus respectivos manuais didáticos, pois quando lemos o manual de Barbosa (2006) notamos uma grande aproximação aos textos de Construções Geométricas, fazendo uso de termos como:

constroem, formam, é possível construir, passa. Termos esses que nos remetem à Construção Geométrica, conforme apresentamos nas figuras 08 e 09.

Já Rezende & Queiroz (2000), apesar de rotularem na capa de seu livro “Geometria Euclidiana Plana construções Geométricas”, ao desenrolar seu texto observamos que a linguagem usada pelas autoras se aproxima bastante da Teoria dos Conjuntos, usando de forma abundante termos como: contido, contendo, pertence, conjunto e subconjuntos, conforme as figuras 06 e 07.

Seguindo em nossa Terapia, ambos autores iniciam o primeiro capítulo de seus respectivos manuais trazendo uma definição bastante sucinta de Ponto, Reta e Plano, fazem uma rápida classificação entre eles e já seguem para as apresentações do Postulado/Axiomas de seus manuais. Rezende & Queiroz (2000) separam os três primeiros postulados de seu manual e os nomeiam de “Postulados de Incidência”, e o primeiro postulado de seu manual coincide com o primeiro postulado de Euclides. Já Barbosa (2006), introduzindo os axiomas em seu manual, separa os dois primeiros: Axiomas I_1 e I_2 e os nomeiam “Axioma de Incidência”, mas para Barbosa (2006), o Axioma I_2, é quem coincide com o primeiro postulado de Euclides.

Seguindo, damos destaque para a Proposição 1.1 de Barbosa (2006), e para a Definição 1.1 de Rezende & Queiroz (2000), onde se estabelece duas possibilidades para um par de retas: ou possuem 1(ponto) em comum e são chamadas retas concorrentes, ou não possua nenhum ponto em comum e são chamadas paralelas. Os textos da proposição e da definição não são iguais, mas apresentam semelhança entre eles.

As autoras Rezende & Queiroz (2000), trazem o Postulado 4 com o título “Postulado da Distância”, nele, elas estabelecem que entre um par de pontos existe um número maior que zero para referir-se a distância entre os pontos. Barbosa (2006) trata desse tópico no Axioma III_1 intitulado “Axioma da Medição de Segmento”, antes disso ele trata de especificações do ponto e da reta, com proposições e provas as quais as autoras Rezende & Queiroz (2000), trata apenas após o Postulado 7.

Logo em seguida, o Axioma III_2 de Barbosa (2006) apresenta semelhança ao Postulado 5 das autoras Rezende & Queiroz (2000), este Postulado/Axioma trata da relação direta entre os pontos de uma reta e os números reais. O texto de Barbosa (2006) no Axioma III_2 é mais sucinto, mas exprime a mesma ideia que as autoras Rezende & Queiroz (2000) propõem no

Postulado 5. Como já trouxemos em nossa Terapia, ambos autores trazem afirmações bastante semelhantes em momentos diferentes de seus jogos, o Quadro 2 na página 61, nos mostra também como os autores tratam desses assuntos semelhantes em ordens diferentes.

Outro apontamento interessante vemos no Axioma III_3, em síntese o axioma afirma: AB + BC = AC, ou seja, tendo três pontos colineares A, B e C, consecutivamente, a distância entre os pontos A e C é dado pela soma dos pontos A e B com B e C. Uma ideia semelhante é exprimida por Rezende & Queiroz (2000), porém para elas, segundo nossa leitura, tal afirmação não é um postulado, mas sim uma definição (1.4). Chamou-nos a atenção que, para um autor a afirmação não tenha a mesma relevância do que para os outros, o que Barbosa (2006) entende como Axioma, Rezende & Queiroz (2000) classificam como uma definição.

Os jogos de linguagem nos manuais que estudamos mesmo que tentando se utilizar da mesma gramática apresentam a mesma sequência e organização, ora os textos se aproximam, ora se afastam. Assim, quando olhamos para tais manuais observamos essas sutis relações, como podemos citar a Definição 2.3 de Barbosa (2006), que se aproxima muito da Definição 1.11 de Rezende & Queiroz (2000). Ambas definições tratam da existência do ponto médio, tais definições são usadas em situações e momentos distintos, mas no texto em si, percebemos grande semelhança.

