UNIVERSIDADE FEDERAL DO MATO GROSSO DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ALAN PEREIRA MANOEL

ASPECTOS HISTÓRICOS DO ESTUDO DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL NO ENSINO SECUNDÁRIO BRASILEIRO ENTRE 1889 E 1929

Campo Grande - MS
2018

ALAN PEREIRA MANOEL

ASPECTOS HISTÓRICOS DO ESTUDO DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL NO ENSINO SECUNDÁRIO BRASILEIRO ENTRE 1889 E 1929

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Carlos Pais

Campo Grande - MS
2018

ALAN PEREIRA MANOEL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dr. Luiz Carlos Pais (orientador)
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

____

Profª. Drª. Edilene Simões
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

____

Prof. Dr. Antonio Sales
Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul

____

Prof. Dr. José Luiz Magalhães de Freitas (suplente)
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

Campo Grande- MS, 28 de fevereiro de 2018.

Ao meu pai, Alceu, à minha mãe, Cleyde e à minha esposa, Camila.

Vocês me fazem continuar!

AGRADECIMENTOS

A Gohonzon e a Deus, por me darem serenidade, coragem, sabedoria e boa sorte durante todo o processo de realização deste sonho.

Ao professor Luiz Carlos Pais, por ter acreditado no meu potencial a ponto de dividir comigo a realização dessa pesquisa. Também agradeço aos exemplos de hombridade dados durante nossos momentos de estudos, que me proporcionaram ensinamentos para a vida; muito obrigado, professor!

Aos colegas que integram o grupo GEPHEME, pelas discussões propiciadas durante nossos encontros, que foram de grande importância para a realização desta pesquisa.

Aos professores do PPGEduMat, Luiz Carlos, Marcio, Marilena, José Luiz, Edilene, Luzia, Viola, Thiago, Suely, Aparecida, Patrícia e aos demais professores colaboradores. Seus ensinamentos foram fundamentais para a minha formação como pesquisador no campo da Educação Matemática.

Aos professores Antonio Sales, Edilene Simões e José Luiz, por participarem da banca examinadora e pelas contribuições pertinentes para o aperfeiçoamente da pesquisa.

Aos colegas da turma de 2016, pelos momentos de estudos e entretenimentos, dividos ao longo desses dois anos de mestrado.

Agradeço à Terezinha, ao Davi e à Mauricéia, pelas demonstrações de amizade e confiança.

Aos meus pais, Alceu e Cleyde, meu irmão, Alcerley e minha sobrinha Manuela, pelos gestos amorosos, que me deram forças para prosseguir em busca da concretização do sonho de me tornar Mestre.

À família de minha esposa, seus pais, José Roberto e Maria, seus tios, Odivaldo e Rosilei, seu primo Renato, pelo apoio e pela confiança depositada, permitindo que eu dividisse as alegrias e as tristezas da pesquisa junto à minha amada esposa, Camila.

À minha esposa, Camila, por estar sempre ao meu lado, dando todo o suporte necessário; sem a sua presença tudo isso seria muito mais difícil.

À CAPES, pelo financiamento desta pesquisa.

Amor para recomeçar

Eu te desejo não parar tão cedo
Pois toda idade tem prazer e medo

E com os que erram feio e bastante
Que você consiga ser tolerante

Quando você ficar triste que seja por um dia
E não o ano inteiro
E que você descubra que rir é bom
Mas que rir de tudo é desespero

Desejo que você tenha a quem amar
E quando estiver bem cansado
Ainda, exista amor prá recomeçar
Prá recomeçar

Eu te desejo muitos amigos
Mas que em um você possa confiar
E que tenha até inimigos
Prá você não deixar de duvidar

Quando você ficar triste que seja por um dia
E não o ano inteiro
E que você descubra que rir é bom
Mas que rir de tudo é desespero

Desejo que você tenha a quem amar
E quando estiver bem cansado
Ainda, exista amor prá recomeçar
Prá recomeçar

Eu desejo que você ganhe dinheiro
Pois é preciso viver também
E que você diga a ele
Pelo menos uma vez
Quem é mesmo o dono de quem

Desejo que você tenha a quem amar
E quando estiver bem cansado
Ainda, exista amor prá recomeçar

Eu desejo que você tenha a quem amar
E quando estiver bem cansado
Ainda, exista amor prá recomeçar
Prá recomeçar, prá recomeçar

