

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

JÉSSICA SERRA CORRÊA DA COSTA

O CÁLCULO MENTAL EM UMA COLEÇÃO DE LIVROS DIDÁTICOS
DOS ANOS INICIAIS

CAMPO GRANDE – MS

2018

JÉSSICA SERRA CORRÊA DA COSTA

**O CÁLCULO MENTAL EM UMA COLEÇÃO DE LIVROS DIDÁTICOS
DOS ANOS INICIAIS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática, sob orientação da Prof.^a Dr.^a Marilena Bittar.

CAMPO GRANDE – MS

2018

JÉSSICA SERRA CORRÊA DA COSTA

**O CÁLCULO MENTAL EM UMA COLEÇÃO DE LIVROS DIDÁTICOS
DOS ANOS INICIAIS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Prof^a Dr^a Marilena Bittar (Orientadora)
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS

Prof. Dr. Marcus Bessa de Menezes
Universidade Federal de Campina Grande - UFCG

Prof. Dr. José Luiz Magalhães de Freitas
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS

Prof. Dr. Marcio Antonio da Silva Universidade
Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS

Campo Grande, _____de Fevereiro de 2018.

Ao meu pai, que me apoiou durante todos os segundos, sendo fundamental para que este sonho se concretizasse.

AGRADECIMENTOS

À Deus, por ter me dado forças para que eu persistisse com fé e paciência para que este trabalho fosse realizado.

Ao meu pai, Mario Quintana Corrêa da Costa, pelo seu amor infindável que me aconchegou em todos os momentos, meu eterno herói.

À minha mãe, Eucy Moreira Serra, minha avó, Julia Marilete e meu tio Luciano pela compreensão e apoio nos últimos 24 meses.

À minha prima Leonora, que com paciência me fez companhia durante a escrita deste trabalho deixando os intervalos para descanso alegres e divertidos.

À minha orientadora, professora Marilena Bittar, que me acolheu de braços abertos com muita paciência (muita mesmo!), e dentre seus ensinamentos, não só acadêmicos, me ensinou (e insistiu) a manter a calma. Obrigada por me ensinar a sorrir mais para as *pequenas* coisas da vida e por todo cuidado que tem comigo!

Aos meus amigos, Magda, Sonia, Cássia, Thaiany, Vinícius Riter, Janielly, Neandra, Gabriel, Fernando, Estevão, Rafael, Larissa e Isaac, por se fazerem presentes na minha vida mesmo eu estando ausente.

Aos amigos que o PPGEduMat e o DDMat me trouxeram: Luana, Val (Florisval), Rosani, Cleide, Regina, Júlio Paro, Kleber e Dani. Obrigada a todos por ouvirem inúmeras vezes sobre minha pesquisa e se mostrarem sempre dispostos para além dela. Em especial, a Tatiani, Susilene e Cíntia, pelas incansáveis leituras e discussões sobre meu trabalho e pelo carinho que tiveram comigo desde que nos conhecemos.

Aos colegas na minha turma, ingressantes em 2016, pela paciência comigo e as risadas que deixavam as aulas mais leves. Em especial ao Magno, Nelson e Person, meus irmãos de coração: obrigada pelas risadas e o ombro amigo para meus chororôs (risos)!

Aos professores do PPGEduMat, pelas lições acadêmicas e não-acadêmicas.

Aos professores José Luiz Magalhães de Freitas, Marcus Bessa e Marcio Antonio, pelo cuidado e atenção despendidos na leitura e, as contribuições dadas a este trabalho.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

RESUMO

O cálculo mental é realizado pelo sujeito de forma natural ao se deparar com situações que exigem algum cálculo. Por se tratar de uma habilidade é difícil falar sobre o ensino da mesma, uma vez que está pautada no desenvolvimento de estratégias pelo sujeito. Assim em nosso trabalho buscamos olhar para as atividades que preparam o aluno para realizar o cálculo mental em uma coleção de livros didáticos dos anos iniciais do ensino fundamental. Para tanto utilizamos como aporte teórico e metodológico a Teoria Antropológica do Didático (TAD), desenvolvida por Yves Chevallard. Para compreender as escolhas didáticas feitas pelas autoras com relação à forma com que são propostas as atividades que contribuem para o desenvolvimento do cálculo mental, contamos com a análise da Organização Didática. Em particular destacamos que o bloco prático-técnico foi evidenciado ao longo da Organização Matemática dos livros. Nossas análises nos permitem inferir que calcular mentalmente demanda em grande parte compreensão do sistema de numeração decimal e suas regularidades, bem como das operações aritméticas. De forma geral, as atividades que contribuem para o desenvolvimento da habilidade oportunizam a exploração de técnicas, de forma que as mais empregadas focam na decomposição e composição de números; mesmo que os volumes 4 e 5 evidenciem a habilidade do cálculo mental em noções como frações e correspondência entre unidades de medidas.

Palavras-chave: Cálculo mental; Livro didático; Teoria Antropológica do Didático;

ABSTRACT

The mental calculation is performed by the subject in a natural way when encountering situations that require some calculation. As long as it is a skill, it is difficult to talk about teaching it, since it is based on the development of strategies by the subject. Thus in our work we search to look for the activities that prepare the student to perform the mental calculation in a collection of didactic books from the early years of elementary school. For this we use as theoretical and methodological input the Anthropological Theory of the Didactic (ATD), developed by Yves Chevallard. In order to understand the didactic choices made by the authors in relation to the way in which the activities that contribute to the development of the mental calculation are proposed, we take into account the analysis of the Didactic Organization. In particular we emphasize that the practical-technical block was evidenced throughout the Mathematical Organization of books. Our analyzes allow us to infer that calculating mentally demands in large part the understanding of decimal numbering system and its regularities, as well as of arithmetic operations. In general, the activities that contribute to the development of the skill grant the exploration of techniques, so that the most employed focus on the decomposition and composition of numbers; even though volumes 4 and 5 evidence the ability of mental calculation in notions such as fractions and correspondence between units of measure.

Keywords: Mental calculation; Didactic Book; Anthropological Theory of the Didactic;

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1: Completar a sequência de forma progressiva e regressiva	49
Figura 2: Ideia de composição	50
Figura 3: Composição e a comutatividade da adição	51
Figura 4: Técnica para tarefas do tipo $T_{9,1}$	52
Figura 5: Jogo de tabuleiro	53
Figura 6: Contagem com agrupamentos de 10	54
Figura 7: Completar uma sequência de 5 em 5	55
Figura 8: Formalização da técnica de tarefas do tipo T_1	55
Figura 9: Uma tarefa do tipo T_1	56
Figura 10: Relação de tipos de tarefas e técnicas do Livro 1	57
Figura 11: Composição do 10 usando o dinheiro	60
Figura 12: Indícios da propriedade comutativa	61
Figura 13: Primeira seção de Cálculo Mental – Atividade 1	62
Figura 14: Técnica para resolver tarefas do tipo $T_{9,1}$	63
Figura 15: Adição e subtração como operações inversas	64
Figura 16: Ideia de completar	65
Figura 17: Compondo e Decompondo com dezenas exatas	66
Figura 18: Associação entre o agrupamento de 10 em 10 com as ordens da dezenas e unidades	67
Figura 19: Uma tarefa do tipo T_5	68
Figura 20: Uma tarefa do tipo T_4	68
Figura 21: Uma tarefa do tipo T_{17}	68
Figura 22: Apresentação da técnica para tarefas do tipo T_{19}	69
Figura 23: Uma tarefa do tipo $T_{9,6}$	70
Figura 24: Uma tarefa do tipo T_7	71

Figura 25: Uma tarefa do tipo T_{17}	72
Figura 26: Estratégias apresentadas para o professor.....	72
Figura 27: Uma tarefa do tipo $T_{9,7}$ resolvida com a técnica τ_{10}	73
Figura 28: Uma tarefa do tipo $T_{9,2}$ resolvida com a técnica τ_{11}	73
Figura 29: Uma tarefa do tipo $T_{10,4}$ resolvida com a técnica τ_{10}	74
Figura 30: Uma tarefa que explora a propriedade comutativa da multiplicação	78
Figura 31: Um tarefa do tipo $T_{12,5}$	78
Figura 32: Relacionando tarefas do tipo $T_{11,1}$ e $T_{12,5}$	79
Figura 33: Tarefas do tipo X com o uso do dinheiro	85
Figura 34: Tarefas do tipo X com moedas.....	86
Figura 35: Formando grupos de 10	86
Figura 36: Representando dezenas e unidades com auxílio do dinheiro	87
Figura 37: Somar uma centena exata	87
Figura 38: Quadro de ordens	88
Figura 39: Compondo com o dinheiro e quadro de ordens	88
Figura 40: Empregando as técnicas τ_8 e τ_{10} para a aproximação	90
Figura 41: Apresentação da técnica τ_{14}	90
Figura 42: Técnica para tarefas do tipo $T_{9,7}$	90
Figura 43: Apresentação de duas técnicas para tarefas do tipo $T_{10,6}$	91
Figura 44: Ampliação da técnica τ_{10}	92
Figura 45: Sistematizando as trocas no quadro de ordens.....	93
Figura 46: Apresentação da técnica τ_{19}	93
Figura 47: Adição e subtração como operações inversas	94
Figura 48: Tabua de multiplicação do 2 e 4	95
Figura 49: Tarefas do tipo T_{22}	96
Figura 50: Apresentação da técnica que resolve a tabuada do 9.....	96

Figura 51: Emprego da técnica τ_{21} em uma tarefa do tipo $T_{11.4}$	97
Figura 52: A divisão como técnica para tarefas do tipo T_{22}	98
Figura 53: Relação entre metade e dobro	99
Figura 54: Justificativa da validade da técnica	99
Figura 55: Apresentando uma técnica para tarefas do tipo $T_{12.3}$	100
Figura 56: Correspondência entre as unidades de medida de comprimento	101
Figura 57: T_{17} como técnica de T_2	113
Figura 58: Apresentação da técnica para tarefas do tipo T_7	114
Figura 59: Apresentação da técnica τ_{10} para tarefas dos tipos $T_{9.8}$ e $T_{10.3}$	116
Figura 60: Aproximação e estimativa	117
Figura 61: Usando a compensação como técnica	118
Figura 62: Tabuada do 7 a partir das tabuadas do 2 e do 5.	120
Figura 63: Uma outra técnica para a tabuada do 9.....	121
Figura 64: Apresentação da técnica τ	122
Figura 65: Apresentação da propriedade distributiva da multiplicação	123
Figura 66: Frações e o uso de ostensivo	125
Figura 67: Números decimais - fração, decimal e leitura.....	127
Figura 68: Representando números decimais no quadro de ordens	127
Figura 69: A classe dos milhões	132
Figura 70: Compensação e aproximação	133
Figura 71: Multiplicação por múltiplos de potências de 10	134
Figura 72: Divisão por múltiplos de potências de 10.....	134
Figura 73:Institucionalização da técnica para tarefas do tipo T_{30}	136
Figura 74: Da fração à porcentagem	137
Figura 75: Quadro de ordens como técnica para tarefas do tipo T_2	138
Figura 76: Apresentação de uma técnica para as tarefas do tipo $T_{11.2}$	138

Figura 77: Frações e nos números decimais	139
---	-----

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Descrição dos tipos e subtipos de tarefas a priori.....	45
Quadro 2: Quantidade de tarefas em função dos tipos.....	57
Quadro 3: Quantidade de tarefas dos tipos elencados <i>a priori</i>	80
Quadro 4: Quantidade de tarefas de tipos modelados durante a análise	81
Quadro 5: Quantitativo dos tipos de tarefas elencados a priori e a partir da análise dos volumes 1 e 2.....	102
Quadro 6: Quantitativo dos tipos de tarefas surgidos no volume 3	102
Quadro 7: Quantitativo dos tipos de tarefas elencados a priori e a partir da análise dos volumes 1, 2 e 3.....	129
Quadro 8: Quantitativo dos tipos e subtipos de tarefas modelados no volume 4	129
Quadro 9: Quantitativo dos tipos de tarefas elencados a priori e a partir da análise dos volumes 1, 2, 3 e 4	141
Quadro 10: Quantitativo dos tipos e subtipos de tarefas modelados no volume 5	142

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Relação entre tipos de tarefas e técnicas do Volume 1	104
Tabela 2: Relação entre tipos de tarefas e técnicas do Volume 2	106
Tabela 3: Relação entre novos tipos de tarefas e técnicas do Volume 2	107
Tabela 4: Relação entre tipos de tarefas e técnicas do Volume 3	108
Tabela 5: Relação entre novos tipos de tarefas e técnicas do Volume 3	109
Tabela 6: Relação entre tipos de tarefas e técnicas do Volume 4	143
Tabela 7: Relação entre novos tipos de tarefas e técnicas do Volume 4	144
Tabela 8: Relação entre tipos de tarefas e técnicas do Volume 5	145
Tabela 9: Relação entre novos tipos de tarefas e técnicas do Volume 5	146

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1: Frequência de tarefas em comum dos Volumes 1 e 2	105
Gráfico 2: Frequência dos tipos T_1 e T_6 nos 5 volumes	149
Gráfico 3: Quantidade de tipos de tarefas e técnicas em cada volume	150

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	5
1. O CONTEXTO DA PESQUISA.....	9
1.1 O CÁLCULO MENTAL NO ENSINO FUNDAMENTAL	9
1.2 O LIVRO DIDÁTICO	14
1.3 PERSPECTIVAS DO CÁLCULO MENTAL	18
1.4 OBJETIVOS.....	26
2. APORTE TEÓRICO E METODOLÓGICO	28
2.1 TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO	28
2.2 TIPOS DE TAREFAS <i>A PRIORI</i>	31
2.3 COLEÇÃO: DA ESCOLHA À SUA ESTRUTURA.....	45
3. PRODUÇÃO E ANÁLISE DE DADOS	47
3.1 VOLUME 1.....	47
3.1.1A ORGANIZAÇÃO PRAXEOLÓGICA DO LIVRO DO 1º ANO 48	
3.1.2O CÁLCULO MENTAL NO LIVRO DO 1º ANO 56	
3.2 VOLUME 2.....	59
3.2.1A ORGANIZAÇÃO PRAXEOLÓGICA DO LIVRO 2º ANO 60	
3.2.2O CÁLCULO MENTAL NO LIVRO DO 2º ANO 80	
3.3 VOLUME 3.....	84
3.3.1A ORGANIZAÇÃO PRAXEOLÓGICA DO LIVRO DO 3º ANO 85	

3.3.2O CÁLCULO MENTAL NO LIVRO DO 3º ANO	101
--	-----

3.4 O CÁLCULO MENTAL NOS VOLUMES 1, 2 E 3: EVOLUÇÃO PRAXEOLÓGICA	104
4. MATEMÁTICA – VOLUMES 4 E 5.....	111
4.1 VOLUME 4.....	111
4.1.1 A ORGANIZAÇÃO PRAXEOLÓGICA DO LIVRO DO 4º ANO	112
4.1.2 O CÁLCULO MENTAL NO LIVRO DO 4º ANO	128
4.2 VOLUME 5.....	130
4.2.1 A ORGANIZAÇÃO PRAXEOLÓGICA DO LIVRO DO 5º ANO	131
4.2.2 O CÁLCULO MENTAL NO LIVRO DO 5º ANO	140
4.3 O CÁLCULO MENTAL NOS VOLUMES 4 E 5.....	143
5. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	146
REFERÊNCIAS	152
ANEXO 1: Descrição dos tipos de tarefas	156
ANEXO 2: Descrição das técnicas	158

INTRODUÇÃO

Esta pesquisa tem origem em minhas experiências, vividas ainda durante a graduação em Licenciatura em Matemática, em particular, com relação a uma oficina sobre cálculo mental, elaborada no Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID), da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS). No PIBID, desenvolvíamos¹ oficinas, em escolas públicas, com alunos do ensino médio. No início, tínhamos duas oficinas: *Mat às Dúvidas*, que funcionava como um tira dúvidas sobre conteúdos estudados em sala de aula e também como uma oportunidade que tínhamos para dar auxílio aos alunos para realizarem as lições para casa, e o PEPIS (Programa de Estudos Para Interessados em Matemática) onde desenvolvíamos problemas e desafios matemáticos dos quatro eixos da matemática. Durante essas oficinas, percebemos que os alunos tinham dificuldades de realizar cálculos mentalmente para resolver algum problema e, em vista disso, elaboramos uma oficina de cálculo mental, que foi desenvolvida com os alunos do ensino médio, com a apresentação de diferentes estratégias para resolver contas referentes às quatro operações fundamentais (adição, subtração, multiplicação e divisão). Talvez, a dificuldade dos alunos em realizar o cálculo mental seja decorrente da valorização demasiada dos algoritmos e cálculos escritos em detrimento do pensamento e da oralidade (GUIMARÃES, 2009).

Reflexões acerca do cálculo mental foram ainda fomentadas quando passei a atuar como professora de matemática dos anos finais do ensino fundamental e do ensino médio, pois durante o período que lecionei percebi que os alunos tinham dificuldade de realizar cálculo mental, que era exigido em algumas atividades. Em vista disso, busquei orientações nos livros didáticos adotados pela escola, a respeito de estratégias para que os alunos efetuassem o cálculo mentalmente, já que muitas vezes o mesmo propunha atividades que tinham como foco “calcular mentalmente”.

Simultaneamente, comecei a participar, na UFMS, do Grupo de Estudos em Didática da Matemática (DDMat), liderado pela professora Marilena Bittar. Nessa época parte do grupo realizava estudos direcionados à análise de livros didáticos aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático² (PNLD). O livro didático é um dos recursos didáticos mais presentes na sala de aula brasileira, uma vez que ele é disponibilizado ao professor e ao aluno da rede pública de ensino, de forma gratuita. Além disso, muitas vezes, este é o único material que o professor tem acesso em suas aulas e no planejamento delas (FRISON et al, 2009). Estes fatos tornam o livro

¹ A primeira pessoa do plural, neste parágrafo, é empregada para se referir aos participantes do PIBID.

² Programa do Ministério da Educação que analisa e distribui livros didáticos para as escolas públicas.

didático um material importante no contexto escolar. Por este motivo, algumas pesquisas que têm como foco a análise de livros didáticos buscam olhar como o autor do livro entende as orientações que são dadas sobre um determinado conteúdo e como ele, de fato, sistematiza atividades para que este conteúdo seja desenvolvido. Tais pesquisas têm ocupado um importante espaço na área da educação e, em particular, no campo da Educação Matemática.

O interesse em investigar o cálculo mental em livros didáticos dos anos finais do ensino fundamental surge de reflexões fomentadas durante a participação no DDMat e de situações vivenciadas em sala de aula como professora de matemática da Educação Básica como, por exemplo, deparar com questões que solicitavam que se realizasse o cálculo mental de porcentagens, sem sequer dar alguma orientação ao professor. Essas questões estavam presentes no livro didático adotado pela escola, que naquele ano era o mais adotado em todo Brasil. Outras questões como, "o que podemos considerar como cálculo mental?", "como o cálculo mental pode ser trabalhado no livro didático e, quais atividades têm relação com este tipo de cálculo?" surgiram e, também incentivaram meu desejo de estudar sobre o cálculo mental no livro didático.

Após a entrada no curso de mestrado, as primeiras leituras acerca da etapa de ensino do cálculo mental foram de documentos como os Parâmetros Curriculares Nacionais, Guia do Programa Nacional do Livro Didático e artigos sobre o cálculo mental. Os mesmos indicavam que a fase em que ele era, ou deveria ser, incentivado e trabalhado era nos anos iniciais do ensino fundamental – talvez por isso não haviam orientações nos anos finais do ensino fundamental, cabendo ao professor ir além do que dizia o livro. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) a partir do ciclo de alfabetização deve ser trabalhado o significado das operações, dessa forma “os alunos constroem os fatos básicos das operações (cálculos com dois termos, ambos menores do que dez), constituindo um repertório que dá suporte ao cálculo mental e escrito” (BRASIL, 1997, p. 49).

Alguns pesquisadores (GUIMARÃES, 2009; GONÇALVES, 2008;) tiveram como foco de análise a aprendizagem do cálculo mental, trabalhando com alunos em busca de identificar contribuições acerca desta modalidade de cálculo. Por outro lado, temos uma quantidade crescente de pesquisas no Brasil (KASPARY, 2014; SOUZA, 2014; RAMALHO, 2016) que têm analisado livros didáticos, diante da sua relevância no que diz respeito ao espaço ocupado por ele no trabalho do professor e, no processo de construção de conhecimento do aluno. E em vista das contribuições do cálculo mental e da dificuldade de implementação do

desenvolvimento deste na sala de aula, o Guia³ do PNLD de 2016 (BRASIL, 2015) afirma que esta habilidade tem recebido atenção de vários autores de livros didáticos, que buscam explorar procedimentos que o estimulem.

De acordo com os documentos oficiais “o trabalho com o cálculo mental tem procurado desenvolver, nos alunos, a capacidade para efetuar operações de modo mais rápido e independentemente do emprego dos algoritmos convencionais ou do uso da calculadora” (BRASIL, 2015). Assim, em vista da importância do livro didático e das contribuições do cálculo mental, definimos nossa questão de pesquisa como segue: como é proposto o ensino do cálculo mental em livros didáticos dos anos iniciais?

Dessa forma nosso trabalho tem como objetivo analisar a proposta de ensino de cálculo mental em uma coleção de livros didáticos dos anos iniciais do ensino fundamental aprovada pelo PNLD/2015.

Nosso trabalho está dividido em 4 capítulos. No primeiro capítulo nos dedicamos a trazer o contexto da nossa pesquisa, para isso o subdividimos em 4 seções: a primeira trata das orientações em documentos oficiais a respeito do cálculo mental no ensino; na segunda, a relevância e o papel do livro didático no cenário das escolas públicas brasileiras, bem como na formação de professores e alunos é o foco central de discussão; na terceira seção, buscamos responder a pergunta “O que é cálculo mental?” trazendo as diferentes perspectivas acerca do assunto e diferenciando os demais tipos de cálculos, como o escrito e aproximado, e nossa questão de pesquisa; na última seção, finalizamos o capítulo apresentando os objetivos, geral e específicos deste trabalho.

No segundo capítulo apresentamos o referencial teórico e metodológico em que nossa pesquisa se apoia, a Teoria Antropológica do Didático. Em vista da necessidade de um estudo acerca de atividades que se relacionam com o cálculo mental, elaboramos uma lista de tipos de tarefas modelados *a priori* com base na tese de doutorado de Guimarães (2009) e a apresentamos neste capítulo, justificando a relevância de cada tipo de tarefa. Essa modelagem servirá de apoio para a análise do livro, não impedindo que novos tipos sejam modelados.

No terceiro capítulo trazemos a análise de 3 livros didáticos que compõem uma coleção dos anos iniciais do ensino fundamental. Primeiramente trazemos a análise do volume 1, identificando os elementos do modelo praxeológico. Neste volume os elementos do bloco

³ O guia, disponível online, contém resenhas e informações de cada uma das obras aprovadas pelo PNLD. Disponível em <http://www.fn.de.gov.br/programas/livro-didatico/guias-do-pnld/guia-pnld-2016>.

prático-técnico são mais evidenciados, não temos diretamente tarefas e técnicas que exploram o cálculo mental, em vista disso trazemos os tipos de tarefas e técnicas que preparam para tal. Posteriormente trazemos a análise dos volumes 2 e 3, buscando ressaltar os mesmos elementos. Também buscamos apresentar como o cálculo mental está de fato presente em cada um dos livros de acordo com o que foi observado na análise, bem como apresentamos quadros com o quantitativo de tarefas de acordo com cada tipo. Ao final do capítulo 3, trazemos a sistematização dos tipos de tarefas e técnicas encontrados nos volumes, mostrando assim uma evolução das praxeologias, que neste momento passam da compreensão do sistema de numeração decimal às 4 operações.

No capítulo 4, trazemos a análise dos volumes 4 e 5, pois estes não são mais parte da coleção de alfabetização, destacando os mesmos elementos dos volumes anteriores; da mesma forma, ao final deste capítulo sistematizamos os tipos de tarefas encontrados com as técnicas modeladas, que neste momento se voltam para os números racionais.

Por fim, nas considerações finais, retomamos os nossos objetivos e articulamos com o que foi possível notar nas análises.

1. O CONTEXTO DA PESQUISA

Neste capítulo apresentamos, inicialmente, algumas orientações a respeito do cálculo mental no ensino fundamental, encontradas em documentos oficiais brasileiros e de outros países como a Argentina e a França (GUIMARÃES, 2009). Nosso interesse pelas produções de outros países se deu pelo fato de que no Brasil, poucas são as orientações em documentos e estudos sobre o ensino do cálculo mental, enquanto que nos países citados são produzidas orientações sobre o estudo do cálculo mental no ensino de matemática. Dessa forma, situamos o leitor a respeito de quais são as prescrições acerca do ensino do cálculo mental, e como essas influenciam a produção dos materiais de ensino, no caso o livro didático.

Posteriormente, nos propomos discutir a importância do livro didático no contexto das escolas públicas brasileiras. Em seguida apresentamos diferentes olhares em torno desta habilidade, uma vez que ele não possui uma definição universal. Também apresentamos algumas contribuições do cálculo mental, no que diz respeito ao desenvolvimento da habilidade, de acordo com a perspectiva de pesquisas relacionadas a esse tema.

Ao longo da análise trazemos mais contribuições de algumas pesquisas realizadas tendo como foco o cálculo mental. Notamos que essas pesquisas, em sua maioria, exploraram questões relativas à aprendizagem e à exploração de estratégias que podem ser desenvolvidas, visando o cálculo mental. Ao final deste capítulo apresentamos a questão que norteia esta pesquisa e delineamos nossos objetivos, geral e específicos, com a finalidade de explicitar a que esta se propõe.

1.1 O CÁLCULO MENTAL NO ENSINO FUNDAMENTAL

Em diversas ocasiões do nosso cotidiano nos deparamos com situações em que necessitamos realizar cálculos, seja escrito ou mental. Realizar cálculos faz parte da formação intelectual do sujeito, pois desde cedo ele está diante de situações em que é preciso realizar contas como, por exemplo, repartir, retirar e acrescentar. Essas experiências, vividas antes e durante sua trajetória escolar, compõem os conhecimentos dos alunos e podem funcionar como ponto de partida para trabalhar as atividades matemáticas acerca das operações elementares da matemática. Neste sentido, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) afirmam que

[...] as necessidades cotidianas fazem com que os alunos desenvolvam uma inteligência essencialmente prática, que permite reconhecer problemas, buscar e selecionar informações, tomar decisões e, portanto, desenvolver uma ampla capacidade para lidar com a atividade matemática. (BRASIL, 1997, p.29)

O estudo do cálculo permeia todo o ensino fundamental mas, em particular, os anos iniciais correspondem à etapa em que os procedimentos de cálculo são construídos, ampliados e tendem a adquirir um significado. Quando utilizamos o termo cálculo, pensamos nele como estudo das operações matemáticas e desenvolvimento de procedimentos que são trabalhados ao longo dos anos escolares. No Brasil, o cálculo das operações deve ser trabalhado desde os anos iniciais, e as orientações para trabalhar atividades que têm como foco operações matemáticas estão indicadas em documentos oficiais no eixo de números e operações como é o caso da adição e subtração. Ressaltamos que o desenvolvimento do cálculo não se refere apenas ao cálculo escrito e algorítmico, pois há outros tipos de cálculo, como o mental, que possibilitam o trabalho com resultados exatos ou não. De acordo com o documento *Matemática: Cálculo mental con números naturales: apuntes para la enseñanza*, publicado pela Secretaria de Educação da cidade de Buenos Aires, o cálculo escrito refere-se ao cálculo realizado com apoio de registro numérico; já o algorítmico, como o próprio nome diz, faz uso do algoritmo tradicional das operações, ou seja, consiste em uma série de regras que devem ser aplicadas em uma determinada ordem independente dos dados (BUENOS AIRES, 2006), podendo ser executado mentalmente ou de forma escrita.

Segundo os PCN nos primeiros anos do ensino fundamental o aluno deve ser capaz de “desenvolver procedimentos de cálculo — mental, escrito, exato, aproximado — pela observação de regularidades e de propriedades das operações e pela antecipação e verificação de resultados” (BRASIL, 1997, p. 47). Nesta etapa, o cálculo é desenvolvido com base nas regularidades e propriedades do sistema de numeração decimal, e com o passar dos anos, a ampliação deste repertório reflete na compreensão das operações matemáticas. Se o indivíduo não compreende regularidades do sistema de numeração decimal, ele terá dificuldades em realizar as operações elementares. Por exemplo, ao enunciar uma sequência numérica progressiva de 1 em 1 ele está, de forma consciente ou não, somando 1 ao número anterior para descobrir o próximo, e a cada 10 unidades mudando a ordem.

Ainda de acordo com os PCN, além de saber efetuar os cálculos, o aluno deve saber qual a estratégia mais adequada (para ele) diante de cada situação. Por exemplo, para saber o valor do troco ao pagar uma conta, recorreremos a procedimentos de cálculo que dão resultados com precisão, como o auxílio de uma calculadora ou até mesmo do cálculo mental. Dessa forma, entre outros procedimentos, nos anos iniciais do ensino fundamental devem ser trabalhados:

- Ampliação do repertório básico das operações com números naturais para o desenvolvimento do cálculo mental e escrito.
- Cálculo de adição e subtração de números racionais na forma decimal, por meio de estratégias pessoais e pelo uso de técnicas operatórias convencionais.
- Desenvolvimento de estratégias de verificação e controle de resultados pelo uso do cálculo mental e da calculadora.
- Decisão sobre a adequação do uso do cálculo mental — exato ou aproximado — ou da técnica operatória, em função do problema, dos números e das operações envolvidas (BRASIL, 1997, p. 59).

Vemos assim que diferentes tipos de cálculo devem ser desenvolvidos ao longo do ensino fundamental. Além dos tipos de cálculos anteriormente citados, temos ainda o cálculo exato, aproximado e o mental que é nosso objeto de estudo. Veremos, mais adiante, que estes cálculos podem, ou não, se relacionar.

O cálculo exato está relacionado com respostas exatas, então os procedimentos para realizar tal cálculo visam precisão. Para tanto, o uso da calculadora ou do algoritmo com a finalidade de obter resultados exatos podem ser necessários. No entanto, cabe ressaltar que o cálculo exato também pode ser realizado mentalmente ou por escrito.

O cálculo aproximado ou por estimativa está relacionado com o cálculo mental, uma vez que se trata de efetuar um cálculo com base em arredondamentos e aproximações, que são procedimentos diretamente relacionados com o mental, pois:

O cálculo por estimativas apoia-se em aspectos conceituais referentes aos números e às operações (ordem de grandeza, valor posicional, proporcionalidade e equivalência), em procedimentos (como decompor, substituir, arredondar, compensar), na aplicação de estratégias de cálculo mental. (BRASIL, 1997, p.77)

Diante das diferentes modalidades de cálculo que devem ser desenvolvidas nos primeiros anos, voltaremos nossa atenção para o desenvolvimento do cálculo mental, que também é uma das recomendadas. Este tipo de cálculo deve ser trabalhado em consonância com os outros, conforme afirmam os PCN:

É recomendável que a organização do estudo do cálculo privilegie um trabalho que explore concomitantemente procedimentos de cálculo mental e cálculo escrito, exato e aproximado, de tal forma que o aluno possa perceber gradativamente as relações existentes entre eles e com isso aperfeiçoar seus procedimentos pessoais, para torná-los cada vez mais práticos, aproximando-os aos das técnicas usuais. (Ibid., p.76).

De acordo com os PCN o cálculo mental é uma habilidade que explora diferentes estratégias ao efetuar uma conta, além disso, o documento destaca a relevância de articular as diferentes modalidades de cálculo já que, por exemplo, “o cálculo escrito, para ser compreendido, apoia-se no cálculo mental e nas estimativas e aproximações” (Ibid., p.75).

No Guia do Programa Nacional do Livro Didático (2015, p.15) é destacado o potencial do cálculo mental no que se refere ao raciocínio e compreensão do aluno: “saber utilizar o cálculo mental, fazer estimativas, tanto em contagens como em medições ou em cálculos, e conseguir fazer uso da calculadora, são indispensáveis no desenvolvimento do pensamento matemático”. No documento *Matemática: Cálculo mental con números naturales: apuntes para la enseñanza*, a Secretaria de Educação da cidade de Buenos Aires corrobora com estas ideias, e afirma que quando se propõe o trabalho com o cálculo mental, consequentemente, aparecem diferentes estratégias de resolução.

Como o cálculo mental deve ser trabalhado junto a outros procedimentos de cálculo, o algoritmo não se opõe ao cálculo mental, eles se complementam no que diz respeito à sua aprendizagem, pois a compreensão dos mecanismos e resultados do algoritmo está permeada de processos mentais (BUENOS AIRES, 2006). Os PCN concordam com essa ideia à medida que concebem como cálculo mental “quando se efetua uma operação, recorrendo-se a procedimentos confiáveis, sem os registros escritos e sem a utilização de instrumentos” (BRASIL, 1997, p.76), pois o algoritmo é um procedimento confiável que pode ser realizado mentalmente.

De acordo com o documento argentino citado anteriormente (BUENOS AIRES, 2006) a prática do cálculo mental faz com que os procedimentos de cálculo evoluam e que os conceitos numéricos sejam enriquecidos. Nessa perspectiva, podemos notar alguns procedimentos que se apoiam no cálculo mental à medida que são desenvolvidos, como o cálculo por estimativa que conta também com o uso do arredondamento. De acordo com os PCN estes procedimentos se relacionam:

Os procedimentos de cálculo por estimativa desenvolvem-se concomitantemente aos processos de cálculo mental: pelo reconhecimento da grandeza numérica, por meio de decomposições dos números, pelo estabelecimento de relações de dobro e metade, entre outros. (BRASIL, 1997, p. 77).

Vale notar que o arredondamento é uma estratégia permeada de cálculo mental uma vez que consiste em fazer aproximações dos números envolvidos no cálculo ou até dos resultados. Com isso queremos dizer que o arredondamento funciona como estratégia para o cálculo mental e, da mesma forma, o cálculo mental para com as aproximações. Geralmente visa-se arredondar a dezena mais próxima de um número, então para realizar $18+9$, por exemplo, fazemos $20+10$ ou ainda $20+9$ e chegamos a um resultado aproximado da adição.

Esses procedimentos que se relacionam com o cálculo mental podem ser utilizados em situações em que se é necessário realizar uma operação: “na atividade de resolução de problemas é comum que os alunos construam registros numéricos para expressar os procedimentos de cálculo mental que utilizam” (ibid, p. 78), pois a prática do cálculo mental garante segurança e autonomia durante o processo de resolução (SANTOS E MELLO, 2016). O Programa oficial do ensino fundamental da França⁴ também incentiva o desenvolvimento do cálculo mental em todos os ciclos, diante da sua utilidade em situações cotidianas (FRANÇA, 2015). O documento “Le Calcul mental”⁵, traz indicações da funcionalidade do trabalho com o cálculo mental e corrobora com a ideia de que praticar o cálculo mental contribui no trabalho com resolução de problemas. Em função disso, na França o cálculo mental é uma competência que deve ser trabalhada desde o ciclo 2, o que corresponde aos 4º, 5º e 6º anos no Brasil, e ocupa um espaço central do ensino de matemática (FRANÇA, 2002; FRANÇA, 2015). Tais documentos ainda afirmam que o cálculo mental pode assumir uma função social e pedagógica: social porque ele se faz essencial na vida cotidiana pois nem sempre temos acesso à calculadora ou algum outro instrumento de auxílio; pedagógica porque seu desenvolvimento se faz importante na compreensão de conceitos matemáticos.

No Brasil, apesar de recente, a Base Nacional Comum Curricular⁶ (BNCC), em sua versão definitiva disponível online, orienta que “no tocante aos cálculos, espera-se que os alunos desenvolvam diferentes estratégias para a obtenção dos resultados, sobretudo por estimativa e cálculo mental [...]” (BRASIL, 2017, p. 224). Dessa forma, vemos que a maioria dos documentos oficiais ressaltam a importância do cálculo mental e o relacionam com outros procedimentos, como, por exemplo, ao compartilhar a possibilidade de se trabalhar o cálculo mental por meio da resolução de problemas.

Cabe aqui dizer que trouxemos os documentos oficiais de outros países, no caso Argentina e França diante do trabalho diferenciado e da valorização que os mesmos têm com relação à habilidade do cálculo mental. Ambos documentos trazem de forma detalhada atividades e justificativas que afirmam a valorização do cálculo mental para as crianças. Já no Brasil, notamos que os documentos não são exclusivos para exploração desta habilidade,

⁴ Projet de programmes pour les cycles 2, 3 e 4. Disponível em <http://www.education.gouv.fr/cid93042/projet-de-programmes-pour-les-cycles-2-3-et-4.html>

⁵ Esse documento é produzido pelos inspetores da academia de Grenoble e tem como objetivo auxiliar o trabalho do professor. Disponível em <http://www.ac-grenoble.fr/ien.grenoble5/spip.php?article348>

⁶ Um documento normativo que deverá servir como referência para elaboração de propostas curriculares (BRASIL, 2016).

trazendo apenas alguns tópicos que discorrem sobre o assunto de forma resumida, por isso foi relevante perceber e compreender as formas de tratar e contribuir com o cálculo mental.

Em vista da importância dada pelos PCN e PNLD ao papel do cálculo mental nos primeiros anos de ensino, e diante dos documentos que orientam sua prática e benefícios, a maioria dos livros didáticos utilizados por professores e alunos da rede pública de ensino brasileira tendem a sofrer influência desta demanda.

O livro didático é em parte reflexo das orientações prescritas nestes referenciais curriculares uma vez que

[...] as orientações constantes nesses documentos, indicam revisões importantes que vêm se dando na legislação e nas práticas escolares e precisam estar refletidas na configuração dos livros didáticos, os quais devem reforçar o vínculo dos conteúdos com as práticas sociais atendendo às novas demandas escolares. (OLIVEIRA, 2007, p.29)

Consequentemente, o que é proposto acerca da construção do cálculo mental nos livros didáticos afeta o processo de ensino e aprendizagem acerca da habilidade, pois segundo o Guia do PNLD/2016 o livro didático de Matemática é um “instrumento de trabalho do professor e de aprendizagem do aluno, é adequado na medida em que favorece a aquisição, pelo aluno, de um saber matemático autônomo e significativo” (BRASIL, 2015, p.22).

Em vista disso, na próxima seção delineamos alguns pontos que fazem do livro didático um material importante para alunos e professores, bem como sua análise.

1.2 O LIVRO DIDÁTICO

No Brasil contamos com o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), um programa do governo que avalia livros didáticos e os disponibiliza para as escolas públicas. O PNLD atende em “ciclos diferentes os quatro segmentos: educação infantil, anos iniciais do ensino fundamental, anos finais do ensino fundamental e ensino médio”⁷ (BRASIL, 2018). Após os livros passarem por uma criteriosa avaliação, as coleções que são aprovadas podem ser escolhidas pelas escolas e então o governo fica responsável pela compra e distribuição desses livros para os alunos de escolas públicas, desde o ciclo de alfabetização⁸ até o ensino médio.

Para a escolha das coleções, as escolas têm acesso ao Guia do PNLD, disponibilizado também na versão online⁹, serve de apoio para a escolha dos livros didáticos a serem adotados.

⁷ Disponível online em <http://portal.mec.gov.br/pnld/apresentacao>

⁸ Compreende o 1º, 2º e 3º anos do ensino fundamental.

⁹ A versão online é o Guia Digital que funciona como “uma ferramenta a mais para facilitar o acesso ao texto do Guia impresso. Sua estrutura é igual à do Guia impresso; os textos estão colocados em diferentes seções, o que

No Guia do PNLD são publicadas resenhas das coleções de livros didáticos que foram submetidas e aprovadas pelo Programa, com orientações e informações, acerca das obras e do ensino de matemática, destacando os principais pontos de interesse do professor.

O livro didático ocupa um papel importante no trabalho do professor, isso porque, na maioria das vezes este é o único recurso que o professor tem disponível para sua formação e estudo na preparação das aulas (FRISON et al, 2009; OLIVEIRA, 2007). Por este motivo, ele deve ser adequado ao contexto da sala de aula com “situações que levem ao exercício da análise e da reflexão, em última instância, a base da atividade matemática” (BRASIL, 1997, p. 19).

Romanatto (2004) apresenta fortes críticas com relação ao livro didático que era produzido antes de se criar um programa que o avaliasse. Além disso, o autor aponta motivos que fazem com que o livro didático tenha um papel de destaque na sala de aula, tais como a formação do professor de matemática e o olhar para este material como uma fonte de informação que possibilita o estímulo do raciocínio e desenvolvimento do espírito crítico do aluno. Romanatto (2004, p.5) afirma que “o livro didático, como qualquer outro recurso, tem sua importância condicionada ao uso que o professor dele faça”. Ao encontro desta afirmação, Oliveira (2007) realizou uma pesquisa que buscava saber como os professores do 2º ano do ensino fundamental utilizam o livro de matemática e, observou que por mais relevante que se faça o livro didático, alguns professores apresentam dificuldades em utilizar este recurso. Este fato interfere diretamente na maneira como o livro didático é utilizado que pode ter como consequência o abandono deste material. Neste sentido, os PCN apontam que problemas advindos da formação acadêmica dos professores também interferem na forma de eles utilizarem o material didático (BRASIL, 1997). Por exemplo, um professor que se sinta inseguro em preparar sua aula recorrendo a diferentes fontes pode ser levado a utilizar este material como única fonte em sua prática docente.

Diante dessa situação, o livro didático e outras questões relacionadas ao seu uso também devem ser discutidas pelos professores, pois

o uso do livro didático na escola deve favorecer a aprendizagem do aluno, levando-o ao domínio e à reflexão dos conhecimentos escolares para que possa ampliar a compreensão da realidade, formulando hipóteses de solução para os problemas atuais, ou seja, o livro deve ser um subsídio para promover o exercício da cidadania. (OLIVEIRA, 2007, p. 29).

No entanto, para que o livro seja usado de modo a assumir este papel fundamental ligado à aprendizagem, é necessário que os educadores compreendam a metodologia e propostas pedagógicas presentes no livro didático e, para isto, faz-se necessária uma qualificação profissional do professor (SANTOS E MARTINS, 2011).

O livro didático é um material fundamental principalmente nas escolas públicas brasileiras, pois o cenário educacional pode fazer “[...] com que ele acabe determinando conteúdos e condicionando estratégias de ensino, marcando, pois, de forma decisiva, o que se ensina e como se ensina o que se ensina” (LAJOLO, 1996, p.4). A referida autora corrobora com Romanatto (2004) que os problemas em torno da educação refletem no uso do livro didático, que traz consigo além de conteúdo, metodologias que consequentemente afetam a prática pedagógica. Assim, Bittar (2017, p.365-366) considera que

[...] como LD é o principal material utilizado pelo professor no preparo de suas aulas, seu estudo permite, entre outros, certa aproximação com o que é ensinado pelo professor. Consequentemente, é importante conhecer as propostas dos LD, especialmente para ajudar na elaboração de intervenções didáticas com alunos, pois, independente da escolha teórica, é preciso levar em consideração seu contexto de ensino.

Diante do papel do livro didático no contexto escolar, a qualidade do livro é de extrema importância, e é em função disso que o PNLD realiza uma avaliação das obras que são distribuídas. Tal avaliação é de extrema importância pois, “os livros didáticos representam a principal, senão a única fonte de trabalho como material impresso na sala de aula, em muitas escolas da rede pública de ensino, tornando-se um recurso básico para o aluno e para o professor, no processo ensino-aprendizagem” (FRISON et al, 2009, p.4). Assim, é necessário que passem por uma avaliação rigorosa, para evitar equívocos quanto aos conhecimentos matemáticos, garantindo a qualidade do livro e consequentemente, parte do ensino. Cabe comentar que apesar de o livro didático ser um auxílio importante no processo de ensino e aprendizagem, este fato não impossibilita que professor e aluno utilizem outras fontes de estudo, pois ele “não é o único suporte do trabalho pedagógico do professor. É sempre desejável buscar complementá-lo, a fim de ampliar as informações e as atividades nele propostas” (BRASIL, 2015, p.20).

Em consonância com autores citados anteriormente, no Brasil, embora não seja o único material de apoio,

[...] é necessário que o livro didático seja um instrumento que favoreça a aprendizagem do aluno, no sentido do domínio do conhecimento e no sentido da reflexão na direção do uso dos conhecimentos escolares para ampliar sua

compreensão da realidade e instigá-lo a pensar em perspectiva, formulando hipóteses de solução para os problemas atuais. (BATISTA, 2001)

Dessa forma, no contexto escolar, o livro didático de Matemática também deve contribuir para o desenvolvimento de diversas competências e auxiliar na construção de conhecimentos matemáticos.

Nessa perspectiva atividades que visam trabalhar, por exemplo, o cálculo mental, assim como o cálculo escrito e algorítmico devem estar presentes nos livros. No entanto, na escola o trabalho com o cálculo escrito tem recebido mais atenção do que o desenvolvimento do cálculo mental (GUIMARÃES, 2009), o que nos leva a refletir sobre como tem sido trabalhado o cálculo mental no livro didático, uma vez que esse também poderia priorizar outros tipos de cálculo.

Neste contexto, a habilidade de calcular mentalmente, que deve ser construída e exercitada na escola, também deve estar presente no livro didático, pois de acordo com o Edital do PNLD 2016 é relevante “que o livro didático seja um instrumento que contribua para [...] estimular o uso de estratégias de raciocínio típicos do pensamento matemático, tais como o cálculo mental” (Edital do PNLD 2016, p. 60). Em vista desta orientação, o Guia do PNLD 2016 afirma que o cálculo mental é uma das modalidades que tem sido valorizada pelos autores e ganhado espaço no livro didático.

O Guia também ressalta que as propostas elaboradas pelos autores acerca do cálculo mental têm buscado “desenvolver, nos alunos, a capacidade para efetuar operações de modo mais rápido e independentemente do emprego dos algoritmos convencionais ou do uso da calculadora” (BRASIL, 2015, p. 32). Assim, de acordo com o referido documento, o cálculo mental está presente e é proposto em alguns livros didáticos direcionados aos anos iniciais do ensino fundamental com intuito de desenvolver diferentes estratégias de resolução, que não recorram aos algoritmos e nem instrumentos de cálculo.

Diante da importância atribuída ao livro didático, destacada nos parágrafos anteriores, o Grupo de estudos em Didática da Matemática (DDMat), do qual fazemos parte, tem se empenhado no desenvolvimento de estudos que ressaltem a influência deste recurso no processo de ensino e de aprendizagem de conteúdos matemáticos e mostrem a relevância de analisar livros didáticos, como exemplo, Kaspary (2014), Souza (2014) e Ramalho (2016). Assumimos ser relevante a análise deste material, uma vez que o mesmo nos permite investigar como certos conhecimentos relativos à matemática estão sendo abordados.

Nesse sentido, em nossa pesquisa buscamos compreender como a habilidade do cálculo mental é construída, no livro didático, ao longo dos anos iniciais do ensino fundamental. Para isso buscamos uma compreensão primeiramente do que é considerado como cálculo mental, pautando-nos em algumas pesquisas que tiveram o cálculo mental como foco de discussão.

1.3 PERSPECTIVAS DO CÁLCULO MENTAL

O cálculo mental é um objeto de estudo que tem ganhado a atenção de alguns pesquisadores nos últimos anos, mas ainda é pequeno o número de pesquisas que têm como foco o estudo acerca deste objeto. Nos bancos de teses e dissertação da CAPES encontramos 43 resultados na busca pelo termo “cálculo mental”, porém apenas 7 dissertações e 3 teses tiveram como objeto de estudo o cálculo mental. Dessas 10 pesquisas escolhemos 4 a partir da leitura do resumo, palavras-chave, questões de pesquisa e objetivos com a finalidade de apresentar as contribuições daquelas que discutiam questões relativas ao nosso objeto de pesquisa (GONÇALVES, 2008; GUIMARÃES, 2009; ANANIAS, 2010; FONTES, 2010); trazemos o delineamento sobre as mesmas ao longo do texto. Também realizamos um levantamento de artigos publicados nos periódicos Zetetiké e Bolema, com o mesmo termo, no entanto os resultados apontados não indicam o cálculo mental como foco da pesquisa.

Para dar início a esta seção, levantamos a seguinte questão: o que é cálculo mental e o que pode ser considerado como tal?

O cálculo mental é uma modalidade de cálculo que deve ser trabalhada desde os anos iniciais do ensino fundamental, junto com as demais já citadas anteriormente, uma vez que o sujeito desde cedo lida com situações em que precisa realizar algum tipo de cálculo. O desenvolvimento desta habilidade acarreta em diversos benefícios, como autonomia, segurança para resolver uma situação, amplia o conhecimento acerca do campo numérico entre outros que veremos ao longo da discussão, de acordo com os estudos de Guimarães (2009) e Ananias (2010). Porém, a escola tem dado mais atenção ao desenvolvimento do cálculo escrito (GUIMARÃES, 2009; ANANIAS, 2010;).

O que caracteriza um cálculo como mental?

Uma das ideias equivocadas que se faz acerca do cálculo mental é relacioná-lo isoladamente com cálculo rápido ou memorização, e o fato de não utilizar qualquer tipo de registro (SANTOS E MELLO, 2016). Dessa maneira, cabe aqui discutirmos sobre algumas perspectivas, visto que existem diferentes visões do que caracteriza um cálculo como mental.

Anselmo e Planchette (2006) dividem a habilidade em duas formas: o cálculo mental *automatizado* e o cálculo mental *refletido* ou *pensado*. A primeira forma se caracteriza quando a resposta é dada de maneira imediata, contando com resultados já memorizados. Neste caso, o sujeito não realiza um processo consciente para resolver o cálculo; trata-se da aplicação de técnicas e resultados já memorizados como por exemplo $2+2=4$ ou ainda, ao calcular o valor correspondente à metade de algum número. Já o cálculo mental refletido acontece quando o sujeito obtém resultados por meio de uma (re)construção de estratégias com base em propriedades conhecidas; é um processo mais longo que às vezes requer o registro de resultados parciais, como ao multiplicar 85 por 3, podemos pensar 80×3 e registrar 240 mais o resultado de 5×3 : $240 + 15 = 255$.

Antes de um cálculo se tornar automatizado, ele foi pensado. Não se trata apenas de uma memorização no sentido de decorar, pois o cálculo passa a ter seu resultado ou procedimento de resolução disponível na memória após a realização de várias atividades que exigiam que as estratégias fossem (re)elaboradas. Em vista disso, a rapidez é um fator que é consequência deste processo, mas não é uma característica necessária.