Logo em seguida, na Definição 2.4, Barbosa (2006) afirma que um determinado segmento possui um único ponto médio. As autoras Rezende & Queiroz (2000), também seguem a mesma ideia, logo após, na Definição 1.12. Os autores não tratam dos mesmos assuntos nos mesmos momentos, e quanto mais procuramos um padrão que os relacione, menos acreditamos que ele exista.

Outro apontamento que fizemos – mesmo não sendo o foco de nossas análises - é que ambos manuais tratam de Geometria **Euclidiana** Plana, mas há grande divergência entre os cinco postulados "originais" de Euclides, como apresentados no livro "Os Elementos" (disponível na tradução de Bicudo (2009)), e aqueles que são apresentados nos manuais em voga, bem como a presença de noções comuns entre outros tantos aspectos[12]. Neste sentido,

[12] Percebemos textos diferentes, mas de certo ponto de vista equivalentes ao primeiro e quinto postulado de Euclides. Os outros três postulados praticamente não aparecem na axiomática proposta pelos autores, com exceção do terceiro postulado, que é citado com relevância menor do que a dada por Euclides em sua obra. O Postulado 3 da obra de Euclides, define a circunferência na geometria euclidiana plana, mas para Barbosa (2006), tal

euclidiana passa a ser muito mais uma nomenclatura deste ramo da matemática e da geometria, que foi sendo modificado ao longo do tempo, do que uma referência direta a uma autoria propriamente dita.

Tudo o que já apresentamos até o momento sobre do manual Barbosa (2006), nos leva ao Axioma III_4, que é apresentado no Capítulo 3. Já Rezende & Queiroz (2000), trata até o Postulado 11 ainda no Capítulo 1, no início do Capítulo 2 elas trazem o Postulado 12, e ficam todo o resto do Capítulo 2 e 3 sem apresentar nenhum postulado, e somente no Capítulo 4 as autoras apresentam o Postulado 13.

Voltando ao Axioma III_4 de Barbosa (2006), que trata da medida do ângulo, segundo o que afirma Barbosa (2006), a medida do ângulo está compreendido com um valor maior ou igual a zero. Rezende & Queiroz fazem uma afirmação semelhante no Postulado 8, mas elas definem o ângulo com um valor dado entre 0 e 180.

Outro apontamento importante toca o Postulado 9 de Rezende & Queiroz (2000), que refere-se à semirreta contida na origem do semiplano, notamos que este foi o primeiro momento que as autoras usam o semiplano desde sua definição no início do Capítulo 1. Uma referência semelhante foi dada por Barbosa (2006) na Definição 3.2, neste o autor afirma que uma determinada semirreta divide um determinado semiplano, se ela (a reta) pertencer ao semiplano e sua origem for um ponto da reta que o determina, também este é o primeiro momento que Barbosa (2006) fala sobre o plano após defini-lo no início do Capítulo1. Pontuamos também que, enquanto Rezende & Queiroz (2000), entende tal afirmação como um postulado, Barbosa (2006), em seu jogo de linguagem traz tal afirmação como uma Definição.

Outra semelhança, é dada pelo Postulado 11 das autoras Rezende & Queiroz (2000), que aborda ângulos suplementares, já Barbosa (2006) o faz enquanto uma definição (3.4), com um texto muito próximo ao texto de Rezende & Queiroz (2000). Novamente uma mesma afirmação é tomada de formas diferentes, Barbosa (2006) entende como uma definição, enquanto as autoras Rezende & Queiroz (2000) trata como um postulado.

Outra relação de convergência entre os jogos de linguagem nos manuais que estudamos, está na apresentação do Postulado 12 das autoras Rezende & Queiroz (2000) e no

---

proposição é dada pela Definição 2.5, Rezende & Queiroz (2000), também seguem a mesma linha lógica de Barbosa (2006), e para elas a circunferência é compreendida pela Definição 1.27.

Axioma IV de Barbosa (2006). Ambos falam da semelhança entre triângulo pelo caso L.A.L (Lado, Ângulo, Lado), como o primeiro caso se congruência de triângulos, e a partir deste, os dois jogos apresentam os outros dois casos de congruência entre triângulos.