Frejat

RESUMO

Esta pesquisa tem como objetivo analisar aspectos históricos, didáticos e epistemológicos, relativos aos conteúdos matemáticos preparatórios para a iniciação ao estudo do Cálculo Diferencial e Integral, nas quatro primeiras décadas do período republicano. Na tentativa de atingir o objetivo da investigação, o material de análise foi constituído de documentação sobre as reformas educacionais referentes ao ensino secundário, dos programas de ensino para o Colégio Pedro II e de livros didáticos indicados para as disciplinas de Álgebra e Aritmética. A pesquisa foi conduzida pela abordagem metodológica crítica, na linha proposta pelo historiador Marc Bloch, por conceitos da história das disciplinas e culturas escolares propostos por André Chervel e pelas ideias de estratégias e táticas oferecidas por De Certeau. Com base nesse aporte teórico e metodológico analisaram-se as fontes já referidas e, por meio desse estudo realizados nas reformas educacionais e nos programas de ensino, procedeu-se à análise de três momentos distintos em relação à aproximação entre a Matemática do ensino secundário (Álgebra e Aritmética) e o Cálculo Diferencial e Integral do ensino superior. No primeiro momento, observou-se uma forte valorização da Matemática, reflexo, possivelmente, das discussões educacionais influenciadas pelo matemático alemão Félix Klein. Os indícios dessa valorização foram percebidos nas indicações contidas nas leis de ensino e na parte destinada às disciplinas de Álgebra e Aritmética dos programas de ensino da época. Pôde-se perceber que, aparentemente, essas indicações serviram para estreitar os laços entre a Matemática do ensino secundário e o Cálculo Diferencial e Integral do ensino superior. O segundo momento foi marcado por uma suposta independência estabelecida entre a Matemática do ensino secundário e o Cálculo no ensino superior, sendo que, para isso, foram adotadas estratégias e táticas que iam contra a ideia de um ensino secundário com caráter propedêutico e, desse modo, a Matemática do ensino secundário poderia ter deixado de abordar temas mais próximos daqueles vistos, no ensino superior, no estudo do Cálculo Diferencial e Integral. O terceiro e último momento representou certo equilíbrio em relação às oposições vistas nos dois momentos anteriores, havendo, assim, o retorno de medidas, menos expressivas que as vistas no primeiro momento, mas que atestavam para o fato de que tópicos matemáticos ligados às disciplinas de Artimética e Álgebra poderiam ter oferecido subsídios para os enfrentamentos iniciais do estudo Cálculo Diferencial e Integral. Sobre as análises feitas nos livros didáticos, foi estabelecida uma relação entre os conceitos iniciais do Cálculo presentes na obra de Sonnet, com outros, vistos na obra de Álgebra de Serrasqueiro e na Aritmética dos irmãos Reis. Ainda sobre as análises dos livros didáticos, foram criadas categorias pertencentes à educação matemática, que atestaram a favor de que alguns conteúdos citados nos programas de ensino poderiam ter oferecido, aos alunos do ensino secundário, conhecimento prévio para o estudo do Cálculo Diferencial e Integral.

Palavras Chaves: História da Educação Matemática. Cálculo Diferencial e Integral. Ensino Secundário. História Cultural. Método Crítico.

ABSTRACT

This research aims to analyze historical, epistemological and didactic aspects relating to mathematical content preparation the initiation to the study of differential and Integral Calculus, in the first four decades of the Republican period. In the attempt to achieve the goal of the research, the analysis was made up of documentation on educational reforms regarding secondary education, educational programmes for the Colegio Pedro II and textbooks for the disciplines of arithmetic and Algebra. The survey was conducted by critical methodological approach, in line with a proposal by the historian Marc Bloch, for concepts in the history of disciplines and school cultures proposed by André Chervel and by the ideas of strategies and tactics offered by Certeau. Based on this theoretical and methodological contribution analysed the sources already referred to and, through this study conducted in educational reform and educational programs, and educational programs, analyzed three different times in relation to rapprochement between the secondary school Mathematics (algebra and Arithmetic) and the Diferencical and Integral Calculation of higher education. At first, we observed a strong appreciation of mathematics, a reflection, perhaps, of educational discussion influenced by the German mathematician Felix Klein. The evidence of that recovery were perceived in the indications contained in the laws of teaching and in part aimed at disciplines of arithmetic and Algebra education programmes of the time. It might realize that, apparently, this information served to strengthen ties between the secondary school Mathematics and the differential and Integral Calculus. the idea of a high school with introductory character and, thereby, the secondary school Mathematics could have left to address issues closer to those seen in higher education, in the study of differential and Integral Calculus. The third and last time represented balance in relation to opposition views in the two previous times, going on, so the return of measures, less expressive than those seen in the first, but that existed for the fact that mathematical topics linked to the disciplines of Artimética and algebra could have offered subsidies for the initial confrontation of the study differential and Integral Calculus. On the analysis done in textbooks, was established a relationship between the initial concepts of calculus present in Sonnet, with others, seen in the work of Serrasqueiro algebra and Arithmetic of the brothers. On the analysis of the textbooks were created categories pertaining to mathematics education, who gave evidence in favour of some content cited education programmes could be offered, students of secondary education, prior knowledge to the study of differential and Integral Calculus.