De acordo com Anselmo e Planchette (2006), é necessário se apropriar de processos automatizados para que os cálculos refletidos possam acontecer com diferentes estratégias, e ambos possam ser ampliados. Considerando que $2 + 2 = 4$ é um cálculo já disponível na memória, por exemplo, quando for realizar $8+4$ podemos utilizá-lo para executar a estratégia de formar uma dezena, fazendo: $8 + 4 = 8 + 2 + 2 = 10 + 2 = 12$. Assim, a prática do cálculo pensado alimenta o cálculo automatizado, e armazena resultados fazendo com que o sujeito se torne mais hábil ao realizar o cálculo mental. Cabe lembrar que estamos tratando da memorização com compreensão. A diferença entre o cálculo mental com compreensão e o cálculo mecânico pode ser notada no uso da tabuada, por exemplo: o sujeito que compreende a tabuada, mas não possui todos os resultados disponíveis em sua memória, consegue saber o resultado de uma multiplicação a partir de outra, isso porque ele compreende que se tratam de somas sucessivas, ou seja, apesar de não saber a resposta de imediato, tem disponível um procedimento a ser feito.

Segundo Anselmo e Planchette (2006, p. 8):

Dispor de resultados memorizados permite liberar o trabalho da memória e melhorar o desempenho de cálculo. Mas a realização de um cálculo exige igualmente a utilização de propriedades, procedimentos de referência. Alguns deles são implementados instantaneamente e inconscientemente, então pode-se dizer que eles são automatizados. (tradução nossa).

Dessa forma, memorizar resultados e procedimentos é uma ação relevante para realizar o cálculo mental já que amplia o repertório numérico acerca das operações e seus resultados, contribuindo para que os mesmos sejam aplicados em outras situações.

Outra questão que diz respeito ao trabalho com o cálculo mental é o trabalho de forma oral, no sentido de desenvolver atividades que sejam resolvidas oralmente, pois na verbalização é possível que sejam pensadas estratégias e aplicadas propriedades que quando escritas não são exploradas ou explicitadas (ANSELMO E PLANCHETTE, 2006). Não queremos dizer aqui que o cálculo mental se limita a ser trabalhado oralmente, mas que esta abordagem, oral, contribui para que ele seja explorado.

Cabe aqui comentar que o cálculo mental não é oposto ao escrito, e que mesmo em uma abordagem oral, como Guimarães (2009) utilizou em sua pesquisa, pode se recorrer ao registro escrito que neste caso funciona apenas como apoio para lembrar os resultados parciais. Para calcular $34 + 52$, por exemplo, podemos registrar $80 + 6$, pois decompomos os números e somamos de acordo com suas ordens:

$$30 + 4 + 50 + 2 =$$

$$30 + 50 + 4 + 2 =$$

$$80 + 6 = 86$$

No entanto, todo processo de resolução desta operação foi mental e utilizamos o registro apenas como apoio.

Para Parra (1996) o uso de lápis e papel para cálculos intermediários não descaracteriza o cálculo mental, pois o processo é sobretudo mental. A perspectiva acerca do cálculo mental adotada pela autora vai ao encontro da defendida por Anselmo e Planchette (2006), no que se refere ao cálculo mental pensado ou refletido. Com relação ao cálculo que ela denomina de cálculo automático ou mecânico, este faz referência ao uso de algoritmos ou materiais de consulta para resolução como a calculadora, tabuada, tabela, ábaco entre outros instrumentos. Cabe aqui ressaltar que Parra se inspira nas ideias de cálculo mental adotadas pela equipe ERMEL¹⁰, porém não conseguimos ter acesso ao material desta equipe. Em vista disso, recorreremos a algumas pesquisas e identificamos que os referidos autores exploram uma ideia muito próxima da adotada pela equipe francesa.

¹⁰ Equipe de Didática da Matemática do Institut National de Recherche Pédagogique (INRP).

O cálculo mental é descrito por Parra (1996, p.195) como “o conjunto de procedimentos em que, uma vez analisados os dados a serem tratados, estes se articulam, sem recorrer a um algoritmo preestabelecido para obter resultados exatos ou aproximados”. Dessa forma, sua definição de cálculo mental está fundamentada no cálculo pensado, onde deve se recorrer a estratégias que não sejam algorítmicas¹¹ podendo trabalhar com números exatos ou aproximados.

Nessa perspectiva, Parra (1996) acredita que a memorização torna a resolução de problemas mais “fácil”, já que ela colabora para que o sujeito identifique o procedimento que deve utilizar diante de um problema considerando os números envolvidos e a operação que é necessária fazer. O algoritmo é usado quando são requeridos cálculos exatos, podendo ser escritos ou realizados mentalmente. Seu uso também pode se tornar automatizado, porém o uso mecânico não garante que o sujeito compreenda o que está sendo feito, pois ele pode apenas utilizar o algoritmo sem uma reflexão da melhor forma de executar o cálculo. Não queremos com isso descartar o uso do algoritmo e de cálculos escritos, ao contrário, estes são tão importantes quanto o cálculo mental no entanto, o cálculo mental pode funcionar como uma via de acesso para o entendimento do algoritmo (PARRA, 1996).

Com isso, não evidenciamos que a memorização seja suficiente e nem que seja um fator de ponto de partida para um trabalho com cálculo mental, mas sim que é necessária visto a importância de tornar cálculos pensados em automatizados, inclusive para “liberar espaço mental” (PARRA, 1996; ALSELMO E PLANCHETTE, 2006).

Por outro lado, Ralston (2000), refere-se ao cálculo mental como aritmética mental, e defende que o desenvolvimento desta habilidade é mais do que apenas um caminho para o algoritmo. Para este autor, os cálculos escritos e algorítmicos são denominados Aritmética Papel e Lápis (APL). Ele afirma que o cálculo mental é tão importante para a compreensão da APL quanto para o uso da calculadora, pois “os utilizadores da calculadora devem ser capazes de estimar mentalmente os resultados dos seus cálculos” (RALSTON, 2000, p. 37). Ou seja, mesmo no uso deste instrumento é necessário que o indivíduo saiba avaliar se o resultado fornecido pela calculadora está correto, no caso de ter selecionado as teclas erroneamente, ou ainda, estimar previamente o valor que deve resultar a conta.

¹¹ Considera o algoritmo como uma sequência de regras que devem ser aplicadas em uma certa ordem, não dependendo do tipo de dado.

Este autor propõe um currículo que seja desenvolvido sem o foco na APL e, tendo fundamento na aritmética mental. Segundo Ralston (2000), o trabalho com a APL tem formado ‘calculadoras humanas’, que realizam cálculos sem compreender o que estão fazendo no sentido de identificar se um procedimento utilizado cabe para resolver certo tipo de situação. No entanto, se trabalhado da mesma forma que a APL, é possível que se treine o cálculo mental de forma que o sujeito o realize mecanicamente. Ressaltamos que a perspectiva de cálculo mental realizado de forma mecânica, não tem a mesma ideia do cálculo automatizado (ALSELMO E PLANCHETE, 2006). O cálculo se torna automatizado à medida em que o cálculo pensado é executado pelo sujeito, enquanto que o cálculo mental realizado de forma mecânica é entendido como cálculo realizado de forma involuntária como uma máquina, não havendo uma compreensão do porquê se faz daquele jeito.

Lethielleux (2001) utiliza o termo *cálculo oral* para se referir ao cálculo mental e a autora ainda afirma que mesmo que o cálculo escrito e cálculo mental tenham como característica comum o apoio nas mesmas propriedades do sistema de numeração e suas operações, a diferença entre eles está em um outro nível: o cálculo escrito se caracteriza pela utilização de uma técnica que permanece sempre a mesma para quaisquer que sejam os números para certa operação, enquanto o cálculo mental dispõe de várias estratégias para realizar um cálculo. Podemos notar que para essa autora o cálculo escrito se limita a ser o registro do que já definimos como algoritmo.

Da mesma forma que Parra (1996), Lethielleux (2001) ressalta que apesar de suas diferenças o cálculo escrito e mental se complementam, mas além disso ela acredita que o cálculo escrito é composto por fases de cálculo mental, o que permite que em um cálculo escrito se tenha uma precisão do resultado. Por meio do cálculo mental é possível ter controle do resultado, como por exemplo a partir da ordem dos dados ao somar $1680 + 500$ é possível saber que o resultado deve dar acima de 2000, caso contrário há algum equívoco.

Para a referida autora, o cálculo mental é particular de cada indivíduo, pois cada um pode escolher uma forma de proceder o cálculo de acordo com seus conhecimentos e o que está disponível em sua memória. De acordo com Lethielleux (2001), a perspectiva de cálculo mental dos professores pode adotar dois pólos extremos: um diz respeito à valorização da rapidez ao efetuar uma operação, com base em um sistema de treinamento de tabelas e regras e técnicas de rapidez, sem se importar com a aprendizagem; o outro refere-se ao cálculo refletido, que já vimos anteriormente e, prioriza a pesquisa e discussão de procedimentos variados acerca do cálculo mental.

Com relação à visão dos professores sobre essa habilidade, Fontes (2010) buscou compreender as concepções e a importância do cálculo mental junto aos professores dos anos iniciais do ensino fundamental de uma rede municipal, as propostas curriculares e cursos de formação. A pesquisadora observou que todos os professores entrevistados demonstraram uma valorização do cálculo mental e, a crença de que seu desenvolvimento facilita o entendimento do algoritmo. Além disso, fica evidenciado:

[...] o modo reflexivo como as professoras consideram que deva ser o trabalho com cálculo mental, destacando o papel ativo da criança na construção do conhecimento matemático, a importância da interação com o outro e com o saber para a construção de seu próprio conhecimento. (FONTES, 2010, p.174)

Diferente dos pesquisadores citados até o momento, Gómez (2005) considera como cálculo mental apenas cálculos feitos sem auxílio de material e com dados exatos, e ainda o difere dos cálculos estimado e aproximado. Para este autor, o cálculo estimado é realizado com números estimados, que por sua vez são resultado de um ‘julgamento ou ponderação’ pessoal que o sujeito faz acerca dos dados. Neste caso, após a avaliação dos números que são os dados para o cálculo, faz-se o arredondamento adequado para efetuar a operação, como a busca pelo uso de *números redondos*¹². Com relação ao cálculo aproximado, Gómez (2005) o considera como o que é realizado com valores advindos de instrumentos de medida, que sempre têm uma margem de erro por mínima que seja. Por esse motivo é dito que os dados são aproximados e consequentemente o resultado da operação com esses dados também será aproximado. Destacamos que esta perspectiva de cálculo aproximado não é a adotada em livros didáticos brasileiros, pois eles estão de acordo com as orientações oficiais que vimos anteriormente. Assim, nesta visão o cálculo estimado depende da avaliação que o sujeito faz acerca dos dados a serem operados.

O cálculo mental se caracteriza por diferentes estratégias de resolução de um cálculo e, estas estratégias se baseiam nas propriedades do sistema de numeração decimal e das operações (GÓMEZ, 2005; PARRA, 1996; GUIMARÃES, 2009). O cálculo escrito também se apoia no sistema de numeração e suas operações, no entanto não há nada nessas propriedades que demonstre que indique quando uma operação deve ser realizada “de cabeça” e outra com lápis e papel (GÓMEZ, 2005). A ideia adotada por Gómez (2005) abre margem a entender que os algoritmos quando realizados mentalmente também podem ser considerados como cálculo

¹² Os números redondos são os números que apresentam o zero como último algarismo, tendo assim uma quantidade exata de dezenas.

mental, ao contrário do que diz Parra (1996, p.205) que pensa o desenvolvimento da habilidade “é uma via de acesso para compreensão e construção de algoritmos”.

Em nossa pesquisa, optamos por considerar a perspectiva de cálculo mental adotada pelos autores da coleção porque investigar o cálculo mental sob outra perspectiva seria uma análise comparativa, que não é o objetivo deste trabalho. As autoras da coleção escolhida para análise corroboram com as ideias de Parra (1996), por isto não consideramos que um cálculo que reproduz o algoritmo mentalmente seja cálculo mental.

Parra (1996) aponta quatro contribuições de se desenvolver o cálculo mental: a primeira delas é que “as aprendizagens no terreno do cálculo mental influem na capacidade de resolver problemas” (p. 201). Trabalhar esta habilidade auxilia o indivíduo para que frente a um problema ele possa relacionar os dados de forma a tentar solucioná-lo. A partir das relações construídas é possível que se antecipe o resultado e avalie se o resultado está certo. Por exemplo, se na adição $478 + 750$ o resultado é de ordem 4, então caso dê de ordem 3 é possível que o aluno identifique que tem algo errado, pois ele é capaz de avaliar a ordem do resultado esperado a partir das parcelas.

Além disso, o desenvolvimento acerca das relações numéricas permite que os números possam ser pensados em decomposições distintas. Estas relações são aqui ressaltadas porque o tratamento dos dados de um problema está ligado ao significado que se faz na busca de uma solução. Estabelecer relações entre os dados de um problema, a operação a ser feita e a estratégia de execução, colaboram para que o aluno raciocine diante de situações em que deve resolver problemas.

A segunda refere-se à influência que o cálculo mental tem sobre o campo numérico. Parra (1996, p.203) afirma que ele aumenta o conhecimento no campo numérico: “neste sentido, as atividades de cálculo mental propõem o cálculo como objetivo de reflexão, favorecendo o surgimento e o tratamento de relações estritamente matemáticas”. Ao buscar a melhor forma de resolver um problema são empregadas diferentes estratégias para o cálculo, que por sua vez estão encobertas por propriedades matemáticas.

A ampliação do repertório quanto ao conhecimento matemático que nos referimos não se limita a aplicação de algoritmos e, sim, a ação de raciocinar. Neste sentido, as atividades que são capazes de favorecer o desenvolvimento do cálculo mental devem estimular o sujeito a raciocinar e produzir matemática. Como afirma Parra (1996, p.204), deseja-se que, com relação a um problema, o aluno seja capaz de: “analisar os dados, estabelecer relações, tirar conclusões,

ser capaz de fundamentá-las, provar o que se afirma de diversas maneiras, reconhecer as situações em que não funciona, estabelecer os limites de validade do que se encontrou”.

A terceira contribuição refere-se à colaboração com a construção do conhecimento de modo que o aluno estabeleça uma relação agradável com a matemática. Diante da ideia assumida, de que as atividades a serem desenvolvidas devem, de algum modo, provocar reflexão sobre o campo numérico, as propostas que visam desenvolver a habilidade de calcular mentalmente deveriam, conseqüentemente, contribuir com a construção do conhecimento do indivíduo. Cabe lembrar que esse pensamento se faz a partir da perspectiva de cálculo mental refletido que adotamos, onde se buscam estratégias para resolver uma situação de forma coerente e tem-se liberdade de escolhas pessoais sobre os procedimentos.

A última contribuição, parece ser mais uma orientação para um trabalho com cálculo mental na perspectiva assumida: “o trabalho de cálculo pensado deve ser acompanhado de um aumento progressivo do cálculo automático” (PARRA, 1996, p. 205). Apesar de parecer contraditória, a ideia é pensar o cálculo mental como um caminho que levará à construção compreensão do algoritmo. Assim, o aumento do repertório de cálculos automáticos colabora para que o indivíduo construa procedimentos cada vez mais complexos. Destacamos que o cálculo automatizado definido por Anselmo e Planchette (2006) não é sinônimo do cálculo automático apresentado por Parra (1996), uma vez que ela inclui o uso de materiais como calculadora e esta é uma ação que pode ser realizada sem uma reflexão sobre o cálculo. No entanto, neste trecho parece que o sentido em que esta autora fala do cálculo automático está mais próximo do cálculo mental automatizado.

Se o aluno compreende que os números podem ser decompostos de diferentes formas quando tiver que resolver alguma operação que envolva este número ele poderá utilizar estratégias que envolvem a decomposição. Ilustrando, queremos dizer que se o aluno compreende que 16 pode ser decomposto como $10 + 6$, se tiver que resolver a operação $16 + 34$ pode decompor cada uma das duas parcelas em duas parcelas e somar os algarismos de mesma ordem, ou seja, unidade com unidade e dezena com dezena:

$$\begin{aligned} 16 + 34 &= \\ 10 + 6 + 30 + 4 &= \\ 10 + 40 + 6 + 4 &= \\ 40 + 10 &= 50 \end{aligned}$$

A referida autora ainda afirma que “essas maneiras de resolução, nas quais a reflexão a respeito do significado dos cálculos intermediários é preponderante, facilitam a assimilação

posterior dos algoritmos” (p.106). No entanto, para que o indivíduo possa usufruir desse benefício, bem como ter “controle” de resultados obtidos por meio dos algoritmos é necessário se apropriar de cálculos automáticos.

Lethielleux (2001, p.19-20) corrobora com as contribuições levantadas sobre o desenvolvimento do cálculo mental à medida que cita algumas finalidades do cálculo mental:

- o desenvolvimento da atenção, da concentração e da memória,
- um conhecimento fundamentado (ou uma fundamentação do conhecimento) dos números e das operações,
- a memorização de repertórios básicos, a pesquisa de ordens de grandeza, tudo que contribui para um bom controle do cálculo escrito e do cálculo rápido,
- a aquisição do significado das operações.

Pode-se observar que apesar de haver algumas posições diferentes sobre o cálculo mental, é possível traçar como ponto em comum o fato de que todos assumem que a habilidade está pautada nas propriedades do sistema de numeração decimal e suas operações. Com relação aos benefícios apontados sobre o desenvolvimento do cálculo mental, como aumento do repertório numérico, autonomia, memorização e compreensão de outras modalidades de cálculos, concordamos que a habilidade tem o potencial de provocar todas essas capacidades. Porém, o papel do professor e as atividades que compõem este processo são de fundamental importância, uma vez que o cálculo mental tem que ser trabalhado também oralmente e as atividades devem desafiar o aluno levando-o a encontrar formas de realizar um cálculo.

Diante da importância do cálculo mental no uso diário e do papel do livro didático como material de apoio, que alunos e professores têm acesso, definimos nossa questão de pesquisa como segue: como é proposto o ensino do cálculo mental em livros didáticos dos anos iniciais?

Buscando responder a esta questão apresentamos na próxima seção os objetivos, geral e específicos, a que esta pesquisa se propõe.

1.4 OBJETIVOS

Diante da relevância e das contribuições do cálculo mental, do papel assumido pelo livro didático no contexto escolar e, buscando responder nossa questão de pesquisa definimos nossos objetivos como segue:

Objetivo geral

Analisar propostas de ensino do cálculo mental em uma coleção de livros didáticos dos anos iniciais do ensino fundamental aprovados pelo PNLD/2016.

Objetivos específicos

- Identificar a que(ais) conteúdo(s) está vinculado o cálculo mental nos livros didáticos dos anos iniciais;
- Investigar atividades matemáticas propostas para o ensino do cálculo mental nos livros didáticos;
- Investigar as escolhas didáticas propostas para o ensino de cálculo mental nos livros didáticos.

Em nosso objetivo geral mencionamos a escolha de analisar uma coleção de livros didáticos, pois acreditamos que atende nossa pesquisa à medida em que podemos ver como o cálculo mental é abordado em uma coleção que se propõe a trabalhá-lo. Além disso, esta é uma pesquisa de mestrado que tem como fator limitador o tempo disponível para produção e análise de dados.

Com relação aos objetivos específicos cabe aqui esclarecer que buscamos identificar os conteúdos com relação aos quatro eixos da matemática (números e operações, geometria, tratamento da informação e grandezas e medidas) e também propriedades presentes no sistema de numeração decimal e nas operações que fundamentam as estratégias propostas. Identificar a que conteúdo o cálculo mental está vinculado nos ajuda a identificar o momento em que o cálculo mental é ou pode ser explorado. Se, por exemplo, no eixo dos números e operações o cálculo mental estiver majoritariamente vinculado à decomposição, ao longo do desenvolvimento de outras operações poderá se trabalhar a decomposição.

As atividades matemáticas são referentes aos textos, questões, atividades, formalizações, instruções presentes no livro didático. Investigar estas atividades nos ajuda a compreender a proposta de ensino do cálculo mental à medida que nos mostram as diferentes atividades que são ou devem ser trabalhadas para que a habilidade de resolver mentalmente um problema seja desenvolvida. A forma como os autores apresentam as atividades matemáticas que tem alguma relação com o cálculo mental ao longo do livro refere-se às escolhas didáticas.

Investigar estes elementos nos ajuda a identificar as praxeologias matemáticas e didáticas apresentadas pelos autores, fazendo com que seja possível compreender a proposta de ensino vigente no livro no que diz respeito ao cálculo mental. Na próxima seção abordamos um pouco sobre o nosso referencial teórico-metodológico.

2. APORTE TEÓRICO E METODOLÓGICO

Neste capítulo trazemos a descrição dos elementos do nosso aporte teórico e tecnológico, a Teoria Antropológica do Didático, que é utilizado para nossa produção e análise dos dados.

2.1 TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

Nesta seção apresentamos alguns elementos da Teoria Antropológica do Didático (TAD), desenvolvida por Chevallard (1999). Utilizamos a TAD como aporte teórico e metodológico, pois acreditamos que ela fornece elementos que ajudam a produzir e analisar os dados da pesquisa, ou seja, permite que possamos descrever e analisar atividades matemáticas que estão relacionadas com o cálculo mental. Segundo o principal postulado desta teoria (CHEVALLARD, 1999) toda atividade humana pode ser descrita por uma praxeologia e, como as atividades matemáticas são atividades humanas, elas também podem ser descritas por um modelo praxeológico.

A praxeologia, por sua vez, é um modelo que descreve as atividades humanas, e é constituído por quatro elementos: tipos de tarefa, técnica, tecnologia e teoria, que são representados respectivamente pelo quarteto $[T, \tau, \theta, \Theta]$.

Uma *tarefa* (t), que pertence a um *tipo de tarefa* (T), é resolvida por uma *técnica* (τ) que é justificada por uma *tecnologia* (θ) que, por sua vez, é fundamentada por uma *teoria* (Θ). Estes elementos compõem a organização praxeológica, e esta por sua vez é composta pelas organizações matemáticas (OM) e organizações didáticas (OD) que veremos mais adiante. É importante salientar que as praxeologias vivem em instituições, como por exemplo a igreja, a escola, e o livro didático. A instituição que consideramos em nossa pesquisa é o livro didático.

Neste primeiro momento, vamos nos ater aos elementos que compõem o modelo praxeológico. O primeiro componente diz respeito ao tipo de tarefa, representado por T , que tem uma relação com a tarefa, representada por t . Tarefas que possuem uma mesma característica – que vai depender do objetivo que se tem – são agrupadas em um mesmo tipo de tarefa. Por exemplo, calcular $9+1$, $8+2$, $6+4$ são tarefas que podem ser agrupadas em um tipo de tarefa T_x , que podem ser representadas por t_{x1} , t_{x2} e t_{x3} , pertencem ao tipo de tarefa T_x . E podemos expressar o tipo de tarefas T_x como sendo: Somar dois números de um algarismo, de forma que o resultado seja igual a uma dezena. Assim, o tipo de tarefas é um conjunto de tarefas que têm as mesmas particularidades. Quando uma tarefa t pertence a um conjunto T podemos utilizar a notação: $t \in T$.

O segundo componente é a técnica, representada por τ , e diz respeito à forma como são resolvidas as tarefas. Uma técnica que resolve as tarefas do tipo T_x , por exemplo, pode ser a sobrecontagem com o auxílio dos dedos das mãos. Cabe aqui ressaltar que uma técnica resolve uma parcela de tarefas daquele tipo, o que é denominado de *alcance da técnica*. Para resolver a tarefa $85 + 54$ a técnica citada não é pertinente, pois a quantidade de dedos é limitada. Para resolver esta tarefa por exemplo, a decomposição em parcelas é uma técnica pertinente como vemos a seguir:

$$\begin{aligned} 85 + 54 &= \\ 80 + 5 + 50 + 4 &= \\ 80 + 50 + 5 + 4 &= \\ 130 + 9 &= 139 \end{aligned}$$

A tecnologia por sua vez, é representada por θ e tem a função de justificar e validar a técnica que é usada para resolver as tarefas do tipo T . Por exemplo, para resolver a tarefa $3 + 8$ podemos optar em fazer $8 + 3$, ou seja, realizar a soma a partir do número maior e, ao fazer isso estamos admitindo que $3 + 8 = 8 + 3$, o que justifica este fato é a propriedade comutativa da adição. Uma técnica pode funcionar como tecnologia para uma outra técnica, ou uma técnica pode ser “auto tecnológica” porque dada a sua relação institucional vê-se como uma “boa maneira” de resolver aquela tarefa, e neste caso se dispensa uma justificação do motivo de dar certo (CHEVALLARD, 1999). A teoria por sua vez, tem a mesma função da tecnologia para com a técnica: a teoria explica a validade de tal tecnologia.

Segundo Chevallard (1999), em torno de um único tipo de tarefas, a tripla formada por pelo menos uma técnica, uma tecnologia e por uma teoria, constitui uma *organização pontual*. A combinação das organizações pontuais corresponde à *organização local*, que é centrada em torno de uma tecnologia, $[T_i, \tau_i, \theta, \Theta]$. A *organização regional* é constituída pelo agrupamento das organizações locais, estando em torno de uma única teoria, $[T_{ij}, \tau_{ij}, \theta_j, \Theta]$. Por fim, a agregação das organizações regionais, constituirá a *organização global* que será correspondente à várias teorias.

O modelo praxeológico $[T, \tau, \theta, \Theta]$ é constituído por dois blocos: o primeiro bloco é indicado por $[T/ \tau]$, denominado bloco prático-técnico e que se denominará genericamente como “saber fazer: saber fazer um determinado tipo de tarefa T , e uma determinada maneira τ de realizar as tarefas desse tipo” (CHEVALLARD, 1999, p.3); o segundo bloco é representado por $[\theta/ \Theta]$, denominado tecnológico-teórico e é identificado como um saber.

Com relação às atividades matemáticas, são propostas duas organizações: a Organização Matemática (OM) e a Organização Didática (OD). A primeira é referente à realidade matemática, que segundo Chevallard, Bosch e Gascón (2001, p.275):

[...] é o resultado final de uma atividade matemática que, como toda atividade humana, apresenta dois aspectos inseparáveis: a prática matemática ou “práxis”, que consta de *tarefas e técnicas*, e o discurso fundamentado ou “logos” sobre essa prática, que é constituída por *tecnologias e teorias* (grifo dos autores).

Dessa forma a OM é descrita pelo modelo praxeológico [T, τ , θ , Θ] já apresentado. A OD diz respeito à maneira como é organizada e sistematizada a Organização Matemática. De acordo com Bittar, Freitas e Pais (2014, p.5), “a organização didática consiste na maneira como os autores apresentam os procedimentos e os recursos mais voltados para o estudo, podendo variar em função das orientações didáticas às quais estão associados”. Dessa maneira, a Organização Didática permite que os caminhos trilhados para o estudo possam ser variados, diferentes, desde que cheguem ao mesmo saber matemático.

A OD pode ser também analisada por meio de elementos do quarteto. Em nosso caso, com relação à OD, olhamos para as escolhas didáticas feitas pelas autoras na proposta de tarefas que preparam o aluno para realizar o cálculo mental.

A organização didática também pode ser descrita de outra maneira, que Chevallard (1999) denomina de *momentos didáticos*:

O primeiro momento é chamado *primeiro encontro* com a Organização que é referente ao contato inicial com a OM, que pode ser feita de diferentes formas e pode aparecer várias vezes. Neste momento não se pretende que o objeto matemático em questão seja explorado a fundo, pois isso poderá ser feito paralelamente com os outros momentos. O segundo momento é denominado *exploração do tipo de tarefas e da elaboração de uma técnica que resolve as tarefas desse tipo*, em que o estudo e a resolução de um tipo de tarefa vão ao encontro da construção de ao menos um *embrião* de técnica.

O terceiro momento de estudo é a *constituição do entorno tecnológico-teórico* [θ / Θ] *relativo à técnica*. Este é o momento em que são formulados e/ou justificados enunciados que fazem parte desse entorno. Este momento está ligado aos outros momentos, pois desde o *primeiro encontro* podem existir elementos do entorno tecnológico-teórico que podem ser (re)empregados para a constituição de uma nova praxeologia. Porém, há instituições que optam por primeiro elaborar este entorno para depois propor apenas aplicações do que foi apresentado. O quarto momento é o do *trabalho da técnica*, neste momento visa-se a exploração da técnica com intuito de que seja melhorada, de forma a se tornar mais eficiente, *confiável*.

O quinto momento é o da *institucionalização* e tem como finalidade determinar de forma precisa a OM estruturada, formalizando os conhecimentos matemáticos de acordo com a instituição. Por fim, o sexto momento é o da *avaliação* da praxeologia proposta, que se vincula à institucionalização, pois esta apresenta uma sistematização da OM oportunizando que a avaliação seja realizada a partir deste momento, já que a avaliação é o momento em que se deve refletir, verificar e examinar o que foi aprendido até o momento. Ressaltamos que não se trata da avaliação dos alunos.

Os momentos de estudo, ou didáticos, não precisam seguir a ordem com que foram apresentados. Dessa forma, nos livros didáticos os momentos didáticos podem ser encontrados várias vezes de acordo com a organização didática implementada pelos autores. Diante do exposto, entendemos então, que a TAD fornece recursos para que possamos analisar o cálculo mental em uma coleção de livros didáticos, modelando as organizações matemáticas e didáticas presentes na coleção de livros didáticos analisada.

Assim, por meio da organização praxeológica pretendemos identificar e modelar os elementos do quarteto, presentes em uma coleção de livros didáticos, que contribuem com o desenvolvimento do cálculo mental. Na seção seguinte, apresentamos os tipos de tarefa *a priori* que modelamos a partir de uma pesquisa de doutorado que tratou de investigar contribuições referentes ao cálculo mental.

2.2 TIPOS DE TAREFAS *A PRIORI*

Para identificar as tarefas que preparam para o cálculo mental foi necessário um estudo com a finalidade de prever quais tipos de tarefas auxiliam neste processo. Estes tipos de tarefas, que contribuem com desenvolvimento da habilidade do cálculo mental, e que foram modelados a partir de uma pesquisa de doutorado é o que chamamos de tipos de tarefa *a priori*¹³. Como parte da metodologia, apresentamos os tipos de tarefas *a priori* para o ensino do cálculo mental em livros didáticos. Este modelo foi construído com base na TAD, destacando tipos de tarefa e técnicas que consideramos importantes para um trabalho com o cálculo mental. Para identificar esses elementos, nos fundamentamos em uma tese (GUIMARÃES, 2009) que teve como foco identificar as contribuições do desenvolvimento do cálculo mental, entre estratégias e atividades que permitem que este seja de fato realizado nos anos iniciais do ensino fundamental. O estudo desta tese resultou em uma classificação de tipos de tarefa *a priori*, que trazemos ao longo desta seção.

¹³ O termo utilizado *a priori* não tem relação com o que é visto na Engenharia Didática.

Quando iniciamos as análises dos livros buscamos identificar tarefas que estivessem preparando o aluno para realizar o cálculo mental e não somente aquelas que apresentassem, de forma explícita, relação com cálculo mental com a indicação “calcule mentalmente”, por exemplo. Naquele momento sentimos dificuldade em perceber e compreender quais tarefas estariam relacionadas com o cálculo mental tendo em vista apenas a perspectiva adotada pelas autoras do que consideravam como cálculo mental. Lembramos mais uma vez que as autoras da coleção analisada adotam a ideia de Parra (1996) do que é cálculo mental, ou seja, são as estratégias que não fazem o uso do algoritmo.

Nossa dificuldade fazia com que enxergássemos que nem tudo que não envolvia, ou antecedia, os algoritmos estivesse diretamente ligado ao cálculo mental, uma vez que entendia-se que bastava não usar o algoritmo que a habilidade já estaria sendo desenvolvida. Ou então que apenas as seções que visam trabalhar o cálculo mental teriam tarefas que estivessem relacionadas a ele. Assim, sentimos a necessidade de nos apoiar sobre algum estudo que tivesse buscado desenvolver o cálculo mental, mostrando estratégias que estão diretamente relacionadas com tal ação e tarefas que estimulassem a exploração e o aparecimento de estratégias para esse tipo de cálculo.

No estudo de pesquisas que tiveram o cálculo mental como foco nos deparamos com uma tese que teve como objetivo “investigar a natureza do cálculo mental e suas contribuições para a aprendizagem dos conceitos aditivos e multiplicativos de alunos do 4º e 5º ano do Ensino Fundamental” (GUIMARÃES, 2009, p. 22). A pesquisadora realizou uma engenharia didática¹⁴ longa¹⁵ com alunos de 4º e 5º anos, trabalhando atividades que estão relacionadas com o cálculo mental, desde o Sistema de Numeração Decimal até os campos aditivo e multiplicativo.

Baseada em pesquisas qualitativas desenvolvidas internacionalmente, bem como em documentos oficiais como os PCN, Guia do PNLD e livros didáticos, a pesquisadora elaborou uma sequência didática composta de 3 blocos: i) bloco do Sistema de Numeração Decimal; ii) bloco aditivo, e; iii) bloco multiplicativo. O primeiro consiste em atividades que visam verificar se os alunos compreendem as regularidades do funcionamento do sistema de numeração, como por exemplo ao enunciar uma sequência numérica para saber o número que ‘vem depois’ é necessário somar 1. Os demais blocos são compostos por atividades que buscam explorar

¹⁴ Ver Artigue (1988).

¹⁵ Queremos dizer com “longa” é que a fase da experimentação durou 1 ano.

estratégias de cálculo mental sempre na perspectiva de tornar alguns cálculos automatizados para que se possa “avançar” na execução de cálculos refletidos mais complexos.

Cabe aqui comentar que suas atividades se limitaram a trabalhar com número naturais e, segundo Guimarães (2009, p.44) as “atividades escolhidas buscaram evidenciar e ampliar o repertório numérico, incluindo a mobilização de propriedades aditivas e multiplicativas pelos alunos”. Dessa forma, as atividades propostas buscavam desenvolver e ampliar o *repertório numérico* dos alunos acerca das propriedades da adição e da multiplicação, favorecendo observar os conhecimentos sobre o sistema de numeração decimal em atividades que evidenciam a multiplicação, por exemplo.

À medida que realizávamos a leitura desta pesquisa víamos que a mesma estava se tornando uma referência para que pudéssemos compreender e identificar atividades relacionadas com o preparo e o desenvolvimento do cálculo mental. Apesar de o estudo ter sido realizado com alunos de 4º e 5 anos, as atividades englobam ideias presentes nos primeiros anos a partir do sistema de numeração decimal e suas regularidades, não restringindo apenas aos conteúdos que são trabalhados nos anos em questão. Além disso, o fato de que a sequência didática, junto com as possibilidades de estratégias e justificativas a respeito da relevância das atividades, apresentadas pela autora, tenha sido construída com base em pesquisas e documentos oficiais que são frutos de outras pesquisas e estudos, também permite que os tipos de tarefas *a priori* elaboradas por nós sejam tomados como referência.

Em vista da relevância desta pesquisa como estudo aprofundado acerca de atividades que despertam, exercitam e exploram o cálculo mental, na etapa dos anos iniciais do ensino fundamental, realizamos uma ‘modelagem’ a partir das atividades que compõem a sequência da pesquisadora. Com modelagem queremos dizer que no estudo da referida tese identificamos as *tarefas* presentes nas atividades e as classificamos em *tipos de tarefas*, dando origem aos nossos tipos de tarefa *a priori*. Cabe ressaltar que Guimarães (2009) não referiu-se à TAD em sua pesquisa.

Apresentaremos, a seguir, os tipos de tarefa que classificamos a partir da sequência proposta por Guimarães (2009). Nesta apresentação também trazemos um pouco da discussão da referida autora com relação à relevância de se trabalhar essas tarefas nos anos iniciais do ensino fundamental. Não priorizamos a mesma ordem de blocos como a pesquisadora uma vez que nós modelamos os tipos de tarefas não com critério de separar por blocos e sim identificando os tipos em que as tarefas apresentadas se incluem. A notação utilizada para denotar os tipos de tarefa será $T_{i,n}$, com i um número natural entre 1 e 14 que representa a

cardinalidade da classificação realizada a partir do trabalho de Guimarães (2009); e n , também um número natural, é um índice que representa os subtipos de tarefas. Na análise da coleção quando identificarmos novos tipos de tarefas, estas serão identificadas com n a partir de 16 e em negrito.

A seguir iniciamos a apresentação dos tipos de tarefas *a priori*:

- T_1 : Completar uma sequência numérica, progressiva e regressivamente, de n em n , a partir de um número dado.

Realizar uma contagem favorece a compreensão acerca das regularidades do sistema de numeração. Dessa forma é possível que o alunos compreendam as mudanças de ordem e classes, e isto faz parte da compreensão no que diz respeito às regularidades presentes no sistema de numeração decimal, pois a cada dezena troca-se a ordem. Um exemplo de tarefa que pertence a este tipo é “contar, de um em um, de 18 até 35”. Propor tarefas como esta permite que os alunos compreendam o processo, bem como verificar se os mesmos entendem que para saber o próximo número basta somar uma unidade ao número anterior, e no caso de uma sequência regressiva, basta subtrair uma unidade do número anterior.

É importante notar que em tarefas deste tipo trabalha-se também com a mudança de ordem, e consequentemente trazem alguma evidência da relação que se tem com os números que estão próximos aos *nós*, que segundo Guimarães (2009, p.40) são os “números próximos de onde ocorre a mudança de ordem na representação no sistema de numeração decimal, por exemplo, de 9999 para 10000”. Contar do 995 ao 1005, por exemplo, pode gerar dúvida quando chegar ao 999, pois na contagem é realizada a decomposição de forma que $995 = 900 + 95$, $996 = 900 + 96$, sendo adicionado uma unidade à casa das unidades, logo, equivocadamente quando se chegar ao $999 = 900 + 99$, é possível que o aluno some 1 ao 99 e diga que o próximo é o 900100(novecentos e cem) = $900 + 100$ (LERNER E SADOVSKY, 1996). Desta forma, trabalhar com tarefas deste tipo favorece a observação das regularidades do sistema decimal.

Ademais, tarefas deste tipo contribuem para que algumas técnicas seja reinvestidas, como a decomposição e a sobrecontagem e, ainda possibilita a compreensão das regularidades, que facilitam a contagem. Cabe aqui ressaltar que algumas destas técnicas indicam a formação de uma *dezena inteira*.

Contar de 3 em 3 a partir do 18 é uma tarefa que pertence a este tipo, e a técnica para a resolução desta tarefa corresponde às diferentes maneiras de realizar a soma de 3 em 3. Para realizar esta tarefa, por exemplo, podemos utilizar a seguinte técnica:

Decomposição

$$\left\{ \begin{array}{l} 18 + 3 = \\ 18 + (2 + 1) = \\ (18 + 2) + 1 = \\ 20 + 1 = 21 \end{array} \right.$$

Nas tarefas do tipo T_1 se as regularidades já estão interiorizadas, é possível que se utilize o cálculo já automatizado, como é o caso de uma sequência em que se conta de 10 em 10 e se faz a soma de 10 em 10, onde percebe-se que basta acrescentar um ao algarismo da ordem das dezenas e manter o das unidades.

No entanto, as técnicas para uma *contagem regressiva* diferem das técnicas que podem ser empregadas para a contagem progressiva indo além do cálculo automatizado, pois se apoiam na operação de subtração. Para uma contagem regressiva de 3 em 3 a partir do 18 poderíamos empregar a técnica da compensação, por exemplo:

$$\left\{ \begin{array}{l} 18 - 3 = \\ (18 + 2) - 3 = \\ 20 - 3 = 17 \\ 17 - 2 = 15 \end{array} \right.$$

Essa técnica consiste em, de alguma forma, compor uma dezena inteira para então realizar a operação. E depois é preciso compensar o que foi feito para formar uma dezena inteira; que no exemplo, como somamos 2, ao final subtraímos 2.

- T_2 : Escrever por extenso, números expressos em algarismos.

Neste tipo de tarefa além da leitura e/ou escrita correta dos números, busca-se a compreensão das ordens que compõem um número, principalmente no que diz respeito a números com *zero intercalar*, pois são os números que possuem o zero entre os algarismos diferentes de zero, como 203 e 4005. Se o aluno não compreender como o sistema de numeração decimal funciona, ele pode achar que quatrocentos e trinta é representado por 40030, isso porque as crianças tendem a acreditar que o número se escreve da mesma maneira que se fala (LERNER E SADOVSKY, 1996). Neste caso, podem ser exploradas atividades relativas à ordem, à classe e ao valor posicional, como: quantos algarismos um número deve ter para que seja da ordem *tal*? Uma tarefa (t_2) do tipo T_2 seria: Leia o número 403, ou, escreva por extenso o número 403.

- T_3 : Escrever em registro numérico um número enunciado em língua materna.

Tarefas deste tipo possibilitam explorar questões referentes ao valor posicional, pois pede que os alunos escrevam os algarismos com a finalidade de formar um número. Por

exemplo, o professor pode solicitar que o aluno escreva o número quarenta e três, sendo desejado que se escreva 43, no entanto o aluno pode escrever 403. Isso pode acontecer por que como dito anteriormente o aluno tem tendência a pensar que se registra mesma forma com a qual se fala (LERNER E SADOVSKY, 1996), pensando o número 43 como a decomposição $40+3$.

Dessa forma, tarefas deste tipo permitem verificar se o aluno sabe representar um número por meio de algarismos, e se tem dificuldades quanto ao valor posicional, principalmente ao trabalhar com zero intercalar. Desta forma uma tarefa que pertença a T_3 é: escreva quais algarismos formam o número quinhentos e nove. Esta atividade pode ser enunciada oralmente pelo professor, solicitando que o aluno diga ou escreva os algarismos que formam esse número; no livro a tarefa poderá ser encontrada escrita.

- T_4 : Escrever em registro numérico um número enunciado em função de suas ordens.

Este tipo de tarefa tem como objetivo a compreensão do processo de decomposição dos números em centenas, dezenas, unidades e ordens de outras classes, e assim, perceber que o agrupamento de ordens, formam números de outras ordens e até outras classes. Por exemplo, identificar o número correspondente a 60 dezenas e 8 unidades, é uma tarefa pertencente ao tipo de tarefa T_4 .

- T_5 : Identificar a quantidade de dezenas e/ou centenas que compõem um número.

Este tipo de tarefa também contempla o entendimento a respeito do processo de decomposição do número, em dezenas e centenas. Apesar de os tipos de tarefas T_4 e T_5 , trabalharem de certa forma o conhecimento a respeito das centenas e dezenas, note que T_5 vai além desse objetivo, pois é necessário descobrir quantas dezenas constituem o número. Dessa forma, uma tarefa deste tipo consiste em propor um número e solicitar que sejam identificados nele quantas dezenas e/ou centenas ele possui. Assim, um exemplo de uma tarefa deste tipo é: identifique quantas dezenas tem o número 35.

- T_6 : Identificar o sucessor e o antecessor de um número.

Este tipo de tarefa, T_6 , é complementar ao tipo de tarefa T_1 . Além de possibilitar a compreensão das mudanças de ordem, tarefas deste tipo colaboram com a construção do conhecimento acerca do sistema de numeração decimal, no que diz respeito a sequência dos números. A relevância das tarefas se que se enquadram neste tipo, é com relação a compreensão

das regularidades do sistema decimal, principalmente no que diz respeito ao números que estão próximos aos ‘nós’ (GUIMARÃES, 2009).

- T₇: Identificar quanto falta para chegar a um determinado número a partir de outro.

Este tipo de tarefa consiste em descobrir como chegar a um número podendo utilizar as operações de adição ou subtração. Assim, uma tarefa deste tipo é: indique quanto falta para completar 10 partindo do número 4. Resolver tarefas deste tipo oportuniza o trabalho com técnicas como a sobrecontagem com o auxílio dos dedos das mãos, que explora a ideia de completar e contribui para que o cálculo se torne automatizado.

- T₈: Formar dezenas ou centenas inteiras, de modo a chegar na dezena ou centena, superior.

Atividades que abrangem este tipo de tarefa têm a finalidade de identificar se o aluno compreende o que é a dezena superior e se sabe como operar para chegar lá. Com relação à dezena superior, nos referimos às dezenas ou centenas inteiras, e estas por sua vez se referem a um número formado por uma quantidade exata de dezenas ou centenas, respectivamente. Quando nos referimos a dezena superior ou centena superior, entendemos como a menor dezena ou centena exata que é maior que o número dado, como por exemplo, a dezena superior do número 47 é 50, e a centena superior a 167 é 200.

Notamos que para realizar este tipo de tarefa é necessário que se descubra primeiro qual é a dezena ou centena superior e a partir daí pensar em uma técnica para chegar até a ordem superior ou inferior solicitada. Por exemplo, uma forma de identificar qual é a dezena superior do número 47 é somar 10 a este número, $47 + 10 = 57$. Então descobrimos que a dezena superior é 50 e pensamos em uma maneira de operar com o 47 para que se chegue ao 50, que no caso é somar 3.

As tarefas que estão diretamente relacionadas com as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão foram organizadas da seguinte maneira: classificamos os tipos de tarefas de acordo com as operações e dentro destes conjuntos há tarefas que existem especificamente para o trabalho com o cálculo mental e que chamamos de *subtipos de tarefas*. Queremos dizer assim que existe um tipo de tarefa e dentro deste tipo de tarefa existem outros tipos, e usamos o termo subtipo no sentido de que são subconjuntos de um conjunto mais amplo, tal que as tarefas contidas nestes subconjuntos são direcionadas ao trabalho com o cálculo mental. Dessa forma nestes casos apresentaremos os tipos e subtipos, como a seguir:

- T₉: Somar parcelas

Este tipo de tarefa é composto por atividades referentes ao campo aditivo. No entanto, ele é formado por inúmeras tarefas onde nem todas estão voltadas ao trabalho com o cálculo mental. Destacamos que Kaspary (2014), que buscou identificar a praxeologia de uma coleção dos anos iniciais com relação ao campo aditivo, apresenta tipos de tarefas voltados para o ensino deste campo; dentre esses tipos alguns contribuem com o desenvolvimento do cálculo mental. Essa pesquisadora não tinha o mesmo objetivo que nós temos e por isso ela apresenta ‘calcular mentalmente’ como um tipo de tarefa que faz parte do ensino do campo aditivo. Assim, é possível que alguns dos tipos de tarefas e técnicas elencados por Kaspary (2014) tenham certa proximidade com os subtipos modelados por nós, tanto no que diz respeito aos elencados *a priori* quanto nos que identificamos na análise do livro acerca da operação de adição.

Sendo assim, neste tipo, apresentamos 4 subtipos com tarefas voltadas ao desenvolvimento da habilidade em questão.

- T_{9.1}: Somar dois números que estão entre 0 e 10.

Este tipo de tarefa permite mobilizar propriedades da adição, como a decomposição em parcelas aditivas e a comutatividade. Acredita-se que os alunos devem ter esses cálculos *automatizados*, para facilitar o cálculo de outras adições. Assim, ter disponível em memória as somas, permite o trabalho com a decomposição por exemplo, que é uma técnica relevante para realizar o cálculo mental. Na tarefa 7+5, podemos decompor o 5 em duas parcelas visando formar uma dezena inteira para facilitar o cálculo, sendo:

$$\begin{aligned} 7 + 5 &= \\ 7 + (3 + 2) &= \\ (7 + 3) + 2 &= \\ 10 + 2 &= 12 \end{aligned}$$

Note que após decompor o 5 em duas parcelas, usamos a *propriedade* associativa e, em alguns casos, também é preciso utilizar a *propriedade* comutativa da adição com a finalidade de formar uma dezena, e então somamos uma dezena com duas unidades.

- T_{9.2}: Somar números formados por 2 ou 3 algarismos com números formados por 1 algarismo.

Este tipo de tarefa visa ampliar o repertório de cálculos com a operação, complementando o subtipo de tarefa anterior. Neste caso trabalha-se com números compreendidos nas ordens da dezena e centena e, visa-se o trabalho com técnicas como a

comutatividade e a decomposição visando formar uma dezena inteira. Este tipo de tarefa, abrange tarefas como: somar $132+2$.

- T_{9,3}: Somar dezenas inteiras.

Neste tipo de tarefa as parcelas são números em que a primeira ordem, das unidades, corresponde ao número zero, pois, como dito anteriormente dezenas inteiras são números formados por uma quantidade exata de dezenas. Dessa forma, pertencem a este grupo, tarefas como $230 + 370$, $150 + 80$ e $430 + 570$.

- T_{9,4}: Somar dois números, tal que a soma dos algarismos relativos às unidades ou às dezenas é inferior (ou superior) a 10.

Este subgrupo é formado por tarefas como $24 + 132$, $237 + 44$ e $87 + 135$. Elas contribuem para o cálculo mental no sentido de explorar algumas possíveis estratégias como: se apenas uma das parcelas for da ordem das centenas é preciso somente somar as demais ordens e manter a ordem das centenas, e para estes casos teremos outros casos, se a soma dos algarismos da dezena forem superior a 9. Dessa forma estas tarefas vão oportunizar que o aluno pense em estratégias para resolver mentalmente como uma exploração da técnica da decomposição visando tornar a própria técnica automatizada, ou seja, sempre que ele lidar com a mesma situação saberá que deve empregar o mesmo método.

- T₁₀: Subtrair dois números

Este tipo de tarefa, assim como T₉ também é composto com subtipos que trabalham tarefas relacionadas ao desenvolvimento do cálculo mental. Apresentamos 3 subtipos a seguir relacionados com a operação de subtração:

- T_{10,1}: Subtrair números que estão entre 0 e 20, de forma que o minuendo sempre é maior que o subtraendo.

Este tipo de tarefa, contribui para se estabeleçam relações entre os números compreendidos neste intervalo, como a igualdade entre duas subtrações $6 - 2 = 8 - 4$. Ter estes cálculos automatizados é importante para a agilidade na resolução de futuras tarefas como $16 - 12$, onde o que agora é um trabalho com o tipo de tarefa depois passa a ser uma técnica para resolução de tarefas mais complexas que envolvem a operação. Assim, em atividades que busquem a exploração da operação de subtração entre dois números é possível que propriedades sejam mobilizadas, bem como a memorização seja oportunizada.

- T_{10.2}: Subtrair números formados por 2 e 3 algarismos (minuendo) por números formados por 1 algarismo (subtraendo).

Neste tipo de tarefa existem tarefas como $92 - 5$, $134 - 7$, $76 - 3$. Tarefas pertencentes a este grupo oportunizam um trabalho com técnicas já trabalhadas em outros tipos de tarefa e, neste contexto, são ampliadas quando aplicadas à ordem das centenas.

- T_{10.3}: Subtrair uma centena exata de um número dado.