Como já havíamos mencionado neste texto, as autoras Rezende & Queiroz (2000), apresentam no Capítulo 4 de seu manual o Postulado 13, "O Postulado das Paralelas", mas elas não o trazem de início do capítulo. Primeiro elas fazem uma breve introdução citando de forma sucinta as Geometrias Não-Euclidianas, e partem para definições das condições de paralelismos com o Teorema 4.1. Barbosa (2006), garante a condição de paralelismo com o Corolário 5.5 no capítulo anterior, faz um pequeno preâmbulo no início do Capítulo 6, e nele o autor não cita a existência de outras geometrias com fazem Rezende & Queiroz (2000) e segue sequencialmente apresentando o Axioma V.

Notamos que Rezende & Queiroz (2000), primeiramente propõe condições que necessitem do Postulado 13, como a recíproca do Teorema 4.7. Barbosa (2006) inicia o Capítulo 6 de seu manual apresentando o Axioma V e a partir dele aplica seu uso na axiomática da Geometria Euclidiana Plana.

O Quadro 3 na página 69 nos mostra que apesar de estarmos olhando para dois manuais de Geometria Euclidiana Plana com metodologias axiomáticas de apresentação muito próximas, há inúmeras divergências e modos diferentes de abordagem de determinados conceitos/objetos. Os autores, de certo modo, caminham para uma mesma direção, mas por caminhos diferentes. Observamos que não existem uma equidade/equivalência nem no método axiomático, nem na linguagem.

Não ousamos dizer quais termos (de um ou de outro manual) é mais adequado, buscamos apenas descrever as semelhanças e dessemelhanças entre eles. Nossa "terapia bibliográfica" apenas olha para os manuais vislumbrando um aluno de graduação que precisasse estudar simultaneamente os dois livros, ou vivenciasse uma troca de livros durante o curso, ou ainda que, por algum motivo, tivesse que realizar as atividades de um livro tendo estudado as axiomáticas do outro manual. De fato, tal situação ocorreu quando a mudança de livros do curso de Matemática da EaD, alguns alunos que foram reprovados, quando da reoferta da disciplina, se depararam com um outro livro sendo adotado.

No Quadro 4 mostramos para o leitor algumas semelhanças entre os postulados, axiomas, teoremas e definições usados pelos autores em seus jogos de linguagem. Neste quadro o leitor poderá visualizar certas semelhanças entre os jogos bem como terminologias diferentes tendo o mesmo uso nos manuais usados em nossa terapia.

Por fim, para tratar das outras geometrias, vemos que os autores estabelecem regras bem diferentes, Barbosa (2006) deixa para falar das Geometrias Não-Euclidianas no final do Capítulo 6, no decorrer deste, o autor não faz menção alguma sobre a existência dessas geometrias nem sequer fala sobre o tópico quando apresenta o “Axioma das Paralelas”. De forma diferente, as autoras Rezende & Queiroz (2000), ao iniciar o Capítulo 4 de seu manual, fazem um preâmbulo falando da existência dessas “novas geometrias” desenvolvidas sem a hipótese euclidiana das paralelas.

Rezende & Queiroz (2000) também afirmam que, os resultados apresentados nos três primeiros capítulos de seu manual independem da Geometria Euclidiana, ou seja, são resultados válidos tanto para ela (Geometria Euclidiana), quanto para as Geometrias Não-Euclidianas. Assim, elas citam algumas Geometrias ditas Não-Euclidianas e a diferença que elas apresentam com relação a Geometria Euclidiana.

Em nossas descrições fizemos um ligeiro resumo das Geometrias Não-Euclidianas, apenas para que nosso leitor caso desconheça, possa inteirar-se sem precisar recorrer a outras fontes. Mas como nossa intenção é descrever os manuais didáticos proposto em nossa pesquisa, não nos é interessante abrir uma discussão sobre essas “novas geometrias”, apenas descrevemos o que os autores trazem sobre o assunto em seus manuais e como estabelecem os jogos de linguagem nessa abordagem.