Key words: history of mathematics education. Differential and Integral Calculus. Secondary Education. Cultural History. Critical Method.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A pesquisa apresentada nesta dissertação foi desenvolvida no curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS). Tal pesquisa contou com as contribuições do GEPHEME (Grupo de Estudo e Pesquisa em História da Educação Matemática Escolar), liderado pelo professor Dr. Luiz Carlos Pais, e tem a intenção de analisar aspectos históricos, didáticos e epistemológicos relativos aos conteúdos matemáticos preparatórios para a iniciação ao estudo do Cálculo Diferencial e Integral, nas quatro primeiras décadas do período republicano.

Em nosso entendimento, tratamos de um problema histórico de ensino da Matemática relacionado à passagem do nível secundário para o ensino superior, num período em que houve o início de uma expansão dos primeiros cursos de Engenharia no Brasil, compreendido entre os anos de 1889 a 1929, sendo o mesmo marcado, entre outras coisas, por um avanço industrial. Devido a esse avanço, houve mudanças sociais que influenciaram diretamente no sistema educacional e, consequentemente, nos conhecimentos ligados à matemática, tendo em vista que

> [...] a matemática escolar tinha um caráter estático e desligado das aplicações práticas. Por outro lado, indústria e o comércio demandavam não apenas uma instrução matemática mais ampla, como também conhecimentos mais modernos e avançados que servissem de base para aplicações técnicas. (SCHUBRING, 2004, p. 12).

Nesse contexto, portanto, o Brasil do final do século XIX passou a ter um crescimento no ensino de engenharia, sendo criadas algumas escolas com vistas a essa formação, a exemplo da Politécnica de São Paulo (1893).

Com todo progresso que houve no período focalizado neste trabalho, 1890 a 1930, a Matemática do ensino secundário[1] – que tinha parte corresponde ao atual ensino médio – começou a passar por mudanças significativas. Visando de algum modo organizar o ensino secundário brasileiro, foram propostas algumas reformas na educação, nos programas de ensino, nos conteúdos de ensino e nos livros didáticos.

De posse do material referente às reformas educacionais do ensino secundário, dos programas de ensino para o Colégio Pedro II e de livros didáticos

[1] De acordo com as reformas estudadas, o aluno iniciava seus estudos no ensino secundário, com idade variando entre 11 e 12 anos.

indicados para as disciplinas de Álgebra e Aritméticas e de outros materiais a eles relacionados, buscamos identificar como a diciplina de Cálculo Diferencial e Integral dos cursos de engenharia influenciaram a disciplina de matemática no ensino secundário a ponto de alguns conteúdos serem ensinados, visando dar base para o ensino de Cálculo oferecido no nível superior.

Este trabalho está estruturado em seis capítulos, organizados de modo a contemplar as abordagens pertinentes ao tema da pesquisa. O primeiro capítulo apresenta uma síntese da nossa caminhada como pesquisador e autor até chegarmos às questões operacionais desse trabalho. Dessa forma, o capítulo se inicia com um breve apanhado de dados que compõem a nossa trajetória de vida docente e de como isso implicou em uma aproximação com a Educacação Matemática, com o tema da pesquisa e com o viés adotado para a mesma.

A parte intermediária do primeiro capítulo consta da descrição de como algumas leituras contribuíram para a definição do problema investigado e, na parte final, fazemos uma abordagem acerca dos objetivos, por que foram delineados e como a correlação entre eles contribui para a execução de nossa pesquisa.

Reservamos o segundo capítulo para tratar do referencial teórico-metodológico adotado para a análise dos documentos de nossa pesquisa. Inicialmente fizemos uma abordagem a respeito de alguns trabalhos cujas temáticas são ligadas à nossa, ressaltando pontos semelhantes e os aspectos inovadores do nosso estudo em relação a esses trabalhos.

Em seguida, ainda no segudo capítulo, apresentamos um esquema idealizado pelo nosso grupo de estudo GEPHEME e utilizado para estruturar o trabalho de pesquisa. Tal esquema é composto por sete elementos e por isso, recebeu o título de “esquema heptagonal”. Além de uma abordagem geral desse esquema, fazemos um breve comentário de cada um de seus elementos.

Como os teóricos escolhidos para a nossa pesquisa tinham ligação com o grupo conhecido como “escola dos annales”, optamos por trazer, também no segundo capítulo, um conciso histórico das três gerações dos annales, dando enfoque a alguns de seus personagens e aos aspectos adotados por eles ao longo da história.