Esse tipo de tarefa tem como objetivo retirar uma quantidade inteira de centenas, como na tarefa $767 - 300$. Esta tarefa permite que o aluno mobilize a técnica de operar com os algarismos da ordem das centenas e acrescentar os demais, agilizando a resolução, ou ainda decompor uma das parcelas para então operar somente com as centenas como podemos ver seguir:

$$\begin{aligned} 767 - 300 &= \\ (700 + 67) - 300 &= \\ (700 - 300) + 67 &= \\ 400 + 67 &= 467 \end{aligned}$$

Aqui notamos que, mais uma vez, a decomposição, a comutatividade e a associatividade são a essência da técnica.

- T₁₁: Multiplicar dois números

Tanto este tipo de tarefa como o próximo (T₁₂), são compostos por subtipos que trabalham o campo multiplicativo no que diz respeito a tarefas que contribuem para desenvolver o cálculo mental. Assim, em T₁₁ apresentamos os subtipos com relação a operação de multiplicação enquanto que em T₁₂ os subtipos estão relacionados com a operação de divisão.

- T_{11.1}: Multiplicar dois números que estão entre 1 e 10.

Este tipo de tarefa trabalha a tabuada e o objetivo é a memorização da tabuada para tornar o cálculo automatizado, pois no decorrer de outras tarefas ter a automatização de alguns cálculos possibilitará maior agilidade.

- T_{11.2}: Multiplicar um número por potências de 10

Tarefas deste tipo contribuem com a ampliação do repertório multiplicativo, fazendo com que sejam percebidas regularidades. Para resolver tarefas deste tipo, podemos acrescentar um, dois ou três zeros à direita do último algarismo do número conforme for multiplicado por 10, 100 e 1000, respectivamente.

Esta é uma estratégia que às vezes é ensinada nas escolas sem que os alunos compreendam o motivo de sua validade, o que faz com que tenham dificuldades em tarefas como 30×100 (GUIMARÃES, 2009). Entretanto, propor diferentes tarefas pertencentes a este grupo faz com que as regularidades sejam percebidas, contribuindo para a automatização do cálculo.

- T_{11.3}: Multiplicar um número por 5, 50 ou 500.

Como 5, 50 e 500 são as respectivas metades de 10, 100 e 1000, para resolver tarefas deste tipo basta multiplicar por uma potência de 10 (10, 100 ou 1000) e dividir o resultado por 2. Assim, para resolver a tarefa 50×24 , podemos fazer da seguinte forma:

$$\begin{aligned} 50 \times 24 &= \\ 100 \times 24 &= 2400 \\ 2400 \div 2 &= 1200 \end{aligned}$$

- T_{11.4}: Multiplicar dois números, tal que um dos fatores seja formado por 1 algarismo e o outro por 2 ou 3 algarismos.

Podemos dizer que este tipo de tarefa abrange todos os tipos particulares elencados anteriormente acerca da multiplicação. Desta forma, tarefas deste tipo têm como objetivo a exploração de técnicas que foram empregadas nos tipos anteriores e sua ampliação.

- T_{11.5}: Multiplicar um número de dois algarismos por 25.

As tarefas que compõem este tipo visam a percepção da regularidade de que 25 corresponde a um quarto de 100 e, dessa forma é possível empregar a estratégia de multiplicar por 4 e dividir por 100. Mas também possível investir a decomposição dos fatores em fatores menores.

- T₁₂: Dividir dois números
 - T_{12.1}: Dividir números terminados em um, dois ou três zeros por 10, 100 ou 1000.

Tarefas deste tipo visam contribuir com a ampliação do repertório multiplicativo, diante da percepção das regularidades, tendo o mesmo objetivo que o tipo de tarefa T_{11.2}, mas direcionado à operação de divisão. Notamos uma possível relação com a técnica do tipo de tarefa T_{11.2}. Se quando multiplicamos um número por potências de 10 acrescentamos zero à direita do número de acordo com a potência, quando dividimos devemos desprezar os zeros à direita também de acordo com a potência. Este é um *teorema-em-ação* (VERGNAUD,1996) utilizado ao resolver estes tipos de tarefa na pesquisa de Guimarães (2009). Para resolver a

tarefa $1200 \div 10$, por exemplo, basta desprezar o último zero à direita de 1200 pois a divisão é por 10, e então temos como resultado 120. Dessa forma, vemos que as tarefas pertencentes a este grupo trabalham a *exploração da técnica*, visando ampliar o repertório e tornar o cálculo automatizado.

- T_{12.2}: Dividir múltiplos de 5, por 5 e 50.

As tarefas deste grupo visam descobrir qual o número que multiplicado por 5 ou 50 resulta no dividendo, pois tratam-se de divisões exatas. No entanto, as técnicas dependerão do valor do dividendo. Quando o divisor for 5, por exemplo, podemos primeiro dividir por 10 e depois multiplicar o resultado por 2, como podemos ver na resolução da seguinte tarefa:

$$\begin{aligned} 30 \div 5 &= \\ (30 \div 5) \times 2 &= \\ (30 \times 2) \div (5 \times 2) &= \\ \frac{30 \times 2}{10} = \frac{30}{10} \times 2 &= 3 \times 2 = 6 \end{aligned}$$

Pode-se, também, realizar várias decomposições no dividendo, como podemos observar na resolução da tarefa a seguir:

$$\begin{aligned} 85 \div 5 &= \\ (80 + 5) \div 5 &= \\ (8 \times 10 + 5) \div 5 &= \\ 8 \times 2 + 1 &= 17 \end{aligned}$$

As tecnologias destas técnicas estão baseadas nas propriedades da multiplicação. A primeira técnica se apoia na propriedade distributiva e, a segunda se apoia na decomposição aditiva e multiplicativa e propriedade distributiva da multiplicação.

Para as divisões por 50, nos limitamos às tarefas em que o dividendo é da ordem das centenas ou unidade de milhar inteira. Assim, o último algarismo do dividendo será zero e será possível empregar a estratégia de desprezar o último algarismo da direita, tornando o divisor o número 5.

- T_{12.3}: Dividir dois números de forma que o dividendo seja um número formado por 2 algarismos e o divisor um número de 1 algarismo.

As tarefas que compõem este tipo de tarefa se limitam a divisões exatas. Elas oportunizam não só a exploração de técnicas já vistas em outros tipos de tarefa como a observação de algumas regularidades que estas técnicas compreendem, como nos “ensaios sucessivos” (GUIMARÃES, 2009, p.169), onde se descobre o quociente por tentativa com base na multiplicação, como podemos ver no exemplo que segue:

$$\begin{aligned}
78 \div 6: \\
78 \div 6 = \\
10 \times 6 = 60 \\
11 \times 6 = 66 \\
12 \times 6 = 72 \\
13 \times 6 = 78
\end{aligned}$$

Logo, o quociente é 13.

- T_{12.4}: Dividir um múltiplo de 25 por 25.

Neste tipo de tarefa, é visada a exploração de duas estratégias: a apresentada anteriormente denominada de “ensaios sucessivos” (idem) onde multiplica-se o 25 por outros números até que se encontre o valor do dividendo, e a que visa a decomposição do dividendo fazendo com que divisão seja feita por meio da distributividade. Acreditamos que o foco no número 25 neste tipo de tarefa, seja o mesmo de T_{11.5} e se deve ao fato da correspondência $25 = \frac{1}{4} \times 100$.

- T₁₃: Descobrir a dezena inferior de um número dado.

Este tipo de tarefa tem como objetivo trabalhar o significado de dezena inferior de um número. Para verificar qual a dezena inferior de um número dado basta subtrair uma dezena e o valor da unidades do número em questão.

Por exemplo, na tarefa identificar a dezena inferior de 36, para descobrir qual é a dezena inferior basta subtrairmos uma dezena $36 - 10 = 26$ e então a dezena inferior a 36 é 20, logo basta subtrair 16 de 36.

- T₁₄: Identificar quais números (fatores) que quando multiplicados têm como produto um número n.

Este tipo de tarefa abrange tarefas como verificar se 24 pertence à tabuada do 6, em que a técnica empregada pode ser recorrer à tabuada do 6. Porém caso não tenha memorizado a tabuada é possível recorrer à operação de divisão que consiste em dividir o número à verificar pelo número equivalente à tabuada.

Assim, para resolver o exemplo enunciado basta dividir 24 por 6 e, como neste caso a divisão é exata, então o número 24 pertence à tabuada do 6. Lembramos que estamos lidando com números naturais, então caso a divisão não seja exata significa que o número não pertence à tabuada. A estratégia da divisão tem relação com a exploração da tabuada porque “numa divisão de dois números naturais, com o divisor diferente de zero, o dividendo é igual ao produto do divisor pelo quociente somado com o resto” (GUIMARÃES, 2009, p. 78).

Ressaltamos que esta técnica tem sua fundamentação da *divisão euclidiana*, o que justifica sua validade.

Outra tarefa que pertence a este grupo é identificar quais números que multiplicados resultam em 36. Aqui também é possível recorrer à tabuada, onde encontramos 4×9 , mas além dela, ou a partir dela, também podemos recorrer à decomposição multiplicativa, que visa decompor em fatores um dos fatores (ou os dois) da multiplicação, e utilizar as propriedades associativa e comutativa, como podemos ver a seguir:

$$36 = 4 \times 9$$

$$4 \times 9 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = (2 \times 3) \times (2 \times 3) = 6 \times 6$$

É possível decompor somente um dos fatores, tendo:

$$4 \times 9 = 2 \times 2 \times 9 = 2 \times (2 \times 9) = 2 \times 18 = 36$$

Apresentamos agora de forma sintetizada no quadro 1, todos os tipos e subtipos de tarefas elencados *a priori* para o desenvolvimento do cálculo mental, a partir da tese de Guimarães (2009), e que serão utilizados na análise que segue no próximo capítulo:

Tipos de tarefas <i>a priori</i>	
T1: Completar uma sequência numérica, progressiva e regressivamente, de n em n, a partir de um número dado.	
T2: Escrever por extenso, números expressos em algarismos.	
T3: Escrever em registro numérico um número enunciado em língua materna.	
T4: Escrever em registro numérico um número enunciado em função de suas ordens.	
T5: Identificar a quantidade de dezenas e/ou centenas que compõem um número.	
T6: Identificar o sucessor e o antecessor de um número.	
T7: Identificar quanto falta para chegar a um determinado número a partir de outro.	
T8: Formar dezenas ou centenas inteiras, de modo a chegar na dezena ou centena superior.	
T9: Somar parcelas	T9.1: Somar dois números que estão entre 0 e 10.
	T9.2: Somar números formado por 2 ou 3 algarismos com números formados por 1 algarismo.
	T9.3: Somar dezenas inteiras.
	T9.4: Somar dois números, tal que a soma dos algarismos relativo às unidades ou às dezenas é inferior ou superior a 10.
T10: Subtrair dois números	T10.1: Subtrair números que estão entre 0 e 2, de forma que minuendo sempre é maior que o subtraendo.
	T10.2: Subtrair números formados por 2 e 3 algarismos (minuendo) por números formados por 1 algarismo (subtraendo).
	T10.3: Subtrair uma centena exata de um número dado.
T11: Multiplicar dois números	T11.1: Multiplicar dois números que estão entre 1 e 10.
	T11.2: Multiplicar um número por potências de 10.
	T11.3: Multiplicar um número por 5, 50 ou 500.
	T11.4: Multiplicar dois números, tal que um dos fatores seja formado por 1 algarismo e o outro por 2 ou 3 algarismos.
	T11.5: Multiplicar dois números de forma que ambos fatores sejam números formados por dois algarismos.

	T _{11.6} : Multiplicar um número de dois algarismos por 25.
T₁₂: Dividir dois números	T _{12.1} : Dividir números terminados em um, dois ou três zeros por 10, 100 ou 1000.
	T _{12.2} : Dividir números múltiplos de 5, por 5 e 50.
	T _{12.3} : Dividir dois números de forma que o dividendo seja um número formado por 2 algarismos e o divisor um número de 1 algarismo.
	T _{12.4} : Dividir um número, múltiplo de 25, por 25.
T₁₃: Descobrir a dezena inferior de um número dado	
T₁₄: Identificar quais números (fatores) que quando multiplicados têm como produto o número n.	

Quadro 1: Descrição dos tipos e subtipos de tarefas a priori

Fonte: Elaborado no desenvolvimento da pesquisa

2.3 COLEÇÃO: DA ESCOLHA À SUA ESTRUTURA

Escolhemos analisar uma coleção de 5 volumes destinados aos cinco primeiros anos do ensino fundamental. Tal escolha deve-se ao fato de o trabalho com o cálculo mental não se restringir a um volume; ao contrário, como já discutido, é indicado que a habilidade de realizar cálculos mentalmente seja trabalhada ao longo dos 5 anos. Uma vez que decidimos analisar toda uma coleção, passamos à escolha da coleção.

Na busca por uma proposta de ensino de cálculo mental que, de fato, prepare o aluno para realizar este tipo de cálculo não optamos pela coleção mais adotada no Brasil, e sim por uma que proponha formas de desenvolver tal habilidade. Assim, a escolha foi feita a partir da leitura do Guia do PNLD/2016, visando identificar a coleção que de algum modo se propusesse a trabalhar o cálculo mental ao longo dos volumes. Buscamos nas resenhas e sumários apresentados pelo Guia, nos livros de cada ano, observações que indicassem um trabalho voltado ao ensino dessa habilidade. A coleção que se sobressaiu nesses aspectos atendendo ao nosso critério é a Novo Bem-me-quer, cujas autoras são cinco professoras de matemática: Ana Lúcia Bordeaux, Cléa Rubinstein, Elizabeth Ogliari, Elizabeth França e Vânia Miguel.

Com relação a esta coleção, no Guia é ressaltado que são presentes seções denominadas “cálculo mental”, e que a habilidade é um dos destaques da coleção e, além disso, os livros de 4º e 5º anos contém várias atividades que “enriquecem a abordagem do cálculo mental” (BRASIL, 2015, p. 270). Além disso, o sumário da coleção apresentado no Guia também mostra a presença de atividades que estejam ligadas ao cálculo mental.

Notamos que o cálculo mental não é trabalhado somente nas seções explicitamente dedicadas a esse tema. De acordo com o manual do professor, as autoras se propõem a trabalhar o eixo de *números e operações* ao longo de toda a coleção, e, especificamente, no tema de *operações* visam desenvolver a habilidade do cálculo mental: “em relação ao tema Operações, temos como objetivo levar o aluno a: [...] desenvolver procedimentos de cálculo mental (exato

e aproximado) por meio da observação de regularidades e propriedades das operações para prever resultados” (BORDEAUX et al, 2014, p.233). Diante disso, em nossa análise nos direcionaremos aos capítulos que abordam a temática de operações.

Os 5 volumes da coleção são compostos pelo livro do aluno e acrescido de um suplemento ao professor denominado manual do professor. Este suplemento conta com uma parte comum em todos os volumes e uma parte que é específica de cada volume. Na parte comum, há textos sobre o referencial teórico e metodológico adotados na produção da obra. Ressaltamos aqui que neste momento as autoras trazem, entre outros textos, um recorte do texto escrito por Parra (1996) sobre o cálculo mental. Este fato nos ajudou a identificar a perspectiva adotada para o trabalho com o cálculo mental, mas lembramos que este não foi o único.

Entre os tópicos comuns presentes no manual do professor, há um referente à estrutura da obra, com a descrição de todas as seções que permeiam os livros e o foco delas. Na descrição da seção destinada ao cálculo mental confirmamos que a perspectiva adotada é a descrita por Parra (1996):

Considerando que cálculo mental é o cálculo pensado, realizado sem apoio do algoritmo convencional, essa seção apresenta tanto atividades preparatórias para o cálculo mental (composição e decomposição de números, sequências, aproximação, propriedades das operações etc.) quanto técnicas de cálculo mental, em que os procedimentos aplicados estão fundamentados nos conceitos abordados nas atividades preparatórias. (BORDEAUX et al, 2014a, p.258)

Esta seção começa a aparecer a partir do livro do 2º ano, no entanto, como já dito anteriormente, não é somente nessa seção que a habilidade é trabalhada e por isso analisamos os livros de maneira geral incluindo os demais textos que precedem e sucedem as seções e, partimos do livro do primeiro ano. No que diz respeito à parte específica de cada volume, são trazidas orientações e sugestões didáticas para as atividades presentes ao longo do livro, separadas por capítulo. Também são trazidas atividades extras e sugestões de projetos a serem desenvolvidos com os alunos, bem como sugestões de leituras e demais textos para formação do professor.

Dividimos a análise da coleção em dois blocos, um abrange os livros dos 1º, 2º e 3º anos e o outro os livros do 4º e 5º anos. Optamos por essa escolha, pois, no primeiro bloco diz os livros referem-se à alfabetização-matemática, como consta no PNLD 2016, enquanto o segundo bloco são livros ditos de matemática; dessa forma os tipos de tarefas e técnicas nestes momentos têm focos distintos quando referido ao cálculo mental.

3. PRODUÇÃO E ANÁLISE DE DADOS

Neste capítulo trazemos a análise dos volumes que compõem a coleção. Investigamos as organizações matemáticas e as organizações didáticas em torno da habilidade do cálculo mental. Dessa forma, destacamos tarefas e descrevemos os tipos de tarefas, ambos relacionados com o cálculo mental, modelados a partir do livro do aluno. Lembramos que o cálculo mental é uma habilidade e em vista disso consideramos olhar para as atividades que preparam o aluno para executar o cálculo mentalmente. Além disso, destacamos que a identificação de tarefas e seus determinados tipos não devem necessariamente se adequar aos *tipos de tarefas a priori*, sendo possível (e provável) que surjam tarefas de outros tipos relacionadas ao cálculo mental.

No volume 1, trazemos uma descrição do que é trabalhado nos capítulos do livro do primeiro ano. Apresentamos tarefas que preparam para o cálculo mental com suas respectivas técnicas quando apresentadas, e também uma síntese sobre as atividades que preparam para o cálculo mental. No volume 2 e 3, além da descrição da sistematização do livro do 2º ano, ressaltamos as atividades encontradas nas seções destinadas ao trabalho com o cálculo mental. Tentamos trazer ao final algumas relações entre as tarefas e técnicas presentes nos livros do 1º, 2º e 3º anos.

Sugerimos que para leitura deste capítulo o leitor tenha em mãos o Anexo 1, pois nele constam os tipos de tarefa *a priori* do Quadro 1 acrescido com tipos e subtipos de tarefas modelados ao longo da pesquisa e, o Anexo 2, pois nele listamos as técnicas encontradas.

3.1 VOLUME 1

Neste volume, que conta com 5 capítulos, são trabalhados os números naturais até o 59. O primeiro capítulo contempla as primeiras noções matemáticas sem referência aos números. No capítulo 2 é dado início ao estudo dos números de zero ao dez. Conforme os números são apresentados, são propostas, além de atividades que treinam a sua representação, atividades de contagem, que também retomam os números anteriores.

A formalização das operações de adição e subtração, assim como a representação dos sinais de mais e de menos, estão presentes no 3º capítulo. Já no capítulo 4 são trabalhados os números com as operações de adição e subtração até o 59. Por fim, no capítulo 5, a temática apresentada é em torno do eixo de grandezas e medidas, quando são apresentadas as medidas de massa, comprimento, tempo e capacidade.

Cabe aqui falar que o cálculo mental, conforme as autoras, tem seu desenvolvimento no tema de operações por isso nos dedicaremos a olhar para os capítulos que tratam deste tema.

Neste volume as tarefas que têm relação com o cálculo mental se encontram nos capítulos 2, 3 e 4. No próximo tópico, nos dedicamos à exploração das tarefas apresentadas neste volume, bem como às técnicas e às escolhas feitas pelas autoras.

3.1.1 A ORGANIZAÇÃO PRAXEOLÓGICA DO LIVRO DO 1º ANO

As autoras iniciam a obra visando a familiarização com os números de zero a 10. Essa familiarização envolve a representação numérica, a escrita dos números e exemplos com contagem. No Manual do Professor não encontramos nenhuma orientação sobre os alunos já conhecerem alguns números, senão a seção *Mostre o que você sabe* que segundo o Manual considera os conhecimentos prévios dos alunos; no caso, questiona quais os números os alunos conhecem e onde viram. Nesta etapa a contagem é importante para compreensão e observação das regularidades do sistema de numeração decimal, bem como aplicar sua utilidade em situações diárias que necessitem contar. De acordo com Parra (1996, p. 217) “para resolver um problema no qual se aumenta ou se diminui uma quantidade, o procedimento mais utilizado pelas crianças é o de materializar as quantidades (objetos, desenhos, dedos, etc.) e resolver por contagem”. De forma intrínseca a este processo é fundamental a apropriação acerca da ampliação da sequência numérica oralmente e, portanto, faz-se necessário que

Estes procedimentos, para que sejam colocados em ação, requerem por parte do aluno uma boa disponibilidade da série numérica oral, particularmente a capacidade de:

- dizer diretamente o número seguinte e o anterior de um determinado número sem recitar a série desde o início;
- continuar a série oralmente a partir de um número determinado, em um sentido e em outro;
- [...]
- poder contar de 2 em 2, de 5 em 5, de 10 em 10, demonstra ser particularmente importante como apoio fundamental ao cálculo. (PARRA, 1996, p.218)

Neste sentido, o trabalho com a sequência numérica contribui para que procedimentos mentais de resolução sejam desenvolvidos nesta etapa, fazendo com que os alunos representem as situações mentalmente e construam os resultados. Por este motivo, consideramos importante em nossa pesquisa as tarefas que têm o objetivo de trabalhar as sequências numéricas.

No momento da apresentação do número 8, é solicitado, pela primeira vez, que se complete uma sequência numérica (Figura 1). Essa tarefa faz parte do tipo de tarefa *a priori* elaborado que denominamos T₁.

ESCREVA DE 1 ATÉ 8.

1	2	3	4	5	6	7	8
---	---	---	---	---	---	---	---

AGORA VOLTANDO...

8	7	6	5	4	3	2	1
---	---	---	---	---	---	---	---

Figura 1: Completar a sequência de forma progressiva e regressiva

Fonte: BORDEAUX et al, 2014a, p. 61

As tarefas deste tipo contribuem para o desenvolvimento do cálculo mental, uma vez que o mesmo se fundamenta no Sistema de Numeração Decimal, em que é preciso compreender as ordens e regularidades que o constituem. É preciso compreender que a cada agrupamento de 10 muda-se a ordem e que depois do 10 os números apresentam uma regularidade com relação à ordem das unidades. Tais fatos podem ser notados a partir de um trabalho que vise a enunciação de uma sequência numérica. As tarefas do tipo T_1 aparecem 39 vezes ao longo deste livro, conforme ocorre a familiarização de outros números.

Imbricado a este tipo de tarefa, temos aquelas que visam identificar o antecessor e sucessor de um número e estão agrupadas na elaboração *a priori* como T_6 : Identificar o sucessor e o antecessor de um número. Poderíamos não elencar este grupo como importante se considerarmos que T_1 já trabalha de certa forma o número que vem antes e depois, porém este tipo de tarefa trabalha pontualmente as sequências próximas aos nós (LERNER e SADOVSKY, 1996). É fundamental a compreensão acerca da sequência dos números em particular quando tratamos dos nós, que é onde ocorre a mudança de ordem, pois se não se sabe identificar os momentos de mudança e quais são as regularidades em torno delas, será difícil realizar algum cálculo.

Dessa forma consideramos que as tarefas do tipo T_6 são relevantes principalmente quando tratamos da sequência numérica próxima aos nós. Inicialmente as tarefas com essa função aparecem no livro após a familiarização com os números de zero a dez, depois são trabalhadas ao longo do livro conforme são propostos os outros números que pertencem às outras ordens. Ressaltamos que as tarefas deste tipo sempre aparecem ao final dos capítulos e após o trabalho com diferentes ordens, ou seja, depois de apresentar a sequência do 20 ao 29, depois da sequência do 30 ao 39 e assim por diante até o 59; notamos ainda que nesta escolha as autoras buscam retomar o antecessor e sucessor de ordens anteriores. Neste livro contabilizamos um total de 42 tarefas do tipo T_6 .

A técnica que resolve estes tipos de tarefas, T_1 e T_6 , no momento que antecede a formalização da adição é o reinvestimento da sequência numérica, ou seja, como T_6 é uma forma de completar sequências numéricas, *recorre-se à sequência numérica já escrita* (τ_1), ou memorizada, para identificar o número que vem antes e depois.

No capítulo 3, antecedendo a formalização da operação de adição, nos deparamos com uma atividade (Figura 2) que apresenta uma ideia de composição de números e a noção de adição. A composição está atrelada à decomposição, ambas assumem um papel importante com relação às estratégias que são desenvolvidas para o cálculo mental (BRASIL, 2014).



Figura 2: Ideia de composição
Fonte: BORDEAUX et al, 2014a, p. 89

É possível observar, que nas letras miúdas, que há orientação para que o professor explore a atividade, já que são possíveis diferentes combinações de números para que se some o total de pontos. Para saber decompor um número é necessário saber compô-lo. A composição de uma dezena, por exemplo, pode ser feita de diferentes formas como $5 + 5$; $8 + 2$; $7 + 3$, entre outras. Considerando que a decomposição é uma das estratégias mais exploradas para operar mentalmente (BRASIL, 2015), consideramos que a composição também deve ser explorada vista a relação entre esses procedimentos, e de fato, encontramos tarefas que visam o trabalho com a composição. Em vista disso, o primeiro tipo de tarefa identificado no livro e que não consta nos tipos de tarefas *a priori* é T_{15} : *Identificar diferentes formas de compor um número*.

A noção intuitiva da adição, que tem intrínseca uma ideia de compor também é proposta em um jogo de cartas denominado *Somando 6*. Este jogo, que deve ser trabalhado em dupla, é composto por um baralho numerado de 0 a 6; cada jogador retira uma carta e reserva-a, na sequência retira mais uma carta do monte. O jogador que obtiver primeiro a soma 6 ganha o jogo. Entendemos que utilizar um jogo para introduzir estas noções é uma *escolha didática* das autoras. Nas orientações para o professor, sugere-se que este jogo seja modificado por

Somando 7, Somando 8 ou Somando 9, oportunizando o trabalho com diferentes formas de compor um número.

Os jogos, segundo Parra (1996), desempenham um importante papel em sala de aula, pois faz com que os alunos sejam independentes e ativos nos processos que compõem o jogo tais como: respeitar regras, fazer acordos e atuar em diferentes posições. Para o professor, oportuniza a atenção para aqueles que estão com dificuldades e a variação de propostas de acordo com os níveis em que se encontram os alunos. Ananias (2010) em sua pesquisa que visava construir e retomar os conceitos das quatro operações por meio do uso do dominó e o calendário, com alunos do 5º ano, concluiu que

No que diz respeito ao Cálculo Mental durante o Torneio, as jogadas proporcionaram aos alunos o desenvolvimento da aritmética, o raciocínio, a descoberta e troca de ideias, a habilidade de refletir sobre os cálculos, a valorização da autonomia e a relação do aluno com a Matemática. (ANANIAS, 2010, p.152)

O livro do 1º ano apresenta um total de 4 jogos, no entanto, encontramos apenas um jogo que, ao nosso ver, contribui indiretamente com o cálculo mental, pois faz com que os alunos realizem a soma de dois números tendo em vista formar um outro.

Depois destas atividades, as tarefas que visam a composição aparecem já com o sinal de “mais”. Este tipo de tarefa aparece 48 vezes ao longo deste livro. Algumas dessas tarefas apresentam indícios da propriedade comutativa da adição, como vemos na Figura 3:

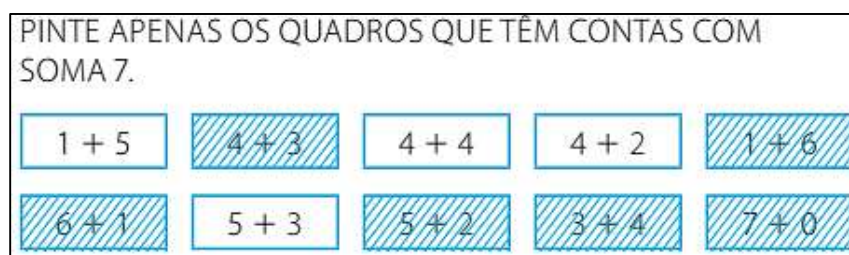


Figura 3: Composição e a comutatividade da adição
Fonte: BORDEAUX et al, 2014a, p. 96

Ressaltamos ainda a composição pois, no livro seguinte, as atividades de soma têm como estratégia a decomposição visando formar dezenas exatas e, para isso, é utilizada composição de números.

Algumas atividades que apresentam a adição de forma intuitiva também são propostas antecedendo a adição, que é formalizada com a apresentação do sinal de mais e a notação em pequenas expressões numéricas, como $1 + 1 = 2$. Cabe dizer que a passagem da língua materna para a linguagem matemática conta com atividades que visam a contagem de ostensivos e atividades como mostra a Figura 4. Pode-se dizer que a operação não é apresentada de forma

direta, possibilitando que o aluno desenvolva o cálculo mental e identifique a técnica em pregada. Paralelamente, é feita a apresentação da técnica do uso dos dedos da mão para resolver as pequenas expressões numéricas. As primeiras somas trabalhadas são entre números que estão entre 0 e 10, que já denominamos como o subtipo de tarefa $T_{9.1}$. Dentre essas é trabalhada a composição do 10, cuja relevância ressaltaremos posteriormente. As tarefas que pertencem a este subtipo, aparecem 19 vezes. Modelamos a técnica relativa à manipulação dos dedos das mãos para resolver as tarefas do tipo $T_{9.1}$ como τ_2 : *(sobre)contagem com auxílio dos dedos*.

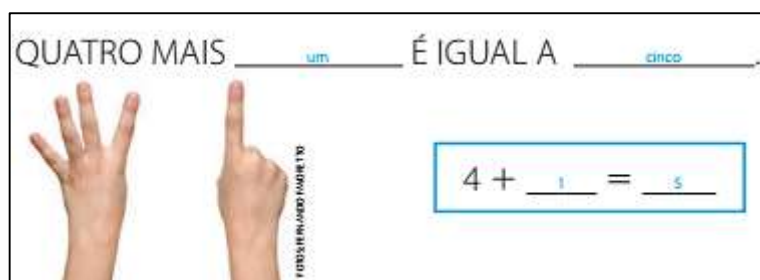


Figura 4: Técnica para tarefas do tipo $T_{9.1}$
Fonte: BORDEAUX et al, 2014a, p. 95

A sobrecontagem é contar a partir do maior número, assim na soma $3 + 6$ conta-se a partir do número 6 com o auxílio dos dedos das mãos. Este tipo de técnica também funciona para resolver as tarefas do tipo T_1 , como em uma sequência numérica de 2 em 2, pois basta somar 2 para saber o próximo número. Vale ressaltar que esta técnica é válida devido à propriedade comutativa da adição, que não é explicitada no livro mas que é trabalhada de forma intuitiva em algumas atividades. No entanto, a comutatividade não é trabalhada no livro com intuito de justificar a validade da técnica.

Após as somas com duas parcelas, são propostas atividades que visam a soma de três números que estão entre 0 e 10. Essas somas são apresentadas inicialmente com o auxílio de ilustrações e posteriormente com escrita numérica, com objetivo de que os alunos percebam diferentes formas de compor, com três parcelas, números que estão entre 0 e 10. Em uma soma de dois números recorrer ao emprego da decomposição de um dos números, torna a soma de dois números uma soma com três números e, por isso vale ressaltar a importância das tarefas que propõem este tipo de soma. Para tanto, modelamos um subtipo de tarefa de T_9 que não aparece *a priori* como $T_{9.5}$: *Somar três números que estão entre 0 e 10*.

Posteriormente, é introduzida a operação de subtração da mesma forma como é feita na adição, isto é, com atividades que trazem uma noção intuitiva da operação e depois a formalização da notação utilizada. As tarefas de subtração encontradas se encaixam no subtipo de tarefa *a priori* $T_{10.1}$. No entanto, neste livro são propostas apenas subtrações de dois números

que estão entre 0 e 10 que futuramente quando automatizadas auxiliam nas subtrações de números de outras ordens e classes. Por exemplo, para resolver $24 - 3$ basta subtrair os algarismos das unidades, no caso 4 e 3, e com este resultado memorizado agiliza-se o processo do cálculo. Neste livro, encontramos 15 tarefas do tipo $T_{10.1}$. As tarefas que visam subtrair números que estão entre 0 e 10 também apresentam τ_2 como técnica.

No capítulo 4, encontramos um jogo de tabuleiro que propõe em seguida atividades para pensar a partir do que foi feito no jogo. O jogo consiste em uma corrida de peões que se movem em casas de um tabuleiro numerado até 20, de acordo com os números sorteados pelos alunos nos dados. Nas atividades que se encontram posterior ao jogo, identificamos tarefas do tipo T_6 (Figura 5).

NA TRILHA, QUE NÚMERO APARECE IMEDIATAMENTE:

A) ANTES DA CASA 11? 10

B) DEPOIS DA CASA 14? 15

C) ANTES DA CASA 18? 17

D) DEPOIS DA CASA 19? 20

Figura 5: Jogo de tabuleiro

Fonte: Fonte: BORDEAUX et al, 2014a, p. 158

Neste jogo, não é necessário que o aluno recorra ao tabuleiro para identificar qual o número vem antes ou depois, uma vez que a operação de adição já foi introduzida e pode ser empregada para tal. Além disso é possível que o aluno já tenha memorizado a sequência e recorra à esta estratégia para identificar os números que antecedem e sucedem um dado número.

Ainda na metade do capítulo 4, é apresentada a formalização da dezena como equivalente a 10 unidades. A partir disso vão sendo propostas atividades de agrupamento de 10 em 10 e de representação de uma dezena. A ideia do que é uma dezena é importante para o desenvolvimento do cálculo mental pois as estratégias que são desenvolvidas em sua maioria levam em consideração a formação, composição e o trabalho com dezenas devido à facilidade de se operar com potências de 10 visto que o sistema de numeração é decimal.

No Manual do Professor é explicitado que um dos objetivos deste capítulo, além do trabalho com as dezenas, é a composição e decomposição de números. Identificamos algumas atividades que trabalham a composição e decomposição fazendo relação aos números de 11 a 19, de 20 a 29, de 30 a 39 utilizando a contagem por agrupamentos de 10 como vemos na Figura 6:

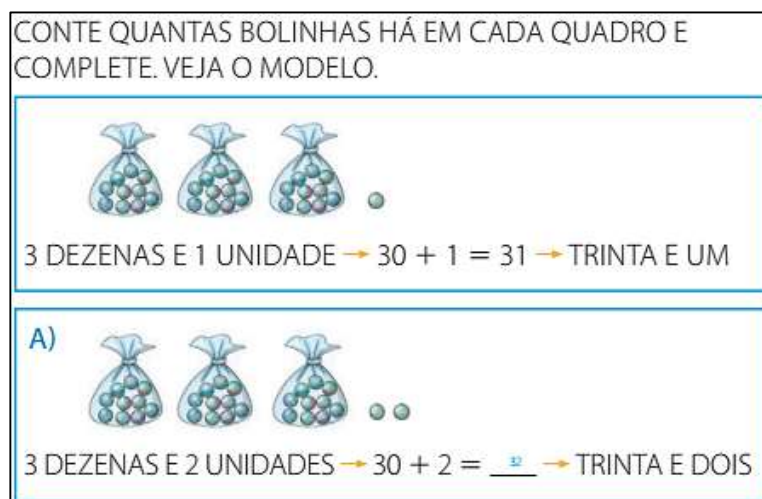


Figura 6: Contagem com agrupamentos de 10
 Fonte: Fonte: BORDEAUX et al, 2014a, p. 150

A composição e a decomposição desses números são feitas em uma sequência de associações: tem-se a representação na imagem de saquinhos com 10 bolinhas em cada um e bolinhas soltas; a escrita que faz uma associação de que 3 dezenas equivalem ao número 30, 2 unidades equivalem ao número 2 e o termo *e* como a ideia de soma. Assim, 3 saquinhos e 2 bolinhas, ou 3 dezenas e 2 unidades, correspondem à adição $30 + 2$ que forma o número 32. Na Figura 6 trazemos o enunciado da atividade com os números de 30 a 39.

A contagem com agrupamentos de 10 é reforçada posteriormente com atividades que solicitam a formação de grupos com 10 objetos e, também que colocam grupos com 10 objetos para fazerem a correspondência de sua quantidade, ou seja, dez, vinte, trinta, etc. Quando presentes, as ilustrações permitem que se conte fazendo uma relação biunívoca, em que cada objeto representado contado é associado a um número. Depois de realizar tarefas deste tipo várias vezes, será identificado de forma automática que cada agrupamento de 10 unidades corresponde a uma dezena e que, somando 10 sucessivamente, vai mudando a ordem. Ressaltamos que os agrupamentos de 10 contribuem para que a contagem de 10 em 10 se torne automatizada, o que é fundamental quando se trata de estratégias de cálculo mental e contribui para que tarefas do tipo T_1 sejam realizadas quando $n=10$.

Antes da apresentação da sequência numérica do 40 ao 49, é proposta na seção *Desafio* uma tarefa do tipo T_1 em que pela primeira vez é solicitado que se complete uma sequência numérica de 5 em 5, como vemos na Figura 7:

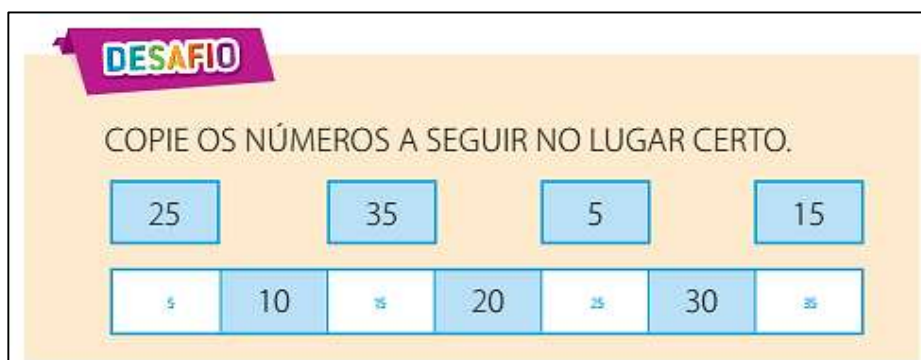


Figura 7: Completar uma sequência de 5 em 5
 Fonte: Fonte: BORDEAUX et al, 2014a, p. 152

No Manual do Professor afirma-se que as atividades inseridas na seção de Desafio têm como objetivo “permitir que os alunos coloquem em prática conceitos e ideias já conhecidos para resolver situações ou fazer novas descobertas e, como o próprio nome da seção indica, para vencerem desafios valendo-se, muitas vezes, de estratégias próprias” (BORDEAUX et al, 2014a, p.259). Dessa forma, contabilizamos esta tarefa como do tipo T_1 .

Ao final do capítulo 4, após a apresentação dos números que vão de 50 a 59, é formalizada a técnica que resolve algumas tarefas do tipo T_1 , ou seja, quando se trata de completar uma sequência numérica, de forma progressiva ou regressiva, de 1 em 1.



Figura 8: Formalização da técnica de tarefas do tipo T_1
 Fonte: BORDEAUX et al, 2014a, p. 158

Como vemos na Figura 8, a indicação da técnica é feita ao se evidenciar por meio de setas que para saber o próximo número da sequência é necessário somar 1, e para saber o número anterior, subtrair 1. O mesmo vale se a sequência fosse de 2 em 2, de 5 em 5, isto é, de n em n , sendo n um número natural. Sendo assim, modelamos a técnica que resolve as tarefas do tipo de T_1 como: τ_3 : *Somar ou subtrair, de forma sucessiva, de n em n .*

Essa técnica foi empregada, de forma explícita, 4 vezes. No entanto, em particular, para as tarefas do tipo T_6 também temos uma indicação, que é apresentada como *Desafio* com a mesma sistematização de setas, depois da atividade apresentada na Figura 2 que modelamos como: τ_4 : *Somar 1 para saber o sucessor e, subtrair 1 para saber qual o número antecessor.*

Já o emprego desta técnica é solicitado de maneira explícita 2 vezes. Notamos que se τ_2 for empregada de forma sucessiva, resolve parte das tarefas do tipo T_1 . E de forma limitada, τ_1 também resolve as tarefas do tipo T_6 visto que esta técnica resolve parte das tarefas do tipo T_6 . Vale ressaltar que as tarefas deste tipo aparecem ao longo do trabalho com todas as ordens até o 59, antes da formalização da técnica, explorando e retomando a organização da sequência numérica.

Ao final do último capítulo deste livro encontramos uma tarefa do tipo T_1 proposta com o uso de dinheiro, em particular a exploração da nota de 10 reais que possibilita a sequência numérica de 10 em 10 como vemos na Figura 9:

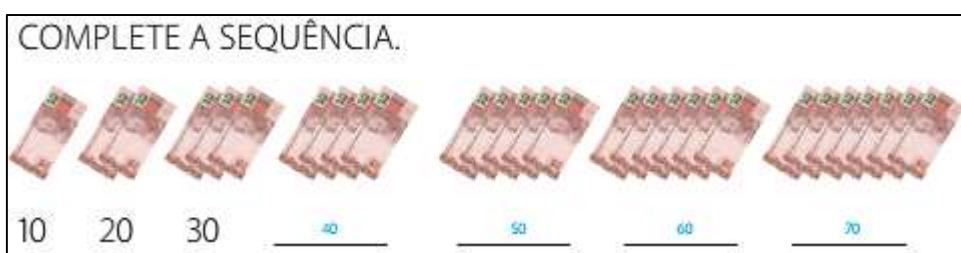


Figura 9: Uma tarefa do tipo T_1
Fonte: BORDEAUX et al, 2014a, p. 189

Inferimos que o uso do dinheiro para a tarefa do tipo T_1 é uma escolha didática do autor para explorá-la, assim como é feito com o uso de jogos em outros contextos. Ressaltamos que o uso de dinheiro possibilita a exploração de outras sequências de acordo com o valor das notas, como de 2 em 2, 5 em 5, 20 em 20 e assim por diante.

No próximo tópico, nos dedicamos a fazer uma síntese de como o cálculo mental e as tarefas que preparam para o seu desenvolvimento estão presentes no livro do 1º ano, bem como o quantitativo das tarefas e tipos de tarefas.

3.1.2 O CÁLCULO MENTAL NO LIVRO DO 1º ANO

Neste volume não encontramos as seções e chamadas específicas para o cálculo mental. No entanto, mesmo que não se tenha trabalhado de forma explícita o cálculo mental, para que o mesmo seja desenvolvido são necessárias algumas tarefas que o preparem.

Podemos observar que no livro do 1º ano os tipos e subtipos de tarefas estão ligados às tarefas que preparam o aluno para realizar o cálculo mental posteriormente nas operações de adição e subtração. Em vista disso, encontramos 3 dos tipos e subtipos de tarefas elaborados *a priori* (T_1 , T_6 e $T_{9.1}$) e, 2 outros (T_{15} e $T_{9.5}$) que não foram trabalhados na pesquisa de Guimarães, mas são relevantes para o desenvolvimento da habilidade do cálculo mental. As técnicas que

resolvem estas tarefas, são 4 (τ_1 , τ_2 , τ_3 e τ_4). No Quadro 2 apresentamos o quantitativo das tarefas relativas aos tipos de tarefas encontrados no livro:

Tipos de tarefas	T_1	T_6	$T_{9.1}$	$T_{10.1}$	T_{15}	$T_{9.5}$
Quantidade	39	42	19	15	48	15

Quadro 2: Quantidade de tarefas em função dos tipos
Fonte: Elaborado no desenvolvimento da pesquisa

Vemos que o tipo de tarefa mais proposto é T_{15} , com 48 tarefas que buscam diferentes formas de compor um número, incluindo a dezena, e tarefas que apresentam o número como composição, por exemplo, $40 + 2 = 42$. As tarefas relativas à composição não foram contabilizadas como tarefas acerca da operação de adição, pois identificamos que os papéis assumidos são diferentes: em $T_{9.1}$ a soma de parcelas que estão entre 0 e 10 visa tornar estas somas automatizadas para facilitar cálculos futuros; T_{15} inclui as tarefas que visam as diferentes formas de se compor um número. Em segundo lugar temos as tarefas do tipo T_6 , que são propostas após o trabalho com cada ordem, sempre fazendo uma retomada. As tarefas deste tipo incluem enunciados que solicitam o número que vem antes e/ou o número que vem depois, pois nesta etapa ainda não utilizam o termo antecessor e sucessor.

Na Figura 10, relacionamos os tipos de tarefas com as respectivas técnicas que o resolvem. Ressaltamos que 2 dos tipos de tarefas encontrados possuem duas técnicas que o resolvem. Isto acontece porque há uma evolução conforme outros conhecimentos vão sendo trabalhados. Entretanto, há também tipos de tarefas diferentes que são resolvidas pela mesma técnica.

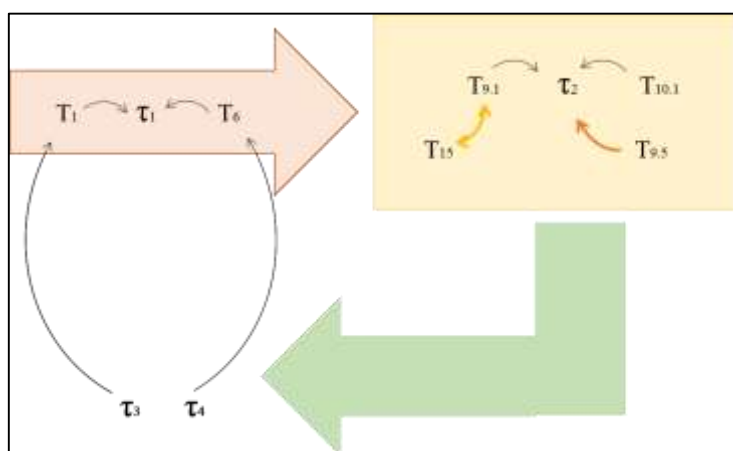


Figura 10: Relação de tipos de tarefas e técnicas do Livro 1
Fonte: Elaborado no desenvolvimento da pesquisa

Assim, para resolver as tarefas do tipo T_1 em um primeiro momento observamos que a técnica que possibilita a resolução de tarefas deste tipo é a busca de olhar em tabelas (τ_1), ou

em algum sequenciamento numérico já feito, pois no início as sequências solicitadas são progressivas ou regressivas de 1 em 1 e, entendemos que é o que está disponível para que o aluno recorra no livro. A mesma técnica pode ser empregada para as tarefas do tipo T_6 pois elas são propostas próximas ao momento em que as tarefas do tipo T_1 também são trabalhadas. Antecedendo a apresentação da operação da adição, algumas tarefas com a ideia de compor são propostas, mas a composição é ainda mais explorada nas tarefas aditivas. A partir da adição as tarefas do tipo $T_{9,1}$ são abordadas.

A seta que relaciona T_{15} e $T_{9,1}$ tem o intuito de expressar que T_{15} está de certa forma incluída em $T_{9,1}$, pois são casos particulares das tarefas deste tipo. No entanto, contabilizamos separadamente as tarefas de cada tipo, pois entendemos que cada um destes tipos tem funções diferentes. Na Figura 10, notamos que tanto as tarefas do tipo $T_{9,1}$ quanto as do tipo $T_{10,1}$ e $T_{9,5}$ são resolvidas por meio da técnica τ_2 , pois o uso dos dedos das mãos pode ser tanto para tarefas aditivas com números que estão entre 0 e 10 quanto as subtrativas.

A formalização da operação de adição possibilitou que novas técnicas que resolvem T_1 e T_6 , respectivamente, τ_3 e τ_4 , fossem elaboradas. Estes tipos de tarefas, possuem então, duas técnicas, a τ_1 que *envelhece* conforme a ideia de adição vai sendo implementada e as técnicas τ_3 e τ_4 que são formalizadas após exploração da operação de adição. Com relação a estas duas técnicas, poderíamos questionar se τ_4 (Somar 1 para saber o sucessor e, subtrair 1 para saber qual o número antecessor) não estaria inclusa em τ_3 (Somar ou subtrair, de forma sucessiva, de n em n), já que é um caso particular da técnica, no entanto, da mesma forma com a qual separamos os tipos de tarefas T_1 e T_6 , neste caso também separamos estas técnicas que são particulares para cada caso.

A seguir trazemos uma síntese de como estiveram presentes os tipos de tarefas e técnicas que preparam para o cálculo mental indicados até o momento:

- T_1 e T_6 são abordadas ao longo de todo livro, apresentando, como já ilustrado anteriormente, uma “evolução” de técnicas de acordo com os conteúdos estudados.
- $T_{9,1}$, T_{15} e $T_{9,5}$ são propostas após o trabalho com a operação de adição e apresentam uma técnica em comum. No entanto, as tarefas do tipo $T_{9,5}$ são pouco exploradas pois são abordadas em apenas um momento. Já as do $T_{9,1}$, T_{15} são trabalhadas em maior quantidade, por estarem compondo a parte em que se apresentam os novos números.

- $T_{10,1}$ é abordada após a apresentação da subtração e é pouco explorada não permanecendo em capítulos posteriores e tem a mesma técnica utilizada nas tarefas aditivas.

A análise do livro do 1º ano traz os primeiros passos com o sistema de numeração decimal, que deve ser compreendido já que é fundamental para o desenvolvimento do cálculo mental. As primeiras ideias das operações de adição e de subtração trazem algumas formalizações e indícios de tecnologia, como da propriedade comutativa da adição. O uso de ostensivos (BOSCH E CHEVALLARD, 1999), é bastante utilizado neste volume, porém, não demos destaque aos mesmos por não estarem relacionados com a preparação do cálculo mental.

Os tipos de tarefas e técnicas identificados até o momento são fundamentais para o desenvolvimento do cálculo mental. Na próxima seção damos seguimento com a análise do livro do 2º ano, na busca de compreender como a habilidade de calcular mentalmente se constitui.

3.2 VOLUME 2

O volume 2 é composto por 11 capítulos, dos quais 8 são dedicados ao trabalho com o eixo de números e operações. Neste volume são apresentados os números naturais até o 199. No primeiro capítulo é feita uma retomada dos números até 20 explorando seus usos e funções, como contar. No capítulo seguinte, em que o tema central é a operação de adição, as ideias de juntar e acrescentar são exploradas, utilizando, inclusive, a interpretação de situações-problema em que se emprega a adição para solução. É neste livro que, pela primeira vez, aparecem a seção *Cálculo Mental* e algumas chamadas ao longo dos textos denominadas *Preparando para o cálculo mental*. As chamadas se iniciam no capítulo 2, juntamente com as atividades de decomposição.