Em nossa pesquisa, praticamos o que chamamos de uma terapia bibliográfica em uma perspectiva wittgensteiniana, em alusão ao termo “terapia filosófica” utilizado pelo autor. Buscamos, neste sentido, trazer a Geometria Euclidiana Plana destes dois manuais ao divã. Possibilitando, ou ‘caminhando no sentido de’, uma visão panorâmica sobre a mesma. Entendemos esta visão panorâmica como olhar para diversos usos de palavras e expressões (axiomas, teoremas, postulados, definições, etc.) em diversos jogos e com isso caminhar no sentido de descristalizar imagens fixas que possam nos aprisionar.

Correndo os olhos pelos sumários, já podemos perceber uma abordagem linguística ligeiramente dessemelhante, nos indicando uma tendência de crença diferente daquela que estabelecemos no senso comum por entender que se ambos tratam de Geometria Euclidiana Plana, tendem a ser o mesmo jogo de linguagem. Quando focamos em pontos específicos usando nosso referencial teórico que são os jogos de linguagem de Wittgenstein, percebemos que as dessemelhanças aumentam.

Diferenças mais fortes podem ser percebidas olhando, por exemplo, para o Quadro 02 e referenciamos as relações diretas entre cada elemento da coluna dos Postulados de Rezende & Queiroz (2000) e verificamos a mesma relação com a coluna dos Axiomas de Barbosa (2006), percebemos uma nítida mudança no encadeamento das proposições o que, justamente, define uma axiomática. Caminhamos aqui na direção de afirmar que, se por um lado temos uma Geometria Euclidiana Plana, segundo nosso olhar elas são múltiplas, não havendo uma definição (rígida) ou traço essencial que as uma.

Evidenciamos também que a linguagem usada por cada autor para a apresentação dos postulados se difere, o que aparentemente é normal, visto que são autores e épocas diferentes. À medida que tais dessemelhanças se ampliam, aquilo que vemos e chamamos de Geometria Euclidiana Plana, pode, então, sob uma perspectiva wittgensteiniana, ser tomada como "geometrias euclidianas distintas".

Quando iniciamos nossa pesquisa, fomos movidos pela busca de semelhanças e dessemelhança entre os manuais didáticos de Barbosa (2006) e Rezende & Queiroz (2000). Chegamos à conclusão que dentro de uma perspectiva wittgensteiniana, estamos diante de jogos de linguagem diferentes, portanto, de geometrias diferentes. Tivemos o interesse em tentar olhar pelo viés 'dos geômetras' e seus jogos de linguagem axiomáticos e traçar compreensões sobre como eles veriam tais distanciamentos entre os manuais, seriam para eles "mera questão de estilo", 'adaptações didáticas para o ensino', ou seriam também 'axiomáticas – portanto geometrias – diferentes'? Mesmo não tendo subsídios para discutir estas respostas com mais propriedade, destacamos que a quantidade de axiomas usados por Euclides, Hilbert e nossos autores são diferentes, o que já nos dá algum indício para pensarmos nesta direção.

Ao final da pesquisa traçamos esforços em responder tal questão, mas tivemos que no contentar em abri-la para a comunidade, já tendo, por certo, respondido tantas outras. Já era tarde e o mestrado se findava.

Saímos dessa pesquisa satisfeitos e sedentos. Por um lado, pudemos olhar para uma nova forma de *geometrar* que dantes nem fazíamos ideia da possibilidade e tão pouco ousaríamos tentar, por outro, ficamos ainda mais incomodados com os resultados obtidos, pois a partir destes, cremos na possibilidade de outras pesquisas, de outras investidas: de outras geometrias e de outras matemáticas, tantas quantas forem as formas de vida.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, Márcia S. M. **A articulação entre o ensino de polígonos e de poliedros em uma coleção de livros didáticos dos anos iniciais do ensino fundamental.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2015.

ALMEIDA, Vera F. C. **Análise das práticas docentes de professores dos cursos de licenciatura em matemática referente ao estudo de retas paralelas e de ângulos**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2009.

BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. Rio de Janeiro, RJ: SBM, 2006. 221p.

BICUDO, Irineu **Os Elementos/Euclides;** tradução e introdução de Irineu Bicudo – São Paulo: 2009 – Editora UNESP, 600p.

CAMPOS, Gean P. S. **A Teoria dos Conjuntos e a Música de Villa Lobos: uma abordagem didática**. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

CORRÊA, Júlio, F. **"He War"**. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 2015.