A retomada da operação de subtração é feita a partir das diferentes ideias da subtração, como retirar e completar, no terceiro capítulo, onde também são encontradas tarefas que preparam para o cálculo mental no que diz respeito a essa operação. O capítulo 4 se dedica a trabalhar com sólidos geométricos e suas classificações. No capítulo 5, acontece a familiarização com os números até 199. Logo é neste momento que a ideia de centena é introduzida. No capítulo 6 a temática gira em torno do eixo de grandezas e medidas, onde são exploradas as medidas de comprimento e massa.

Os capítulos 8 e 9 tratam das operações de adição e subtração até o 99, onde serão trabalhadas técnicas para o cálculo mental e o algoritmo com o quadro de ordens. Nos dois

capítulos seguintes as operações multiplicação e divisão são introduzidas e trabalhadas de forma breve, incluindo as noções de dobro, triplo e metade. Por fim, os capítulos 12 e 13 tratam de figuras planas e medidas, respectivamente.

Cabe aqui destacar que, conforme as autoras afirmam no Manual do professor, o cálculo mental tem seu desenvolvimento no estudo das operações aritméticas, por isso dedicaremos nosso olhar para os capítulos que tratam deste tema. Neste volume as tarefas identificadas encontram-se nos capítulos 1, 2, 3, 5, 8, 9, 10 e 11. É importante observar que alguns tipos de tarefa são direcionados à percepção e compreensão das regularidades do sistema de numeração decimal, assim como encontramos no volume anterior.

No próximo tópico, dedicamo-nos à exploração das tarefas apresentadas neste volume, bem como das técnicas e das escolhas feitas pelas autoras. Na análise deste volume, optamos por apresentar o quantitativo dos tipos de tarefas na seção posterior devido à presença de uma quantidade maior de tarefas de tipos diferentes.

3.2.1 A ORGANIZAÇÃO PRAXEOLÓGICA DO LIVRO 2º ANO

O primeiro capítulo é dedicado à retomada de alguns dos números vistos no volume anterior, em particular, os que estão entre 0 e 20. As tarefas foram encontradas neste momento são dos tipos T₁ e T₆, em que o objetivo é o estudo da sequência numérica. Logo no início deste livro, é possível observar que o uso dos dedos, que funcionava como uma técnica que auxilia no cálculo mental e foi incentivado no volume 1, é abandonado.

Por outro lado, o dinheiro começa a ganhar destaque como uma escolha didática das autoras na exploração do sistema de numeração. Em um momento em que o sistema monetário brasileiro é trabalhado, encontramos na seção denominada *desafio* uma atividade que visa explorar a composição do número 10:



Figura 11: Composição do 10 usando o dinheiro
Fonte: BORDEAUX et al, 2014b, p.32

Nesta atividade é apresentada uma nota de 10 reais, questionando sobre as possibilidades de se compor a quantia, como vemos no primeiro item presente na Figura 11.

Além disso, antes e ao final desta atividade há orientações ao professor do quão importante é o trabalho com questões relativas ao sistema monetário. Posteriormente, uma atividade com características similares é proposta, solicitando que sejam circulados os agrupamentos de notas que totalizam 20 reais. Ademais, é proposto que os professores organizem situações em que o aluno se depare com o uso do dinheiro, como em uma simulação de ida ao banco trocar uma nota ou ainda situações de compra e venda. Nota-se que uma preocupação das autoras em familiarizar o aluno com situações que são vivenciadas no dia-a-dia e em sugerir ao professor formas de se executar essas atividades com os alunos, visando a compreensão da importância do sistema monetário.

Carraher, Carraher e Schliemann (1995), por meio da realização de experiências afirmam que em situações do tipo comerciais, crianças e adolescentes que trabalham com seus pais, operam com o dinheiro na venda de mercadorias e no cálculo do troco com certa facilidade. Nestes contextos elas desenvolvem procedimentos de cálculo mental, como ao dar o troco completando o valor da nota a partir do valor da mercadoria. Dessa forma, inferimos que tanto o uso do dinheiro como escolha didática, quanto as situações que simulem seu uso, contribuem com o desenvolvimento do cálculo mental como atividades que o preparam.

No capítulo 2, inicialmente, a operação de adição é retomada por problemas que podem ser resolvidos por meio da contagem de objetos. Na sequência, pequenas contas de adição são propostas, não mais com o incentivo do uso dos dedos das mãos, mas com o auxílio de outros materiais concretos como palitos de picolé. Em letras miúdas estão orientações para o professor, esclarecendo que uma das atividades de resolver “contas” tem como objetivo que o aluno “se aproprie dos fatos básicos da adição por meio da observação de regularidades” (BORDEAUX et al, 2014b, p.46). Neste caso as regularidades apresentadas são que: na adição uma das parcelas é o número 2, de forma que nas primeiras contas o número 2 está na segunda parcela, e, posteriormente, na primeira parcela, trazendo indícios da propriedade comutativa, como pode ser visto na Figura 12:

Resolva as contas abaixo. Use palitos se precisar.

$0 + 2 = \underline{\quad}$	$4 + 2 = \underline{\quad}$	$2 + 4 = \underline{\quad}$
-----------------------------	-----------------------------	-----------------------------

Figura 12: Indícios da propriedade comutativa
Fonte: BORDEAUX et al, 2014b, p.46

Lerner e Sadovsky (1996, p.138) afirmam que “estabelecer regularidades cumpre um duplo objetivo: torna possível formular problemas dirigidos a explicitar a organização do sistema e permite gerar avanços no uso da numeração escrita”. Destacamos que nesta parte do

livro as regularidades foram evidenciadas, com tarefas do tipo T_{9.1}, que por sua vez são importantes para que o aluno compreenda o sistema de numeração decimal.

Na sequência, os termos da adição são apresentados de maneira formal como: parcelas e soma ou total. A partir de então, a ideia de completar é introduzida apresentando o valor de uma das parcelas e solicitando que se identifique o valor da outra parcela para que a operação resulte em um determinado número. De acordo com Butlen e Pezard (1991) esse tipo de atividade pode ser proposta de forma escrita como preparatória para o cálculo mental rápido pois incentiva o aluno a buscar procedimentos mentais. A ideia de completar é uma estratégia para realizar o cálculo mental que pode ser trabalhada em atividades como essa. Posteriormente em um momento dedicado a atividades desse tipo, retomamos o assunto e modelamos um tipo de tarefa haja vista sua relevância para o desenvolvimento da habilidade.

A adição com 3 parcelas (T_{9.5}) também é retomada neste capítulo onde o total das contas resultam entre 5 e 10. Essas tarefas precedem a seção de Cálculo Mental que aparece pela primeira vez na coleção. Esta seção tem no início uma indicação ao professor de que a primeira atividade (Figura 13) é uma preparação para o cálculo mental que será desenvolvido nas outras atividades:

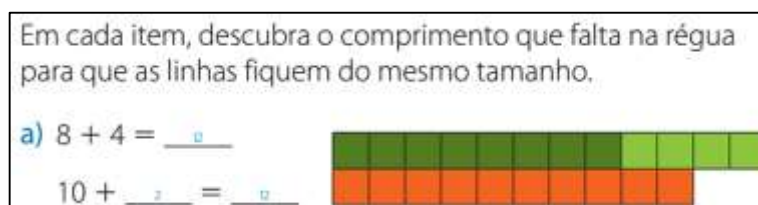


Figura 13: Primeira seção de Cálculo Mental – Atividade 1
Fonte: BORDEAUX et al, 2014b, p. 59

Da mesma forma que a atividade apresentada, solicita que o aluno descubra quanto falta para que a régua fique com a mesma medida, associando a operação de adição, no segundo item correspondente a letra b, também é pedido que se faça o mesmo. E mais, também com o número 12, tendo a régua 12 unidades e a soma que compõe o 12 resulta no mesmo valor. Dessa forma contabilizamos estas tarefas como do tipo T₁₅, pois apesar de se ter uma soma o objetivo é compor o 12. Além disso, observamos na segunda linha outra soma que resulta em 12, a soma $10 + 2$, que também é posta no item b. Essa segunda soma reforça a composição do número tendo entre as parcelas uma dezena exata. Sustentamos esta afirmação diante do que é exposto na sequência (Figura 14):

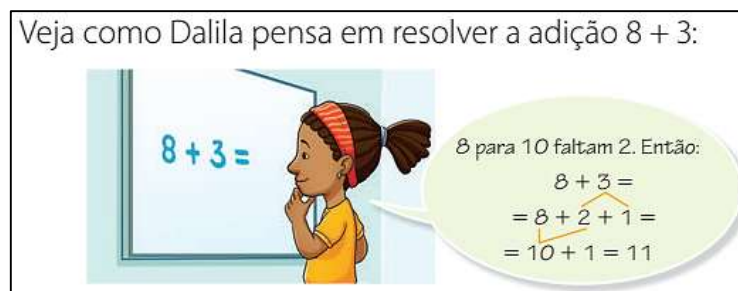


Figura 14: Técnica para resolver tarefas do tipo T_{9.1}
 Fonte: BORDEAUX et al, 2014b, p. 59

A tarefa apresentada é resolver a adição $8 + 3$, que pertence ao grupo de tarefas do tipo T_{9.1}. Para resolver esta tarefa, a estratégia utilizada é decompor o número de 3, obtendo então uma nova adição com 3 parcelas, de forma que ao somar uma das novas parcelas com a parcela que restou anteriormente tenhamos uma dezena e, então, teremos a soma de uma dezena com unidade. Note que para resolver esta tarefa do tipo T_{9.1}, utiliza-se a decomposição de uma das parcelas e que para se ter uma dezena é necessário que se saiba diferentes formas de compor o 10. Assim a decomposição e a tarefa do tipo T₁₅ compõem uma nova técnica, que resolve tarefas do tipo T_{9.1}, e modelamos como τ_5 : *decompor uma das parcelas visando compor uma dezena*.

Outro fator que destacamos é que saber efetuar a adição com 3 parcelas, que no volume anterior foi modelada como um tipo de tarefa (T_{9.5}), é relevante para resolver as tarefas do tipo T_{9.1} visto o emprego da técnica τ_5 . Anteriormente usava-se a técnica τ_2 , mas agora, com o abandono do incentivo ao uso dos dedos, forma-se uma nova técnica, que está, por sua vez, diretamente envolvida com o cálculo mental.

Após a apresentação da tarefa resolvida, são propostas outras 2 tarefas do mesmo tipo e que devem ser resolvidas com a mesma técnica e mesmo modelo de registro. Depois, apenas uma atividade que apresenta tarefas do mesmo tipo e, que apesar de não “forçar” que o aluno resolva utilizando a técnica τ_5 , como a anterior, sugere que se use mas agora mentalmente, já que está na sequência.

Ressaltamos que na técnica modelada, o conjunto de tarefas do tipo T₁₅ que visa as diferentes maneiras de compor um número é essencial. Para tanto é necessário saber relacionar as igualdades no que diz respeito à essa composição. Assim, saber que $3 + 4 = 5 + 2$ por exemplo, é importante pois quando a técnica for empregada, a decomposição será de acordo com as parcelas que tiver, visto que a ideia é sempre formar uma dezena. Em vista disso, identificamos que a noção de igualdade entre somas é proposta na seção *Desafio* solicitando

que se complete quadradinhos em brancos (com números) para que as igualdades entre somas sejam verdadeiras, por exemplo, $5 + 3 = \square + 4$.

De acordo com Lethielleux (2001) o cálculo mental utiliza de várias decomposições de números e além disso o cálculo refletido é uma boa oportunidade para empregar as propriedades das operações. Dessa forma, tarefas que oportunizam técnicas que exploram diferentes formas de decomposição se mostram relevantes para preparação do cálculo mental e serão destacadas em nossa análise.

Ao final desse capítulo uma atividade semelhante à essa é proposta, mas com 3 parcelas e já com o resultado. Uma tabela que visa a soma de números até 10 também é colocada para que o aluno a complete, também aparece no final do livro como uma revisão da operação no que foi visto ao longo do capítulo.

O capítulo seguinte tem como foco a operação de subtração, que inicialmente é trabalhada com situações assim como foi feita com a adição, isto é, as situações são possíveis de serem resolvidas via contagem de objetos. Seguindo a mesma ordem, a formalização da operação é concluída com a apresentação do sinal de *menos*. Na sequência, são apresentadas ao aluno tarefas do tipo $T_{10.1}$ para resolução, inicialmente com representação de objetos e depois sem. Uma característica das contas sem representação é que elas têm o valor do minuendo fixo, isso acontece porque nestes casos, segundo as autoras, o objetivo é que o aluno conclua que à “medida que o valor das quantidades retiradas diminui, o valor dos resultados (o que sobra) aumenta” (BORDEAUX et al, 2014b, p.69).

Após essas atividades, é feita uma relação entre as operações de adição e subtração intitulada como *Adição e subtração: o que uma faz, a outra desfaz*. A ideia de que são operações inversas é introduzida de forma breve com 2 situações que são ilustradas e, posteriormente é explorada por meio de uma sequência de atividades de adição e subtração (Figura 15) que tenta mostrar como o próprio enunciado diz: *o que uma faz, a outra desfaz*.

Acrescentando	Tirando
a) $6 + 1 = \underline{7}$	$7 - 1 = \underline{6}$
b) $2 + 4 = \underline{6}$	$6 - 4 = \underline{2}$
c) $5 + 3 = \underline{8}$	$8 - 3 = \underline{5}$

Figura 15: Adição e subtração como operações inversas
Fonte: BORDEAUX et al, 2014b, p. 70

Vemos na atividade que as tarefas são do tipo $T_{9.1}$ e $T_{10.1}$, no entanto a forma com que as autoras optaram em sistematizar essas tarefas, de acordo com o Manual do Professor, tem

como objetivo fazer o aluno “perceber que a ação de tirar pode ser o contrário da ação de acrescentar” (ibidem, p.387). Além disso, o capítulo apresenta outros momentos que retomam a ideia aqui introduzida.

Neste capítulo percebemos ainda a exploração de diferentes ideias trabalhadas acerca da subtração como a de *quanto falta para chegar a um determinado número*, que tem como estratégia completar uma determinada quantia, como é feito no uso de dinheiro em situações de troco, porém esta estratégia é pouco explorada e fica a cargo do professor. Nos tipos de tarefas *a priori* temos em T_7 tarefas que têm a mesma ideia, mas observamos que nesta parte do livro a ideia é identificar quanto falta para chegar a um número que está entre 0 e 10 e, utiliza a subtração como uma técnica ao expor no livro do aluno que: “Quando queremos saber “quanto falta”, podemos fazer uma subtração” (ibidem, p.73). E mais, o livro ainda apresenta tarefas, que são resolvidas de acordo com a técnica enunciada como podemos ver na Figura 16:

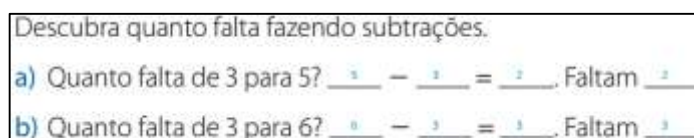


Figura 16: Ideia de completar
Fonte: BORDEAUX et al, 2014b, p. 73

Dessa forma, as tarefas com essa característica estão classificadas como do tipo T_7 e, que neste momento tem como técnica τ_6 : *Realizar a subtração entre o número que se quer chegar e o número que se parte*. Note mais uma vez que a subtração que antes era um tarefa do tipo $T_{10.1}$ passa então a técnica de um outro tipo de tarefa. A técnica de completar com auxílio dos dedos também resolve tarefas do tipo T_7 , no entanto não é evidenciada, apenas apresentada brevemente na introdução do assunto em uma situação. De acordo com Guimarães (2009) as tarefas do tipo T_7 , favorecem para que os alunos tenham os resultados disponíveis na memória e, em seu trabalho, constatou que os alunos já tinham o resultado memorizado e só utilizavam a sobrecontagem com auxílio dos dedos (τ_2) e a subtração com auxílio das mãos para conferir o resultado.

Antecedendo a ideia de comparação abordada na subtração, percebemos que a operação também é trabalhada na reta numérica, que apresenta ao final algumas tarefas do tipo T_1 com sequências regressivas a serem completadas. A partir daí, encontramos até o final do capítulo uma parte com uma revisão de tarefas vistas até o momento dos tipos T_7 , $T_{9.1}$, $T_{10.1}$ e T_{15} .

O capítulo 5 inicia relembando os significados dos termos dezena e unidade. São propostas algumas atividades que solicitam que o aluno identifique qual imagem tem uma

dezena de objetos e, posteriormente um jogo, intitulado *Jogo sempre dez* é proposto visando trabalhar o agrupamento de 10 em 10. O jogo consiste em juntar 10 palitos em caixas de fósforo de acordo com o número que sair no dado. Assim, ganha quem completar três caixas de fósforos primeiro. Como dito anteriormente o jogo é um importante estimulante para a exploração do cálculo mental (ANANIAS, 2010) e, neste caso, o jogo trabalha particularmente o agrupamento de 10 que futuramente favorecerá a contagem de 10 em 10, que como pudemos observar no livro é o próximo tópico de estudo: *Leituras e escritas de dezenas exatas*.

Neste tópico são apresentadas as dezenas exatas do 10 ao 100 sequencialmente, ou seja, 10, 20, 30, ..., 90, 100. Em seguida, são apresentados objetos que representam dezenas exatas e é solicitado que se escreva a quantidade correspondente assim como foi feita na apresentação das dezenas. Dentre os objetos, o dinheiro é novamente explorado com o uso da nota de dez reais. As dezenas exatas têm uma característica em comum que é contar de 10 em 10, fator essencial para o cálculo mental que é explorado na primeira chamada dedicada ao trabalho com a habilidade intitulada *Preparando para o Cálculo Mental*. Nesta chamada o foco é compor e decompor dezenas inteiras (ou exatas).

As tarefas presentes nesta parte têm como objetivo mostrar diferentes formas de compor e decompor uma dezena exata com dezenas exatas. A primeira atividade apresentada é composta por tarefas do tipo T_{9.3} ao propor que se efetue somas cujas parcelas são dezenas exatas, como $20 + 10$. Em seguida, encontramos atividades que simultaneamente compõem e decompõem dezenas exatas em dezenas exatas como vemos na Figura 17:

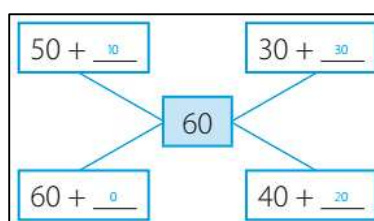


Figura 17: Compondo e Decompondo com dezenas exatas
Fonte: BORDEAUX et al, 2014b, p. 105

Essas tarefas têm uma característica em particular, pois exploram somente questões acerca das dezenas exatas. Assim, agrupamos as tarefas com esse aspecto em um tipo de tarefa que denominamos T₁₆: *Compor e decompor dezenas exatas em dezenas exatas*. Em uma tarefa apresentada como na Figura 17 a técnica empregada pode ser identificar quanto falta para chegar a dezena elencada, assim, vemos que o tipo de tarefa T₇ neste momento passa a funcionar como técnica para tarefas deste tipo. O trabalho com somas com dezenas inteiras tem como objetivo que se memorize as possibilidades e, prepare o aluno para construir técnicas que o

auxiliarão na resolução de tarefas como $120 + 240$ mentalmente. Tarefas tipo T_1 com $n=10$ também estão presentes nesse momento do livro.

Neste capítulo, também é feita a apresentação dos números até 100 como composição, assim como foi feito no volume anterior, de forma que seja possível notar as regularidades do sistema de numeração. Assim, apresenta-se $30 + 5 = 35$, $40 + 7 = 47$ e assim por diante. Antecedendo uma sequência de atividades cujas tarefas são do tipo T_1 e T_6 que podem ser resolvidas por meio das técnicas vistas no volume 1, um jogo de bingo é proposto visando trabalhar o registro numérico, já que as cartelas estão incompletas e o números que faltam serão enunciados em língua materna.

Posteriormente, trabalha-se com o agrupamento de 10 em 10 e a separação de dezenas e unidades. Relembramos que o agrupamento de 10 em 10 é relevante para a compreensão do sistema de numeração, principalmente no que diz respeito às trocas e mudanças de ordem. Na Figura 18 mostramos uma das atividades que estão no livro, em que aluno deve agrupar os objetos de 10 em 10 e associar a quantidade de dezenas e unidades que contém:



Figura 18: Associação entre o agrupamento de 10 em 10 com as ordens da dezenas e unidades

Fonte: BORDEAUX et al, 2014b, p.114

As autoras do livro afirmam que

é importante que os alunos percebam e admitam diferentes decomposições para um mesmo número. [...] Essas diferentes decomposições aparecerão, frequentemente, nas operações, principalmente nas subtrações com trocas e nas divisões. Por exemplo, quando a conta for $62 - 28$, o ideal é que o aluno seja instigado a admitir o 62 como $50 + 12$, isto é, 5 dezenas mais 12 unidades para efetuar a operação. (BORDEAUX et al, 2014b, p.113)

Este momento precede a apresentação do material dourado, que é exibido como representação das ordens de dezena e unidade. Cabe aqui lembrar que a ilustração é fundamental nesta etapa do ensino para que as crianças possam contar, fazendo a relação biunívoca (KASPARY, 2014). A identificação das ordens é fundamental para a preparação do cálculo mental, pois contribui para que a composição e decomposição de números sejam trabalhadas e, futuramente, empregadas em estratégias de se calcular mentalmente. Identificamos então 3 tipos de tarefas diferentes relacionadas à ordem dos números: a primeira

delas é do tipo T₅, elaborado na praxeologia *a priori*, no entanto aqui é preciso identificar a quantidade de dezenas e unidades que compõem um número escrito por extenso. Um exemplo da tarefa deste tipo, podemos ver na Figura 19, onde abaixo a escrita do número se encontra já um quadro que deve ser preenchido com a quantidade de cada ordem.

vinte e duas unidades	
Dezenas	Unidades
<u>2</u>	<u>2</u>

Figura 19: Uma tarefa do tipo T₅
Fonte: BORDEAUX et al, 2014b, p.118

O segundo tipo de tarefas é T₄, em que forma-se o número em função de suas ordens, que no caso são as dezenas e unidades. A forma como o livro apresenta atividade (Figura 20) vai além, pois associa a ordem à adição para então formar o número.

7 dezenas mais 2 unidades = <u>70</u> + <u>2</u> = <u>72</u>
--

Figura 20: Uma tarefa do tipo T₄
Fonte: BORDEAUX et al, 2014b, p.118

O terceiro tipo de tarefas identificado faz o caminho inverso das tarefas do tipo T₄, pois a partir do número dado, faz-se a decomposição em função de suas ordens. Assim, modelamos como T₁₇: *Compor e decompor um número em função de suas ordens*. Como exemplo mostramos, na Figura 21, como o livro propõe uma tarefa do tipo T₁₉.

Decomponha os números em dezenas e unidades.
a) 64 = <u>6</u> dezenas + <u>4</u> unidades

Figura 21: Uma tarefa do tipo T₁₇
Fonte: BORDEAUX et al, 2014b, p.118

Para resolver as tarefas destes tipos não identificamos nenhuma técnica exposta no livro, apenas que se deve partir das atividades de agrupamento para saber qual algarismo do número apresentado representa a ordem das dezenas e das unidades.

Na próxima chamada *Preparando para o Cálculo Mental* é trabalhada a ideia de identificar qual a dezena mais próxima. Neste momento são levados em consideração tanto a dezena inferior quanto a superior a um número, pois quer-se a mais próxima. A noção explorada neste momento é de aproximação, que facilitará as contas em que os números não são dezenas exatas. Note que após identificar qual a dezena mais próxima, o como chegar a ela poderá ser resolvida ao descobrir quanto falta para se completar a dezena mais próxima. Em letras miúdas as autoras trazem a seguinte orientação para o professor:

Professor, evitamos abordar o arredondamento com números com o 5 na unidade por envolver procedimentos mais complexos. Quando o 5 aparece na unidade, podemos

adotar o seguinte critério: se o número de dezenas for par, permanecerá o mesmo, se for ímpar, aproximamos para o par seguinte.

Exemplos:

- $35 \rightarrow 40$ (porque a quantidade de dezenas é um número ímpar);
- $85 \rightarrow 80$ (porque o número de dezenas é par). (BORDEAUX et al, 2014b, p.122)

Assim modelamos as tarefas com tal característica como **T₁₈**: *Identificar a dezena exata mais próxima*. A técnica para resolver as tarefas deste tipo foi modelada como τ_7 : *se o algarismo das unidades do número for menor que 5, então a dezena exata mais próxima será o valor das dezenas desse número, se for maior que 5 será a dezena superior a este número e se for igual a 5 dependerá do algarismo das dezenas*. Sobre esta técnica vale ressaltar sua complexidade, que se não for memorizada não facilita que se faça o cálculo mental na aproximação.

Um pouco adiante, ainda nesta chamada, encontramos uma sugestão das autoras para que o professor simule situações em que o aluno precise utilizar do cálculo mental, como: para comprar um livro que custa 46 reais, se pagarmos com uma nota de 50, qual será o troco?

Em seguida, encontramos algumas tarefas do tipo **T₁**, em que deve-se completar sequências de 5 em 5, 2 em 2 e 3 em 3. As tarefas deste tipo estão sendo propostas desde o primeiro capítulo apenas variando os intervalos, assim, ainda são propostas até o final do livro e contabilizamos como tarefas do tipo **T₁**, mas não voltaremos a destacar o momento em que são propostas.

A próxima chamada para o cálculo mental, dá continuidade a ideia de dezena mais próxima, no entanto desta vez pergunta-se como chegar até ela. Dessa forma mostra-se qual a técnica para chegar à dezena exata mais próxima por meio das operações de adição e subtração. Para exemplificar, trazemos na Figura 22 uma atividade que explora o modo como se chega à dezena exata:



Figura 22: Apresentação da técnica para tarefas do tipo **T₁₉**
Fonte: BORDEAUX et al, 2014b, p.118

Agrupamos as tarefas com essa característica em um tipo **T₁₉**: *Identificar como chegar à dezena mais próxima*. Note que esta não é o mesmo tipo de tarefa de **T₁₈**, pois identificar qual a dezena e como chegar até ela são duas tarefas distintas. A técnica τ_8 para tarefas do tipo **T₁₉** é *somar ou subtrair a menor quantidade de forma a chegar a uma dezena exata*, como vemos na Figura 22. Ressaltamos que as tarefas deste tipo são importantes na realização de aproximações (ou estimativas), pois como dito anteriormente o cálculo aproximado está diretamente ligado

ao cálculo mental (BRASIL, 1997) inclusive por estar ligado à estratégia de arredondamento, pois

[...] a estimativa em cálculos aritméticos consiste na possibilidade de realizar aproximações de resultados, sem a necessidade de encontrar uma resposta exata. À medida que a intensidade da aproximação pode variar, há várias respostas igualmente válidas para um mesmo cálculo. A estimativa busca rapidez, por isso utiliza números “redondos” para facilitar as operações. (BUENOS AIRES, 2006, p.29, tradução nossa)

Dessa forma, acreditamos que as tarefas dos tipos T_{18} e T_{19} contribuem para o cálculo aproximado uma vez que busca a formação da dezena mais próxima, fator importante para estimar valores. A operação com dezenas exatas facilita as operações, pois é necessário apenas operar com os algarismos relativos à ordem em questão. Em vista disso, as tarefas do tipo $T_{9.1}$ também auxiliam os alunos no processo de somar dezenas exatas pois para realizar a soma dessas dezenas, o aluno pode associar aos números de 1 a 9, assim a memorização da soma $7 + 2$, por exemplo, permite associar a soma $70 + 20$ (BUENOS AIRES, 2006).

Considerando que operar com dezenas inteiras é mais fácil, o livro apresenta em uma atividade (Figura 23) a soma de 8 parcelas, com objetivo de que ao efetuar a conta forme-se dezenas exatas a cada 2 parcelas para então somar apenas parcelas de dezenas exatas.

$$5 + 5 + 16 + 4 + 1 + 9 + 7 + 3 =$$

$$= 10 + 20 + 10 + 10 = 50$$

Figura 23: Uma tarefa do tipo $T_{9.6}$
Fonte: BORDEAUX et al, 2014b, p.118

O objetivo desta atividade foi identificado a partir da forma como as autoras apresentaram a atividade, já com a estratégia e resultado final. Na sequência, encontramos outras tarefas semelhantes pedindo que se utilize a mesma estratégia de resolução, assim modelamos as tarefas com adição de mais de 3 parcelas como um subtipo de T_9 : $T_{9.6}$: *Somar mais de 3 parcelas*. Diferente da técnica τ_5 , a técnica empregada aqui é τ_9 : *compor dezenas exatas*. Notamos assim que estas tarefas em particular visam um trabalho com a técnica, que é formar dezenas inteiras. Aqui podemos identificar a importância dos tipos de tarefas que se relacionam com a composição e decomposição de números que foram explorados até o momento, contribuindo para o desenvolvimento da habilidade do cálculo mental, uma vez que o mesmo se apoia em estratégias que não incluem os algoritmos.

A centena é apresentada como a soma de dezenas inteiras. As tarefas propostas nesta parte do capítulo solicitam que se determine quanto falta para completar uma centena, no entanto, é dada a técnica que deve ser utilizada, uma vez que é apresentada uma soma para ser

completada de forma que o resultado seja igual a 100. Consideramos essas tarefas como do tipo T_7 , pois visam completar um número que é o 100. Porém, a técnica elencada para este tipo de tarefa é identificar diferentes formas de compor o 100, já que tem-se (Figura 24) a soma, uma de suas parcelas e o resultado.

$$92 + \underline{\quad 8 \quad} = 100$$

Figura 24: Uma tarefa do tipo T_7
Fonte: BORDEAUX et al, 2014b, p.130

Assim, lembramos que compor números de maneiras diferentes era um tipo de tarefa para os números trabalhados anteriormente e agora aqui constitui-se como técnica.

A partir daí são apresentados os números de 100 a 199 em uma tabela numérica e depois são apresentados, como em outros momentos, por meio da composição, como por exemplo $110 = 100 + 10$. Identificamos que neste momento as tarefas do tipo T_2 ganham destaque. Até o momento não ressaltamos a sua aparição apesar de termos encontrado algumas vezes sem uma técnica. Com relação à relevância desse tipo de tarefa, Lerner e Sadovsky (1996) mostram que por meio da escrita ou da oralidade é possível identificar se o aluno compreende as regularidades do sistema de numeração, pois

[...] a hipótese segundo a qual a escrita numérica é o resultado de uma correspondência com a numeração falada, conduz as crianças a resolver notações não convencionais. [...] Porque a diferença da numeração escrita da numeração falada está em que esta última não é convencional. (LERNER e SADOVSKY, 1996, p.100).

Dessa forma, “na numeração falada, justaposição de palavras supõe sempre uma operação aritmética” (idem), por exemplo, o número 1004 (mil e quatro) significa $1000 + 4$. Caso o aluno não compreenda o sistema, ao solicitar que escreva por extenso, com a mesma ideia da numeração falada ele poderá escrever 1004 como cento e quatro, por conta da justaposição de palavras ele pensa numa soma do tipo $100 + 4$ que se representa como 1004. Assim, destacamos que por meio das tarefas do tipo T_2 é possível identificar a compreensão do sistema de numeração decimal, o qual deve-se ter compreensão para então trabalhar com suas operações. Neste livro encontramos 25 tarefas do tipo T_2 .

Ao final deste capítulo o livro apresenta uma revisão com tarefas do tipo T_1 , $T_{9.1}$ e, um tipo de tarefa, que faz parte de T_{17} , diferente de T_{18} pois, como podemos ver na Figura 25, pede-se para compor números em função de suas ordens:

Componha os números.

a) 3 dezenas + 5 unidades = 35 ou $3D + 5U =$ 35

b) 7 dezenas + 8 unidades = 78 ou $7D + 8U =$ 78

Figura 25: Uma tarefa do tipo T_{17}
 Fonte: BORDEAUX et al, 2014b, p.130

A exploração da composição e decomposição de números por meio de suas ordens possibilita que o aluno pense em estratégias de resolução de operações como adição e subtração, pois pode decompor os números em função de suas ordens e operar de acordo com elas. Veremos a seguir que o livro pretende explorar esta ideia.

No capítulo 8, são trabalhadas as somas até 99. No início do capítulo uma situação é apresentada e diz o seguinte: “Luciana quer comprar uma boneca. Ela já tinha 13 reais. No dia de seu aniversário, ela ganhou 35 reais de sua tia. a) Com quantos reais ela ficou?” (BORDEAUX et al, 2014b, p.172). A tarefa a ser resolvida nesta situação é $13 + 35$. Segundo as autoras a situação tem como objetivo que o aluno utilize estratégias próprias de resolução, dentre as possibilidades são apresentadas ao professor 4 sugestões em letras menores: a primeira é o uso do dinheiro, de forma que o aluno represente a quantia em notas e; as demais utilizam a composição e decomposição como opções, como trazemos na Figura 26:

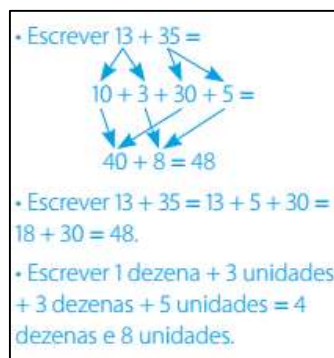


Figura 26: Estratégias apresentadas para o professor
 Fonte: BORDEAUX et al, 2014b, p.172

Nas segunda e quarta estratégias, vemos que a decomposição foi empregada ambas de acordo com a ordem, porém uma em registro numérico e outra escrita por extenso. Essa atividade precede o momento em que a segunda técnica é apresentada para mostrar como se resolve a adição de números com 2 algarismos. A técnica τ_{10} , apresentada para resolver as tarefas de *somar dois números com dois algarismos* ($T_{9.7}$), é composta por T_{17} : *Compor e decompor as parcelas em função de suas ordens e operar com as ordens equivalentes*, como vemos na Figura 27:

$$\begin{array}{r}
 31 + 25 \\
 31 = 30 + 1 \\
 25 = 20 + 5 \\
 \hline
 50 + 6 = 56
 \end{array}$$

Figura 27: Uma tarefa do tipo T_{9,7} resolvida com a técnica τ_{10}
 Fonte: BORDEAUX et al, 2014b, p.174

Em seguida é proposto uma sequência de tarefas do tipo T_{9,7}, solicitando que se utilize a mesma técnica que foi apresentada. Decompor um número em ordens e somá-las é uma estratégia que pode ser feita mentalmente e utilizar-se apenas de registro para os resultados parciais, pois o sujeito pode ter mentalmente as decomposições, visto que já foram trabalhadas anteriormente em tarefas dos tipos T₁₆ e T₁₇.

A ideia de que a subtração e a adição são operações inversas é novamente trabalhada e, as tarefas do tipo T_{9,7} passam estar dentro de situações-problema que devem ser interpretadas e então resolvidas. Dessa vez, não é mostrada a estratégia que deve-se utilizar, o aluno deve buscar no seu repertório e empregar estratégias próprias segundo as autoras.

O quadro-valor-de lugar é apresentado no livro como *quadro de ordens*, que se mostra como outra forma de se efetuar as tarefas do tipo T_{9,7}. O quadro de ordens não é considerado como uma técnica de cálculo mental em nossa perspectiva, pois trata-se de um algoritmo com regras que quando aplicadas na mesma ordem sempre funcionam. No entanto, o trabalho de Guimarães (2009) mostrou que recorrer a este algoritmo mentalmente foi a estratégia mais utilizada, por crianças, para efetuar cálculos mentalmente. O quadro de ordens também é explorado posteriormente para adição com 3 parcelas com 2 algarismos cada. Nota-se também que o livro traz a organização do quadro de ordens como *conta armada*, que também será explorada relacionando com o material manipulável fazendo trocas.

Após a exploração do quadro de ordens, temos a segunda seção de Cálculo Mental encontrada no livro. Neste momento acontece uma ampliação do que foi apresentado na seção anterior, a tarefa a ser resolvida é 16+5:

$$\begin{array}{l}
 16 + 5 = \\
 = 16 + 4 + 1 \\
 = 20 + 1 = 21
 \end{array}$$

Figura 28: Uma tarefa do tipo T_{9,2} resolvida com a técnica τ_{11}
 Fonte: BORDEAUX et al, 2014b, p.178

A tarefa apresentada é do tipo $T_{9.2}$ em que se soma um número de 2 algarismos com um número de 1 algarismo. Aqui a técnica para resolver esta tarefa tem a mesma ideia da que foi desenvolvida na primeira seção, porém τ_5 propõe decompor uma das parcelas visando formar um dezena. A técnica para $T_{9.2}$ enunciaremos como τ_{11} : *decompor uma das parcelas visando compor uma dezena inteira*, a mesma é explorada na sequência com uma série de tarefas que devem ser resolvidas por meio de τ_{11} . Cabe aqui ressaltar que as situações-problema são propostas em vários momentos e, que elas visam que o aluno utilize estratégias próprias. Ao final do capítulo é feita uma revisão com tarefas dos tipos $T_{9.2}$ e $T_{9.7}$.

No capítulo seguinte é explorada a subtração com números até 99. Lembrando que os termos da subtração (minuendo, subtraendo e diferença) ainda não foram formalizados. Da mesma forma como foi introduzida a adição, é feita com a subtração, ou seja, com a proposta de uma situação. Como o foco também é operar com números até 99, neste momento exploram-se tarefas em que a subtração feita é entre números com 2 algarismos, tarefas tais que agrupamos em um subgrupo de T_{10} como $T_{10.4}$: *Subtrair dois números com dois algarismos*. Porém, a situação é apresentada resolvida (Figura 29) por meio do dinheiro e do uso da decomposição na técnica τ_{10} :

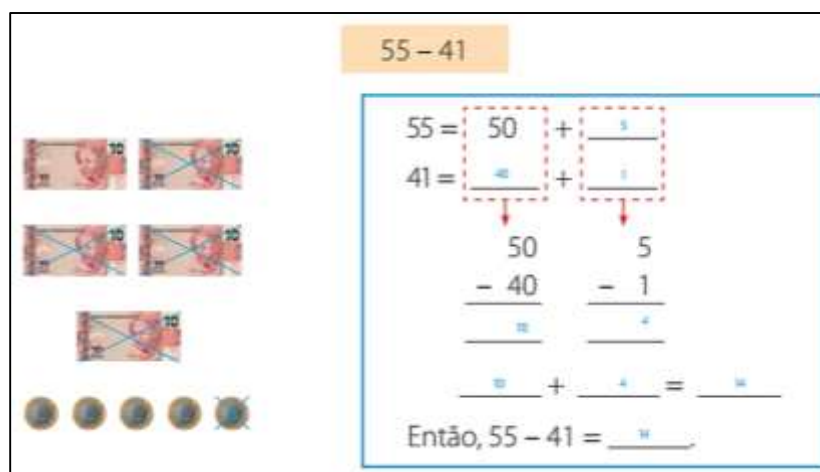


Figura 29: Uma tarefa do tipo $T_{10.4}$ resolvida com a técnica τ_{10}
Fonte: BORDEAUX et al, 2014b, p.194

Nesta parte do capítulo, identificamos que o dinheiro é mais uma vez evidenciado, não só como uma opção didática de se trabalhar a subtração como também para relacionar com seu uso diário e com a forma em que se aplica a técnica τ_{10} . Gonçalves (2008) em seu trabalho que buscou identificar os invariantes operatórios¹⁶ que as crianças mobilizam ao resolver situações

¹⁶ Os invariantes operatórios correspondem aos conceitos-em-ação e os teoremas-em-ação mobilizados pelo sujeito. Termos específicos da Teoria dos Campos Conceituais (TCC), de Vergnaud. Para aprofundamento ver Vergnaud (1996).

do cotidiano com o cálculo mental, propôs problemas que envolviam gastos e mobilizavam os conhecimentos acerca do dinheiro. Em sua pesquisa pôde concluir que as crianças demandam maior facilidade para calcular mentalmente para situações que operam acerca das dezenas exatas devido “a presença de zeros facilitou a resolução oral dos problemas, diferente do que acontece com o cálculo escrito. Outro resultado importante foi o domínio dos sujeitos dos valores e operações com o dinheiro” (GONÇALVES, 2008, p.219). Assim, as tarefas e técnicas que oportunizam o trabalho acerca das dezenas exatas são relevantes para o desenvolvimento do cálculo mental.

Após a exploração de tarefas do tipo $T_{10,4}$, é feita a apresentação do quadro de ordens como opção de resolver tarefas do tipo elencado. Inferimos até o momento que as autoras buscam seguir uma mesma ordem na organização do estudo das operações de adição e subtração. Porém, o trabalho com o dinheiro é evidenciado no trabalho com a subtração, uma vez que sugere em orientações ao professor que se use o dinheiro com o intuito de facilitar a decomposição e que o aluno possa manipular o material para realizar a conta.

Na apresentação de tarefas do tipo $T_{10,4}$, as autoras ressaltam nas orientações que o aluno pode efetuar as contas por meio da decomposição (τ_{10}), do uso do dinheiro, quadro de ordens ou do cálculo mental.

Na sequência é proposto um jogo intitulado *O pirata gastador* que visa o trabalho com trocas em que 1 dezena corresponde a 10 unidades. As trocas vão sendo necessárias pois no jogo acontecem subtrações sucessivas. Até esta parte do livro nas tarefas do tipo $T_{10,4}$ não era preciso realizar trocas, pois o algarismo das unidades do minuendo sempre eram maior que do subtraendo. O jogo é uma escolha didática do autor para apresentar a necessidade das trocas que posteriormente serão feitas no quadro de ordens.

Em seguida, sem mostrar uma técnica é apresentado na seção *Desafio* uma tarefa em que o minuendo é sempre uma dezena exata, como $30 - 13$. Note que a tarefa apresentada poderia pertencer a $T_{10,4}$, no entanto, há uma particularidade: o minuendo sempre é uma dezena exata e o subtraendo pode ser qualquer número. Assim, as tarefas com estas características modelamos como um subtipo de T_{10} : $T_{10,5}$: *Subtrair dois números em que o minuendo é uma dezena exata*. Em uma observação ao professor sobre o desafio, as autoras afirmam que as tarefas do tipo $T_{10,5}$ são para o trabalho com o cálculo mental pois a estratégia que pensam ser utilizada é relacionada à decomposição e ainda explicam:

Uma estratégia muito fácil é decompor o primeiro número em duas parcelas de dezenas exatas, sendo sempre uma das parcelas igual a 10. Veja um exemplo para o item d) $50 = 40 + 10$. De 40, tiramos 20; de 10, tiramos 9; $40 - 20 = 20$; $10 - 9 = 1$; $20 + 1 = 21$. (BORDEAUX et al, 2014, p.205)

A estratégia sugerida está de acordo com a técnica τ_{10} que é o que pode ser utilizado de acordo com o repertório estudado até o momento. Notamos nesta atividade uma preocupação com o desenvolvimento do cálculo mental, pois não o isenta de ser trabalhado em outras partes do livro que sejam diferentes das seções e chamadas que visam o trabalho exclusivo com a habilidade. Além disso, oportuniza a exploração do cálculo mental em tarefas que serão trabalhadas no quadro de ordens e o fato de apresentar antes do algoritmo convencional demonstra uma preocupação das autoras.

Adiante, a subtração com trocas é de fato apresentada mais uma vez com o auxílio do dinheiro e o material dourado, dessa vez, associado ao quadro de ordens. As tarefas dos tipos $T_{10.4}$ e $T_{10.5}$ enunciadas a partir deste momento, têm como objetivo o trabalho com o quadro de ordens e este não estamos considerando. As situações-problema que são propostas na sequência, oportunizam que o aluno escolha qual técnica ele vai escolher para resolver o problema. No final deste capítulo, a revisão apresenta tarefas dos tipos T_1 , T_2 , $T_{9.7}$, $T_{10.4}$ e $T_{10.5}$.

No capítulo 10, a operação de multiplicação é introduzida a partir da ideia de repetição em um poema. Depois, segue com situações que realizam somas sucessivas com auxílio de representação. Nas orientações ao professor, é solicitado que o professor destaque a palavra vezes em sua fala, por exemplo, no enunciado apresentado: “Lucas colocou 5 bolinhas de gude em cada um dos 4 sacos que sua mãe lhe deu. Quantas bolinhas de gude Lucas tem?” (ibidem, p.213). Para resolver a situação Lucas fez uma adição de parcelas iguais, obtendo $5 + 5 + 5 + 5 = 20$. Observando esta soma, pede-se que o professor questione *quantas vezes* aparece o número 5 na adição, pois de acordo com as autoras “este trabalho poderá ajudar a construir a ideia da operação de multiplicação” (idem).

O momento em que o cálculo está sendo pensado corresponde à introdução da tabuada, quando o livro apresenta situações-problema em que o aluno deve representar a resposta por meio de uma multiplicação podendo recorrer à representação, mas neste momento a tabuada ainda não foi construída, apenas tarefas do tipo $T_{11.1}$.

As somas sucessivas com parcelas iguais são tarefas que contribuem para a construção da operação de multiplicação. Com relação à preparação do cálculo mental estas colaboram para que essas somas sejam memorizadas facilitando a compreensão da operação. Após as

somas sucessivas, o sinal de vezes é formalizado e a multiplicação é apresentada como uma forma de representar as adições sucessivas.

Inicialmente as tarefas de multiplicação são do tipo $T_{11.1}$ e, apresentam a contagem de objetos como técnica, pois nesta etapa este é um procedimento fundamental para a compreensão da criança acerca da operação. As tarefas deste tipo estão diretamente ligadas com a construção da tabuada, que neste volume é trabalhada até o 5. Um trabalho de exploração da tabuada possibilita que o sujeito tenha disponível na memória os resultados da tabuada de forma automática, que é essencial para o desenvolvimento de estratégias para efetuar multiplicações mais complexas. Lethielleux (2001) corrobora com esta ideia e orienta que para a realização do cálculo escrito e cálculo mental um fator necessário é a memorização das tábuas de operações, pois não haverá progresso se certos resultados convenientes não forem memorizados.

Um jogo intitulado *Saltitando no brejo* é uma escolha didática das autoras para explorar a operação em questão, o jogo é composto por um tabuleiro enumerado de 1 a 36 e dois dados. O jogo consiste que o jogador ande no tabuleiro a quantidade de casas correspondente ao resultado da multiplicação entre os números que saem nos dois dados, pois um dado indica o número de saltos e o outro o tamanho do salto e ganha o jogador que chegar primeiro ao final. Posterior ao jogo, a multiplicação também é trabalhada na reta numérica e, de acordo com o manual do professor o objetivo do jogo e do trabalho com reta é que se identifique as diferentes grandezas envolvidas na situação.

Na sequência ao jogo, encontramos a construção da tabuada do 2 e 3 junto as noções de dobro e triplo introduzida. Em seguida as tabuadas do 4 e 5 são construídas da mesma forma. Interessante notar que a tabuada é mostrada como técnica para a identificação do dobro, e o mesmo ocorre com a ideia de triplo. Consideramos que essas noções são importantes pois são utilizadas no dia a dia e requerem o uso do cálculo mental, assim modelamos um tipo de tarefa em que as tarefas com essas características são agrupadas T_{20} : *Identificar o dobro ou triplo de um número*. A técnica τ_{12} proposta para resolver as tarefas deste tipo é a *tabuada*, para as tarefas do tipo T_{20} a tabuada do 2 e 3 em particular. Optamos por modelar a técnica apenas como tabuada porque esta técnica será utilizada para resolver outros tipos de tarefas.

O livro apresenta uma atividade baseada na tabuada em os alunos devem pintar da mesma cor as multiplicações que tem o mesmo resultado, destacamos que esta atividade possibilita que o aluno perceba a propriedade comutativa da multiplicação ainda que não

enunciada desta forma, uma vez que ele identificará por exemplo que $6 \times 2 = 2 \times 6$. Essa propriedade será ainda explorada em situações como vemos na Figura 30:

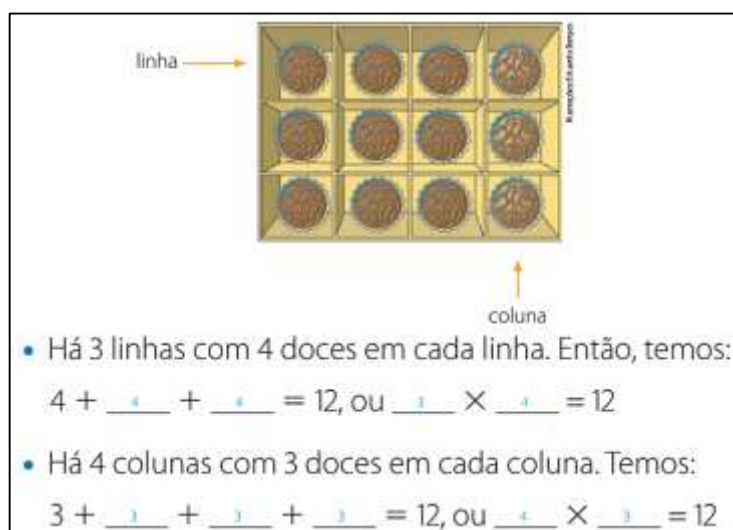


Figura 30: Uma tarefa que explora a propriedade comutativa da multiplicação
 Fonte: BORDEAUX et al, 2014b, p.230

A propriedade comutativa também pode ser uma técnica para resolver tarefas do tipo $T_{11.1}$, uma vez que se opta por calcular 2×6 ao invés de 6×2 , por exemplo. As tarefas deste tipo são exploradas em situações-problema e, identificamos que após identificar qual a multiplicação que se deve realizar para resolver tais situações a técnica que o livro oferece até o momento é a tabuada. Na seção de revisão, que se encontra ao final do capítulo, encontramos entre situações-problema tarefas dos tipo T_1 e $T_{11.1}$.

No capítulo seguinte o foco é a operação de divisão, que é introduzida com situações que trabalham a ideia de repartir igualmente por meio de material manipulável como desenhos. Para a apresentação do sinal de divisão as situações trabalhadas são representadas com o uso do sinal associando a montagem da conta. Depois são propostas tarefas para que se façam as mesmas relações como podemos ver na Figura 31:



Figura 31: Um tarefa do tipo $T_{12.5}$
 Fonte: BORDEAUX et al, 2014b, p.239

As tarefas iniciais de divisão constituem um subtipo de T_{12} que modelamos como $T_{12.5}$: *Dividir dois números que estão entre 2 e 20*. Cabe lembrar que as divisões propostas neste momento são exatas, ou seja, não têm resto. Além disso neste livro não é trabalhado o algoritmo

da divisão e para resolver as tarefas deste tipo a técnica utilizada é sempre a representação por meio de desenhos. Sentimos a necessidade de modelar este tipo de tarefa por conta dos resultados que quando disponíveis na memória facilitam para realizar um cálculo mental, assim como na multiplicação.

Na sequência, encontramos um jogo que explora a divisão do 12, as tarefas que visam a divisão do 12 estão incluídas no tipo $T_{12.5}$ mas acreditamos que o foco dado a este número é por conta do significado da dúzia que posteriormente é trabalhado junto com o significado de meia dúzia. O jogo, chamado *Dividindo 12*, consiste em dividir o 12 tampinhas de garrafa pelos números sorteados em um dado. No entanto, não foi trabalhado sobre o resto e nas atividades sobre o jogo que seguem não ignoram a divisão $12 \div 5$ que acontece caso o número 5 seja sorteado no dado. Sobre isso, acredita-se que os alunos digam que a divisão de 12 por 5 não é possível de ser realizada pelo fato de não conseguir separar cinco grupos com a mesma quantidade de tampinhas.

A noção de metade é introduzida logo após o jogo, acreditamos que essa noção é importante vista sua utilidade em situações corriqueiras, assim modelamos como T_{21} : *Identificar a metade de um número*. Para resolver as tarefas deste tipo a técnica empregada τ_{13} : *Dividir por 2*. Ao final do capítulo, antes da seção de revisão onde encontramos tarefas dos tipos $T_{12.5}$ e T_1 , as autoras mostram a relação entre as operações multiplicação e divisão que apresentam como: *Multiplicação e divisão: o que uma faz, a outra desfaz*. Encontramos uma apresentação semelhante anteriormente para as operações de adição e subtração e, com o mesmo objetivo aqui buscam mostrar que as operações em questão são inversas. Dessa forma, as atividades buscam relacionar as tarefas do tipo $T_{11.1}$ e $T_{12.5}$ como mostramos na Figura 32:

$$2 \times 4 = 8 \quad \rightarrow \quad 8 \div 4 = 2$$

Figura 32: Relacionando tarefas do tipo $T_{11.1}$ e $T_{12.5}$
Fonte: BORDEAUX et al, 2014b, p.249

O subtipo de tarefa modelado para a operação de divisão pode ter como técnica a tabuada (τ_{12}) após esse momento em que se relaciona a divisão com a multiplicação, inferimos que essa possibilidade ficará a cargo do professor. Identificamos tal possibilidade nas orientações que são dadas ao professor para questionar os alunos nas tarefas do tipo $T_{12.5}$ *quantas vezes cabe um número em uma determinada quantidade*.

Na próxima seção buscamos apresentar uma síntese de como o cálculo mental se apresenta no volume 2, bem como trazer as relações entre os tipos de tarefas e técnicas que apareceram ao longo do trabalho com as operações.

3.2.2 O CÁLCULO MENTAL NO LIVRO DO 2º ANO

O cálculo mental não está somente presente nos momentos a ele dedicado, como dito anteriormente, em vista disso os tipos e subtipos de tarefas elencados no volume anterior tornam a aparecer neste volume, mas com frequências diferentes como veremos mais adiante. Neste volume notamos uma maior valorização do dinheiro e um abandono da técnica que utilizava os dedos para tarefas relacionadas às operações de adição e subtração. No entanto, o emprego do dinheiro possibilitou a exploração das operações de adição e subtração, bem como técnicas para o desenvolvimento da habilidade de calcular mentalmente no que diz respeito à resolução de operações.

No livro do 2º ano encontramos 5 partes dedicadas ao cálculo mental onde 2 são seções em que se apresentam tarefas e técnicas de resolução e 3 são as denominadas chamadas que apresentam tarefas que visam preparar para o cálculo mental. Nestas partes 8 tipos de tarefas são trabalhadas e 5 técnicas são exploradas.

Com relação aos jogos, notamos uma maior concentração de jogos que possibilitam que a habilidade do cálculo mental seja explorada em cada uma das operações (ANANIAS, 2010). Essa é uma escolha importante, pois possibilita que a criança tenha autonomia e construa hipóteses e inferências sobre como resolver as operações, em vista disso, acreditamos que a abordagem utilizada proporciona tais benefícios com relação a habilidade.

Neste livro encontramos ao todo um total de 24 tipos de tarefas e 9 novas técnicas, sendo 11 tipos de tarefas elencados *a priori* e 13 novos entre tipos e subtipos. No Quadro 3 apresentamos o quantitativo de cada tipo de tarefas elaborados *a priori*:

Tipos de tarefas	T ₁	T ₂	T ₄	T ₅	T ₆	T ₇	T _{9.1}	T _{9.2}	T _{9.3}	T _{10.1}	T _{11.1}
Quantidade	50	25	6	8	26	42	35	4	24	67	47

Quadro 3: Quantidade de tarefas dos tipos elencados *a priori*
Fonte: Elaborado a partir do desenvolvimento da pesquisa

No Quadro 3 vemos que a tarefa mais frequente é do tipo T_{10.1}, mas destacamos que elas aparecem somente no capítulo destinado à operação de subtração. Identificamos que a segunda tarefa mais proposta é do tipo T₁ com 50 tarefas de completar uma sequência numérica. Neste volume não identificamos explicitação da técnica para esse tipo de tarefa e nem para T₆ e, em vista disso, acreditamos que a técnica deve ser a mesma empregada no volume 1.

Ressaltamos que as tarefas do tipo T_1 e T_6 são as únicas trabalhadas em quase todos os capítulos mesmo que somente na seção de revisão.

As tarefas do tipo T_2 são destacadas apenas neste volume devido à função que exercem como mencionado durante a análise. Além disso, as tarefas deste tipo aparecem em diferentes momentos buscando trabalhar os diferentes números, ou seja, desde de 1 até a ordem das centenas. As tarefas dos tipos T_4 e T_5 também aparecem apenas na parte mencionada na análise.

No Quadro 4, apresentamos o quantitativo dos novos tipos e subtipos de tarefas modelados ao longo da análise no livro do 2º ano:

Tipos de tarefas	$T_{9.5}$	$T_{9.6}$	$T_{9.7}$	$T_{10.4}$	$T_{10.5}$	$T_{12.5}$	T_{15}	T_{16}	T_{17}	T_{18}	T_{19}	T_{20}	T_{21}
Quantidade	13	5	21	28	5	24	51	5	15	7	5	13	13

Quadro 4: Quantidade de tarefas de tipos modelados durante a análise

Fonte: Elaborado a partir do desenvolvimento da pesquisa

Com relação aos novos tipos de tarefas, o mais frequente é do tipo T_{15} , que visa diferentes formas de compor um número e pôde ser identificado em várias partes do livro, em particular as que tratavam as operações de adição e subtração. Em segundo e terceiro lugares encontram-se os subtipos $T_{10.4}$ e $T_{12.5}$, respectivamente, relativos às operações de subtração e divisão.

Sobre as tarefas dos tipos modelados durante a análise inferimos que, independentemente da quantidade com que foram propostas, a sua função acerca da preparação do cálculo mental foi o que tornou necessário a modelagem de um tipo de tarefa que agrupasse tarefas com determinadas características. Os subtipos de tarefas $T_{9.7}$ e $T_{10.4}$, por exemplo, não estão propostos sempre com o objetivo de contribuir com a exploração de alguma técnica para o cálculo mental ou alguma memorização. Em alguns momentos estas tarefas foram propostas apenas para o trabalho com o quadro de ordens, que nada tem com o fato de operar mentalmente, mas é a técnica empregada pelo livro para resolução de tarefas como essas.

Assim, ressaltamos que algumas tarefas têm características comuns a diferentes tipos, como vimos anteriormente em $T_{9.1}$ e T_{15} mas que foram contabilizadas separadamente, de forma que uma tarefa esteja enquadrada em apenas um tipo. Algumas tarefas como $T_{9.3}$ não apresentam uma técnica de forma explícita e específica, o que nos leva a pensar que pode ser resolvida com base em técnicas anteriores ou com base no que funciona para as operações com

números de 1 a 9. Assim para uma tarefa pertencente ao tipo mencionado, operar $20 + 40$ está relacionado à soma $2 + 4$ e que ainda funcionará para a soma $200 + 400$.

Pudemos observar que a noção de aproximação é explorada de maneira sutil assim como a ideia de completar. Explicitamente a ideia de completar é mencionada muito pouco como já dissemos anteriormente, pois nas tarefas do tipo T_7 é evidenciado como técnica a realização da subtração.

Inferimos que a maioria das técnicas para o cálculo mental estão baseadas na decomposição e composição, como pudemos ver nas seções dedicada ao cálculo mental, e que a noção de dezenas exatas se apresenta como fundamental para o desenvolvimento da habilidade de acordo com as seções propostas. As operações de multiplicação e divisão aparecem no final do livro, sem muita exploração. A multiplicação explora a tabuada até o 5 e divisão está centrada na ideia de repartir igualmente. Dessa forma, ainda não encontramos muitas tarefas e técnicas em que se desenvolva o cálculo mental em relação à essas operações, a não ser a tabuada, que é relevante para o operar mentalmente a multiplicação tendo resultados memorizados (LETHIELLEUX, 2001).

Com relação à forma como o livro apresenta as técnicas, inferimos que o mesmo não oportuniza que o aluno formule uma estratégia pessoal e nem incentiva a autonomia, uma vez que apresenta a técnica nos casos das seções de cálculo mental e solicita que se resolva questões semelhantes com a mesma técnica.

Pudemos observar que alguns tipos de tarefas vão se tornando técnicas para novos tipos de tarefas como vemos no tipo de tarefa T_{16} que tem como técnica T_7 . Outros tipos tiveram sua técnica identificada no livro, é caso dos tipos T_4 , T_5 e T_{17} . Os tipos de tarefas vão evoluindo a partir de outras trabalhadas, como por exemplo T_{18} e T_{19} , pois primeiro é preciso saber qual é a dezena mais próxima para então saber como chegar lá.

Também identificamos evoluções de técnicas quando pensamos no volume anterior, é o caso de tarefas do tipo $T_{9.1}$ que antes tinham como técnica τ_2 e para o cálculo mental passam a ser resolvidas por τ_5 devido ao pequeno alcance de τ_2 .

A seguir trazemos uma síntese procurando destacar como estiveram presentes os tipos de tarefas e técnicas indicados até o momento:

- T_1 e T_6 são abordadas em várias partes do livro.
- $T_{9.1}$, T_{15} e $T_{9.5}$ são propostas no capítulo dedicado à operação de adição e não apresentam uma técnica explícita neste volume. No entanto, as tarefas do tipo

T_{9.5} são abordadas apenas antes de uma seção de cálculo mental para relembrar como se faz, já que isso compõe a técnica apresentada na seção. As tarefas do T_{9.1}, T₁₅ são trabalhadas em maior quantidade, por conta da ênfase dada acerca das dezenas exatas.

- T_{10.1} é trabalhada durante o estudo da subtração e é uma das mais exploradas nos capítulos destinados à subtração, isso porque possui tábuas da operação. As tarefas do tipo T₇ têm como técnica a subtração e por isso também encontramos este tipo de tarefa nesses capítulos.
- As tarefas dos tipos T_{9.3} e T₁₆ são mais exploradas na parte destinada à formalização das dezenas exatas e seções destinadas à preparação para o cálculo mental; posterior ao trabalho com a subtração as tarefas do tipo T₁₆ contam com T₇ como técnica. Nesta parte identificamos em menor quantidade as tarefas dos tipos T₄, T₅ e T₁₇, as quais não identificamos as técnicas, de forma explícita, e, dos tipos T_{9.6}, T₁₈ e T₁₉, as quais identificamos 3 técnicas diferentes.
- As tarefas dos tipos T_{9.7}, T_{10.4} e T_{10.5} apresentam uma mesma técnica, apesar de tratarem de operações diferentes e são apresentadas subsequentes.
- O tipo de tarefa T_{9.2} é explorado apenas em uma seção de cálculo mental.
- Os demais tipos de tarefas (T_{11.1}, T_{12.5}, T₂₀ e T₂₁) relativos às operações de multiplicação e divisão são propostos apenas no final do livro e desenvolvem apenas 2 técnicas que contribuem com a habilidade de calcular mentalmente.

A análise do livro do 2º ano faz uma retomada do que foi visto no volume anterior no que diz respeito aos números e operações de adição e subtração, além disso traz o que foi trabalhado nos tópicos destinados a exploração de atividades que preparam para o cálculo mental. As operações adição e subtração trazem uma formalização mais refinada e técnicas que ainda não tinham sido vistas. O uso de ostensivos e principalmente do dinheiro é bastante evidenciado neste volume, damos destaque porque em alguns momentos a mobilização destes ostensivos compõem a associação da técnica e, trabalham as decomposições e composições fundamentais para o trabalho com o cálculo mental. As operações de multiplicação e divisão são apenas introduzidas e trabalhadas de forma breve, mais ligada aos ostensivos.

Os tipos de tarefas e técnicas modelados até o momento são fundamentais para o desenvolvimento do cálculo mental de acordo com os estudos que realizamos até o momento

(LETHIELLEUX, 2001; PARRA, 1996; GONÇALVES, 2008; GUIMARÃES, 2009; ANAIAS, 2010).

3.3 VOLUME 3

O volume 3 é composto por 11 capítulos, dos quais daremos atenção a 7 que tratam do eixo de números e operações e 1 cujo foco são grandezas e medidas. O volume 3 corresponde ao livro do 3º ano, onde são trabalhados os números maiores que 100. O primeiro capítulo trata de fazer uma retomada do que foi visto nos volumes 1 e 2 acerca dos números até 100, retomando a sequência dos números, antecessor e sucessor, composição e decomposição entre eles e a questão as ordens das dezenas e unidades. O capítulo 2 tem como tema central *localização e caminhos*. Os capítulos seguintes 3, 4 e 5 tornam ao eixo de números e operações, de forma que o 3 explora a ordem da centena ampliando o sistema de numeração decimal, e o 4 e 5 trabalham as operações de adição e subtração com dezenas e centenas exatas, apresentando algumas tarefas e técnicas para o cálculo mental, e exploram algumas representações dos mesmos.

Os capítulos 6 e 7 são reservados ao trabalho com medidas de tempo e sólidos geométricos, respectivamente. O capítulo 8 se dedica a trabalhar a operação de multiplicação, que tem inicialmente sua noção retomada e depois é aprofundada com tabuada do 2 o 10 e noções de dobro e triplo. O capítulo 9, tem como foco central a operação de divisão, que também tem sua noção retomada com o que foi visto no volume anterior e também se aprofunda, sendo formalizados os elementos da divisão, as ideias de metade, terça e quarta parte, bem como o algoritmo que já é introduzido. Dessa forma, as operações de multiplicação e divisão são vistas apenas nesses capítulos.

O capítulo seguinte tem como foco o eixo de grandezas e medidas. Destacamos que este capítulo tem uma seção de *Cálculo Mental*, dessa forma é a primeira vez que o cálculo mental é visto em um capítulo que não tem como foco o eixo de número e operações e sim grandezas e medidas. Neste capítulo é proposto que se faça a correspondência entre as unidades de medida de comprimento (metro e centímetro), massa (quilograma e grama) e capacidade (litro e mililitro). Por fim, o último capítulo explora as figuras geométricas planas.

Apesar de as autoras afirmarem no Manual do professor, que o cálculo mental é trabalhado preferivelmente no tema de operações, neste volume a habilidade também é explorada no eixo de grandezas e medidas. Desta forma, dedicaremos nosso olhar para os

capítulos 1, 3, 4, 5, 8, 9 e 10, em que encontramos tarefas e técnicas que contribuem com o desenvolvimento da habilidade de calcular mentalmente.

No próximo tópico, nos dedicamos à descrição das tarefas, técnicas e escolhas apresentadas neste volume, bem como observações destinadas ao professor trazidas pelas autoras. Assim como no volume anterior, na análise deste livro optamos por apresentar o quantitativo dos tipos de tarefas na seção posterior por conta de uma quantidade maior de tarefas de tipos diferentes.

3.3.1 A ORGANIZAÇÃO PRAXEOLÓGICA DO LIVRO DO 3º ANO

O capítulo 1 faz uma revisão do que foi visto sobre os números nos volumes anteriores. Dessa forma, as atividades visam explorar os conhecimentos prévios dos alunos acerca de alguns números, como de 0 até 10 e de 10 até 20. Posteriormente, é proposto a leitura e escrita de alguns números que estão compreendidos entre 0 e 100. Esta exploração acerca da relação número e quantidade é feita precedendo um tópico dedicado ao *Sistema Monetário*.

O tópico sobre o Sistema Monetário faz uma breve apresentação sobre o dinheiro e as atividades que seguem nesta parte do livro visam a composição de números, sendo assim tarefas do tipo T₁₇ (Figura 33).

Como você pode pagar uma compra de 90 reais, sem receber troco, usando:	
a) duas notas?	Não é possível.
b) três notas?	50, 20 e 20
c) quatro notas?	50, 20, 10 e 10
d) cinco notas?	50, 20, 10, 5 e 5; ou 50, 10, 10, 10 e 10; ou 20, 20, 20 e 10
e) seis notas?	20, 20, 20, 20, 5 e 5; ou 50, 10, 10, 10, 5 e 5; ou 20, 20, 20, 10, 10 e 10

Figura 33: Tarefas do tipo X com o uso do dinheiro

Fonte: BORDEAUX et al, 2014c, p.21

De acordo com as autoras, estas atividades que fazem o uso do dinheiro auxiliam o aluno acerca da decomposição e composição do número desenvolvendo assim habilidades do cálculo mental, pois possibilita que o aluno explore diferentes composições de um mesmo número. Cabe lembrar que primeiro são apresentadas atividades referente às notas, e posteriormente a apresentação dos valores monetários das moedas precedem atividades que visam a mesma ideia do que foi feito com relação às notas de dinheiro, como vemos na Figura 34.

Quantas moedas de cada valor indicado são necessárias para se obter 1 real?

a) Moedas de 50 centavos: 2 moedas

b) Moedas de 25 centavos: 4 moedas

c) Moedas de 10 centavos: 10 moedas

d) Moedas de 5 centavos: 20 moedas

e) Moedas de 1 centavo: 100 moedas

Figura 34: Tarefas do tipo X com moedas

Fonte: BORDEAUX et al, 2014c, p.22

Na sequência, é apresentada uma introdução sobre o Sistema de Numeração Decimal de forma histórica tratando da necessidade dos algarismos indo-arábicos e sua relevância no atual sistema. De maneira formal, os números de 0 a 9 são apresentados e algumas atividades são propostas como forma de revisão sobre os mesmos, sem alguma operação em questão.

Dando continuidade ao capítulo, e uma espécie de *refamiliarização* com os números, são propostas algumas tarefas do tipo T_1 e T_6 em um tópico intitulado *Contando de 10 em 10*, onde são trabalhadas sequências numéricas e somas de dezenas inteiras. A contagem por agrupamento é sistema em seguida, em um jogo que visa contar por agrupamentos que podem ser formados como o aluno desejar.

No jogo, que é denominado *Contando e registrando*, o jogador lança um dado e registra por meio de tracinhos a quantidade que sair no dado, de forma que forme triângulos, ou quadrados ou algum outro tipo de figura que vise sempre ter a mesma quantidade de tracinhos, fazendo assim que a contagem seja feita por meio de agrupamentos. Ganha quem chegar primeiro ao número 30. O agrupamento é então, trabalhado da mesma forma como visto no volume 1, associando a quantidade representada ao quadro de dezenas e unidades, porém, inicialmente em um contexto um pouco diferente (Figura 35) e depois com quadro de dezenas e unidades.

Observe a contagem e o registro formando grupos de 10:



Grupos de 10	Soltas
3	5

Figura 35: Formando grupos de 10

Fonte: BORDEAUX et al, 2014c, p.22

São propostas então tarefas que visam a correspondência dezena e unidade, de forma a associar quantas unidades compõe uma certa quantidade de dezenas seguida de uma atividade que visa identificar diferentes formas de compor uma quantidade.

Essa parte de agrupamento é ainda trabalhada com o material dourado e o quadro de dezenas e unidades que deve ser preenchido de acordo com o que for representado. Na sequência, as dezenas e unidades são trabalhadas com o dinheiro como vemos na Figura 36.



Figura 36: Representando dezenas e unidades com auxílio do dinheiro

Fonte: BORDEAUX et al, 2014c, p.33

Notamos que o uso do dinheiro é uma escolha das autoras para trabalhar sobre o registro de dezenas e unidades no quadro que vemos na Figura 36, assim como foi feito com o material dourado e outros ostensivos anteriormente. Um tópico sobre aproximação propõe tarefas do tipo T_{18} e T_{19} , onde busca-se a dezena mais próxima e, dessa forma, retoma de maneira breve o que foi visto no volume anterior. Em seguida, e ao final do capítulo, é proposto um tópico para trabalhar a sequência numérica até o 100, com tarefas dos tipos T_1 e T_6 . A composição e decomposição também têm um espaço neste capítulo, com tarefas dos tipos T_{18} e $T_{9.2}$. O capítulo se encerra com uma revisão, contendo tarefas dos tipos T_1 , T_6 e T_{18} .

O capítulo 3 tem como foco em trabalhar os números maiores que 100, assim, inicialmente apresenta tarefas do tipo T_1 e T_6 , buscando sistematizar a sequência numérica do 100 ao 199 e depois de 200 até 999. Destacamos duas tarefas diferentes com relação à centena, uma visa contar de 100 em 100 a partir de um número dado, sendo uma tarefa do tipo T_1 , a técnica (τ_3) utilizada para resolver esta tarefa consiste em somar uma centena exata a um número dado (Figura 37); a outra tarefa objetiva a subtração de uma centena exata, no entanto essa tarefa já possui um subtipo modelado ($T_{10.3}$).

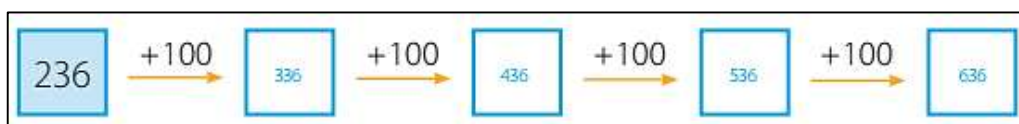


Figura 37: Somar uma centena exata

Fonte: BORDEAUX et al, 2014c, p.63

Essas tarefas contribuem com o desenvolvimento do cálculo mental uma vez que trabalham a regularidade existente na soma de 100 unidades (GUIMARÃES, 2009). Destacamos que a técnica apresentada é em alguns momentos uma tarefa, dessa forma modelamos também como um subtipo de T_9 , $T_{9.8}$, que consiste em *adicionar uma centena exata*

a um número de 3 algarismos. No entanto estas tarefas só aparecem ao final do capítulo na seção de revisão, em que se mostra a diferença entre somar 1, 10 e 100 a um número de 3 algarismos.

O dinheiro é mais uma vez evidenciado para representar uma centena, com 100 moedas de 1 real, 10 notas de 10 reais e uma nota de 100 reais. A representação da centena também é apresentada no material dourado, com cubos, barras e uma placa. E então temos a correspondência com o quadro de ordens como apresentado na Figura 38.

No quadro de ordens temos:

Centena	Dezena	Unidade
1	0	0

ou

C	D	U
1	0	0

Figura 38: Quadro de ordens
Fonte: BORDEAUX et al, 2014c, p.65

A centena é ainda explorada com tarefas dos tipos T_{15} visando identificar diferentes maneiras de compor uma centena por meio de somas como $99 + 1$, $95 + 5$ e $50 + 50$. Passamos então às centenas exatas representadas pelo material dourado e definido pelas autoras como grupos de 100 unidades, assim, as centenas exatas são 100, 200, 300...900. As tarefas com relação à essa parte visam fazer a correspondência do número para com suas ordens e sua composição, por exemplo, trezentos corresponde à três centenas ou ainda à trezentas unidades.

Uma parte destinada à composição e decomposição de números nesse meio, explora tarefas do tipo T_{17} , destacando as ordens das dezenas e unidades. Tais tarefas são ainda propostas ao longo do volume, posteriormente dando destaque às ordens da centena também e em seções de revisão.

Ampliando o sistema de numeração decimal, trabalha-se por meio do dinheiro e o quadro de ordens a composição e decomposição de um número de acordo com sua ordem, como podemos ver na Figura 39.



Figura 39: Compondo com o dinheiro e quadro de ordens
Fonte: BORDEAUX et al, 2014c, p.70

Essa apresentação precede o momento em que as tarefas do tipo T_{18} serão trabalhadas, pois o foco nesta parte é evidenciar a representação do número de acordo com o quadro de

ordens para posteriormente trabalhar a adição. A seção de revisão deste capítulo trabalha tarefas dos tipos T_1 , T_6 , T_{18} , $T_{9,8}$ e $T_{10,3}$, algumas com o uso do dinheiro, outras o auxílio do quadro de ordens.

O Capítulo 4 tem como foco as operações de adição e subtração. Dessa forma, o capítulo tem início com a apresentação da tábua da adição dos números de 0 a 9, compreendendo assim tarefas do tipo $T_{9,1}$ com o objetivo de verificar o entendimento dos alunos acerca dessas somas que já devem estar automatizadas (BORDEAUX et al, 2014c). Também, são propostas tarefas do tipo $T_{9,3}$ e T_1 (com $n=10$) como uma retomada do que foi visto no volume anterior.

Essa retomada abre espaço para as tarefas do tipo T_9 , com relação às centenas que já foram introduzidas no capítulo anterior e voltam a ser exploradas. Mas a característica em questão é que trata da soma em que as duas parcelas são centenas exatas, dessa forma modelamos como um subtipo de T_9 $T_{9,9}$: *somar centenas exatas*. Neste momento, a adição de centenas exatas é associada a adição de dezenas inteiras que por sua vez é associada a soma dos algarismos das dezenas, sempre com o auxílio da representação com o material dourado.

Essa associação possibilita que se crie técnicas quanto à soma das centenas diante da regularidade válida para a soma de dezenas inteiras, somar os algarismos da centena e acrescentar zero nas demais poderia ser uma técnica. Apesar de poder ser uma técnica que pode ser constatada na pesquisa de Guimarães (2009) e pode ser evidenciada na sequência das tarefas dos tipos $T_{9,1}$, $T_{9,3}$ e $T_{9,8}$, a mesma não é explicitada pelo livro, como dito anteriormente visa-se a percepção da regularidade de poder recorrer à soma de algarismos de 1 a 9.

Na sequência, um jogo de tabuleiro que consiste em avançar as casa de acordo com o resultado da soma dos número sorteados em 2 dados, permite que as somas que pretende que se tornem automatizadas (referente as tarefas do tipo $T_{9,1}$) sejam mais uma vez exploradas, de forma lúdica por meio do jogo. Finalmente, os termos da adição são formalizados da mesma forma como foi feito no volume anterior, precedendo situações-problema que visam a exploração da adição.

A primeira chamada *Preparando para o Cálculo Mental* tem como foco a aproximação. Assim contém diferentes tarefas relacionadas ao tema, como a identificação da dezena exata mais próxima (T_{18}), como chegar à dezena mais próxima (T_{19}) e ainda $T_{9,3}$ uma vez que feita a aproximação das parcelas faz-se a operação da soma de dezenas exatas. Dessa

forma são empregadas também as técnicas τ_8 e τ_{10} , uma vez que para a soma das dezenas inteiras podemos operar de acordo com o número correspondente à sua ordem (Figura 40).

Troque cada parcela pela dezena exata mais próxima e descubra o total aproximado.

a) $19 + 48 \rightarrow \underline{20} + \underline{50} = \underline{70}$

Figura 40: Empregando as técnicas τ_8 e τ_{10} para a aproximação
Fonte: BORDEAUX et al, 2014c, p.94

Posteriormente, temos para a resolução de tarefas do tipo $T_{9,2}$ a apresentação da técnica τ_{11} , mesma técnica apresentada no volume anterior. Assim, vemos apenas como uma retomada para que a técnica se estenda para resolver adições em que uma das parcelas contém 3 algarismos. Cabe ressaltar que a abordagem utilizada se mantém, de forma que após apresentação da técnica são propostas tarefas semelhantes para a aplicação da mesma. No entanto, lembramos que as técnicas também se tornam automatizadas (ALSELMO E PLANCHETTE, 2006), sendo assim, é importante associar as técnicas às situações em que devem ser empregadas.

Estendendo a técnica τ_{11} , para as tarefas do tipo $T_{9,2}$ em que uma das parcelas é formada por um número de 3 algarismos, a técnica é apresentada antes das tarefas, como vemos na Figura 41.

$$\begin{aligned}
 &196 + 6 = \\
 &= 196 + 4 + 2 = \\
 &= 200 + 2 = 202
 \end{aligned}$$

De 196 para 200 faltam 4. Então decompos 6 em 4 + 2.



Figura 41: Apresentação da técnica τ_{14}
Fonte: BORDEAUX et al, 2014c, p.95

Assim, modelamos esta técnica como τ_{14} : *decompor uma das parcelas visando formar uma centena exata*. Após uma sequência de tarefas que visam o exercício desta técnica, T_{18} que antes era um tipo de tarefas, passa em parte ser uma técnica para resolver as tarefas do tipo $T_{9,7}$ (Figura 42):

$$\begin{aligned}
 &25 + 13 = \\
 &= 20 + 5 + 10 + 3 = \\
 &= 20 + 10 + 5 + 3 = 30 + 8 = 38
 \end{aligned}$$

Figura 42: Técnica para tarefas do tipo $T_{9,7}$
Fonte: BORDEAUX et al, 2014c, p.98

A técnica proposta consiste em decompor as parcelas e operar com as ordens correspondentes (τ_{10}). De acordo com Bordeaux et al (2014c, p.98) “utilizando esta maneira de efetuar adição, os alunos desenvolvem o cálculo mental. É importante que sejam incentivados a utilizá-la antes de aprenderem o algoritmo usual”. Isso porque na perspectiva adotada, as técnicas para efetuar o cálculo mental são vistas como *via de acesso* ao algoritmo (PARRA, 1996). Então, em seguida trazem o algoritmo da adição no quadro de ordens, que não damos destaque aqui por não considerarmos como uma forma de cálculo mental.

Agora então, passa-se à operação de subtração seguindo o mesmo ritmo imposto na operação de adição. Assim tem início com uma retomada da subtração com números menores que 20, tarefas do tipo $T_{10.1}$. Algumas que tem o minuendo com valor fixo, de acordo com as orientações ao professor, visam explorar a ideia de que a adição e subtração são ideias inversas uma vez que se orienta que utilize a tábua da adição para resolver as subtrações. A subtração de dezenas exatas é apresentada pela primeira vez de forma que o minuendo e o subtraendo sejam dezenas exatas. Operar com dezenas exatas é relevante para estratégias de cálculo mental, assim como foi visto na adição, assim, modelamos as tarefas com essa característica como $T_{10.6}$: *subtrair duas dezenas exatas*. Para a tarefa $50 - 20$, duas técnicas são apresentadas (Figura 43) para que fique a cargo do aluno a escolha da mais adequada quando for resolver tarefas deste tipo.



Figura 43: Apresentação de duas técnicas para tarefas do tipo $T_{10.6}$
Fonte: BORDEAUX et al, 2014c, p.105

A primeira estratégia pensa o 20 como $10 + 10$, e por isso faz-se duas subtrações sucessivas, neste caso a técnica (τ_{15}) visa *decompor o subtraendo em dezenas inteiras* e realizar subtrações sucessivas. Já a segunda consiste em decompor os números em função de suas ordens e operar com as ordens equivalentes (τ_{10}). Após apresentadas técnicas para tarefas do tipo $T_{10.6}$, são propostas as subtrações com dezenas inteiras. Em seguida, a ideia da técnica τ_{10} é estendida para a subtração de centenas exatas (Figura 44).

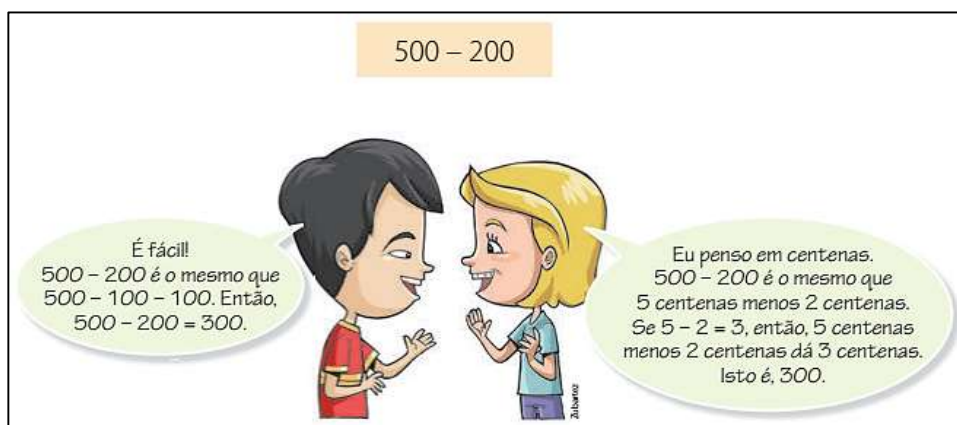


Figura 44: Ampliação da técnica τ_{10}
 Fonte: BORDEAUX et al, 2014c, p.106

A subtração de centenas exatas aparece associada ao desenvolvimento do cálculo mental como para as centenas, assim classificamos as tarefas com essa particularidade como um subtipo de T_{10} , sendo $T_{10.7}$: *subtrair duas centenas exatas*. As técnicas apresentadas são duas, sendo uma τ_{10} e a outra, que denominamos como τ_{16} , consiste em *decompor o subtraendo em centenas exatas* e realizar subtrações sucessivas. Várias situações-problema são propostas na sequência visam interpretar situações em que a solução recaia em tarefas dos tipo $T_{10.6}$ e $T_{10.7}$.

Posteriormente, em um tópico intitulado *Usando o cálculo mental* são retomadas as tarefas do tipo $T_{10.4}$, em que é mais uma vez apresentada a técnica τ_{10} como feito no volume 2. Esse momento precede a proposta da subtração no quadro de ordens. Ressaltamos que a mesma técnica é empregada para as tarefas que têm em vista *subtrair dois números com 3 algarismos* ($T_{10.8}$). Esse processo possibilita a compreensão do que acontece no algoritmo, uma vez que associa o processo de decomposição em ordens com a operação.

Na seção de revisão, solicita-se que algumas contas sejam realizadas mentalmente, identificamos isso por meio do enunciado que diz para resolver *sem armar* contas. As tarefas são do tipo T_1 , $T_{9.1}$, $T_{9.7}$, $T_{10.4}$ e $T_{10.8}$.

O capítulo seguinte trata da adição e subtração com trocas, e, de acordo com as orientações para o professor o foco é investigar o conhecimento dos alunos acerca do algoritmo dessas operações. Assim, as trocas são sistematizadas com o algoritmo no quadro de ordens, para a adição (Figura 45).

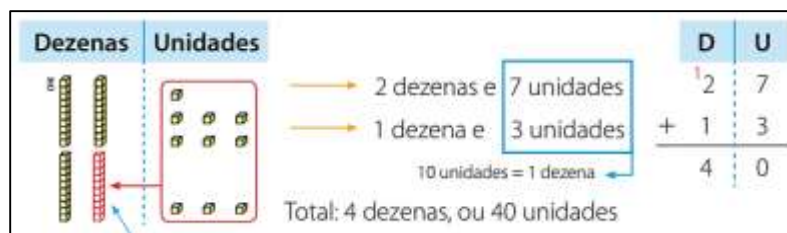


Figura 45: Sistematizando as trocas no quadro de ordens

Fonte: BORDEAUX et al, 2014c, p.125

Essa abordagem também é feita na subtração depois de explorar algumas técnicas que contribuem com o cálculo mental. Após a formalização dos termos da subtração, são apresentados procedimentos de cálculo mental. Para tarefas do tipo $T_{10.2}$, $T_{10.8}$, e *subtrações em que o minuendo possui 3 algarismos e o subtraendo 2 algarismos* ($T_{10.9}$) – que aparecem pela primeira vez neste volume – é proposta a técnica que denominamos τ_{17} e, consiste em *decompor o subtraendo e realizar subtrações sucessivas*, por exemplo, na tarefa do tipo $137 - 112$, fazemos $137 - 10 = 127$, depois $127 - 2 = 125$ e, por fim, $125 - 100 = 25$. Note que para que essa técnica seja executada, é necessário ter automatizado as possíveis composições do subtraendo.

Para as tarefas do tipo $T_{10.6}$, como $110 - 50$ e $130 - 70$, é apresentada a técnica (Figura 46), que denominamos como τ_{18} : *operar com os números formados pelos algarismos da dezena e/ou centena e acrescentar o zero no resultado final*.

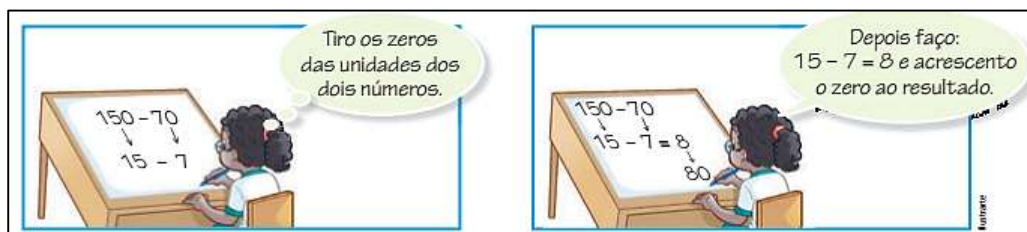


Figura 46: Apresentação da técnica τ_{19}

Fonte: BORDEAUX et al, 2014c, p.133

Essa técnica foi justificada anteriormente, quando decomposmos de acordo com as ordens. Na tarefa $150 - 70$, por exemplo, temos que 150 corresponde a 15 dezenas e 70 corresponde a 7 dezenas, assim 15 dezenas menos 7 dezenas é igual a 8 dezenas que corresponde a 80. Dessa forma, esta técnica tem sua tecnologia fundamentada na decomposição de acordo com as ordens (unidade, dezena, centena). Após a exploração de tarefas e técnicas que se relacionam com o cálculo mental com relação à operação de subtração, é então trabalhada a operação em questão no quadro de ordens sistematizando com as “trocas” no material dourado visando o desenvolvimento do algoritmo.

Ao final do capítulo, as operações de adição e subtração são novamente exploradas como inversas, seguindo o que foi feito no volume anterior. No entanto, agora é mostrado que para verificar o resultado da conta utilizamos a operação inversa, além disso o foco deste tópico centra neste trabalho com o uso do algoritmo, como vemos na Figura 47.

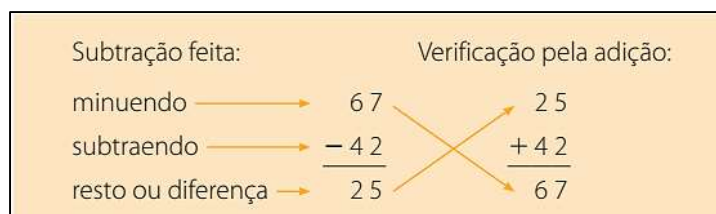


Figura 47: Adição e subtração como operações inversas

Fonte: BORDEAUX et al, 2014c, p.148

Na seção de revisão, apenas uma atividade trabalha com a adição e subtração como operações inversas. Além disso, notamos que apesar do capítulo trabalhar procedimentos de cálculo mental, a revisão tem foco em atividades que visam o uso do algoritmo das operações trabalhadas.

O capítulo 8 é dedicado à operação de multiplicação, que foi introduzida no volume anterior é, da mesma forma, retomada no início do capítulo tomando a operação como soma sucessiva de parcelas iguais. Para o professor há orientação de explorar as estratégias usadas pelos alunos oralmente ao longo das atividades desenvolvidas no capítulo. A escrita da multiplicação é estimulada, em atividades que solicitam que uma situação seja representação por meio da multiplicação entre dois números. Inicialmente, as tarefas dos tipos $T_{11.1}$ têm como técnica instituída a contagem de ostensivos, não recorrendo ainda a nenhuma técnica mental. Contudo, a contagem de ostensivos possibilita em um primeiro momento que a comutatividade da multiplicação seja evidenciada, ainda que não de maneira formal. A comutatividade é um propriedade que auxilia na resolução de contas, ao saber que $6 \times 2 = 2 \times 6$, ele pode recorrer à tabuada do 2 que é uma das primeiras a ter disponível em memória.

Posteriormente, a ideia de dobro é explorada por meio de tarefas do tipo T_{20} , sendo associada à tabuada do 2. Logo, a técnica associada é a mesma vista no volume anterior, τ_{12} . Destacamos que há um esforço das autoras em sistematizar essa associação de dobro entre as tabuadas, de forma que a noção de dobro é explorada ainda com tabuadas como do 2 e 4, 3 e 6 e 5 e 10, pois as tabuadas do 4, 6 e 10 têm os valores correspondentes ao dobro das tabuadas do 2, 3 e 5, respectivamente.

As tarefas do tipo $T_{11.1}$ se restringem ao uso da tabuada como técnica, bem como seu exercício para memorização em tábuas de multiplicação, em que a visualização privilegia a regularidade de dobro observada, como podemos ver na Figura 48.

×	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40

Figura 48: Tabua de multiplicação do 2 e 4

Fonte: BORDEAUX et al, 2014c, p.148

A ideia de triplo é retomada logo na sequência mas de forma breve associada à multiplicação por 3. Após a apresentação das tabuadas do 2, 4, 3 e 6, é apresentada a tabuada do 5 e 10 (essa ordem se deve ao privilegio de explorar a ideia do dobro entre as tabuadas). Exclusivamente para essas duas tabuadas, é feita uma associação com o dinheiro com notas de 5 e 10 reais em situações como “Calcule quanto Maurício ganharia se seu pai lhe desse 4 notas de 5 reais” (BORDEAUX, 2014c, p. 202). Além disso, há duas questões que estimulam os alunos a pensar em técnicas para as tabuadas em questão: a primeira solicita que os alunos descubram uma maneira prática de fazer a tabuada do 10; a segunda, que pensem em uma técnica ligada a tabuada do 5. As respostas esperadas são que quando um número for multiplicado por 10 o resultado sempre terminará em zero, e, quando for multiplicado por 5 sempre terminará em zero ou cinco.

Dessa forma, para as tarefas do tipo $T_{11.2}$ referente à multiplicação por 10 temos a seguinte técnica formalizada: τ_{19} : *acrescentar um zero à direita do último algarismo do número multiplicado por 10*. Já com relação a técnica estabelecida para a tabuada do 5, entendemos como uma forma de pensar na regularidade dos resultados e não uma técnica de acordo com nosso referencial teórico, pois não é uma forma de resolver as tarefas do tipo $T_{11.3}$. Após as tarefas dos tipos $T_{11.2}$ e $T_{11.3}$, há orientação para o professor que discuta com os alunos a importância da memorização da tabuada.

Um jogo para explorar a tabuada do 1 ao 6 é proposto na sequência, visando estimular a memorização da tabuada. Para tanto, o jogo consiste em lançar um dado duas vezes e multiplicar os números obtidos nos lançamentos e depois olhar o resultado da multiplicação no tabuleiro. Caso acertar o resultado o jogador pinta o quadradinho correspondente ao resultado, ganha o jogador com mais quadradinhos pintados.

Posteriormente, os termos da multiplicação são formalizados de forma que os números multiplicados são denominados *fatores* e o resultado é denominado *produto*. Após a

formalização são propostas tarefas em que deve-se *descobrir o fator desconhecido* (T_{22}), sendo dado um dos fatores e o produto (Figura 49).

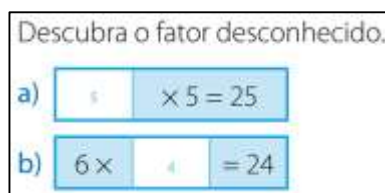


Figura 49: Tarefas do tipo T_{22} .
Fonte: BORDEAUX et al, 2014c, p.148

De acordo com as autoras, essa atividade trabalha de maneira intuitiva a operação divisão. Na sequência a tabuada do 9 é introduzida com uma situação-problema e logo proposta para que o aluno complete com os produtos.

Na seção de situações-problema são propostas atividades em que o aluno deve recorrer à multiplicação para resolvê-las, pensamos que deve ser como um exercício de memorização de procedimentos para tais situações (ANSELMO E PLANCHETTE, 2006). No volume anterior a tabuada foi explorada até o 5, neste volume é explorada até o 10. Destacamos que exclusivamente para a tabuada do 9 é apresentada uma técnica que faz o uso dos dedos (Figura 51), e como já dito, o uso dos dedos é essencial uma vez que está sempre disponível.

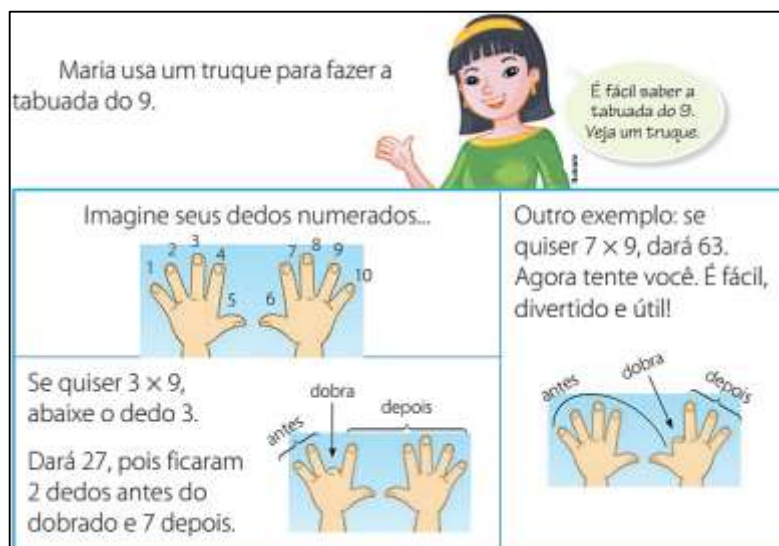


Figura 50: Apresentação da técnica que resolve a tabuada do 9
Fonte: BORDEAUX et al, 2014c, p.212

Apesar do uso dos dedos, essa técnica é diferente de τ_2 pois não consiste em ser uma sobrecontagem. Em vista disso, evidenciamos a técnica (τ_{20}) que resolve especificamente a tabuada do 9, multiplicar um número por 9, que é uma tarefa do tipo $T_{11.1}$. Tal técnica consiste em *abaixar o dedo correspondente ao número que se quer multiplicar por 9, e ver o número que é formado pelos dedos que ficam levantados*, assim como vemos na Figura 51. As tabuadas do 7 e do 8 são apresentadas na sequência, após a do 9, sendo tarefas do tipo $T_{11.1}$. Notamos

que não há uma ordem estabelecida para a exploração das tabuadas, e que a noção de dobro não foi explorada entre as tabuadas do 4 e 8.

Destacamos neste capítulo, dois tópicos que são apresentados na sequência: um com relação à multiplicação de dezenas e centenas exatas e o outro uma seção de cálculo mental que explora uma técnica relativa à decomposição. No primeiro tópico as tarefas apresentadas consistem em multiplicar dois números em que um dos fatores deve ser formado por um algarismo e o outro deve ser formado por dois ou três algarismos, no entanto o fator formado por dois ou três algarismos tem uma característica particular, que é ser dezenas ou centenas exatas. Assim, as tarefas com essa características são do subtipo $T_{11.2}$, e a técnica utilizada é τ_{10} , em que pensamos os números de acordo com as ordens. Por exemplo, na tarefa do tipo $T_{11.2}$ 5×40 para empregar a técnica τ_{10} , basta pensar que 40 corresponde à 4 dezenas, assim, 5 vezes 4 dezenas é igual a 20 dezenas que corresponde à 200.

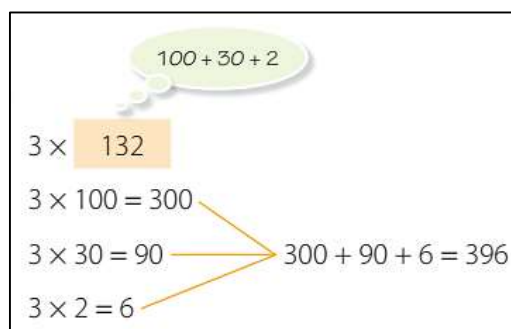


Figura 51: Emprego da técnica τ_{21} em uma tarefa do tipo $T_{11.4}$
 Fonte: BORDEAUX et al, 2014c, p.218

Em seguida, são propostas várias tarefas do tipo $T_{11.4}$ (Figura 51) que para resolver visam *decompor um dos fatores e aplicar a propriedade distributiva da multiplicação* que modelamos como a técnica τ_{21} . Passa-se então a associação da multiplicação com material dourado, intuindo uma sistematização do algoritmo que é trabalhado no quadro de ordens. Vemos mais uma vez que o termo “armar conta” está ligado ao algoritmo de forma escrita, enquanto que o termo “sem armar a conta” refere-se ao emprego cálculo mental. A exploração do algoritmo é feita até o final deste capítulo. Na seção de revisão, com relação ao cálculo mental encontramos apenas algumas tarefas de multiplicação de números de 0 a 10, que estão agrupadas pelo tipo de tarefa $T_{11.1}$.

Cabe aqui falar que, neste capítulo, a multiplicação também é relacionada com as noções de proporcionalidade e combinatória, mas como não é nosso foco de discussão e nestas partes não há tarefas que se relacionam ao cálculo mental, não demos destaque.

O capítulo 9 é dedicado a exploração da operação de divisão, que inicia com a retomada do que foi visto no volume com atividades que visam identificar os conhecimentos prévios. De acordo com a orientação para o professor as estratégias utilizadas pelos alunos devem ser de cunho pessoal, o que está de acordo com a definição de cálculo mental adotada (PARRA, 1996), de forma que podem ser feitas mentalmente ou com registro de desenho (BORDEAUX, 2014c.)

Em seguida, a ideia de repartir em partes iguais é introduzida com uma situação, que visa repartir 18 bolinhas em 2 caixas. A situação é resolvida com o auxílio de representação e, ao final associada à expressão que a representa utilizando a notação de divisão: “Então: 18 dividido por 2 é igual a 9 ou $18 \div 2 = 9$ ” (BORDEAUX, 2014c, p.229). Seguindo esta ideia, são propostas atividades semelhantes com o objetivo de compreender a operação e representá-la utilizando a notação com sinal de divisão, e ainda, algumas tarefas que são do tipo $T_{12.3}$, de forma que o dividendo são números entre 1 e 20. Mais adiante, é proposto um jogo intitulado *Jogo do parte e reparte* visa fazer as divisões com auxílio de material concreto, seguindo a ideias das situações.

No tópico seguinte, multiplicação e divisão são exploradas como operações inversas semelhante ao que foi trazido no volume 2, com tarefas dos tipos $T_{11.1}$, $T_{11.4}$ e $T_{12.3}$. Destacamos nesta parte que também aparecem tarefas do tipo T_{22} , em que a divisão aparece como técnica (Figura 52).