DE PAULA, Adnilson F. **Mobilização e articulação de conceitos de geometria plana e de álgebra em estudos da geometria analítica**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2011.

FREITAS, Maxlei V. C. **Um estudo sobre volume de sólidos geométricos em quatro coleções de livros didáticos do ensino médio.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2014.

LEITE, Claudécio G. **A construção histórica dos sistemas de numeração como recurso didático para o ensino fundamental I** Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Federal do Ceará, Juazeiro do Norte, 2014.

LIMA, Anete V.M.C Um **estudo sobre validações algébricas por alunos da 3ª série do ensino médio no conjunto dos números inteiros**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2009.

LOIOLA**,** Carlos A. G **Um Taxi para Euclides: Uma Geometria Não Euclidiana na Educação Básica**. Dissertação (Pós-Graduação em Matemática) – Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014.

MAGALHÃES, Jane. C. **O gráfico da forma e a formação do conceito: um estudo de caso sobre os sólidos geométricos no ensino fundamental**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2011.

MIGUEL, Antônio ***Historiografia e Terapia na Cidade de Wittgenstein***. BOLEMA, 2015.

MOREIRA, Ana Cláudia S. **Geometrias sob a Axiomática de Hilbert.** Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2006.

MOURA, Edilson **O conceito fractal e sua presença pedagógica na educação básica**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2011.

OLIVEIRA, Ádamo D. **Reconstruindo o conceito de paralelogramo com o software klogo: uma experiência com professores de matemática**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2012.

OLIVEIRA, Susilene G. S. **Um estudo de argumentações produzidas por alunos do 8º ano em atividades de construções geométricas envolvendo pontos notáveis de triângulo**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2009.

PENHA, João da **Como ler Wittgenstein**/ João da Penha. – São Paulo: 2013. – Coleção Como ler filosofia. 113p.

PEREZ, Carlos M. **Fundamentos de Geometria Hiperbólica**. – Dissertação (estrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro – Sp, 2015.

PICCELLI, Paulo H. **Processos de validação de conjecturas em geometria plana**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2010.

PINTO, Thiago P. **Linguagem e Educação Matemática: Um mapeamento de uso na sala de aula**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista Instituto de Geociências e Ciências Exatas *Campus* de Rio Claro, Rio Claro, 2009.

QUEIROZ, Pablo C. **Uma proposta para o ensino de função articulando as linguagens algébrica e geométrica.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2014.

REZENDE, E. Q. F.; QUEIROZ, M. L. B. **Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas**. Campinas, SP: Editora UNICAMP, 2000. 260p.

RIBEIRO, Renato D. G. L. **O Ensino das Geometrias Não Euclidianas: Um olhar sob a perspectiva da divulgação científica**. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.

SANTOS, Cíntia M. **Análise da prática pedagógica de uma professora indígena voltada para a geometria no ensino médio.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2013.

SILVA, Luana Q. **Formação de professores dos anos iniciais para o ensino de geometria plana: uma experiência com o uso do software klogo.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2014.

SILVA, Mirian J. **O uso da lousa digital e um estudo sobre circunferência com alunos do 3º ano do ensino médio** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2015.

SIQUEIRA, Thiago C. B. **Trigonometria no triângulo retângulo: conhecimentos para seu ensino na formação de professores.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2013.

SITE: SHOPFACIL.COM.BR. **Geometria Euclidiana Plana e construções geométricas**. 2016. Disponível em: < https://www.shopfacil.com.br/livro---geometria-euclidiana-plana-e-construcoes-geometricas-2264782/p> Acesso em: 04/05/2018.

SITE: ESTANTEVIRTUAL.COM.BR. **Geometria Euclidiana Plana** 2015. Disponível em: < https://www.estantevirtual.com.br/livros/joao-lucas-marques-barbosa/geometria-euclidiana-plana/3086426987> Acesso em: 04/05/2018.

VILELA, Denise. S Matemáticas nos usos e jogos de linguagem: Ampliando concepções na Educação Matemática Tese (Doutorado em Ensino de Matemática) - Universidade Estadual De Campinas, Campinas - SP, 2007.

WITTGENSTEIN, L. **Investigações Filosóficas**. 3.ed. São Paulo: Abril Cultural, 2009.