Que número multiplicado por 6 dá 12? <u>2</u>	$12 \div 6$
Que número multiplicado por 5 dá 35? <u>7</u>	$35 \div 5$

Figura 52: A divisão como técnica para tarefas do tipo T_{22}

Fonte: BORDEAUX et al, 2014c, p.237

Essa técnica também aparece na pesquisa de Guimarães (2009), mas quando propõe que o aluno verifique se um número pertence ou não à uma tabuada, ideia que está incluída em tarefas do tipo T_{14} elencado *a priori*. Assim, destacamos que a *divisão* como técnica (τ_{22}) é implementada nesta parte para resolver tarefas do tipo T_{22} .

A ideia de metade é implementada na sequência sendo associada à divisão por 2 (τ_{13}) como no volume anterior. Além disso, dando continuidade à percepção de que a multiplicação e a divisão são operações inversas, é sistematizada uma relação entre metade e dobro por meio de uma tabela que deve ser completada (Figura 53):

Complete a tabela.

	0	2	4	6	8	10	12	14	16
Metade	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Dobro	0	4	8	12	16	20	24	28	32

Figura 53: Relação entre metade e dobro
 Fonte: BORDEAUX et al, 2014c, p.238

Essa sistematização é relevante para esclarecer a diferença entre as noções e consequentemente a técnica empregada em tais situações. No entanto, não encontramos alguma orientação ao professor para dar destaque a esta atividade. Posteriormente, a ideia de terça e quarta parte é associada à divisão por 3 e 4, respectivamente. A associação é feita de maneira explícita no capítulo. Identificar a terça e quarta parte segue com apresentação semelhante ao de identificar a metade, no entanto a ideia de metade é fundamental pois possibilita que seja empregada em algumas situações como parte da técnica. Dessa forma modelamos o tipo de tarefa T_{23} como *identificar a n -ésima parte de um número, tal que $n \geq 3$* , pois inclui identificar a terça, quarta, quinta, e assim por diante, parte de um número. Entretanto neste volume trata-se só da terça e quarta parte. Assim, a técnica explicitada que resolve as tarefas deste tipo consiste em *dividir por n , tal que $n \geq 3$* (τ_{23}), dessa forma para identificar a terça parte de um número o dividimos por 3, e; para quarta parte dividimos por 4.

Para resolver situações de divisão além do emprego da tabuada ao pensar a multiplicação como operação inversa, as autoras também trazer a ideia de ‘quantas vezes cabe’. Essa ideia consiste e realizar subtrações sucessivas, técnica (τ_3) que já foi utilizada anteriormente para a completar sequências numéricas. Para tanto é apresentada uma tecnologia que se pauta na operação de multiplicação como podemos ver na orientação para o professor que segue na Figura 54:

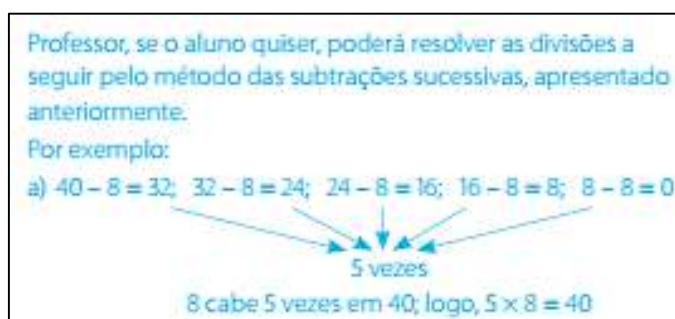


Figura 54: Justificativa da validade da técnica
 Fonte: BORDEAUX et al, 2014c, p.238

Posteriormente, a divisão não exata é introduzida com o algoritmo usual da divisão, mas sem formalizar ainda. Após algumas contas de divisão que visam trabalhar o algoritmo é

então feita a formalização dos termos da divisão no algoritmo, sendo os elementos o: dividendo, divisor, quociente e resto.

Com relação ao cálculo mental, identificamos que é proposto a divisão de dezenas exatas, que tem como técnica didática o uso do dinheiro. Assim, modelamos como um subtipo de T_{12} , sendo $T_{12.5}$: *Dividir dois números em que o dividendo é uma dezena exata*. Tarefas com essa característica poderiam se enquadrar no subtipo $T_{12.3}$, no entanto, o fato do dividendo ser uma dezena exata conta com um técnica diferente, dessa forma a técnica proposta para resolver tarefas do tipo $T_{12.5}$ é τ_{10} .

Para tarefas do tipo $T_{12.3}$ em que o dividendo é um número com 2 algarismos, a técnica apresentada é a decomposição do dividendo, como vemos na Figura 55:

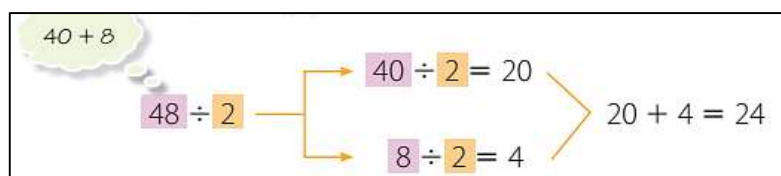


Figura 55: Apresentando uma técnica para tarefas do tipo $T_{12.3}$
Fonte: BORDEAUX et al, 2014c, p.238

A decomposição do dividendo é associada à propriedade distributiva, que é o que justifica a validade da técnica em questão que modelamos como τ_{24} : *decompor o dividendo de acordo com suas ordens e aplicar a propriedade distributiva*.

Posteriormente é apresentada a divisão com trocas usando material dourado fazendo associação com o algoritmo com auxílio do quadro de ordens. Após atividades que visam essencialmente explorar o algoritmo, é feita uma breve revisão das 4 operações com tarefas dos tipos T_9 , T_{10} , T_{11} e T_{12} . Ao final do capítulo na seção de revisão, trabalha-se com tábuas de divisão e tarefas dos tipos $T_{12.3}$ e $T_{12.5}$.

O capítulo seguinte tem como tema central *Medidas de comprimento, massa e capacidade* visando trabalhar as unidades de medida. Para tanto as autoras apresentam o símbolo do metro e centímetro e apresentam a correspondência entre os mesmos formalizando que “1 metro é igual a 100 centímetros ou $1m = 100cm$ ” (BORDEAUX et al, 2014c, p.265). Destacamos que este é o primeiro capítulo que não se dirige ao eixo de números e operações, e sim ao eixo de grandezas e medidas, mas que possui uma seção de cálculo mental.

A seção de cálculo mental em questão, explora tarefas de correspondências entre metro e centímetro e associando de certa forma à composição e decomposição dos números como podemos ver na Figura 56:

$$1 \text{ m e } 80 \text{ cm} =$$

$$= \underline{100} \text{ cm} + \underline{80} \text{ cm} = \underline{180} \text{ cm}$$

Figura 56: Correspondência entre as unidades de medida de comprimento
 Fonte: BORDEAUX et al, 2014c, p.238

Seguindo a mesma organização para a apresentação e trabalho de correspondência entre metro e centímetro, as autoras seguem com as relações para unidade de medida de massa, que são o quilograma e o grama, e de capacidade, que são o litro e mililitro. Dessa forma as tarefas apresentadas visam *identificar as correspondências entre as unidades de medida* são modeladas como uma novo tipo de tarefa denominado **T₂₄**. Essa sistematização visa tornar automatizado a correspondência entre as unidades de medida, de forma a facilitar o cálculo.

3.3.2 O CÁLCULO MENTAL NO LIVRO DO 3º ANO

As tarefas que contribuem com o cálculo mental, neste volume são trabalhadas em diferentes momentos e não só nas seções dedicadas explicitamente a esta habilidade. Em um primeiro momento, quando as autoras dedicam parte dos capítulo para retomada do que foi visto no volume anterior, as tarefas com relação ao cálculo mental se repetem e notamos que o dinheiro é evidenciado para trabalhar tarefas como as do tipo **T₁₅**, **T₁₇**, **T₁₈** e **T₁₉**.

Neste livro 6 partes são destinadas ao trabalho com o cálculo mental, sendo 3 seções e 3 tópicos. As seções neste volume aparecem ao final do livro nas operações multiplicação e divisão e no estudo das unidades de medida. Para as operações de adição e subtração o espaço destinado é em tópicos ao longo dos capítulos das operações como *Preparando para o cálculo mental* e *Usando o cálculo mental*. Porém, não só nestas partes, como também em outras em que são propostas atividades que contribuem com o desenvolvimento da habilidade, como destacado ao longo da análise. Além disso, tem-se orientações para os professores de momentos que a proposta das atividades é apresentar procedimentos de cálculo mental. Contamos, ao final do livro também com um capítulo em que uma seção de cálculo mental aparece no eixo de grandezas e medidas em que se trabalha a correspondência entre unidades de medida.

Identificamos entre tipos e subtipos de tarefa um total de 28, sendo 10 novos tipos/subtipos; e um total de 20 técnicas, sendo 13 emergidas deste volume. No quadro 5 abaixo apresentamos o quantitativo relativo às tarefas encontradas neste volume que referem-se aos tipos elencados *a priori* (em rosa) e aos tipos elencados na análise dos volumes anteriores (em roxo):

Tipos de tarefas	T ₁	T ₆	T _{9.1}	T _{9.2}	T _{9.3}	T _{9.7}	T _{10.1}	T _{10.3}	T _{10.4}	T _{11.1}	T _{11.2}	T _{11.4}	T _{12.3}	T ₁₅	T ₁₇	T ₁₈	T ₁₉	T ₂₀
Quantidade	57	40	24	36	17	14	40	3	15	79	12	15	41	25	29	14	5	14

Quadro 5: Quantitativo dos tipos de tarefas elencados a priori e a partir da análise dos volumes 1 e 2

Fonte: Elaborado a partir do desenvolvimento da pesquisa

No Quadro 5, vemos que o tipo de tarefa que é proposto com maior frequência é o tipo T_{11.1}. Isso se deve ao fato de que no 3º ano a operação de multiplicação começa ser mais trabalhada, inclusive explorando a tabuada que é vista do 2 ao 10. No volume anterior as tarefas dos tipos de T₁ e T₆ que eram na sequência das tarefas do tipo T_{10.1} umas das mais frequentes, no volume 3 ainda são frequentes, apesar de uma mínima diferença com relação as tarefas do tipo T_{12.3}. As tarefas dos tipos T₁ e T₆ ainda são exploradas, uma vez que neste livro passa-se a trabalhar com os números maiores que 100 e essas tarefas são propostas em vários momentos, não apenas em um como ocorre com as tarefas relativas às operações.

Já as tarefas menos frequentes mas que ainda sim aparecem com relação ao cálculo mental, mesmo que não evidenciadas são as dos tipo T_{10.3} e T₁₉. As do tipo T_{10.3} parecem não ser tão exploradas devido ao foco que se tem em trabalhar o algoritmo nas operações de adição e subtração. Já as do tipo T₁₉ se deve ao fato da ideia de *aproximação* ser apenas retomada de forma muito breve, apenas para lembrar o que foi visto no volume anterior, depois ela é parte da técnica para fazer estimativas em contas de adição.

Podemos ainda ver no Quadro 5, que são 11 tipos de tarefas presentes no livro do terceiro ano, que foram elencados a priori com base na tese de Guimarães (2009), e que são resolvidas por 9 técnicas, e; 7 tipos que foram modelados a partir da análise dos volumes 1 e 2 que trabalham 4 técnicas. No Quadro 6, apresentamos o quantitativo com relação aos tipos de tarefas que estão presentes no livro do 3º ano e ainda não haviam sido modelados, logo, não se encaixavam nos tipos até então elencados.

Tipos de tarefas	T _{9.8}	T _{9.9}	T _{10.6}	T _{10.7}	T _{10.8}	T _{10.9}	T _{12.5}	T ₂₂	T ₂₃	T ₂₄
Quantidade	3	7	9	10	16	4	10	9	10	20

Quadro 6: Quantitativo dos tipos de tarefas surgidos no volume 3

Fonte: Elaborado a partir do desenvolvimento da pesquisa

No Quadro 6, vemos que os tipos de tarefas mais frequentes são T₂₄ e T_{10.8}. As tarefas do tipo T_{10.8} são propostas somente no capítulo dedicado as operação de adição e subtração com

números maiores que 100, para essas tarefas a técnica τ_{10} é evidenciada como forma de serem resolvidas. Cabe falar que as tarefas com essa característica e que tinham por objetivo explorar o uso do algoritmo não foram contabilizadas, uma vez que a perspectiva de cálculo mental adotada não considera o algoritmo como forma de realizar o cálculo mental (PARRA, 1996).

As tarefas do tipo T_{24} são propostas apenas em um capítulo, que é destinado ao trabalho com as unidades de medida de comprimento, massa e capacidade. Sua frequência se deve ao objetivo das autoras, que parecem visar que o aluno tenha disponível em memória essas correspondências. No entanto, apesar de ter tópicos explícitos para o cálculo mental no capítulo em questão, dentre os objetivos específicos do capítulo, no manual para o professor, o cálculo mental não é mencionado. Mas entendemos que para que se estabeleça relações entre as unidades de medida o cálculo mental as tarefas propostas são fundamentais.

A seguir apresentamos uma breve síntese de como as tarefas destacadas neste volume se fizeram presentes:

- As tarefas dos tipo T_1 e T_6 são propostas ao longo de todo livro, na maioria das vezes na seção de revisão, inicialmente com números menores que 100 e depois com números até 999. As técnicas para resolver as tarefas deste tipo parecem ser as mesmas empregadas anteriormente, que seriam τ_3 e τ_4 ;
- Com relação à operação de adição, as tarefas dos tipo $T_{9.1}$, $T_{9.2}$, $T_{9.3}$, $T_{9.7}$, $T_{9.8}$ e $T_{9.9}$ são exploradas nos 2 capítulos referentes à operação e em alguns momentos aparecem em seções de revisão. As tarefas em questão exploram as técnicas τ_2 , τ_{10} , τ_{11} e τ_{14} ; a operação de subtração é trabalhada nos mesmo capítulos, dessa forma os tipos de tarefas $T_{10.1}$, $T_{10.3}$, $T_{10.4}$, $T_{10.6}$, $T_{10.7}$, $T_{10.8}$ e $T_{10.9}$, resolvidas por τ_3 , τ_{10} , τ_{15} , τ_{16} , τ_{17} e τ_{18} (cada uma com sua correspondência);
- As operações de multiplicação e divisão são propostas em capítulos distintos, mas algumas tarefas com relação à multiplicação como $T_{11.1}$ ainda aparecem na divisão, pois é onde é desenvolvida a ideia de que são operações inversas. Assim, as tarefas dos tipos $T_{11.1}$, $T_{11.2}$ e $T_{11.4}$ bem como suas técnicas, dentre a tabuada (τ_{12}), τ_{10} , τ_{19} e τ_{20} . Vale ressaltar que as tarefas dos tipo T_{20} e T_{21} também são exploradas no capítulo da multiplicação;

- As tarefas relacionadas a operação de divisão se concentram em apenas um capítulo, em que são propostas as tarefas dos tipos $T_{12.3}$, $T_{12.5}$, T_{14} e T_{23} , momento em que as técnicas τ_{23} e τ_{24} são apresentadas;
- As tarefas dos tipo T_{15} e T_{17} aparecem no livro no capítulo dedicado à centena e às operações de adição e subtração; já os tipos de tarefas T_{18} e T_{19} são tipos apenas retomados como uma breve revisão. Estes fatos nos levam a entender que as técnicas empregadas são as mesmas do volume anterior.
- Por fim, as tarefas do tipo T_{24} são propostas somente no capítulo sobre grandezas e medidas, em que as unidades de medidas são exploradas cada uma em sua correspondência; não tendo uma técnica explícita a não ser a associação feita como vista na Figura 57.

De maneira geral, também pudemos observar o abandono de algumas tarefas vistas nos volumes anteriores, como as do tipo T_4 , T_5 e T_7 e técnicas como as τ_6 , τ_7 , τ_8 . Na seção seguinte, apresentamos uma relação entre os tipos de tarefas e suas técnicas em cada volume e exploraremos mais os abandonos e surgimentos de tipos de tarefas e técnicas diferentes.

3.4 O CÁLCULO MENTAL NOS VOLUMES 1, 2 E 3: EVOLUÇÃO PRAXEOLÓGICA

Os volumes 1, 2 e 3 analisados até aqui, compõem a parte de alfabetização dos 1º ao 3º anos do ensino fundamental. Trazemos nesta seção uma relação entre os tipos de tarefas e técnicas encontradas em cada volume. A sistematização de tabelas apresentada aqui segue os quadros que foram apresentados anteriormente nas seções 3.1.2, 3.2.2. e 3.3.2.

No primeiro volume, por se tratar da familiarização com o sistema de numeração decimal e com as operações, são explorados 6 tipos de tarefas e 4 técnicas que relacionamos na Tabela 1, sendo 4 tipos elencados *a priori*. A relação é feita por meio da marcação em preto na tabela, por exemplo, para mostrar que o tipo de tarefa T_1 é resolvido por τ_1 e τ_3 , marcamos de preto o espaço que encontra estes elementos, como vemos na Tabela 1:

Técnicas (τ_n)	Tipos de tarefas (T_n)					
	T_1	T_6	$T_{9.1}$	$T_{9.5}$	$T_{10.1}$	T_{15}
τ_1						
τ_2						
τ_3						
τ_4						

Tabela 1: Relação entre tipos de tarefas e técnicas do Volume 1
Fonte: Elaborado a partir do desenvolvimento da pesquisa

Podemos notar que a técnica mais presente em tal volume é τ_2 , sendo trabalhada em 4 tipos de tarefas diferentes. Por se tratar da fase inicial da etapa escolar em que a matemática é estudada, as tarefas dos tipos T_1 e T_6 possuem 2 técnicas, que como apresentado anteriormente, passam por uma evolução. Ora, vale lembrar que estes tipos de tarefas são propostos nos volumes seguintes, e que nenhuma nova técnica para eles se apresenta, assim elas são reempregadas.

Vemos que a técnica τ_2 , resolve 4 tipos de tarefas diferentes, o que é possível por se tratar de tarefas que operam com números menores que 10. Vale destacar que é o trabalho com essas tarefas que possibilita que as técnicas τ_3 e τ_4 sejam apresentadas posteriormente. É natural pensar que a técnica τ_2 também resolveria as tarefas dos tipos T_1 e T_6 , no entanto não é proposta pelas autoras.

No volume 2, os tipos de tarefas vistos no volume 1 tornam a ser propostos no volume 2, mas em frequências diferentes, como vemos no Gráfico 1 abaixo:



Gráfico 1: Frequência de tarefas em comum dos Volumes 1 e 2
Fonte: Elaborado a partir do desenvolvimento da pesquisa

A partir do Gráfico 1 percebemos que a frequência das tarefas do tipo T_1 e T_6 sofrem maiores diferenças com relação ao livro do 2º ano. Tais tarefas estão mais ligadas com a formação do sistema de numeração decimal e visam a sua regularidade, dessa forma, é relevante trabalhar as sequências numéricas momento em que de certa forma trabalha-se a ideia de antecessor e sucessor mas não de maneira específica. Também notamos como as tarefas relativas às operações de subtração passam a ser mais trabalhadas no volume 2, mas não em detrimento das de adição. Pois, o tipo de tarefa T_{15} está relacionado à operação de adição, e notamos que sua frequência é crescente no volume 2, dessa forma a operação também é trabalhada mas com o objetivo de explorar a composição de números.

Com relação às tarefas do tipo $T_{9.5}$ que trabalham com a adição de três parcelas, inferimos que a diferença da quantidade de frequências do que foi proposto no volume 1 e no

volume 2 é muito pouca, e adiantamos que no volume 3 esse tipo de tarefa nem é trabalhado. Isso acontece, porque naquele momento, aquele tipo de tarefa ocupava papel na decomposição de números, uma ferramenta necessária para que a técnica τ_5 , por exemplo, seja posta em prática para resolver algumas tarefas do tipo T_9 .

No volume 2 alguns tipos de tarefas não possuem técnicas explicitadas, como vemos na Tabela 3, em que apresentamos a relação entre os tipos de tarefas elencados *a priori* vistos no volume 2 e as técnicas que foram (re)empregadas. Os tipos de tarefas T_2 , T_4 , T_5 e $T_{9.3}$ não possuem técnicas explícitas, a não ser copiar o que foi uma vez apresentado. Ainda assim, a leitura, a escrita por extenso e a o registro numérico de um número é de extrema importância na alfabetização, construção do repertório de números e operações e a compreensão das regularidades que permeiam o sistema de numeração decimal. A seguir trazemos na Tabela 3, a sistematização dos tipos de tarefas e as respectivas técnicas que o resolvem, quando essa existem:

Técnicas (τ_n)	Tipos de tarefas (T_n)										
	T_1	T_2	T_4	T_5	T_6	T_7	$T_{9.1}$	$T_{9.2}$	$T_{9.3}$	$T_{10.1}$	$T_{11.1}$
τ_2											
τ_3											
τ_4											
τ_5											
τ_6											
τ_{11}											
τ_{12}											

Tabela 2: Relação entre tipos de tarefas e técnicas do Volume 2

Fonte: Elaborado a partir do desenvolvimento da pesquisa

Notamos que com relação aos tipos de tarefas elaborados *a priori*, foram modeladas 4 novas técnicas que são empregadas especificamente em tipos de tarefas, sendo duas reempregadas em tipos de tarefas modelados a partir da análise, como consta na Tabela 3. Levando em consideração a frequência dos tipos de tarefas apresentados no Quadro 3, podemos inferir que as técnicas mais utilizadas são τ_2 , τ_3 , τ_5 e τ_6 , uma vez que essas são as tarefas *a priori* mais frequentes. Inferimos que isso se dá porque o foco nesta fase é na alfabetização, sendo assim, as tarefas e técnicas em questão buscam estudar as regularidades do sistema de numeração decimal.

A seguir apresentamos os novos tipos de tarefas e respectivas técnicas, do volume 2:

Técnicas (τ_n)	Tipos de tarefas (T_n)												
	$T_{9.5}$	$T_{9.6}$	$T_{9.7}$	$T_{10.4}$	$T_{10.5}$	$T_{12.5}$	T_{15}	T_{16}	T_{17}	T_{18}	T_{19}	T_{20}	T_{21}
τ_2													
τ_7													
τ_8													
τ_9													
τ_{10}													
τ_{12}													
τ_{13}													

Tabela 3: Relação entre novos tipos de tarefas e técnicas do Volume 2

Fonte: Elaborado a partir do desenvolvimento da pesquisa

Dos novos tipos modelados, 4 não apresentam técnica modeladas pois não foram identificadas de forma explícita, sendo um relativo à operação de divisão e os demais referentes à decomposição de números, que fazem uso da operação de adição; cabe lembrar que um deles, T_{15} , é o mais frequente. Em vista disso, inferimos que as autoras neste momento evidenciam a composição de números, o que é desejável para que diferentes estratégias de cálculo mental sejam desenvolvidas pelos alunos. Entre os tipos de tarefas mais frequentes, também estão $T_{9.7}$ e $T_{10.4}$ (Quadro 4), que como podemos ver são resolvidos por τ_{10} , técnica também utilizada para resolver as tarefas dos tipos $T_{10.5}$. Essa técnica é a mais reinvestida, devido a sua forma genérica, pois a composição e decomposição podem ser empregadas nas 4 operações como parte da técnica.

As técnicas que são menos frequentes são τ_7 e τ_8 , pois as tarefas resolvidas por essas técnicas são trabalhadas brevemente, mas isso não descarta sua importância, visto que elas são fundamentais para realizar aproximações. Adiantamos que τ_7 é uma técnica que é utilizada somente no volume 2, e somente na parte em que é apresentada, posteriormente ela sua ideia ainda utilizada, mas ela não é evidenciada novamente. Já o tipo de tarefa $T_{9.5}$ resolvido por τ_2 é abandonado, não sendo mais proposto a partir do próximo volume, visto que serviu para compor a ideia da técnica τ_5 . A técnica τ_5 , passa a resolver as tarefas do tipo $T_{9.1}$, que antes também era resolvida por τ_2 , como podemos ver comparando as Tabelas 1 e 3 e sistematizamos na Tabela 5. Na Tabela 5, trazemos a mesma sistematização feita nas tabelas anteriores, mas com relação ao volume 3:

Técnicas (τ_n)	Tipos de tarefas (T _n)																		
	T ₁	T ₆	T _{9,1}	T _{9,2}	T _{9,3}	T _{9,7}	T _{10,1}	T _{10,3}	T _{10,4}	T _{11,1}	T _{11,2}	T _{11,4}	T _{12,3}	T _{12,5}	T ₁₅	T ₁₇	T ₁₈	T ₁₉	T ₂₀
τ_2																			
τ_3																			
τ_4																			
τ_5																			
τ_6																			
τ_7																			
τ_8																			
τ_{10}																			
τ_{11}																			
τ_{12}																			
τ_{14}																			
τ_{19}																			
τ_{20}																			
τ_{21}																			
τ_{24}																			

Tabela 4: Relação entre tipos de tarefas e técnicas do Volume 3
 Fonte: Fonte: Elaborado a partir do desenvolvimento da pesquisa

Na Tabela 5, observamos que algumas técnicas são aplicadas para mais de 2 tipos de tarefas, sendo o caso das técnicas τ_2 , τ_3 e τ_{12} . Essas técnicas resolvem os tipos de tarefas mais frequentes no volume 3, de acordo com o Quadro 5. A partir disso, inferimos que o foco se dá na tabuada, uso dos dedos para sobrecontagem e somar e subtrair sucessivamente, já que esta última também é empregada na multiplicação e divisão. Alguns tipos de tarefas, inclusive alguns relativos à essas técnicas, são resolvidos por mais de uma técnica. Inferimos que isso acontece tem devido o alcance limitado das técnicas. Na Tabela 5, também vemos 5 tipos de tarefas que apresentam mais de uma técnica, sendo dois relativos a operação de adição, um relativo à subtração, um à multiplicação e um à divisão, o que reforça que as técnicas quando limitadas são aprimoradas fazendo surgir outras.

A técnica τ_{10} é utilizada para resolver tanto as operações de adição como de subtração, no caso $T_{9.7}$ e $T_{10.4}$, que foram modeladas a partir da análise do volume 2. Essa técnica é ainda reinvestida para resolver 3 novos tipos de tarefa conforme vemos na Tabela 6, onde trazemos a sistematização dos tipos de tarefas modelados a partir do volume 3 com suas respectivas técnicas:

Técnicas (τ_n)	Tipos de tarefas (T_n)								
	$T_{9.8}$	$T_{9.9}$	$T_{10.6}$	$T_{10.7}$	$T_{10.8}$	$T_{10.9}$	T_{22}	T_{23}	T_{24}
τ_{10}									
τ_{15}									
τ_{16}									
τ_{17}									
τ_{18}									
τ_{22}									
τ_{23}									

Tabela 5: Relação entre novos tipos de tarefas e técnicas do Volume 3
Fonte: Elaborado a partir do desenvolvimento da pesquisa

Na Tabela 6, o tipo de tarefa em destaque é $T_{10.6}$ por apresentar 3 técnicas. Ao longo da descrição, notamos que as mesmas são apresentadas de maneira sequencial, conforme o alcance das técnicas e também como uma maneira mais *eficiente* de resolver tais tarefas, de forma mental. Destacamos ainda o foco que se deu em novos tipos de tarefas com relação à subtração, trazendo consigo novas técnicas. As diferentes técnicas, assim como os diferentes tipos de tarefas, contribuem para o cálculo mental uma vez que possibilitam que se empregue a técnica mais adequada para cada tipo de tarefa (PARRA, 1996); lembrando, que o fato de empregar certa técnica para determinado tipo de tarefa é um procedimento que também pode ser memorizado (LETHELLIEUX, 2001).

De maneira geral, notamos que ao longo dos volumes 1, 2 e 3 há um aumento dos tipos de tarefas trabalhados, tantos tipos *a priori* como novos modelados. Há também um abandono nos tipos de tarefas, isso porque trata-se da etapa da alfabetização, em que o repertório dos números e operações são construídos e ampliados. Assim, inicialmente trabalha-se com números até 66, depois 100 e depois acima de 100, e conforme os números vão sendo apresentados, paralelamente vão sendo exploradas as regularidades da sequência numérica e as operações com as ordens respectivas.

Neste sentido, as operações que são exploradas inicialmente são a adição e subtração, e por isso consequentemente a quantidade de tipos de tarefas relativos a essas operações crescem em um primeiro momento, que começa a estabilizar no volume 3. No volume 3, último volume da alfabetização, as operações multiplicação e divisão começam a ser mais exploradas, e é a partir deste volume que os tipos de tarefas e técnicas com relação a essas operações passam a ser enfatizadas, devido a maior frequência. Além disso, o cálculo mental também começa a ser trabalhado em relação ao eixo de *grandezas e medidas* no que diz respeito às unidades de medida de massa, comprimento e capacidade.

Na sequência trazemos a análise dos volumes 4 e 5 que, agora, são livros de Matemática.

4. MATEMÁTICA – VOLUMES 4 E 5

Neste capítulo apresentamos as análises dos volumes 4 e 5, correspondentes aos livros do 4º e 5º anos, respectivamente. Optamos por apresentá-los em um capítulo diferente porque estes livros não são da etapa de alfabetização matemática, sendo ditos livros de matemática; neste sentido, as tarefas de cálculo mental passam a ter frequências e técnicas diferentes, devido ao enfoque dado nesta etapa de ensino.

4.1 VOLUME 4

O volume 4 é composto por 10 capítulos, dos quais 7 abordam tarefas e técnicas relativas ao cálculo mental. Neste volume há um aumento considerável de seções destinadas ao cálculo mental, totalizando 7 que são propostas em diferentes momentos, que vão desde as operações até o eixo de grandezas e medidas. Além disso, neste volume são apresentados os números pertencentes à classe do milhar.

No capítulo 1 o foco se dá no trabalho com números, dentre os objetivos deste capítulo, estão: compor e decompor números de acordo com as ordens, perceber as regularidades em sequências numéricas, “utilizar a sequência numérica para auxiliar no cálculo mental” e identificar o antecessor e sucessor. Neste capítulo são trabalhados os números até 999999, correspondente à classe do milhar.

No capítulo seguinte são trabalhadas as operações de adição e subtração, com número pertencentes à classe do milhar. Além disso, são propostas tarefas que visam reconhecer a adição e subtração como operações inversas, empregar técnicas de cálculo mental para números terminados em zero e resolver adição e subtração por estimativa realizando aproximações para centenas ou dezenas exatas. Aqui ocorre uma ampliação dessas operações mas com ordens maiores, de 3 ou 4. No capítulo 3, a temática é para Figuras geométricas, em que são trabalhadas figuras planas, polígonos e simetria.

O capítulo 4, dedica-se à operação de multiplicação, em que são apresentadas as propriedades comutativa, associativa e distributiva. Além disso, trabalha-se a ideia de dobro com as tabuadas do 2, 3, 4, 6. Outras noções são introduzidas como a de múltiplos de um número natural, permitindo a construção da tabuada do 7 com a do 2 e 5 e a do 9 com a do 5 e 4. Neste capítulo, são apresentadas algumas técnicas para o cálculo mental como para multiplicar por 10 e 100, multiplicação com mais de dois fatores e calcular utilizando aproximação e estimativa. O capítulo seguinte aborda o tema central *medidas*, em que apresenta medidas de tempo, temperatura e comprimento.

O capítulo 6 é destinado a operação de divisão e, de acordo com o manual do professor o foco das atividades do capítulo é efetuar divisões com estratégias próprias, utilizar aproximações, estabelecer a diferença entre os termos múltiplo e divisor e reconhecer a divisão e multiplicação como operações inversas. O capítulo posterior é intitulado *Visualizações e caminhos* e não contém atividades com operações aritméticas.

No capítulo 8, é introduzida a noção de fração e trabalha-se atividades que visam calcular fração de um número, comparar, identificar frações que valem um inteiro, adição e subtração de frações homogêneas. No capítulo seguinte, dedicado à medidas de massa e capacidade são propostas algumas tarefas que visam explorar a correspondência entre as unidades de medida, bem como seções de cálculo mental. Por fim, no capítulo 10 são trabalhados os números decimais. As atividades deste capítulo visam estabelecer equivalências entre décimos e centésimos, ordenar números decimais, aproximar números decimais de inteiros e ainda relacioná-los com frações e ilustrações.

4.1.1 A ORGANIZAÇÃO PRAXEOLÓGICA DO LIVRO DO 4º ANO

A obra tem início com um capítulo referente aos números. Seguindo a ideia de uma revisão, como iniciavam os livros da alfabetização, as atividades propostas no início, de acordo com as autoras também visam verificar os conhecimentos prévios dos alunos. As atividades abrangem tarefas do tipo T₁₇, que visam compor números de acordo com suas ordens. Posteriormente, passa-se à reapresentação de alguns elementos do sistema de numeração decimal para relembrar, como os algarismos de 0 a 9, o agrupamento de 10 em 10 que formam as ordens das unidades, dezenas e centenas, e uma breve discussão sobre a questão do valor posicional.

Nessa breve revisão, é retomada a representação da centena, dezena e unidade no quadro de ordens, antecedendo a apresentação da unidade de milhar que é sistematizada com material dourado e o quadro de ordens. O uso do dinheiro também é evidenciado para representação de quantidades correspondente às ordens. Tarefas dos tipos T₁ e T₆ são propostas neste capítulo e, ainda ao longo do restante do volume visando trabalhar a questão dos nós (GUIMARÃES, 2009) com os números pertencentes à classe de milhar¹⁷ (que serão trabalhados posteriormente) e observar as regularidades da sequência numérica a partir desta classe no que diz respeito a sua ordenação.

¹⁷ A classe de milhar corresponde às ordens 4, 5 e 6 referentes à unidade de milhar, dezena de milhar e centena de milhar, respectivamente.

É proposto que a leitura e escrita dos números com ordem a partir de 3 seja feita a partir da decomposição dos números, de forma que faz-se a decomposição do número e escreve por extenso, como vemos na Figura 57:

685 = 600 + 80 + 5

Lemos: seiscentos e oitenta e cinco.

Figura 57: T₁₇ como técnica de T₂
 Fonte: BORDEAUX et al, 2014d, p.19

Assim, temos tarefas do tipo T₁₇ funcionam como técnica para as tarefas do tipo T₂, uma vez que nas atividades é solicitado que se decompõe para então fazer a escrita por extenso.

Posteriormente, a ideia de aproximação é trabalhada de forma breve com auxílio da reta numérica, mas referente à busca pela centena exata mais próxima. Da mesma forma que identificar a dezena exata mais próxima (T₁₈) é importante, *identificar a centena exata mais próxima* também é, e, em vista disso modelamos com um tipo de tarefa T₂₅. Apesar da relevância, neste momento T₂₅ não é tão explorada, sendo apresentada em somente uma página do capítulo 1.

Neste capítulo, a primeira seção de cálculo mental está relacionada com números acima de 1000. As tarefas propostas na seção são do tipo T₇, tipo que antes não apresentava técnica, mas agora tem sua técnica explicitada, como vemos na Figura 58:

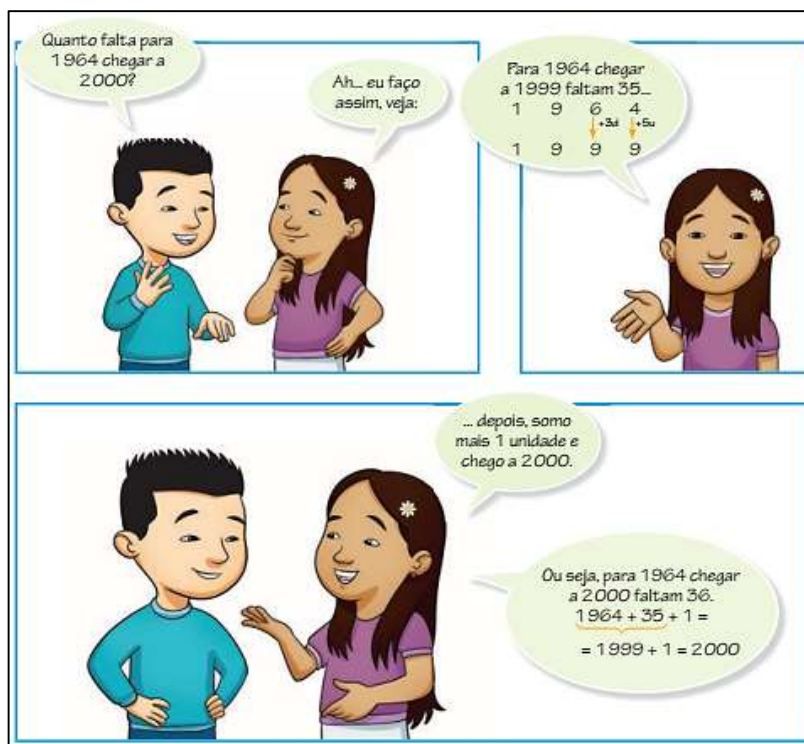


Figura 58: Apresentação da técnica para tarefas do tipo T₇

Fonte: BORDEAUX et al, 2014d, p.32

A tarefa em questão visa em particular identificar quando falta para chegar a uma unidade de milhar exata¹⁸, que é 2000. Para não lidar com o processo de trocas, a técnica empregada é uma variação de τ_8 , pois consiste em a partir do antecessor da unidade de milhar exata, que tem todas as ordens diferente de zero, pensar quanto somar na ordem das dezenas e unidades de modo a chegar neste número (τ_8), que no caso é 1999 e depois somar 1 ao resultado (Figura 59).

Mais adiante, a decomposição é diferenciada de três maneiras: com relação às ordens, às unidades e de forma polinomial. A primeira é associada às ordens do número; o número 4584, por exemplo, é decomposto como 4 unidades de milhar mais 5 centenas mais 8 dezenas mais 4 unidades, de forma abreviada apresentado como $4M + 5C + 8D + 4U$. A decomposição com relação às unidades, para o número 4584 ainda, fica $4000 + 500 + 80 + 4$, que também está de acordo com a ordem mas representado apenas com o registro numérico da quantidade de unidades em cada ordem. A forma polinomial, relaciona a questão das ordens com as unidades, dessa forma o número 4584 é decomposto como $4 \times 1000 + 5 \times 100 + 8 \times 10 + 4 \times 1$; esta última é a mais longa e é apresentada neste momento pela primeira vez.

¹⁸ Este termo não foi utilizado até o momento, mas assim como dezena/ centena exata ou inteira tem a mesma ideia, que no caso é corresponder à uma quantidade exata de unidades de milhar.

Todas as formas de decomposição são importantes para que as estratégias de cálculo mental seja elaboradas, sendo cada uma adequada em diferentes situações. Destacamos que as autoras sempre incentivam a relação entre as relativas à ordem e às unidades; como vemos na Figura 59, a empregada foi relativa à ordem.

Assim como a unidade de milhar, apresenta-se a quinta ordem, referente à dezena de milhar, explorando tarefas dos tipo T_1 e T_6 . A leitura dos números de ordem 5, é explorada a partir de tarefas do tipo T_2 e T_3 , mas agora não empregando a T_{17} como técnica. Na sequência, é apresentada a 6ª ordem, referente à centena de milhar, e , explora-se a questão do valor posicional dos números a partir do quadro de ordens, em que são apresentadas as ordens 4, 5 e 6. Ao final do capítulo, na seção de revisão, explora-se a equivalência entre ordens e tarefas dos tipos T_5 , T_6 e T_7 .

O capítulo seguinte também inicia com atividades que visam identificar os conhecimentos prévios dos alunos, segundo as orientações para o professor, mas agora com relação aos conceitos de adição e subtração. Assim, é as operações são revistas com situações-problema e a rerepresentação dos seus termos (parcela, soma, minuendo, subtraendo e diferença). Na sequência, a ideia de adição e subtração como operações inversas é retomada, apenas ampliando o trabalho com números de ordem 4 que até então começaram ser vistos neste volume.

Neste capítulo temos outra seção de cálculo mental, intitulada *Subtraindo e somando números terminados em zero*, em que trabalha-se com dezenas, centenas e unidades de milhar exatas. Na modelamos aqui um novo tipo de tarefa com relação à esses números, pois apenas está agrupando tipos de tarefas que foram outrora exploradas separadamente, com adição e subtração de números múltiplos de 10, 100 e 1000. Como não há um tipo de tarefa com relação à classe dos milhares até o momento, aqui faz-se necessário sua modelagem como dois subtipos, sendo um de T_9 e outro de T_{10} : **$T_{9,10}$: Somar unidades, dezenas ou centenas relativos à classe de milhar;** e, **$T_{10,10}$: subtrair unidades, dezenas ou centenas relativos à classe de milhar.**

Assim as atividades nesta parte apresentam uma sequência de tarefas, respectivamente, referente aos tipos $T_{9,1}$, $T_{9,3}$, $T_{9,9}$ e $T_{9,10}$ para a adição e $T_{10,1}$, $T_{10,6}$ e $T_{10,7}$ e $T_{10,10}$ para a subtração. Com isso, segundo as autoras, o objetivo é que os alunos pensem numa regra para resolver essas tarefas com essas características, de forma a empregar conceitos vistos anteriormente.

Assim, poderiam, por exemplo, explicar que o que fizeram com números terminados com um zero, operando apenas com o número de dezenas, podem fazer com números

terminados com dois ou três zeros e operar apenas com o número de centenas ou de unidades de milhar, respectivamente. (BORDEAUX, 2014d, p.56)

Como exemplo nas tarefas, $9 + 2$, $90 + 20$, $900 + 200$ e $9000 + 2000$, que respectivamente pertencem aos tipos $T_{9.1}$, $T_{9.3}$ e $T_{9.9}$ e $T_{9.10}$, há uma ordem que pode ser percebida na resolução e nos resultados, como explicitado na citação, uma vez que as tarefas estão apresentadas sequencialmente visando essa percepção. Além disso, esse questionamento é feito para o aluno visando que eles de fato pensem numa estratégia a ser empregada de modo a facilitar as contas com essas características. Dessa forma, é importante modelar a técnica em questão, que consiste em *operar com os números de dezenas, centenas ou unidade de milhar mantendo os zeros* (τ_{25}). Cabe lembrar que no volume anterior, esta regularidade começava a ser posta como vimos na Figura 40, no entanto sem uma técnica em vista ainda.

Ainda nesta seção de cálculo mental, é feita a apresentação da técnica, já modelada como τ_{10} , para tarefas do tipo $T_{9.8}$ e $T_{10.3}$ (Figura 59):

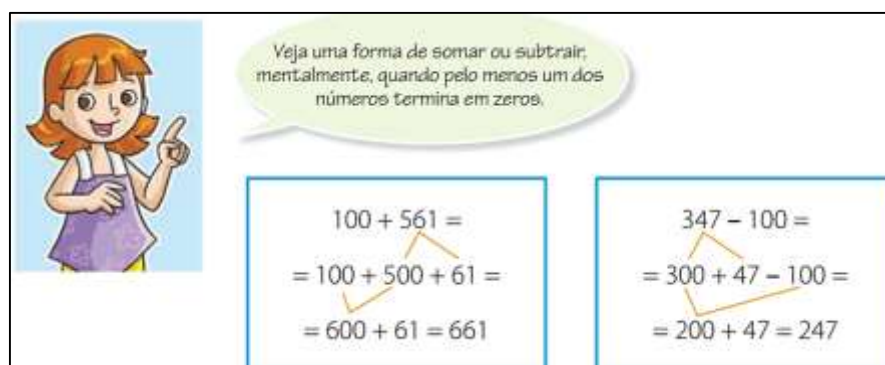


Figura 59: Apresentação da técnica τ_{10} para tarefas dos tipos $T_{9.8}$ e $T_{10.3}$
Fonte: BORDEAUX et al, 2014d, p.57

Logo após a proposta de tarefas dos tipos $T_{9.1}$, $T_{9.3}$, $T_{9.8}$, $T_{9.9}$, $T_{9.10}$, $T_{10.1}$, $T_{10.3}$, $T_{10.6}$, $T_{10.7}$, $T_{10.8}$ e $T_{10.10}$ para exercitar as técnicas em questão (τ_{10} e τ_{25}), questiona-se qual técnica empregar quando o minuendo terminar em zero, como exemplo citamos a tarefa $300 - 181$. Para tal questão a técnica apresentada consiste na mesma que fora empregada para tarefas do tipo $T_{10.9}$ no volume anterior: τ_{17} ; dessa forma, ao empregarmos a técnica realizamos a subtração da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} 300 - 100 &= 200 \\ 200 - 80 &= 120 \\ 120 - 1 &= 119 \end{aligned}$$

Posteriormente, um tópico intitulado *Aproximação e estimativa* aparece, e aqui ressaltamos sua presença devido ao fato dessas ideias estarem relacionadas com cálculo mental, no que diz respeito às técnicas que são empregadas. No entanto, neste tópico notamos sobre a

ideia apresentada pelas autoras com relação à aproximação e estimativa, visto que não são sinônimos. Ora, então qual a diferença instituída por elas? Para compreender esta diferença, trazemos na Figura 60 a situação que é apresentada:



Figura 60: Aproximação e estimativa
Fonte: BORDEAUX et al, 2014d, p.59

A partir do que é exposto, parece que a diferença se dá de forma que a estimativa é com relação ao resultado da operação, enquanto que a aproximação é uma espécie de ‘arredondamento’ para a centena ou dezena exata mais próxima que deve ser feita com os números a serem operados. Não encontramos nenhuma orientação no manual para o professor que esclarecesse essas noções. No entanto, nas atividades propostas solicita-se que se faça a aproximação dos termos (das adições e subtrações propostas) para que assim tenha-se uma estimativa do resultado.

Dessa forma, como vimos anteriormente, a aproximação e as tarefas relacionadas a ela são permeadas de processos de cálculo mental, e assim, inferimos que para estimar resultados o cálculo mental funciona como uma ferramenta que possibilita que isso seja feito, uma vez que ao empregar a aproximação consequentemente emprega-se estratégias de cálculo mental, pois o cálculo estimado não é exato (BRASIL, 1997).

Ainda neste capítulo, contamos com duas seções destinadas ao cálculo mental. A primeira seção intitulada *Adição por decomposição*, precede o trabalho com o algoritmo da adição e subtração, e, traz tarefas que visam *somar números de 3 algarismos*, um novo subtipo de T_9 , que denominamos por $T_{9.11}$ e, e explora a técnica τ_{10} para resolução. Assim para uma tarefa pertencente a $T_{9.11}$ $342 + 454$, faz-se a decomposição de ambas parcelas e opera-se com as correspondentes:

$$\begin{aligned} 300 + 40 + 2 + 400 + 50 + 4 &= \\ 300 + 400 + 40 + 50 + 2 + 4 &= \\ 700 + 90 + 6 &= 796 \end{aligned}$$

Na segunda seção destinada à habilidade, o foco é na operação de subtração, em que o minuendo é uma centena exata, como a tarefa $500 - 132$. Aqui temos um tipo de tarefa específico, e que é necessário modelar como um subtipo de T_{10} , uma vez que trabalhará uma técnica nova também: **$T_{10.11}$: Subtrair dois números em que o minuendo corresponde a uma centena exata.** A técnica empregada é a *compensação* (τ_{26}) (Figura 61):

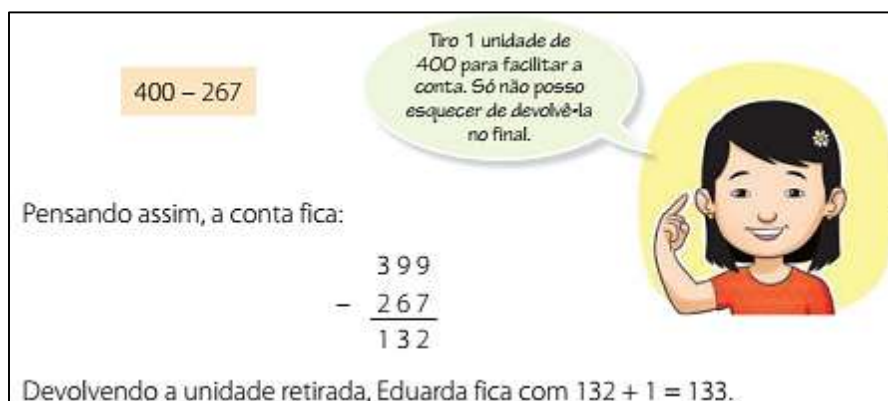


Figura 61: Usando a compensação como técnica

Fonte: BORDEAUX et al, 2014d, p.69

A compensação neste caso consiste em subtrair uma unidade do minuendo para que os algarismos da dezena e centena sejam 9 e facilite a subtração; ao final deve-se compensar devolvendo o número que antes fora subtraído, por isso o nome compensação. Essa técnica também funcionará para as operações de adição, como podemos ver na seguinte tarefa do tipo $T_{9.11}$:

$$\begin{aligned}
 299 + 127 &= \\
 (299 + 1) + 127 &= \\
 300 + 127 &= 427 \\
 427 - 1 &= 426
 \end{aligned}$$

No exemplo acima, somamos 1 para que o minuendo se tornasse uma centena exata, tornando assim uma tarefa do tipo $T_{9.8}$ ao final do resultado subtraímos, como forma de compensar o que havia sido acrescentado. Esta técnica também foi levantada em Guimarães (2009). Destacamos que para tal técnica, é relevante saber identificar o antecessor dos números e, em vista disso, é proposto também nesta seção tarefas do tipo T_6 , principalmente com relação às centenas e unidades de milhar exatas com intuito de trabalhar com os *nós* (GUIMARÃES, 2009).

Cabe ainda destacar que apesar da técnica empregada estar relacionada com o cálculo mental, sua execução de fato não está, como vemos na Figura 62, pois apresenta-se o uso do algoritmo. Assim, neste caso é possível empregar o cálculo mental para então executar uma conta a partir do algoritmo.

Na sequência desta seção, aparece a apresentação da *Prova real* como uma forma de conferir o resultado de contas (adição e subtração). Neste momento emprega-se a ideia das operações como inversas, no entanto o foco aqui é o uso do algoritmo, e desta forma não nos delongaremos com relação a esta parte. Situações com uso do dinheiro ainda são o foco neste volume, agora exclusivamente para as operações de adição e subtração.

Ao final deste capítulo, na seção de revisão, são propostas tarefas dos tipos $T_{9.1}$, $T_{9.3}$, $T_{9.8}$, $T_{9.9}$, $T_{9.10}$, $T_{9.11}$, $T_{10.1}$, $T_{10.3}$, $T_{10.6}$, $T_{10.7}$, $T_{10.10}$ e $T_{10.11}$ visando o emprego de técnicas de cálculo mental. Inferimos isso, a partir do enunciado que solicita que as contas sejam resolvidas sem serem *armadas*.

O Capítulo 4, dedica-se a operação de multiplicação. E da mesma forma que nos capítulos anteriores, inicia com atividades que visam a verificação dos conhecimentos prévios dos alunos com relação à operação. Neste início tem-se também uma revisão do que foi visto no volume anterior com relação à multiplicação, como o nome dados aos termos da operação.

Na sequência apresenta-se a *propriedade comutativa da multiplicação* de forma explícita. A abordagem é feita a partir da ilustração de um retângulo quadriculado com 3 linhas e 5 colunas, totalizando 15 quadrados. Propõe-se que o cálculo da quantidade de quadrados no retângulo seja feita a partir da multiplicação das linhas e colunas, de forma que $3 \times 5 = 15$ e $5 \times 3 = 15$; e este fato, em que a troca da ordem dos fatores resulta no mesmo produto é então denominada *propriedade comutativa da multiplicação*.

Posteriormente, as tabuadas do 2, 3 e 4 são revisadas e a partir delas são revisadas as tabuadas do 4, 6 e 8. De acordo com a forma que se propõe o trabalho dessas tabuadas, notamos que a ideia de dobro compõe a formação das tabuadas do 4, 6 e 8, uma vez que seus resultados correspondem respectivamente ao dobro dos resultados das tabuadas do 2, 3 e 4. No entanto essa noção não é ressaltada, apenas a técnica que seria multiplicar por 2.

Depois do trabalho dessas tabuadas, um jogo em que se pode trabalhar as tabuadas é proposto com a particularidade, de acordo com as autoras, de desenvolver a atenção. O jogo consiste em fazer uma roda com os alunos, cada um deve enunciar sequencialmente um número a partir do 1, quando um aluno disser um número que pertencer à tabuada em que se escolheu trabalhar, o aluno deverá dizer *Bum!* Caso algum não diga, o jogo começa novamente. Esse jogo possibilita um exercício com relação a memorização das tabuadas, que como dito anteriormente é um fator necessário para que as estratégias evoluam.

Após o jogo e o trabalho com as tabuadas, a ideia de múltiplo é inserida e explorada por meio de sequências numéricas (tarefas do tipo T_1), e neste momento alguns múltiplos que recebem nomes especiais são apresentados, sendo eles: o dobro, triplo, quádruplo, quádruplo e sêxtuplo que correspondem respectivamente a um número que seja múltiplo de 2, 3, 4, 5 e 6. Apesar de tratada de forma breve e sucinta, a noção de múltiplo é fundamental para abordar sua relação com o divisor, que será apresentado mais adiante; a ideia ainda é explorada mais a frente com tarefas que visam *identificar os múltiplos de um número*, que modelamos como T_{26} devido à sua relevância e dispor desses resultados e estratégias mentais.

Até então as tabuadas do 7 e do 9 ainda não haviam sido trabalhadas, mas agora são apresentadas de forma sistematizada a partir das tabuadas do 2 e 5 e 4 e 5, respectivamente, por meio de uma tabela como mostra a Figura 62:

×	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70

Figura 62: Tabuada do 7 a partir das tabuadas do 2 e do 5.

Fonte: BORDEAUX et al, 2014d, p.115

Aqui cabe uma reflexão de como a tabuada do 7, no caso, pode ser construída. Como vemos na Figura 63 a linha correspondente aos múltiplos de 7 conta com a soma dos múltiplos de 2 e de 5. O que garante tal validade é a *propriedade distributiva da multiplicação* – que será apresentada ao final do capítulo. Tomando uma tarefa como exemplo, podemos ver o acontece:

$$7 \times 6 = (2 + 5) \times 6 = (2 \times 6) + (5 \times 6) = 12 + 30 = 42$$

Primeiramente, um dos fatores, no caso o 7, é decomposto como soma de dois números, a partir daí aplica-se a propriedade distributiva. Ora, como o 7 é decomposto como $2 + 5$ utiliza-se as tabuadas referentes a estes números, no entanto, isso não impede que outras tabuadas sejam utilizadas a partir de outra decomposição.

A partir da forma como a tabuada do 7 é apresentada a tabuada do 9 é construída. Mas para além dessa forma de encontrar o resultado, uma outra técnica para tabuada do 9 é apresentada em seguida (Figura 63):

Coluna de 0 a 9	Coluna de 9 a 0
0	9
1	8
2	7
3	6
4	5
5	4
6	3
7	2
8	1
9	0

Figura 63: Uma outra técnica para a tabuada do 9

Fonte: BORDEAUX et al, 2014d, p.116

Assim, outra técnica para uma tarefa em particular do tipo $T_{11.1}$ é *escrever em ordem crescente de 0 a 9 em uma primeira coluna e de forma decrescente em uma coluna ao lado* (τ_{27}), como mostra a Figura 63.

Com relação à multiplicação por zero e por 1 são instituídas duas coisas: a primeira, com relação à multiplicação por zero, é que qualquer número multiplicado zero tem como resultado zero. A segunda, com relação a multiplicação por 1, é que todo número multiplicado por 1 o resultado é o próprio número. Esse fato já era colocado em prática antes nas tabuadas, mas aqui aparece de maneira formal como uma *institucionalização*.

Posteriormente, aparecem as tabuadas do 2 ao 10, para que os alunos recorram a ela quando necessário, de acordo com uma orientação ao professor em que enfatiza que a apresentação feita não é para que os alunos decorem. Inferimos que isso decorre da abordagem que a memorização deve ser feita com compressão e não apenas como um registro de respostas, de acordo com Parra (1996).

No tópico seguinte intitulado *Multiplicação por 10 e por 100*, temos tarefas dos tipo $T_{11.2}$ e $T_{11.1}$ com a tabuada do 10. Essas tarefas visam mostrar uma nova técnica (τ_{28}) que consiste em *acrescentar 1 ou 2 zeros à direita do número multiplicado*, quando os números são multiplicados por 10 ou 100, respectivamente. Inferimos que o objetivo é esse pois há questões direcionada aos alunos perguntando sobre a maneira mais fácil de realizar as multiplicações por 10 e por 100 percebendo as regularidades a partir das tarefas propostas.

O tópico seguinte, trata novamente da aproximação e estimativa, mas agora envolvendo a operação de multiplicação. Com relação à aproximação, entendemos a ideia é mesma, de forma que para tarefas de multiplicação do tipo $T_{11.4}$ como 3×97 , faz-se a aproximação do 97 para a centena exata mais próxima que é 100, e então, temos uma estimativa

do produto. Dessa forma, a estratégia para estimar um resultado é aproximar um dos fatores para números exatos, múltiplos de 10. Logo, para aproximação utiliza-se do cálculo mental, que então para estimar funciona como uma ferramenta.

Posteriormente, a multiplicação com 3 fatores (ou mais) de um algarismo (inicialmente) é proposta antecedendo a apresentação da *propriedade associativa da multiplicação*. Dessa forma, as tarefas que visam *multiplicar 3 ou mais fatores* ($T_{11.7}$) são um subtipo de T_{11} . Para esse subtipo de tarefa não há nenhuma técnica explícita, a não ser realizar multiplicação a cada 2 fatores como uma forma de recorrer à tabuada (τ_{12}). Na sequência, na apresentação da *propriedade associativa da multiplicação* as tarefas do tipo $T_{11.7}$ são propostas para mostrar a aplicação de tal propriedade e o que ela possibilita, no caso, que “em uma multiplicação de mais de dois fatores, associemos esses fatores de maneiras diferentes sem com isso alterar o produto” (BORDEAUX et al, 2014d, p.128). Tal propriedade pode ser empregada na própria construção da tabuada, por exemplo na tabuada do 4 já teríamos dois resultados, que são 4×2 e 4×3 , a partir das tabuadas do 2 e do 3 onde temos 2×4 e 3×4 . Na maioria das vezes, as primeiras tabuadas trabalhadas e memorizadas são as de número menor, o que facilita na construção das demais.

Na primeira seção de cálculo mental deste capítulo, explora-se tarefas que visam a multiplicação por múltiplos de 10 e de 100. Os múltiplos de 10 correspondem aos números que podem ser decompostos por dois fatores em que um desses é 10, por exemplo, 30 que pode ser escrito como 3×10 . A ideia de múltiplo é fundamental para resolver tarefas que visam *multiplicar números por múltiplos de potências de 10*, que por sua vez também é importante e por isso as tarefas com essa características modelamos como um subtipo de T_{11} , $T_{11.8}$. Cabe observar que as tarefas deste tipo são propostas na sequência visando a aplicação da técnica e ainda no final do capítulo na seção de revisão. A técnica apresentada para resolver tarefas deste tipo, consiste em *decompor um dos fatores em outros dois fatores de forma que um destes seja uma potência de 10* (τ_{29}), como vemos na Figura 64:

$$\begin{aligned}
 &7 \times 30 = \\
 &= 7 \times (3 \times 10) = \\
 &= (7 \times 3) \times 10 = \\
 &= 21 \times 10 = 210
 \end{aligned}$$

Figura 64: Apresentação da técnica τ
 Fonte: BORDEAUX et al, 2014d, p.132

Como vemos, após aplicar a técnica τ_{29} , usa-se a propriedade associativa de forma que a tarefa passa a ser do tipo $T_{11.2}$ que como vimos anteriormente, resolvemos com a técnica τ_{28} . Dessa forma, vemos que as técnicas para o cálculo mental vão sendo compostas de outras técnicas e tipos de tarefas trabalhados. Nesse sentido, inferíamos que há uma evolução praxeológica que se pauta na exploração do que deve ser ensinado antes de forma que possibilite a criação e aplicação de novas técnicas.

Precedendo a o trabalho com o algoritmo da multiplicação, é apresentada a *propriedade distributiva da multiplicação* com a seguinte abordagem apresentada na Figura 65:

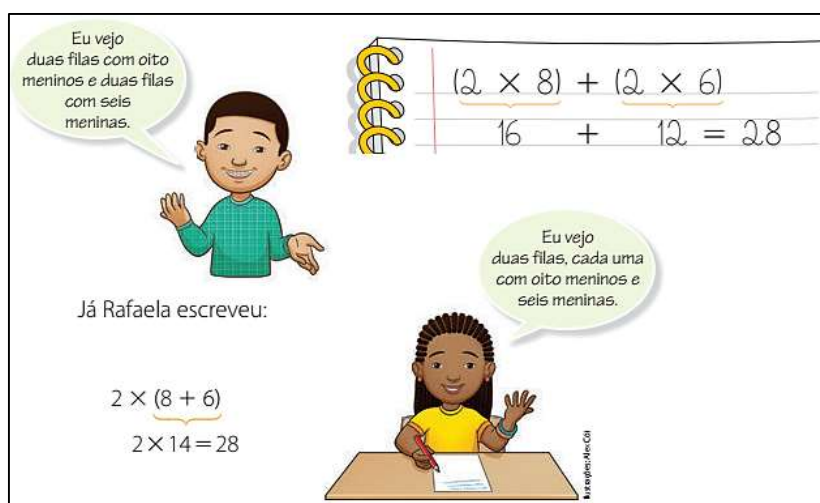


Figura 65: Apresentação da propriedade distributiva da multiplicação
Fonte: BORDEAUX et al, 2014d, p.132

Essa propriedade não é reinvestida em técnicas para o cálculo mental como as anteriores, pois em seguida é sistematizada apenas com o algoritmo; dessa forma ela fica apenas no nível de justificativa matemática. Dessa forma, tanto a propriedade distributiva, quanto a comutativa e a associativa são tecnologias para algumas das técnicas trabalhadas, como τ_{21} e τ_{24} .

O capítulo 5 é dedicado às unidades de medida, de temperatura, tempo e comprimento. Destacamos em particular as unidades de comprimento e superfície: o metro, centímetro e milímetro, pois é com relação a esta unidade que as tarefas do tipo T_{24} são retomadas aqui da mesma forma que no volume anterior.

O capítulo seguinte dedica-se a operação de divisão. E da mesma forma que as operações anteriores inicia com a retomada da ideia da operação visando verificar as estratégias dos alunos ao fazer a divisão. Além disso, a ideia de dividir em partes iguais é lembrada, e tem a tabuada (τ_{12}) como técnica da divisão ao pensar na multiplicação e divisão como operações inversas, cabe observar que a ideia de operações inversas é novamente trabalhada

mais adiante com tarefas dos tipos $T_{11.4}$ e $T_{12.3}$. A tabuada também é empregada na ideia explorada de “quantos cabem?”, ideia já introduzida em volumes anteriores.

Para introduzir a noção de divisor de um número, é proposto um jogo intitulado *Jogo passeando* que de acordo com as autoras vai auxiliar na construção da noção citada. O jogo consiste em formar grupos com os colegas da turma, com a quantidade de alunos que o professor enunciar e observar se sobram e quantos sobram se for o caso. Exemplificando, o professor fala que quer grupos de 3 alunos, então os alunos devem se agrupar de 3 em 3, e caso sobre algum aluno ele deve ser eliminado e observar o restante do jogo; ganha quem não for eliminado (um ou dois alunos).

A explicação do que é divisor de um número é feita na sequência, sendo iniciada com um breve exemplo em que se justifica que o 4 é divisor de 8 porque a divisão de 8 por 4 resulta em 2 e não sobra resto. Em seguida é formalizado que “quando um número divide outro e o resto é zero, dizemos que esse número é divisor do outro” (BORDEAUX et al, 2014d, p.180). Para trabalhar essa ideia, são propostas tarefas que *visam identificar se um número é ou não divisor de outro* (T_{27}), sendo empregado como técnica a *divisão* e verificar se ela é exata ou não. Outra técnica evidenciada é escrever todas as multiplicações que resultam em um certo número, possibilitando identificar de quais números ele é múltiplo, essa maneira de fazer consiste em *decompor um número em fatores* (τ_{30}). Dessa forma, se entre as multiplicações não estiver o número que se quer saber se é divisor, ele não será divisor. Na sequência, a divisão não exata já é apresentada com o algoritmo, que tem seus termos formalizados posteriormente. Paralelamente, a relação entre o divisor e o resto, e como se dá o algoritmo é ainda reforçado por meio de um jogo que faz o manuseio de dinheiro.

Na seção de cálculo mental deste capítulo, da mesma forma como foi sistematizado a adição e subtração com dezenas, centenas e unidades de milhar exatas, são propostas tarefas que visam *dividir múltiplos de 10, 100 e 1000 por números de 1 algarismo* (de forma que esse algarismo seja divisor do múltiplo em questão) e *dividir múltiplos de 10, 100 e 1000 por 10 e múltiplos de 10 e 100*, essas tarefas são modeladas respectivamente, como subtipos de T_{12} , sendo $T_{12.6}$ e $T_{12.7}$. Essas tarefas, de acordo com o que foi apresentado, devem ser resolvidas por τ_{10} . E segundo as orientações que constam para os professores, o objetivo dessas tarefas é que os alunos percebam as regularidades como “quando se acrescentam um ou mais zeros ao dividendo, o resultado fica acrescido da mesma quantidade de zero” (BORDEAUX et al, 2014d, p.185). Posteriormente, as tarefas do tipo T_{27} são propostas visando trabalhar uma nova técnica,

que denominaremos de τ_{31} , que visa em *dividir o divisor e o dividendo por 10*; dessa forma, mantem-se a igualdade.

No tópico intitulado *Cálculo aproximado*, não se fala de cálculo estimado, o cálculo aproximado neste caso se apresenta como a aproximação do dividendo para uma dezena ou centena exata. No entanto, fala-se neste caso que o resultado da divisão é aproximado o que contradiz a ideia levantada anteriormente, não expondo de forma clara a diferença de cálculo estimado e aproximado.

No tópico seguinte a divisão é explorada com subtrações sucessivas, mas diferente da ideia trabalhada no volume anterior. Agora, neste caso a técnica para divisão consiste em subtrações sucessivas mas com base na estimativa, mas essa é uma técnica empregada no algoritmo, não sendo foco do cálculo mental. Ao final deste capítulo, os tipos de tarefas propostos são dos tipos T_{26} , T_{27} , $T_{12.6}$, $T_{12.7}$ e ainda divisões em que o dividendo possui 3 algarismos e o divisor 1, no entanto tratam de divisões não exatas que devem ser resolvidas por meio do algoritmo.

O capítulo 8, tem como tema central frações, que até o momento não havia sido trabalhada. Destacamos esse capítulo, pois de acordo com o *quadro de conteúdos trabalhados*¹⁹ há atividades que tem relação com a habilidade o cálculo mental. Assim, a introdução do conteúdo visa identificar o que os alunos sabem sobre o conteúdo a partir do que foi visto das noções de metade e tarefas do tipo T_{23} .

Nessa perspectiva entendemos que o que é relativo ao cálculo mental nesta parte são essas noções que forma introduzidas anteriormente, como metade, terça e quarta parte. Neste sentido, as autoras propõe atividades que utilizam da ilustração para construção do conceito de fração, como vemos na Figura 67:

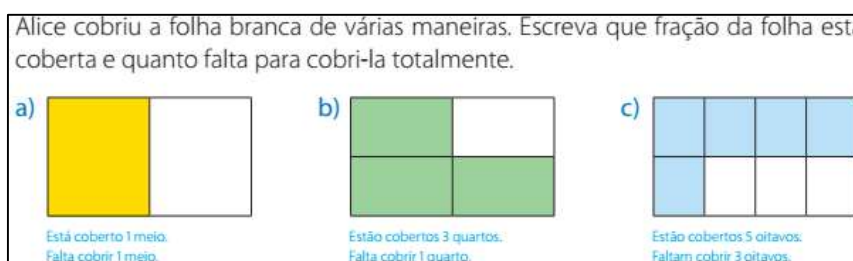


Figura 66: Frações e o uso de ostensivo
Fonte: BORDEAUX et al, 2014d, p.210

¹⁹ O quadro de conteúdos trabalhados corresponde à tópicos sobre conteúdos e habilidades que são trabalhadas em cada capítulo e se encontra ao final do manual do professor.

Notamos que a notação de fração ainda não é trabalhada. Assim, são trabalhadas tarefas que consistem em *indicar a fração correspondente à parte destacada na imagem* (T₂₈). Destacamos as tarefas com essa característica, pois de acordo com Carvalho e Ponte (2012) ao trabalhar com os números racionais é necessário que o aluno tenha em mente suas representações pois “alunos sem imagens mentais apropriadas dos números racionais nesta representação, tendem a ordená-los como se fossem números naturais” (CARVALHO; PONTE, 2012, p.363). Neste sentido, a linguagem das frações também é relevante de ser trabalhada, pois há uma “ideia de ordem [que] é importante para compreender a dimensão relativa dos números racionais na representação decimal” (ibidem).

Ao longo do capítulo são propostas ainda tarefas dos tipos T₂₃ e T₂₈, até o tópico em que se apresenta a notação das frações (numerador e denominador) e explora-se a leitura e escrita de frações, sendo assim propostas tarefas do tipo T₂; que como afirmado pelos autores citados, são fundamentais para desenvolver a linguagem.

De maneira direta, a adição e subtração de frações de mesmo denominador, ditas homogêneas, é apresentada, de forma que a resolução das mesmas se dão ao conservar o denominador e operar com os numeradores. Neste capítulo de frações, a probabilidade é explorada de forma que situações probabilísticas sejam representadas por frações. Nestes casos, não apresenta-se nenhuma técnica mental, pois apesar de memorizar como se faz as operações de adição e subtração de frações homogêneas com a apresentação de como deve ser feito, não há atividades que levem o aluno a desenvolver alguma estratégia própria, que poderia ser pensar nas representações, por exemplo. Ao final, nas atividades de revisão as tarefas relativas ao desenvolvimento do cálculo mental são dos tipos T₂₈ e T₂₃.

No capítulo seguinte, intitulado *Medida de massa e de capacidade*, após uma retomada do que foi visto no volume 3 sobre as unidades quilograma, grama, litro e mililitro, são propostas tarefas que unem a ideia das tarefas dos tipos T₂₃ e T₂₄. Dessa forma, trabalha a ideia de fração relacionadas à unidade de medida, como por exemplo na seguinte tarefa: identificar a quanto corresponde um quarto de quilo; para resolver esta tarefa, é necessário saber a correspondência de unidades, como no referido exemplo, que um quilo corresponde a mil gramas, e então faz-se a quarta parte de 1000, empregando a técnica τ_{23} . Assim entendemos que as tarefas com esta características são uma ‘composição’ dos tipos T₂₃ e T₂₄. As tarefas com essa característica, bem como as tarefas do tipo T₂₄ são propostas ao longo de todo capítulo até a seção de revisão.

Destacamos que neste capítulo aparecem das seções de cálculo mental, sendo a primeira relativa às unidades de medida de massa e a segunda às unidades de medida de capacidade. Ambas as seções são curtas com apenas uma atividade com a mesma característica, que é de certa forma saber a composição com relação às unidades de medida em questão, por exemplo, identificar quantos meios litros há em 2 litros. Ao final do capítulo na seção de revisão ainda há tarefas de adição e multiplicação de unidades de medidas de massa que em paralelo também é do tipo T₂₄.

No Capítulo 10, o tema central são os números decimais. Neste capítulo não há uma seção específica de cálculo mental, mas este fato não quer dizer que não encontramos atividades e tarefas que visam preparar para a habilidade. Vale ressaltar que é primeira vez que os números decimais são utilizados, e em sua introdução apresenta-se como podem ser representados pelas frações e na forma decimal.

Dessa forma, tarefas que visam *associar a representação de forma de fração com a forma decimal* (T₂₉) são propostas. Destacamos que compreender essas diferentes formas de representar pode contribuir com estratégias mentais, uma vez que o que foi trabalhado com os números naturais também é visto com relação a estes números. Por exemplo, tarefas do tipo T₁ mas agora com $n=0,2$ e do tipo T₂ como vemos na Figura 67:

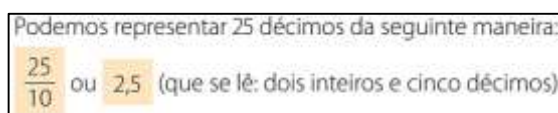


Figura 67: Números decimais - fração, decimal e leitura
Fonte: BORDEAUX et al, 2014d, p.261

Os números menores que um 1 inteiro com a ordem dos centésimos também são apresentados e associados com as frações. O quadro de ordens é apresentado com as ordens do centésimo, décimo, unidade e dezena. *Escrever um número no quadro de ordens* (τ₃₂) é apresentado uma técnica para resolver tarefas do tipo T₂ (Figura 68). Observamos também que a adição e subtração desses números também se dá pelo quadro de ordens.



Figura 68: Representando números decimais no quadro de ordens
Fonte: BORDEAUX et al, 2014d, p.267

Logo em seguida, são trabalhados os *décimos e centésimo do real*, propondo como compor com moedas de 50, 25, 10, 5 e 1 centavos o valor de 1 real. Essa noção é fundamental para lidar com dinheiro, como situações de troco, que é algo do cotidiano.

No tópico intitulado *Aproximação e estimativa* a ideia desenvolvida é um tanto diferente, pois agora os valores são aproximados para números inteiros no contexto no uso do dinheiro. A ideia de estimativa é a mesma apresentada outrora, como resultado ou total de uma operação realizada com números aproximados.

4.1.2 O CÁLCULO MENTAL NO LIVRO DO 4º ANO

As atividades relativas ao cálculo mental no volume 4, tem maior foco nas operações de multiplicação e divisão uma vez que o repertório com relação aos números é ampliado. Como a adição e subtração com números naturais são trabalhadas mesmo que intuitivamente desde o volume 1 e nesta etapa a multiplicação e a divisão passam a ter maior foco, as tarefas com relação à adição e subtração são propostas em apenas um capítulo. Algumas tarefas são reinvestidas ainda no trabalho com os números decimais, como as dos tipos T_1 e T_6 .

Neste volume as seções dedicadas ao cálculo mental aparecem mais vezes, sendo um total de 7 seções e sem tópicos específicos destinados ao cálculo mental, como ocorria nos volumes anteriores. Ressaltamos que nesses momentos são apresentadas e exploradas novas técnicas que contribuem com o desenvolvimento da habilidade. Também notamos que os tópicos que trabalham com o exercício de calcular mentalmente, passam a dar lugar aos tópicos em que se trabalha as aproximações e estimativas; que de acordo com o que analisamos, usa o cálculo mental como ferramenta ao realizar aproximações. Além disso, seções de cálculo mental aparecem novamente em capítulos que visam trabalhar o eixo de grandezas e medidas.

Ao final do livro os números decimais e as frações são introduzidas pela primeira vez nesta coleção, e de acordo com o quadro de conteúdos e as orientações para os professores contidas nos manuais, nos capítulos destinados ao trabalho destes conteúdos também trabalham tarefas que contribuem para o cálculo mental; em vista disso que modelamos alguns tipos de tarefas relativos a estes conteúdos.

No livro do 4º ano identificamos entre tipos e subtipos de tarefas um total de 26, sendo 5 novos tipos e 8 novos subtipos de tarefas. Além disso, são empregadas um total de 14 técnicas, sendo 7 novas técnicas modeladas. No Quadro 7 trazemos o quantitativo relativo aos tipos de tarefas que já foram modelados *a priori* (em cor rosa) ou foram modelados a partir dos volumes anteriores (em cor roxa):

Tipos de tarefas	T ₁	T ₂	T ₆	T ₇	T _{9.3}	T _{9.9}	T _{10.1}	T _{10.3}	T _{10.6}	T _{10.7}	T _{10.8}	T _{11.1}	T _{11.2}	T ₂₃	T ₂₄
Quantidade	28	34	39	7	3	10	3	3	3	9	7	9	25	16	68

Quadro 7: Quantitativo dos tipos de tarefas elencados a priori e a partir da análise dos volumes 1, 2 e 3

Fonte: Elaborado a partir do desenvolvimento da pesquisa

No Quadro 7, notamos que as tarefas dos tipos T₂₄ são propostas com frequência disparada das demais. Isso acontece porque nos 2 capítulos dedicados às grandezas e medidas temos tarefas que trabalham as unidades de medida de capacidade, comprimento e massa. Depois, temos as tarefas dos tipos T₁, T₂ e T₆, em que as T₁ e T₆ são propostas sempre em momentos próximos, e neste volume fica evidente que o objetivo é trabalhar os *nós* já que eles propostos próximos de centenas e unidades de milhar exatas. Cabe dizer que a técnica apresentada é a mesma que vem sendo trabalhada desde o volume 1, τ_3 e τ_4 .

Já os que são propostos em menor frequência, são os relativos às operações de adição e subtração com 3 tarefas de cada apenas, dos tipos T_{9.3}, T_{10.1}, T_{10.3} e T_{10.6}, sendo o momento em que visa-se evidenciar a técnica τ_{25} . A tabuada (T_{11.1}) e as tarefas de divisão do tipo T_{12.3} não são tão trabalhadas neste volume, há apenas uma retomada da tabuada e o foco se dá no algoritmo das operações de multiplicação e divisão. Diante do exposto, trazemos no Quadro 8 o quantitativo dos tipos de tarefas que foram modelados a partir da análise do livro do 4º ano:

Tipos de tarefas	T _{9.10}	T _{9.11}	T _{10.10}	T _{10.11}	T _{11.7}	T _{11.8}	T _{12.6}	T _{12.7}	T ₂₅	T ₂₆	T ₂₇	T ₂₈	T ₂₉
Quantidade	4	6	7	9	18	17	14	28	12	6	6	46	5

Quadro 8: Quantitativo dos tipos e subtipos de tarefas modelados no volume 4

Fonte: Elaborado a partir do desenvolvimento da pesquisa

Como vemos no Quadro 8, vemos que a maior frequência dos tipos de tarefas é relativa às operações de multiplicação e divisão. Apesar de neste volume ainda serem modeladas novos tipos de tarefas com relação às operações de adição e subtração suas frequências não são em grandes quantidades. Pois, essas operações em questão apenas têm o repertório com relação aos números ampliados para a classe do milhar, que tem suas ordens introduzidas no livro do 4º ano.

Na sequência apresentamos uma síntese de como se portaram os tipos de tarefas e técnicas para o cálculo mental neste volume:

- Os tipos de tarefas T₁ e T₆ são propostos, de modo que T₆ é retomado ao longo dos capítulos em seções de revisão. Tal foco se deve ao trabalho com os *nós*, já que neste volume trabalha-se com a classe de milhar. O tipo de tarefa T₂

apresentou duas técnicas, sendo uma o tipo de tarefa T_{17} e o *quadro de ordens* visando facilitar a leitura dos números pertencentes à classe de milhar;

- Os tipos de tarefas $T_{9.1}$, $T_{9.3}$ e $T_{9.9}$ passam a ser resolvidos por outra técnica, τ_{25} . E os novos tipos modelados $T_{9.10}$ e $T_{10.10}$ são resolvidos pela mesma técnica τ_{25} . As técnicas para $T_{9.8}$ e $T_{10.3}$ aparecem neste volume, apesar das tarefas já terem sido exploradas antes. Essas tarefas e as demais relacionadas às operações de adição e subtração são propostas somente em um capítulo;
- As propriedades comutativa, associativa e distributiva da multiplicação, vistas como tecnologia, são apresentadas neste volume, justificando a validade de algumas técnicas enunciadas anteriormente. São trabalhados 4 tipos de tarefas com relação à multiplicação, sendo $T_{11.1}$, $T_{11.2}$, $T_{11.7}$ e $T_{11.8}$, junto com suas respectivas técnicas τ_{27} , τ_{28} , τ_{12} e τ_{29} . Já com relação à divisão, foram 2 sendo $T_{12.6}$ e $T_{12.7}$, ambas resolvidos por τ_{10} ;
- Ao final do livro, ainda foram trabalhados as noções de múltiplo e divisor (T_{26} e T_{27}), bem como os números racionais em particular as frações e números decimais; também foram modelados alguns tipos de tarefas relativos a este conjunto.

Na seção seguinte trazemos a descrição e análise do volume 5, último volume da coleção do 1º ao 5º ano.

4.2 VOLUME 5

O volume 5, é composto por 11 capítulos, dos quais 8 exploram tarefas de cálculo mental em algum momento. Neste volume o conjunto dos números racionais são trabalhados com ênfase e, notamos que alguns tipos de tarefas e técnicas dos números naturais se estendem a este conjunto. As seções destinadas ao cálculo mental são 7 (mesma quantidade do volume 4), presentes em diferentes conteúdos, como porcentagem, por exemplo.

O capítulo 1, intitulado *Números e sistemas de numeração* além da apresentação dos diferentes sistemas de numeração, faz uma revisão do que já foi visto nos volumes anteriores como agrupamento de 10 em 10 e o trabalho com diferentes ordens e classes. O capítulo 2 é destinado a uma breve retomada das operações de adição e subtração, e tem foco na aplicação e reprodução dos algoritmos com números de diferentes ordens e classes. O capítulo seguinte aborda as figuras geométricas.

O capítulo 4 explora as operações de divisão e multiplicação, focando em parte no algoritmo dessas operações e em parte em técnicas de cálculo mental como as multiplicações e divisões por potências de 10. Dando seguimento, o capítulo posterior trabalha as ideias de múltiplo e divisor e, em paralelo, os números primos. O capítulo 5, faz a introdução sobre retas e ângulos, trabalhando comparação, medida e classificação de ângulos.

Os capítulos 7 e 8, dedicam-se ao conjunto dos números racionais, abordando frações, porcentagem e números decimais. Nestes, destacamos que alguns tipos de tarefas e técnicas são propostas para o desenvolvimento do cálculo mental, como a multiplicação e divisão de um número decimal por potências de 10. Os capítulos 9 e 11, são dedicados ao eixo de grandezas e medidas, explorando a correspondência de unidades de medidas de massa, comprimento e capacidade. Por fim, o capítulo 10 é dedicado à exploração de figuras planas, como triângulos, quadriláteros, polígonos e a ideia de simetria.

Na seção seguinte, apresentamos a análise praxeológica do livro do 5º ano.

4.2.1 A ORGANIZAÇÃO PRAXEOLÓGICA DO LIVRO DO 5º ANO

O capítulo 1, assim como os 2 volumes anteriores, é dedicado a uma espécie de resumo do tema de números e sistema de numeração. Assim, o capítulo inicia discorrendo sobre outros sistemas de numeração, no caso o egípcio, o romano e por fim o decimal. Com relação a este último, que é o sistema de numeração atual, as autoras trazem algumas características com relação aos números naturais como os algarismos que compõem o sistema, as regularidades da sequência numérica e a questão de mudança de ordem com o agrupamento de 10 em 10. Nesta parte encontramos tarefas dos tipos T_5 e T_{17} . As tarefas do tipo T_5 são evidenciadas por meio de perguntas como ‘quantas dezenas há em uma centena?’ e em que solicitam uma correspondência de unidades, dezenas e centenas e as do tipo T_{17} são propostas com relação a decomposição e de forma diretiva como ‘decomponha o número 36’.

Posteriormente, as ordens da centena, dezena e unidades são representadas no material dourado e com o dinheiro, sendo exploradas de forma breve com tarefas do tipo T_{17} com foco na composição. Cabe aqui ressaltar que as tarefas do tipo T_1 e T_{17} são ainda propostas várias vezes neste capítulo, tendo inclusive, mais adiante, um tópico específico para tratar da composição e decomposição de números naturais. Na sequência, a unidade de milhar é retomada com algumas tarefas do tipo T_1 antecedendo trabalho com a classe dos milhares, em que são apresentadas as ordens, classes e leitura dos números naturais. Com relação à leitura e

escrita dos números, que consideramos como tarefas do tipo T_2 a técnica utilizada é a mesma evidenciada no volume 4, quadro de ordens (τ_{32}).

Após a exploração da composição e decomposição de números naturais, é apresentada uma chamada intitulada *Preparando-se para o cálculo mental: aproximação*. Nessa chamada o foco, com relação à aproximação, trata de forma breve como chegar a dezena, centena e unidade de milhar exata mais próxima, sem propor tarefas sendo apenas um reforço do que foi visto anteriormente.

Precedendo a classe dos milhões que é apresentada e sistematizada no quadro de ordens (Figura 69), um conjunto de tarefas do tipo T_9 são propostas, sendo pertencentes aos subtipos $T_{9.1}$, $T_{9.2}$ e $T_{9.10}$. Destacamos estas tarefas porque as adições em questão visam formar potências de 10, por exemplo, $9 + 1 = 10$, $99 + 1 = 100$, $999 + 1 = 1000$ e assim por diante. Desta forma, trata-se de perceber a regularidade próxima aos *nós*, em que temos a mudança de ordem.

Classe dos milhões			Classe dos milhares			Classe das unidades simples		
9ª ordem	8ª ordem	7ª ordem	6ª ordem	5ª ordem	4ª ordem	3ª ordem	2ª ordem	1ª ordem
C	D	U	C	D	U	C	D	U

Figura 69: A classe dos milhões
Fonte: BORDEAUX et al, 2014e, p.36

Ao final do capítulo na seção de revisão são propostas tarefas de composição e decomposição de acordo com as ordens, que são do tipo T_{17} e resolvidas por τ_{10} ; as tarefas dos tipos T_1 e T_6 também são propostas e visam trabalhar os números da classe dos milhares.

No capítulo seguinte, o foco se dá nas operações de adição e subtração de números naturais. Inicialmente as atividades tem como foco trabalhar o algoritmo dessas operações, assim até as tarefas dos tipos T_9 e T_{10} são resolvidas via algoritmo. Posteriormente, duas propriedades da operação de adição são formalizadas: a comutativa e a associativa. Sobre a primeira é dito que a ordem das parcelas não altera o resultado da soma; sobre a propriedade associativa diz-se que “em uma adição de três ou mais parcelas, podemos agrupá-las de modos diferentes sem alterar a soma” (BORDEAUX et al, 2014e, p.46). Em ambos os casos, são propostas tarefas, $T_{9.10}$ e $T_{9.6}$ respectivamente, para aplicação das propriedades. Essas propriedades são tecnologias que justificam outras técnicas que já foram utilizadas anteriormente como τ_5 e τ_{10} .

Na sequência é proposto um tópico de cálculo mental, em que relembra-se a técnica τ_{17} , e que agora deve funcionar como técnica para tarefas dos tipo $T_{10.8}$, $T_{10.10}$ e $T_{10.11}$. No tópico de aproximação, que é proposto logo na sequência tarefa o cálculo mental funciona como uma ferramenta, uma vez que solicita que se faça aproximações dos termos da operação em questão. Mas, em particular, neste tópico solicita-se que se escreva um número como uma subtração em que o minuendo seja uma centena ou unidade de milhar exata, por exemplo, escrever o número 47 como $50 - 3$. Essa noção é relevante para a técnica da compensação, que fora vista anteriormente para operação de adição, e agora aparece em seguida para a operação de subtração (Figura 70):

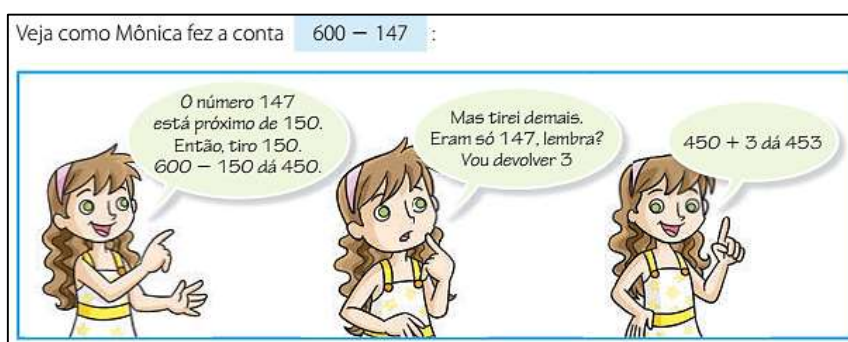


Figura 70: Compensação e aproximação
Fonte: BORDEAUX et al, 2014e, p.50

Destacamos que a técnica em questão (τ_{26}) permite ter um controle da resposta da operação (LETHELLIEUX, 2001; PARRA, 1996). Assim aqui a aproximação funciona como uma ferramenta para auxiliar no cálculo mental. Este fato é ainda reforçado mais adiante, próximo ao final no livro, na seção de cálculo mental a técnica τ_{26} é retomada não só para tarefas do tipo $T_{10.11}$, pois são ampliadas para a classe dos milhares, e não somente com centena ou unidade de milhar exata. Por exemplo, para fazer a subtração $3004 - 890$, fazemos $3004 - 5 = 2999$ de forma que não seja preciso fazer troca, assim resolvemos $2999 - 890 = 2109$ e depois somamos o 5 que havíamos subtraído antes: $2109 + 5 = 2114$.

As operações de adição e subtração são ainda neste capítulo vistas como operações inversas, mas agora sendo trabalhadas com os números pertencentes à classe dos milhares. Ao final, na seção de revisão são propostas tarefas dos tipos T_1 e adições e subtrações em que é necessário descobrir o valor de um dos termos da operação, mas de forma geral o foco se dá na aplicação do algoritmo.

No capítulo 4, intitulado *Multiplicação e divisão de números naturais*, as atividades iniciais visam identificar se o aluno sabe diferenciar as situações em que deve usar multiplicação ou divisão. Precedendo um tópico referente à estimativas do produto, tarefas do

tipo T₂₂ são propostas após a formalização dos termos da operação de multiplicação. No tópico de estimativas, as atividades consistem em estimar o produto por meio da aproximação dos fatores para dezenas ou centenas exatas, de acordo com a definição utilizada pelas autoras.

Posteriormente, precedendo tarefas que visam explorar o algoritmo, as propriedades comutativa, associativa e distributiva da multiplicação são formalizadas novamente de forma breve, sintetizando o que foi dito no volume 4. Após o trabalho com o algoritmo da multiplicação, a divisão exata com números naturais é retomada, com tarefas que visam determinar o valor de um termo desconhecido da divisão (dividendo, divisor ou quociente). Como essas tarefas visam o trabalho com o algoritmo não a modelamos como do cálculo mental. Na sequência, as operações de multiplicação e divisão são trabalhadas como operações inversas, como tarefas dos tipos T_{11.1}, T_{11.4}, T_{12.3} e T₂₂.

A próxima seção de cálculo mental, explora a multiplicação e divisão por múltiplos e potências de 10 (tarefas dos tipo T_{11.8} e T_{12.7}). Como vemos nas Figuras 71 e 72, as tarefas vêm acompanhadas a sistematização das técnicas:



Figura 71: Multiplicação por múltiplos de potências de 10
Fonte: BORDEAUX et al, 2014e, p.92

A Figura 71 apresenta τ_{29} como técnica para resolver as tarefas do tipo T_{11.8}. Tanto a técnica quanto o tipo de tarefa já foram modelados no volume anterior em uma seção de cálculo mental. Nesta seção, também explora-se sobre a operação de divisão, com tarefas do tipo T_{12.7}, no entanto, no volume 4 elas eram resolvidas pela técnica τ_{31} e, agora no volume 5, como vemos na Figura 72, uma nova técnica é apresentada:



Figura 72: Divisão por múltiplos de potências de 10
Fonte: BORDEAUX et al, 2014e, p.92

A técnica em questão consiste em *escrever o divisor*, que é um múltiplo de potência de 10, *como uma nova divisão em que o dividendo é uma potência de 10 e o divisor é múltiplo divisor inicial* (τ_{33}).

Na sequência, precedendo o trabalho com o algoritmo da divisão, um tópico intitulado de *estimativa do quociente* trabalha as divisões não exatas. No entanto, desta vez não se utiliza a aproximação do divisor e/ou dividendo para se estimar o quociente; trata-se apenas de identificar entre quais números estará o resultado da divisão. Além disso, é solicitado que se utilize a calculadora na realização das tarefas, dessa forma o cálculo mental está presente apenas para um certo ‘controle’ do resultado final. Ao final do capítulo, na seção de revisão, as tarefas relacionadas com o cálculo mental consistem em identificar, em uma operação, o termo desconhecido, como em tarefas do tipo T_{22} .

O capítulo seguinte, é dedicado ao trabalho com os múltiplos e divisores de um número natural. Assim, o capítulo inicia discorrendo sobre o múltiplo de um número natural, retomando de forma breve o que já fora enunciado no volume anterior, trabalhando com tarefas dos tipos T_1 e T_{22} . Posteriormente, em um tópico sobre divisibilidade, em que é formalizado que “para saber se um número natural é divisível por outro número, podemos fazer a divisão entre eles e verificar se ela é exata” (BORDEAUX et al, 2014e, p.110). Nesta parte são propostas tarefas que visam determinar se um número é múltiplo de outro, a partir da técnica da divisão (τ_{22}), de forma que se ela for exata então esse número é múltiplo do outro, caso contrário não é. As tarefas com esse objetivo não contabilizamos como do tipo T_{26} , visto que a divisão deve ser feita via o algoritmo da divisão. Da mesma forma, verificar a divisibilidade de um número por outro também não modelamos diante da apresentação com base no algoritmo da divisão.

Essa discussão e exploração sobre múltiplo e divisor precede uma introdução sobre múltiplos comuns, divisores comuns, ambos relativos a dois (ou mais) números naturais e números primos. Nestes tópicos, relacionadas ao cálculo mental só encontramos tarefas do tipo T_{26} , que podem ser resolvidas com base na memorização da tabuada (τ_{12}). Já para identificar se um número é divisor de outro, emprega-se o algoritmo da divisão e por isso não modelamos como um tipo de tarefa.

No capítulo 7, o tema central é frações e porcentagens. De acordo com as autoras, na introdução do capítulo as atividades propostas visam verificar se os alunos construíram o conceito de fração parte/todo. Para isso, são propostas tarefas do tipo T_{28} , visam trabalhar a representação mental das frações. Na sequência, é apresentada a leitura de fração com

denominadores menor que 10, igual a 10, 100 e 1000. Em seguida, são propostas tarefas que contabilizamos como do tipo T_2 mas agora com números racionais, em forma de fração.

Posteriormente começam as tarefas que visam calcular, por exemplo, $\frac{3}{4}$ de um número, que modelamos como *calcular a fração de um número* (T_{30}). Para resolver uma tarefa como essa primeiro emprega-se a contagem de ostensivos: se quisermos $\frac{3}{4}$ de 20 por exemplo, representamos a fração $\frac{3}{4}$ como 3 saquinhos com 5 bolinhas, visto que $\frac{4}{4}$ são 4 sacos com 5 bolinhas cada para totalizar 20. Depois a técnica empregada consiste em calcular primeiro $\frac{1}{4}$ de 20 da partir daí para calcular o $\frac{3}{4}$ basta multiplicar o resultado de $\frac{1}{4}$ por 3. Note que quando calculamos $\frac{1}{4}$ de 20, temos uma tarefa do tipo T_{23} que já resolvemos anteriormente.

Na sequência faz-se a institucionalização da técnica (Figura 73), para resolver as tarefas do tipo T_{30} e que também passa a valer para as do tipo T_{23} :

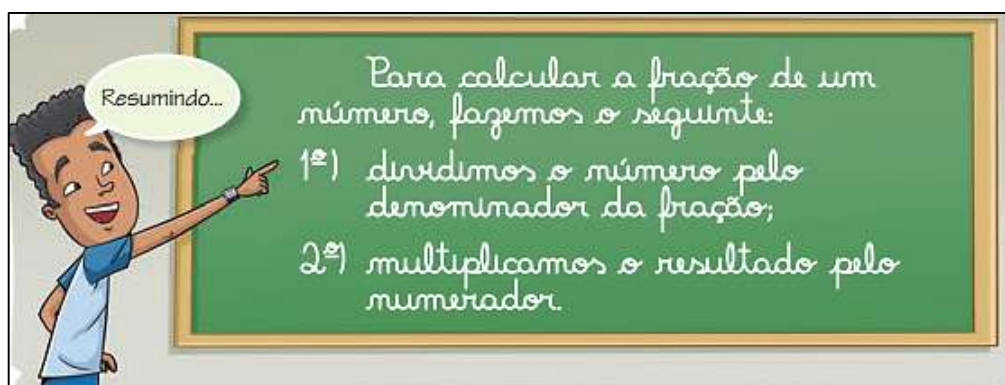


Figura 73: Institucionalização da técnica para tarefas do tipo T_{30}
Fonte: BORDEAUX et al, 2014e, p.146

Assim, para encontrar qual o valor da fração correspondente a um número, modelamos como τ_{34} *dividir o número pelo denominador da fração e multiplicar o resultado pelo denominador*.

As noções de fração: maior que 1 inteiro, própria, imprópria, equivalentes a inteiros e números mistos são vistas, mas nestas partes não identificamos alguma tarefa ou técnica em que o cálculo mental fosse utilizado, ou ainda tive alguma contribuição. Depois, as frações são representadas na reta numérica, fato que é relevante para compreender a ordem dos números racionais, visto que não seguem a mesma ideia dos números naturais.

Neste capítulo a fração também é vista como resultado de uma divisão, mas as atividades em questão visam trabalhar a notação de fração ao relacionar com os termos da divisão. Posteriormente são trabalhadas as frações equivalentes, em que vemos a importância de memorizar a tabuada, pois “multiplicando o numerador e o denominador de uma fração por

um mesmo número diferente de zero, encontramos uma fração equivalente a ela” (BORDEAUX et al, 2014e, p.158). Ressaltamos que esta é a técnica apresentada encontrar as frações equivalentes, o processo inverso é utilizado para simplificar uma fração, ou seja, dividir o numerador e denominador de uma fração por um mesmo número; por este motivo também é importante ter automatizado algumas divisões.

Na sequência trabalha-se a adição e subtração de fração com denominador igual e a multiplicação e divisão de fração por um número natural. Nestas partes não encontramos relações com o cálculo mental, uma vez que tratam de técnicas para trabalhar com as noções de frações, mas elas são importantes para as tarefas de porcentagem que são introduzidas na sequência. A técnica para frações equivalentes é empregada em um caso específico, que é para escrever frações como porcentagem; assim é preciso ter frações com denominador igual a 100 (Figura 74):

$$\frac{1}{2} = \frac{50}{100} = 50\% \text{ (cinquenta por cento)}$$

O diagrama ilustra o processo de conversão de uma fração para uma porcentagem. A fração $\frac{1}{2}$ é multiplicada por $\frac{50}{50}$ (representado por setas curvas com o rótulo $\times 50$ no topo e $\times 50$ na base) para obter a fração equivalente $\frac{50}{100}$, que é igual a 50% (cinquenta por cento).

Figura 74: Da fração à porcentagem
Fonte: BORDEAUX et al, 2014e, p.173

Dessa forma, cabe destacar que *associar a fração à porcentagem que a representa* é um tipo de tarefa que denominamos de T_{31} , que é resolvida pela técnica (τ_{35}) que consiste em *multiplicar o numerador e denominador de uma fração de forma que o denominador resulte em 100*. O cálculo mental é relevante para a relação entre fração e porcentagem, uma vez que em situações do cotidiano precisamos calcular mentalmente a porcentagem de uma quantidade.

Na seção de cálculo mental deste capítulo, encontramos apenas uma atividade que apresenta tarefas do tipo T_{31} . As outras tarefas consistem em *calcular a porcentagem de um número*, que denominamos como o tipo de tarefa T_{32} , qual a técnica consiste em escrever em forma de fração e resolver por meio da técnica τ_{34} já que ao escrever a porcentagem em forma de fração a tarefa passa a ser do tipo T_{30} . Na seção de revisão com relação ao cálculo mental encontramos tarefas do tipo T_2 e T_{28} .

O capítulo 8, é destinado ao trabalho com os números decimais. A introdução visa verificar se os alunos conseguem representar quantidades que não são inteiras por meio de frações e números decimais. Além disso, as atividades visam verificar se eles compreendem a notação com vírgulas dos números decimais. Também é feito a sistematização das ordens com

o quadro de ordens, que auxiliará na leitura e escrita dos números nas tarefas do tipo T₂, como vemos na Figura 75:

Unidades simples				Lemos assim:
Centena	Dezena	Unidade	décimo	
		0,	1	
		0,	2	→ um décimo → dois décimos

Figura 75: Quadro de ordens como técnica para tarefas do tipo T₂

Fonte: BORDEAUX et al, 2014e, p.187

Posteriormente são propostas tarefas do tipo T₁, T₂ e T₆ para os números racionais e T₂₉, cuja técnica não é clara, já que como no volume anterior apresenta-se uma forma de escrever e ainda tratamos apenas de frações em que o denominador é 10.

Precedendo a seção de cálculo mental em que são abordadas tarefas de adição com números decimais, a adição é trabalhada no algoritmo da adição visando que os alunos estabeleçam algum relação para a operação com relação número naturais (BORDEAUX et al, 2014e). Assim, entendemos que na seção de cálculo mental em que as tarefas são do tipo T_{9.1}, como $0,4 + 0,5$ a técnica empregada pode ser a mesma, com uso dos dedos das mãos, mas a representação será diferente, visto que aqui são números racionais, menores que 1.

Em um tópico intitulado *Multiplicação de números decimal por 10, 100 e 1000*, trabalha-se tarefas como $10 \times 0,10$, $100 \times 0,05$ e assim por diante. Dessa forma é introduzida com uma atividade com o uso das moedas de real, cujo seus valores devem ser multiplicados por 10, 100 e 1000 em uma calculadora. A partir daí sistematiza-se uma técnica pautada na posição da vírgula (Figura 76):



Figura 76: Apresentação de uma técnica para as tarefas do tipo T_{11.2}

Fonte: BORDEAUX et al, 2014e, p.206

Assim destacamos que as tarefas do tipo T_{11.2} são estendidas para os números racionais escritos de forma decimal. E a técnica empregada, como vemos na Figura 77, tem relação com a posição da vírgula, de forma que *a vírgula muda de posição conforme a potência de 10* que é

multiplicada (τ_{36}). No tópico em que se trabalha a divisão de números decimais por 10, 100 e 1000, com tarefas do tipo $T_{12.1}$ a técnica empregada é mesma, mas antes a vírgula ia para a direita e agora passa a ir para a esquerda.

Na sequência encontramos tarefas que *visam determinar o divisor a partir do quociente e o dividendo* (T_{33}), que como estão tópicos em trabalha-se a divisão por potência de 10, quer-se identificar qual a potência correspondente em cada divisão. Devido a forma sistematizada em que as autoras mostram as operações de divisão e multiplicação com decimais como inversas, não há uma técnica explícita nas tarefas deste tipo.

Adiante, ao final do capítulo, encontramos tarefas que ‘transformam’ (o termo transformar é utilizado pelas autoras da obra) frações em números decimais por meio da técnica de *calcular frações equivalentes de forma que o denominador seja uma potência de 10* (τ_{37}) (Figura 77). O caminho inverso também é feito, dos números decimais às frações. Conseguir fazer essa ‘transformação’ facilita para o aluno na hora de realizar o cálculo mental com números racionais, pois de acordo com Caney e Watson (2003, apud CARVALHO; PONTE, 2012, p. 362):

As estratégias de cálculo mental com números racionais dos alunos [...] realçam a importância de perceber a relação entre diferentes representações de um número racional para que se consiga desenvolver este cálculo mental. Algumas das estratégias utilizadas envolvem usar uma regra anteriormente memorizada ou colocar de forma sequencial uma combinação de estratégias, por exemplo transformar decimais em frações para construir o todo.

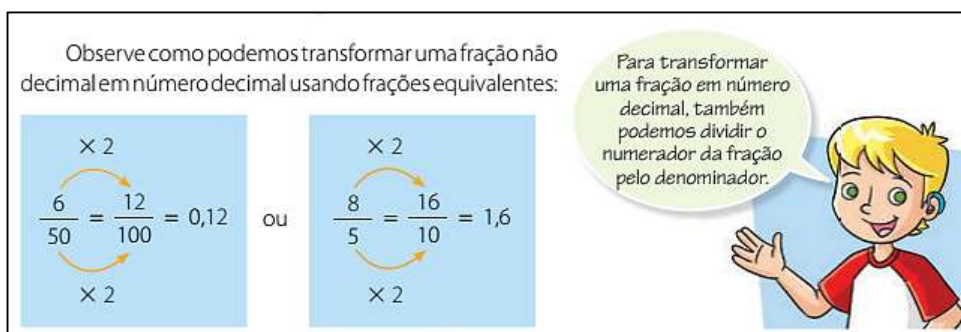


Figura 77: Frações e nos números decimais
Fonte: BORDEAUX et al, 2014e, p.206

Assim, tarefas que visam *representar frações em números decimais* (T_{34}) relevantes para o cálculo mental, neste caso a técnica que as resolvem também é fundamental. Ao final do capítulo na seção de revisão, encontramos as mesmas tarefas que encontramos ao longo do capítulo.

No capítulo 9 e 11 o eixo tratado é de grandezas e medidas, em que no primeiro tratam-se as medidas de comprimento, superfície e volume e no segundo medidas de massa. Assim são

propostas tarefas do tipo T_{24} ao longo de todo capítulo em que trabalham as unidades de medida do metro e alguns de seus submúltiplos (quilômetro, centímetro e milímetro). A relação e correspondência dos submúltiplos do metro são sistematizados com frações, de forma que $1\text{ cm} = \frac{1}{100}m = 0,01m$, por exemplo.

No capítulo 9 encontramos 2 seções de cálculo mental, a primeira propõe tarefas idênticas a seção de cálculo mental deste eixo do volume anterior, como uma composição com relação às unidades de medida em questão, por exemplo, identificar quantos 25 centímetros há em meio metro. Já na segunda seção de cálculo mental são propostas tarefas do tipo T_{32} , com cálculo de porcentagem de números apenas na contextualização de unidades de medida, por exemplo, calcular 25% de 100 metros. Na seção de cálculo mental do capítulo 11, são propostas duas atividades que incluem as tarefas vistas nas 2 seções anteriores.

No capítulo 11, são propostas tarefas do tipo T_{24} com unidades de medida de massa. Também são trabalhados os submúltiplos do grama, relacionando com fração como foi feito anteriormente no capítulo 9 com relação as unidades de medida de comprimento. Em ambas seções de revisão, ao final dos capítulos são propostas tarefas dos tipos T_{24} , e a composição com relação às unidades de medida.

Na seção seguinte trazemos o quantitativo dos tipos de tarefas que apareceram neste volume, bem como as técnicas.

4.2.2 O CÁLCULO MENTAL NO LIVRO DO 5º ANO

Neste volume notamos que o foco passa a ser o conjunto dos números racionais, trabalhando as frações e números decimais e suas operações e, porcentagem. Dessa forma, as tarefas que lidam com o números naturais, são menos frequentes neste volume, bem como a exploração de suas operações, e quando são feitas o foco está na exploração do algoritmo. Entretanto, os números naturais ainda são explorados mesmo que de forma breve porque tem outras ordens trabalhadas, no caso, relativas à classe dos milhares.

As seções de cálculo mental são propostas 7 vezes, mesma quantidade que apareceu no volume anterior; sendo 2 vezes em capítulos que focam no eixo de grandezas e medidas. Neste último caso, não são apresentadas técnicas para as tarefas propostas nestas seções, elas tem a mesma característica no volume 4, sendo uma composição do tipo T_{24} junto com a ideia de composição do tipo T_5 .

No volume 5 encontramos um total 27 tipos de tarefas sendo apenas 5 novos tipos emergentes. Com relação às técnicas encontramos um total de 6 técnicas novas, de um total de 13 técnicas empregadas. No Quadro 9, trazemos o quantitativo dos tipos de tarefas encontrados no livro do 5º ano:

Tipos de tarefas	T ₁	T ₂	T ₅	T ₆	T ₇	T _{9.1}	T _{9.2}	T _{9.6}	T _{9.10}	T _{10.8}	T _{10.10}	T _{10.11}			
Quantidade	25	27	7	5	15	13	2	4	10	12	7	6			
Tipos de tarefas	T _{11.1}		T _{11.2}		T _{11.4}		T _{12.3}		T _{12.7}		T ₁₇	T ₂₂	T ₂₄	T ₂₆	T ₂₈
Quantidade	4		15		11		6		16		32	38	73	21	37

Quadro 9: Quantitativo dos tipos de tarefas elencados a priori e a partir da análise dos volumes 1, 2, 3 e 4
Fonte: Elaborado a partir do desenvolvimento da pesquisa

A partir do Quadro 9, notamos que o tipo de tarefas mais frequente é T₂₄, que está relacionado com o as unidades de medidas de massa, capacidade e comprimento; esse tipo de tarefa é mais trabalhado, devido à sua ampliação com o conjunto dos números racionais, de forma que temos a correspondência entre as unidades de medida com números decimais. Vale destacar a frequência dos tipos de tarefas T₁ e T₆, que até o volume 4 eram ainda mais frequentes e neste volume tem sua frequência reduzida notavelmente. O mesmo acontece com os subtipos relacionados aos tipos T₉, T₁₀, T₁₁ e T₁₂ visto que o foco das operações está no exercício do algoritmo, salvo nos casos em que contabilizamos.

De maneira geral, notamos que a quantidade de tarefas dos tipos classificados é pouca, sendo menos frequentes quando comparada com os demais volumes. Acreditamos que isso se dá devido ao foco que começa a ser modificado nesta etapa do ensino, uma vez que outros conteúdos são introduzidos, como os números racionais. Assim, entendemos que até o 3º ano acontece uma espécie de esgotamento com relação às operações com números naturais, que a partir do volume seguinte tem apenas seu sistema ampliado.

Em vista disso, com relação ao cálculo mental, a quantidade de novos tipos de tarefas é reduzida, sendo um total de 5, como vemos no Quadro 10: ^

Tipos de tarefas	T ₃₀	T ₃₁	T ₃₂	T ₃₃	T ₃₄
Quantidade	30	10	26	9	8

Quadro 10: Quantitativo dos tipos e subtipos de tarefas modelados no volume 5

Fonte: Elaborado a partir do desenvolvimento da pesquisa

Como vemos os tipos de tarefas modelados estão relacionados ao conjunto de números racionais e as ideias que neles permeia, como a porcentagem e a fração; Em particular, a porcentagem é um dos conteúdos em que se faz relevante ter a habilidade do cálculo mental, visto a sua aplicabilidade em situações do cotidiano.

Com relação aos jogos que têm relação com o cálculo mental há uma diminuição radical, de forma que quando propostos encontram-se nas orientações para o professor, sendo os mesmos jogos vistos nos volumes anteriores.

Assim, o cálculo mental no livro do 5º ano, apesar de ter 7 seções que focam na exploração da habilidade, não tem tantas tarefas e estratégias como nos volumes anteriores. Como o foco passa a ser os números racionais e o uso do algoritmo, as tarefas com os números naturais são menos frequentes, dando lugar a construção de outras estratégias com frações, números decimais e porcentagem.

A seguir, apresentamos uma síntese de como se portam os tipos de tarefas e técnicas neste volume:

- O início do livro inicia com uma retomada e ampliação do sistema de numeração decimal, visando que os conhecimentos prévios dos alunos sejam verificados; assim, são propostas tarefas dos tipos T₁, T₂, T₅, T₆ e T₁₇. O tipo de tarefas T₂ é ainda proposto em várias partes do livro, pois encontra-se no trabalho com os número racionais;
- As tarefas relacionadas às operações de adição, subtração, multiplicação e divisão (subtipos de T₉, T₁₀, T₁₁ e T₁₂) tem maior foco na aplicação do algoritmo; de forma que as técnicas e tarefas de cálculo mental, quando aparecem, são apenas uma reinvestida do que foi visto no volume anterior tendo seu repertório ampliado para números de novas classes, com exceção das tarefas dos tipos T_{12.7} e T_{11.2} que passam a ser resolvidas por novas técnicas, τ_{33} e τ_{36} respectivamente;

- Os novos tipos modelados, são de forma geral focados em números racionais e assim novas técnicas surgem também. Assim, as tarefas dos tipos T_{30} e T_{32} , T_{31} e T_{34} são resolvidas pelas técnicas τ_{34} , τ_{35} e τ_{37} , respectivamente.

Na seção seguinte trazemos uma relação dos tipos de tarefas e técnicas dos livros do 4º e 5º ano, assim como fizemos na seção 3.4.

4.3 O CÁLCULO MENTAL NOS VOLUMES 4 E 5

Os volumes 4 e 5 compõem a coleção de livros de matemática, que agora não fazem parte da alfabetização. Assim como apresentamos anteriormente, as tabelas seguem a sistematização dos quadros apresentados nas seções 4.1.2 e 4.2.2.

Notamos que o foco após o 3º ano passa a ser nas operações de multiplicação e divisão e o conjunto dos números racionais, abrangendo frações e números decimais. Dessa forma, no livro do 4º ano, encontramos um total de 28 tipos de tarefas e 17 técnicas, que relacionamos nas Tabelas 6 e 7. Na Tabela 6, são relacionados os tipos e subtipos de tarefas com suas respectivas técnicas:

Técnicas (τ_n)	Tipos de tarefas (T_n)														
	T_1	T_2	T_6	T_7	$T_{9.3}$	$T_{9.9}$	$T_{10.1}$	$T_{10.3}$	$T_{10.6}$	$T_{10.7}$	$T_{10.8}$	$T_{11.1}$	$T_{11.2}$	T_{23}	T_{24}
τ_2															
τ_3															
τ_4															
τ_6															
τ_8															
τ_{10}															
τ_{23}															
τ_{25}															
τ_{26}															
τ_{27}															
τ_{32}															

Tabela 6: Relação entre tipos de tarefas e técnicas do Volume 4

Fonte: Fonte: Elaborado a partir do desenvolvimento da pesquisa

Como os tipos de tarefas que são mais frequentes no volume são T_1 , T_2 , T_6 , $T_{11.2}$ e T_{24} notamos que as técnicas que são mais trabalhadas são τ_2 , τ_3 , τ_4 , τ_{27} e τ_{31} . Notamos que para o tipo T_{24} , mais trabalhado no volume 4, não há uma técnica específica e este é o único tipo que já fora trabalhado no volume 3 e não possui uma técnica específica.

Apenas os tipos de tarefas T_2 , $T_{10.1}$ e $T_{10.6}$ apresentam 2 possibilidades de técnicas, mas com exceção do tipo T_2 as demais são frequentes em pouca quantidade ao longo do volume, uma vez que se referem a operação de subtração e o foco se dá para as operações de

multiplicação e divisão. A partir da Tabela 7, notamos também que a técnica que se emprega em mais de dois tipos de tarefa é τ_{25} , no entanto os tipos de tarefas em questão são pouco frequentes. Lembramos que como do foco no 4º ano ser as operações de multiplicação e divisão e números racionais, as operações de adição e subtração são tratadas apenas em um capítulo.

Na Tabela 8, trazemos a sistematização dos novos (sub)tipos modelados com as técnicas em questão:

Técnicas (τ_n)	Tipos de tarefas (T_n)												
	$T_{9.10}$	$T_{9.11}$	$T_{10.10}$	$T_{10.11}$	$T_{11.7}$	$T_{11.8}$	$T_{12.6}$	$T_{12.7}$	T_{25}	T_{26}	T_{27}	T_{28}	T_{29}
τ_{10}													
τ_{12}													
τ_{22}													
τ_{25}													
τ_{26}													
τ_{27}													
τ_{28}													
τ_{29}													
τ_{30}													
τ_{31}													

Tabela 7: Relação entre novos tipos de tarefas e técnicas do Volume 4

Fonte: Fonte: Elaborado a partir do desenvolvimento da pesquisa

Os novos (sub)tipos modelados são em sua maioria focados nas operações de multiplicação, divisão e números racionais. Apesar de observarmos tarefas referentes à adição e subtração as mesmas apenas ampliam o campo numérico, de forma que se trabalhe essas operações com números das classes dos milhares e milhões.

A partir da Tabela 8, vemos que a técnica que tem seu uso evidenciado em mais de 2 tipos de tarefas é τ_{10} . Mesmo que as tarefas resolvidas por esta técnica não sejam as mais frequentes como vimos no Quadro 8, se somarmos a quantidade de tarefas referentes a estes tipos veremos que a quantidade se aproxima com a do tipo de tarefa mais frequente, que é T_{28} ; e como vemos o tipo de tarefa mais frequente não possui uma técnica apresentada pelas autoras, assim como os tipos T_{25} e T_{29} . Inferimos que isso acontece devido às noções trabalhadas nos tipos T_{28} e T_{29} , que são concernentes ao conteúdo frações em que trata-se da visualização e representação mental e T_{25} é explorado apenas em uma página, dando a entender que deve se ampliar a mesma estratégia utilizada no tipo T_{18} .

As técnicas τ_{12} e τ_{25} são empregadas em 2 tipos de tarefas, $T_{11.7}$ e T_{26} e, $T_{9.10}$ e $T_{10.10}$, respectivamente; mas os tipos em questão não tem tarefas frequentes, consequentemente estas técnicas não são o foco de exercício. Também notamos que apenas os tipos de tarefas T_{26} e T_{27} são resolvidos por 2 técnicas distintas.

No volume 5 os subtipos de tarefas referentes ao tipo T_9 , no caso $T_{9.1}$, $T_{9.2}$, $T_{9.6}$ e $T_{9.10}$, e os tipos T_{22} e T_{24} (esses dois são os tipos mais frequentes no volume 5) não apresentam técnicas neste volume, e por uma questão *econômica* não o colocamos na Tabela 9. Na Tabela 9, trazemos a sistematização das técnicas e (sub)tipos de tarefas referentes ao volume 5:

Técnicas (τ_n)	Tipos de tarefas (T_n)															
	T_1	T_2	T_5	T_6	T_7	$T_{10.8}$	$T_{10.10}$	$T_{10.11}$	$T_{11.1}$	$T_{11.2}$	$T_{11.4}$	$T_{12.3}$	$T_{12.7}$	T_{17}	T_{26}	T_{28}
τ_2																
τ_3																
τ_8																
τ_{10}																
τ_{11}																
τ_{12}																
τ_{17}																
τ_{26}																
τ_{32}																
τ_{33}																
τ_{36}																

Tabela 8: Relação entre tipos de tarefas e técnicas do Volume 5

Fonte: Elaborado a partir do desenvolvimento da pesquisa

Além dos tipos que não colocamos vemos ainda que os tipo T_5 , $T_{11.4}$ e $T_{12.3}$ também não possuem técnicas e, o tipo T_{28} que neste volume é um dos mais frequentes, não possui ainda uma técnica instituída.

A partir da Tabela 9 vemos que apenas a técnica τ_{17} é empregada mais de uma vez, e somente nos subtipos relativos à operação de subtração, no entanto a técnica não muito explorada, uma vez que as tarefas dos tipos em questão não são tão frequentes; já os tipos mais frequentes não possuem técnicas, com exceção de T_1 , T_6 e T_{26} . Vale ressaltar que alguns dos tipos mais frequentes que não possuem técnicas estão relacionados com a operação de multiplicação e que para resolvê-las ter memorizado a tabuada é um fator que facilita a resolução de tais tarefas.

Além disso apenas o tipo de tarefa $T_{10.11}$ apresenta 2 técnicas, mas que também não são tão exploradas, pois são propostas apenas 6 tarefas deste tipo.

Os novos tipos modelados têm apenas relação com os números racionais, incluído fração e porcentagem, com exceção de T_{33} que explora a noção de divisor e não tem uma técnica modelada. Na Tabela 10 trazemos a sistematização dos tipos de tarefas com suas respectivas técnicas:

Técnicas (τ_n)	Tipos de tarefas (T_n)				
	T_{30}	T_{31}	T_{32}	T_{33}	T_{34}
τ_{34}					
τ_{35}					
τ_{37}					

Tabela 9: Relação entre novos tipos de tarefas e técnicas do Volume 5
Fonte: Elaborado a partir do desenvolvimento da pesquisa

Os novos tipos de tarefas em questão são resolvidos por novas técnicas também, de forma que cada tipo de tarefa possui apenas uma técnica (com exceção de T_{33}). Com reação às técnicas notamos que apenas uma, τ_{34} , resolve dois tipos de tarefa, que são os mais frequentes. Dessa forma, de fato esta é a técnica mais evidenciada no volume.

Assim, com relação ao livro do 5º ano apresenta poucas técnicas e tipos de tarefas relativos ao cálculo mental. Inferimos que isso se dá ao foco que a partir do 4º ano passa das 4 operações com números naturais ao conjunto números racionais, fazendo assim que o cálculo mental esteja relacionado à estas noções.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho analisamos como o cálculo mental está presente em 5 livros que compõem uma coleção dos anos iniciais do ensino fundamental. Como o cálculo mental é uma habilidade, ele pode e deve ser explorado por meio de atividades que vão preparar o sujeito para realizar uma conta mentalmente, ou seja, atividades em que se empreguem estratégias pessoais.

Guimarães (2009) notou em sua pesquisa que a estratégia mais utilizada, por crianças dos 4º e 5º anos, para se resolver uma conta sem manusear o lápis e papel era reproduzir o algoritmo mentalmente. Em nossa perspectiva recorrer ao algoritmo não é considerado como cálculo mental, pois o mesmo deve ter fundamento em estratégias pessoais. Além disso, a habilidade do cálculo mental está pautada na compreensão do sistema de numeração decimal (PARRA, 1996), o que faz com que as atividades que visam sua compreensão sejam relevantes. Antes de iniciar a análise dos livros, fez-se necessário um estudo acerca de atividades que contribuem com a preparação do cálculo mental, o que resultou na elaboração de uma lista de tipos e subtipos de tarefa *a priori*, tendo por base a pesquisa feita por Guimarães (2009). Assim, passamos a análise da coleção, de modo que, a seguir, trazemos os principais apontamentos acerca do que pôde ser observado.

No livro do 1º ano encontramos tanto tarefas de tipos elencados *a priori* como novos tipos e subtipos que sentimos a necessidade de modelar devido a relevância para preparação de se calcular mentalmente. Também modelamos 4 técnicas explicitadas no livro e que resolvem

as tarefas dos tipos identificados. Neste livro, as tarefas estão mais voltadas para a compreensão do sistema de numeração decimal e as operações de adição e subtração, possibilitando que notássemos uma evolução das técnicas para as tarefas dos tipos T_1 e T_6 , como destacado no Quadro 2.

No livro do 2º ano notamos um crescimento na quantidade de tipos de tarefas que foram identificados, tanto com relação aos elencados *a priori*, quanto à necessidade de se modelar novos. Esse crescimento de tarefas de diferentes tipos também vem acompanhado de um crescimento de técnicas. No entanto, observamos tarefas que não possuem técnica, como é o caso das tarefas dos tipos T_2 , T_4 e T_5 , por exemplo. Ressaltamos que a presença de seções e tópicos destinados especificamente para o cálculo mental, que começam a ser explorados neste livro também contribuem para o surgimento de novos tipos e subtipos de tarefas e técnicas.

Observamos que alguns tipos de tarefas presentes no 1º volume permanecem no 2º, apresentando uma evolução da técnica quando propomos um sequenciamento – as tarefas do tipo $T_{9,1}$ eram resolvidas por meio da técnica τ_2 e passam a ser resolvidas pela técnica τ_5 , por exemplo. Além disso τ_2 é abandonada neste volume. Essa evolução permite que tarefas tornem-se técnicas para resolução de novos tipos de tarefas, como vimos no tipo de tarefa T_7 , que passa a ser técnica para tarefas do tipo T_{16} .

O uso do dinheiro e do jogo são escolhas didáticas realizadas pelas autoras e estão presentes nos dois primeiros volumes, de forma que no primeiro está presente em menor quantidade e frequência se comparado ao segundo. Destacamos essas escolhas pois, no volume 2, oportunizam a exploração de técnicas que preparam para o cálculo mental em situações do cotidiano.

Durante a elaboração das tarefas *a priori* percebemos que as tarefas apresentadas por Guimarães (2009) têm o objetivo de explorar as diferentes formas da decomposição, em face que pudemos percebermos que as estratégias apresentadas pelo livro do 2º ano também giram em torno da mesma. Assim, a preparação para o cálculo mental centra-se nas ideias de decomposição e composição de números.

Acreditamos que o grande número de tarefas e técnicas que surgem no livro do 2º ano se deve ao fato de que cálculo mental é uma habilidade que atravessa todas as operações e, na perspectiva adotada, se relaciona com estratégias que não usam o algoritmo, fazendo com que várias sejam as opções. Além disso, é fundamental que se compreenda o sistema de numeração decimal uma vez que a habilidade se baseia nas propriedades e regularidades do mesmo,

fazendo com que as tarefas que trabalhem questões relativas ao sistema sejam elencadas como preparatórias para realizar o cálculo mental.

As seções e tópicos de cálculo mental passam a ser propostas com maior frequência a partir do livro do 3º ano. No volume 3, o foco das tarefas e técnicas que contribuem para o cálculo mental é nas operações de multiplicação e divisão e, também na subtração uma vez que neste livro trabalham-se os números maiores que 100; e, conseqüentemente quando o sistema de numeração é ampliado, novas técnicas são desenvolvidas ou até mesmo algumas ideias anteriores são ampliadas sendo mais adequadas para tais situações. Os tipos de tarefas T_1 e T_6 também são trabalhados neste volume e, adiantamos que são propostos ainda nos 2 volumes seguintes.

Vale destacar que o cálculo mental começa a ser trabalhado no eixo de grandezas e medidas, com as tarefas relativas às unidades de medida de massa, capacidade e comprimento que começam a ser propostas no livro do 3º ano, tendo certo enfoque no cálculo mental ao realizar as correspondências entre as unidades de medida. Essa noção, em paralelo com as seções de cálculo mental vinculado com outras operações (adição, subtração, divisão, porcentagem) é ainda trabalhada nos volumes 4 e 5.

No volume 3 modelamos um total de 11 novas técnicas com relação ao cálculo mental, notamos aqui que dos tipos que antes não tinham técnica no volume 2, 3 são propostos novamente e permanecem sem técnica ($T_{12.5}$, T_{15} e T_{17}), além de outros 3 que são modelados e também não possuem técnica ($T_{9.8}$, $T_{9.9}$ e T_{24}). Posteriormente, no livro do 4º os tipos de tarefas T_2 e $T_{9.9}$ passam a ter técnicas formalizadas, enquanto o tipo T_{17} tem sua técnica evidenciada apenas no volume 5.

Nos livros do 4º e 5º anos, que já não fazem mais parte da coleção de alfabetização, o foco das tarefas que contribuem com o desenvolvimento da habilidade do cálculo mental, deixam de estar focadas nas 4 operações com números naturais, diante de outras noções que vão sendo introduzidas e construídas; como por exemplo, o conjunto dos números racionais, com frações e representação decimal e a ideia de porcentagem. As 4 operações têm apenas seu repertório ampliado ao trabalhar com números das classes dos milhares e milhões, assim as técnicas que surgem são modeladas sendo adequadas para o trabalho com esses números.

Assim, nestes volumes a maioria dos tipos de tarefas modelados e suas respectivas técnicas, quando presentes, se referem às ideias de múltiplos, divisores, frações e porcentagem. Acreditamos que um estudo do cálculo mental especificamente com relação aos números

racionais deve ainda ser feito visto que não encontramos muitas pesquisas sobre o assunto. Desse modo, nesta parte nos pautamos no que o trabalho com números naturais contribuem com o cálculo mental com números racionais, uma vez que alguns tipos de tarefas, como T_1 , T_2 , T_6 e $T_{9,3}$, e, técnicas como τ_2 , são apenas ampliados para este conjunto.

Observamos também que o dinheiro ainda é usado no volume 3, 4 e 5 para as representações das classes e ordem dos números, mas cada vez menos, não sendo uma escolha didática em foco a partir do volume 4. Da mesma forma, notamos que os jogos que contribuem com cálculo mental são propostos cada vez menos, sendo deixados apenas no manual do professor como sugestão e ainda são reinvestidas dos jogos que já foram vistos no volume anterior.

Inferimos que a partir do volume 4, há uma preferência das autoras apresentarem o tema dos capítulos de forma mais diretiva e resumida, dispendendo mais atenção para os algoritmos e novos conteúdos (como frações e porcentagem), de certa forma, em detrimento de atividades que contribuam com o cálculo mental. Assim, o cálculo mental relacionado à porcentagem poderia ser mais explorado com tarefas que visassem tal relação, por exemplo.

Notamos que os tipos de tarefas que são comuns em todos os volumes, são T_1 e T_6 , mas que são propostos com frequências diferentes. No Gráfico 2, trazemos a frequência em cada um dos volumes, a partir dele vemos que os tipos em questão são menos frequentes após o volume 3. Como afirmado anteriormente, isso acontece porque após a etapa de alfabetização o foco é outro.

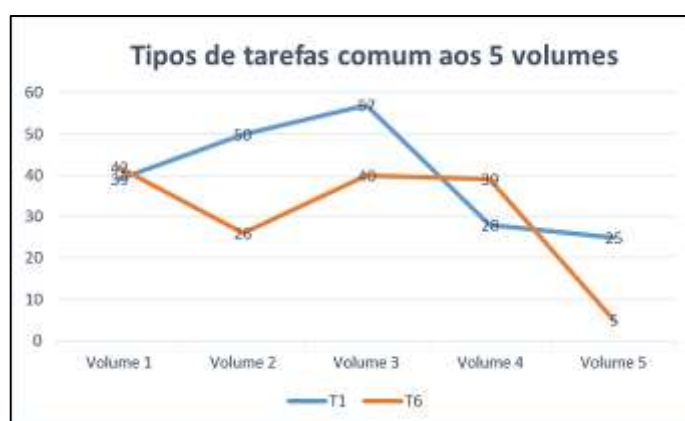


Gráfico 2: Frequência dos tipos T_1 e T_6 nos 5 volumes
Fonte: Elaborado a partir do desenvolvimento da pesquisa

Inferimos que as atividades que consistem em preparar o aluno para realizar o cálculo mental visam essencialmente uma exploração da técnica. No entanto, as seções de cálculo mental não oportunizam a autonomia para elaboração de uma técnica pelo aluno, uma vez que

apresentam as tarefas e a forma de resolvê-las em seguida. Dessa forma, as seções visam a exploração e memorização de técnicas.

De forma geral, se fôssemos classificar a praxeologia das seções de cálculo mental presentes nos livros de 2º ao 5º ano, diríamos que se aproximam de um modelo *tecnicista*, de forma que aqui estamos nos referindo aos modelos propostos por Gascón (2003)²⁰. Classificaríamos assim, diante da proposta das autoras em trazer na maioria²¹ das seções técnicas relativas ao cálculo mental e, uma sequência de tarefas que visam apenas a aplicação da técnica. No entanto, ao considerarmos o cálculo mental como uma habilidade que tem a possibilidade de permear várias operações e diferentes conteúdos, procuramos analisar tudo que oportunizasse o preparo do aluno para que ele fosse capaz de elaborar e desenvolver estratégias que contribuem para o cálculo mental. Dessa forma, não olhamos somente as seções destinadas explicitamente à habilidade.

No Gráfico 3, apresentamos como os tipos de tarefas e as técnicas se comportam ao longo de toda a coleção; para isso trouxemos o quantitativo relacionado aos tipos de tarefas e técnicas presentes em cada volume. Assim notamos que no volume 3 é quando são propostas mais tipos de tarefas e técnicas relativas ao cálculo mental, inferimos que isso acontece devido o volume 3 corresponder à última etapa da alfabetização, assim coincide de trabalhar não só novas tarefas de cálculo mental como retomar algumas já vistas.



Gráfico 3: Quantidade de tipos de tarefas e técnicas em cada volume

Fonte: Elaborado a partir do desenvolvimento da pesquisa

A mudança na quantidade de técnicas e tipos de tarefas ao longo da coleção, consequentemente modifica as praxeologias, assim como quando começam a ser explicitadas

²⁰ Ver GASCÓN, J. La necesidad de utilizar modelos en didáctica de las matemáticas. Educação Matemática Pesquisa. São Paulo, v. 5, n. 2, p. 11-35, 2003.

²¹ Dizemos maioria, pois nas seções relativa ao eixo de grandezas e medidas, encontramos apenas tarefas que não evidenciam a aplicação de uma técnica em particular.

as tecnologias; há uma evolução praxeológica de forma que passa-se de uma praxeologia pontual para uma local e assim por diante, essa evolução favorece a compreensão do aluno acerca do conteúdo estudado, no caso, da habilidade a ser desenvolvida.

Neste sentido, as tarefas que preparam para o desenvolvimento do cálculo mental, presentes na coleção, em sua maioria tem foco nas 4 operações e no sistema de numeração decimal, mesmo quando o repertório numérico é ampliado. Como a etapa inicia na alfabetização matemática, notamos que em um primeiro momento há um investimento das autoras em explorar algumas estratégias que visam a compreensão do sistema de numeração decimal, como o uso dos dedos e tarefas do tipo T_1 e T_6 . Posteriormente, o foco passa para as tarefas relacionadas às 4 operações, onde notamos um investimento nas técnicas e formalizações de propriedades das mesmas, que fundamentam as técnicas (tecnologias), com números naturais. Por fim, algumas tarefas relacionadas ao cálculo mental são exploradas algumas noções relacionadas ao conjunto dos números racionais, como as frações e números decimais.

Com relação à abordagem utilizada pelas autoras, ressaltamos o fato de trabalharem algumas tarefas e técnicas que contribuem com o cálculo mental, antes da sistematização do algoritmo; essa fato demonstra o interesse em propor o desenvolvimento e memorização de técnicas que instigam a busca pessoal do aluno por estratégias para resolver situações, sem remeter somente à uma regra pré-estabelecida.

Por fim, vemos que o cálculo mental é uma habilidade construída a partir da compreensão do sistema de numeração decimal estendendo até as operações e outros conceitos matemáticos. A forma como o cálculo mental se desenvolve na coleção, por meio das tarefas elencadas a priori e modeladas ao longo da análise é de forma gradativa, sendo explorado sempre que possível. No entanto, várias tarefas que façam com que o aluno mobilize as estratégias e aplique-as nas resoluções ficam a cargo do professor.

O cálculo mental pode, e deve, ser explorado ainda em outros conteúdos e etapas do ensino, como por exemplo no estudo do conjunto dos números racionais, que começa a ser enfatizado após a etapa da alfabetização. Em paralelo a este conteúdo e no seguimento desta etapa, nos anos finais do ensino fundamental, os conteúdos de porcentagem e de matemática financeira também se relacionam com o cálculo mental. Dessa forma, faz-se necessário pesquisas sobre atividades que explorem a habilidade do cálculo mental nos anos finais do ensino fundamental e ensino médio, visto que ela perpassa vários conteúdos.

REFERÊNCIAS

- ANANIAS, E. F. **SOBRE AS OPERAÇÕES MATEMÁTICAS E O CÁLCULO MENTAL**. 2010. 191 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática – Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2010.
- ANSELMO, B.; PLANCHETTE, P. , Le calcul mental au collège: nostalgie ou innovation? **Repères IREM**. Num. 62. p. 5-20, Metz: Topiques Editions, 2006
- ARTIGUE, M. Ingénierie Didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Vol. 9, no 3, pp. 281-308, Grenoble : La pensée sauvage, 1988.
- BATISTA, A. A. G. **Recomendações para uma política pública de livros didáticos**. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Fundamental, 2001.
- BITTAR, M. **A Teoria Antropológica do Didático como ferramenta metodológica para análise de livros didáticos**. Zetetiké, Campinas/SP, v. 25, ISSN 2176-1744, 2017.
- BITTAR, M.; FREITAS, J.L.M.de.; PAIS, L. C.; **Reflexões sobre a Orientação de Pesquisas de Pós Graduação em Educação Matemática com o Suporte da Teoria Antropológica do Didático**. Perspectivas da Educação Matemática, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, v. 7, ISSN 2359-2842, 2014.
- BORDEAUX, A.L.; RUBINSTEIN, C.; FRANÇA, E.; OGLIARI, E.; MIGUEL, V. **Novo bem-me-quer**: alfabetização matemática, 1º ano: ensino fundamental: anos iniciais. 3. ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2014a.
- BORDEAUX, A.L.; RUBINSTEIN, C.; FRANÇA, E.; OGLIARI, E.; MIGUEL, V. **Novo bem-me-quer**: alfabetização matemática, 2º ano: ensino fundamental: anos iniciais. 3. ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2014b.
- BORDEAUX, A.L.; RUBINSTEIN, C.; FRANÇA, E.; OGLIARI, E.; MIGUEL, V. **Novo bem-me-quer**: alfabetização matemática, 3º ano: ensino fundamental: anos iniciais. 3. ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2014c.
- BORDEAUX, A.L.; RUBINSTEIN, C.; FRANÇA, E.; OGLIARI, E.; MIGUEL, V. **Novo bem-me-quer**: alfabetização matemática, 4º ano: ensino fundamental: anos iniciais. 3. ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2014d.
- BORDEAUX, A.L.; RUBINSTEIN, C.; FRANÇA, E.; OGLIARI, E.; MIGUEL, V. **Novo bem-me-quer**: alfabetização matemática, 5º ano: ensino fundamental: anos iniciais. 3. ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2014e.
- BOSCH, M.; CHEVALLARD, Y. **LA SENSIBILITÉ DE L'ACTIVITÉ MATHÉMATIQUE AUX OSTENSIFS**. Recherches en didactique des mathématiques, vol. 19, no 1, p. 77-124, 1999.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. [Brasília: MEC], 2017.

_____. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. **Guia de Livros Didáticos, PNLD/2016**. Brasília: MEC/SEF, 2015.

_____. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. **EDITAL DE CONVOCAÇÃO 02/2014 – CGPLI: EDITAL DE CONVOCAÇÃO PARA O PROCESSO DE INSCRIÇÃO E AVALIAÇÃO DE OBRAS DIDÁTICAS PARA O PROGRAMA NACIONAL DO LIVRO DIDÁTICO PNLD 2016**. Brasília: MEC/SEF, 2014.

_____. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BUENOS AIRES. Secretaría de Educación - Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. **Cálculo mental con números racionales: apuntes para la enseñanza**. Coordinado por Susana Wolman – 1ª ed. Buenos Aires: 2006.

BUTLEN, D.; PEZARD, M. **CALCUL MENTAL, CALCUL RAPIDE**. IREM Grenoble: Grand N, n. 47, p. 35-59. 1990-1991. Disponível em <http://www-irem.ujf-grenoble.fr/spip/squelettes/fic_N.php?num=47&rang=3>. Acesso em: 20 de abr. 2017.

CARRAHER, T. N.; CARRAHER, D.; SCHLIEMANN, A. **Na vida dez na escola zero**. São Paulo: Cortez, 1995.

CARVALHO, R.; PONTE, J. P. da; **PRÁTICAS DE ENSINO COM CÁLCULO MENTAL**. Práticas de Ensino de Matemática, Universidade de Lisboa, ISSN 2182-0023, 2012.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Estudar matemáticas: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem – Capítulo 18**. Tradução: Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: Artmed Editora, 2001.

CHEVALLARD, Y. **El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico**. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 19, nº 2, pp. 221-266, 1999.

FONTES, C. G. **O valor e o papel do cálculo mental nas séries iniciais**. 2010. 220 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010.

FRANÇA. Ministère de l' éducation nationale. **Les nouveaux programmes de l' école primaire-Mathématiques**. Document d' accompagnement des programmes de l' école primaire, Le calcul mental, Cycle des apprentissages fondamentaux, Cycle des approfondissements, 2002.

FRANÇA. Conseil Supérieur des programmes. **Projet de programmes pour les cycles**, 2015.

FRISON, M. D.; VIANNA, J.; CHAVES, J. M.; BERNARDI, F. M. **Livro Didático como instrumento de apoio para construção de propostas de ensino de ciências naturais**. In: ENCONTRO NACIONAL DE PESQUISAS EM EDUCAÇÃO E CIÊNCIAS (Enpec), 7, 2009. *Anais...* Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), 2009.

GASCÓN, J. La necesidad de utilizar modelos en didáctica de las matemáticas. **Educación Matemática Pesquisa**. São Paulo, v. 5, n. 2, p. 11-35, 2003.

GÓMEZ, Bernardo. La enseñanza del cálculo mental. **Unión- Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, n. 4, p. 17-29, dez 2005.

GONÇALVES, Heitor Antonio. **EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CÁLCULO MENTAL: UMA ANÁLISE DE INVARIANTES OPERATÓRIOS A PARTIR DA TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS DE GÉRARD VERGNAUD**. 2008. 243 f. Tese (doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2008.

GUIMARÃES, S. D. **A prática regular de cálculo mental para ampliação e construção de novas estratégias de cálculo por alunos do 4º e 5º ano do Ensino Fundamental**. 2009. 261 f. Tese (Doutorado em Educação) – Centro de Ciências Humanas e Sociais, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande. 2009.

KASPARY, D. R. d. A. **UMA ANÁLISE PRAXEOLÓGICA DAS OPERAÇÕES DE ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE NÚMEROS NATURAIS EM UMA COLEÇÃO DE LIVROS DIDÁTICOS DOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL**. 2014. 142 f. Dissertação (mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande. 2014.

LAJOLO, M. **Livro Didático: um (quase) manual de usuário**. Em Aberto, Brasília, n. 69, v. 16, jan./mar. 1996. Disponível em: <<http://rbep.inep.gov.br/index.php/emaberto/article/viewFile/1033/935>>. Acesso em: 5 de abr. 2017.

LERNER, D.; SADOVSKY, P. O sistema de numeração: um problema didático. In: PARRA C. & SAIZ, I. (org.) **Didática da Matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996, p.36-47

LETHELLIEUX, C. **Le calcul mental au cycle des approfondissements**, Collection Pratique pédagogique, Armand Colin, Paris: Bordas, 2001

OLIVEIRA, E. M. Q. **O uso do livro didático de matemática por professores do ensino fundamental**. 2007. 152 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife. 2007.

PARRA, C. Cálculo mental na escola primária. In: PARRA C. & SAIZ, I. (org.) **Didática da Matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996, p.36-47.

RALSTON, A. Fim à aritmética de papel e lápis. *Educação e Matemática*, Lisboa: Associação de Professores de Matemática, n. 59, p. 36-41, 2000.

RAMALHO, L. V. **TRIGONOMETRIA EM LIVROS DIDÁTICOS DO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL**. 2016. 88 f. Dissertação (mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande. 2016.

ROMANATTO, M. **O livro didático: alcances e limites**. São Paulo, 2004. Disponível em <<http://www.sbempaulista.org.br/cpem/anai/mesas-redondasmr19-mauro.doc>>. Acesso em 19 de set. 2017.

SANTOS, S. F; MELLO, M. L. M. **Cálculo Mental no Ensino Fundamental I: Papel, Valor e Significado**. Disponível em

< site.veracruz.edu.br/doc/ise/tcc/2013/ise_tcc_pedagogia_silvane_fautino_2013.pdf >
Acesso em: 29 de Set. 2016.

SANTOS, V. A.; MARTINS, L. **A IMPORTÂNCIA DO LIVRO DIDÁTICO**. Revista Virtual, v. 7, n. 1, p. 20-33, jan – dez 2011.

SOUZA, N. F. **CONTEXTUALIZAÇÃO NO ENSINO DA ÁLGEBRA: ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS DO 7º ANO**. 2014. 105 f. Dissertação (mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande. 2014.

VERGNAUD, G. A TEORIA DOS CAMPOS CONCEPTUAIS. In: BRUN, J. (org) **Didática das Matemáticas**. Lisboa: Coleção Horizontes Pedagógicos, 1996, p.155-191.

ANEXO 1: Descrição dos tipos de tarefas

Tipos de tarefa	
T₁: Completar uma sequência numérica, progressiva e regressivamente, de n em n, a partir de um número dado.	
T₂: Escrever por extenso, números expressos em algarismos.	
T₃: Escrever em registro numérico um número enunciado em língua materna.	
T₄: Escrever em registro numérico um número enunciado em função de suas ordens.	
T₅: Identificar a quantidade de dezenas e/ou centenas que compõem um número.	
T₆: Identificar o sucessor e o antecessor de um número.	
T₇: Identificar quanto falta para chegar a um determinado número a partir de outro.	
T₈: Formar dezenas ou centenas inteiras, de modo a chegar na dezena ou centena, superior.	
T₉: Somar parcelas	T _{9.1} : Somar dois números que estão entre 0 e 10.
	T _{9.2} : Somar números formado por 2 ou 3 algarismos com números formados por 1 algarismo.
	T _{9.3} : Somar dezenas inteiras.
	T _{9.4} : Somar dois números, tal que a soma dos algarismos relativo as unidades ou as dezenas é inferior ou superior a 10.
	T _{9.5} : Somar três números que estão entre 0 e 10; devido a sua importância futuramente.
	T _{9.6} : Somar mais de 3 parcelas.
	T _{9.7} : Somar dois números com dois algarismos
	T _{9.8} : Somar uma centena exata a um número dado
	T _{9.9} : Somar centenas exatas
	T _{9.10} : Somar unidades, dezenas ou centenas relativos à classe de milhar
	T _{9.11} : Somar números de 3 algarismos
T₁₀: Subtrair dois números	T _{10.1} : Subtrair números que estão entre 0 e 21, de forma que minuendo sempre é maior que o subtraendo.
	T _{10.2} : Subtrair números formados por 2 e 3 algarismos (minuendo) por números formados por 1 algarismo (subtraendo).
	T _{10.3} : Subtrair uma centena exata de um número dado.
	T _{10.4} : Subtrair dois números com dois algarismos
	T _{10.5} : Subtrair dois números em que o minuendo é uma dezena exata.
	T _{10.6} : Subtrair duas dezenas exatas.
	T _{10.7} : Subtrair duas centenas exatas
	T _{10.8} : Subtrair dois números com 3 algarismos
	T _{10.9} : Subtrações em que o minuendo possui 3 ou 4 algarismos e o subtraendo 2, 3 ou 4 algarismos
	T _{10.10} : Subtrair unidades, dezenas ou centenas relativos à classe de milhar.
	T _{10.11} : Subtrair dois números em que o minuendo corresponde a uma centena exata.
T₁₁: Multiplicar números	T _{11.1} : Multiplicar dois números que estão entre 1 e 10.
	T _{11.2} : Multiplicar um número por potências de 10
	T _{11.3} : Multiplicar um número por 5, 50 ou 500.
	T _{11.4} : Multiplicar dois números, tal que um dos fatores seja formado por 1 algarismo e o outro por 2 ou 3 algarismos.
	T _{11.5} : Multiplicar dois números de forma que ambos fatores sejam números formado por dois algarismos.
	T _{11.6} : Multiplicar um número de dois algarismos por 25.
	T _{11.7} : Multiplicar 3 ou mais fatores
	T _{11.8} : Multiplicar números por múltiplos de potências de 10
T₁₂: Dividir dois números	T _{12.1} : Dividir números, em que os três, os dois ou o último algarismo seja zero, por potências de 10, ou seja dividir por 10, 100 ou 1000.
	T _{12.2} : Dividir números múltiplos de 5, por 5 e 50.

	T _{12.3} : Dividir dois números de forma que o dividendo seja um número formado por 1 ou 2 algarismos e o divisor um número de 1 algarismo.
	T _{12.4} : Dividir um número, múltiplo de 25, por 25.
	T _{12.5} : Dividir dois números em que o dividendo é uma dezena exata.
	T _{12.6} : Dividir múltiplos de 10, 100 e 1000 por números de 1 algarismo
	T _{12.7} : Dividir múltiplos de 10, 100 e 1000 por 10 e múltiplos de 10
T₁₃: Descobrir a dezena inferior de um número dado	
T₁₄: Identificar quais números (fatores) que quando multiplicados tem como produto o número n.	
T₁₅: Identificar diferentes formas de compor um número.	
T₁₆: Compor e decompor dezenas exatas em dezenas exatas.	
T₁₇: Compor e decompor um número em função de suas ordens	
T₁₈: Identificar a dezena exata mais próxima.	
T₁₉: Identificar como chegar a dezena mais próxima.	
T₂₀: Identificar o dobro ou triplo de um número.	
T₂₁: Identificar a metade de um número	
T₂₂: descobrir o fator desconhecido (de uma multiplicação?)	
T₂₃: identificar a n-ésima parte de um número, tal que $n \geq 3$	
T₂₄: identificar as correspondências entre as unidades de medida	
T₂₅: Identificar a centena exata mais próxima	
T₂₆: Identificar os múltiplos de um número	
T₂₇: Identificar se um número é divisor de outro	
T₂₈ : Indicar a fração correspondente a parte destacada na imagem	
T₂₉: Associar a representação de forma de fração com a forma decimal	
T₃₀: Calcular a fração de um número	
T₃₁: Associar a fração à porcentagem que a representa	
T₃₂: Calcular a porcentagem de um número	
T₃₃: Visam determinar o divisor a partir do quociente e o dividendo	
T₃₄: Representar frações em números decimais	

ANEXO 2: Descrição das técnicas

Técnicas
τ_1 : Recorrer a sequência numérica escrita
τ_2 : (sobre)contagem com auxílio dos dedos
τ_3 : Somar ou subtrair, de forma sucessiva, de n em n .
τ_4 : Somar 1 para saber o sucessor e, subtrair 1 para saber qual o número antecessor
τ_5 : decompor uma das parcelas visando compor uma dezena
τ_6 : Realizar a subtração entre o número que se quer chegar e o número que se parte.
τ_7 : Se o algarismo das unidades do número for menor que 5, então a dezena exata mais próxima será o valor das dezenas desse número, se for maior que 5 será a dezena superior a este número e se for igual a 5 dependerá do algarismo das dezenas
τ_8 : Somar ou subtrair a menor quantidade de forma a chegar a uma dezena exata.
τ_9 : Compor dezenas exatas
τ_{10} : Compor e decompor as parcelas em função de suas ordens e operar com as ordens equivalentes,
τ_{11} : Decompor uma das parcelas visando compor uma dezena inteira
τ_{12} : Tabuada
τ_{13} : Dividir por 2
τ_{14} : Decompor uma das parcelas visando formar uma centena exata
τ_{15} : Decompor o subtraendo em dezenas inteiras
τ_{16} : Decompor o subtraendo em centenas exatas
τ_{17} : Decompor o subtraendo e realizar subtrações sucessivas
τ_{18} : Operar com os números formados pelos algarismos da dezena e/ou centena e acrescentar o zero no resultado final.
τ_{19} : Acrescentar um zero à direita do último algarismo do número multiplicado por 10
τ_{20} : Abaixar o dedo correspondente ao número que se quer multiplicar por 9, e ver o número que é formado pelos dedos que ficam levantados
τ_{21} : Visa decompor um dos fatores e aplicar a propriedade distributiva da multiplicação
τ_{22} : Divisão
τ_{23} : Dividir por n , tal que $n \geq 3$
τ_{24} : Decompor o dividendo de acordo com suas ordens e aplicar a propriedade distributiva.
τ_{25} : Operar com os números de dezenas, centenas ou unidade de milhar mantendo os zeros
τ_{26} : Compensação
τ_{27} : Escrever em ordem crescente de 0 a 9 em uma primeira coluna e de forma decrescente em uma coluna ao lado
τ_{28} : Acrescentar 1 ou 2 zeros à direita do número multiplicado
τ_{29} : Decompor um dos fatores em outro dois fatores de forma que um destes seja uma potência de 10
τ_{30} : Decompor um número em fatores
τ_{31} : Dividir o divisor e o dividendo por 10
τ_{32} : Escrever um número no quadro de ordens
τ_{33} : Escrever o divisor, como uma nova divisão em que o dividendo é uma potência de 10 e o divisor é múltiplo divisor inicial
τ_{34} : Dividir o número pelo denominador da fração e multiplicar o resultado pelo denominador
τ_{35} : Multiplicar o numerador e denominador de uma fração de forma que o denominador resulte em 100
τ_{36} : Vírgula muda de posição conforme a potência de 10
τ_{37} : Calcular frações equivalentes de forma que o denominador seja uma potência de 10