Fazemos a descrição do método utilizado para fundamentar o nosso trabalho, qual seja, o método crítico descrito por Bloch (2001), apresentado por meio de cinco postulados criados pelo GEPHEME; além disso, descrevemos no mesmo capítulo dois, os conceitos teóricos escolhidos para nortear nossa pesquisa.

Sobre esses conceitos teóricos, apropriamo-nos das ideias propostas por Chervel (1990) acerca de um campo de pesquisa que trata basicamente da ideia de disciplina e cultura escolar. Acrescentamos à ideia de Chervel (1990) os conceitos de estratégias e táticas dados por De Certeau (2007).

Para finalizar o segundo capítulo, relatamos a maneira como se organizam as análise em uma pesquisa histórica, e que, de certa forma, contribuiu para que organizássemos as nossas. Influenciados por esse esquema organizacional das análises proposto na parte final do segundo capítulo, dividimos a parte analítica da nossa pesquisa nos três capítulos seguintes, quais sejam o terceiro, quarto e quinto capítulos.

No terceiro capítulo nossa abordagem é sobre quatro reformas educacionais propostas durante o período investigado em nossa pesquisa. Nessas reformas, nosso foco esteve nas partes que tratam do ensino secundário, destacando algumas estratégias que dizem respeito ao objetivo de o ensino secundário dar base para o ensino superior ou, de maneira mais pontual, de as Matemáticas do secundário oferecerem subisídios ao estudo do Cálculo, em nível superior.

Para o Capítulo IV fizemos um estudo de alguns programas de ensino propostos entre os anos de 1889 a 1929. Orientados por esses estudos, descrevemos algumas táticas usadas pelos autores dos programas em relação às estratégias e à finalidade comentada no capítulo três. As principais táticas descritas estão relacionadas à indicação das obras didáticas para as disciplinas de Álgebra e Aritmética, e aos seus respectivos conteúdos de ensino, por meio de associações com o estudo inicial do Cálculo Diferencial e integral no ensino superior.

A parte final de nossas análises está descrita no quinto capítulo; nele apresentamos, inicialmente, uma versão das sete primeiras páginas da obra de Cálculo de Sonnet. Durante a apresentação dessa versão são feitos comentários a respeito de categorias usadas por Sonnet e que dão indícios de conceitos básicos para o estudo do Cálculo Diferencial e Integral.

Com o estudo de alguns livros, conteúdos indicados para o ensino secundário e de conceitos que contribuem para um estudo prévio do Cálculo, fechamos o quinto capítulo com uma análise didática das obras indicadas para o ensino secundário, destacando as categorias abordadas durante a apresentação de alguns conteúdos e a maneira como tais categorias poderiam corroborar com o estudo do Cálculo Diferencial e Integral por meio da obra de Sonnet.

Ao final, trazemos algumas considerações advindas do estudo e dos achados com a pesquisa.

1 TRAJETÓRIA PESSOAL DO PESQUISADOR

O interesse a respeito da relação que envolve o estudo de alguns conteúdos matemáticos do ensino secundário brasileiro e os conceitos elementares para a preparação inicial do estudo do Cálculo Diferencial e Integral surgiu durante minha[2] atuação como docente do ensino superior, mais especificamente, em 2011, quando tive a oportunidade de lecionar a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral no curso de Matemática Licenciatura, oferecido pela Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul (UEMS), na unidade de Nova Andradina. Assim, é possível perceber a forte ligação que existe entre a docência e o tema proposto para essa investigação. Antes de tratar das questões pontuais desta pesquisa, gostaria de expor, de maneira sucinta, alguns momentos da minha vida que implicaram na escolha de minha carreira profissional, que, por sua vez, culminou na escolha do tema desta pesquisa cujo viés é histórico, na área da Educação Matemática.

Costumo brincar com os alunos, na minha apresentação como professor de Matemática, no primeiro dia de aula, dizendo que não estou ali por escolha própria e sim por uma “praga de mãe”. O motivo dessa brincadeira, guardo em minhas memórias: quando cursava os primeiros anos do ensino primário, ao auxiliar um vizinho da mesma turma nos deveres de casa, pude ouvir minha mãe, cheia de orgulho, comentar que eu tinha habilidade para ensinar e, por isso, futuramente me tornaria professor. Honestamente, considerar como “praga” é somente fruto de superstição, mas é algo que me agrada muito, pois liga minha mãe à minha profissão. Ainda nesse contexto fraternal, guardo com muito carinho os constates elogios que ouvia a respeito do meu pai e também de sua habilidade como professor da área de Letras, o que certamente motivou-me a querer seguir seus passos.

Após concluir meus estudos de nível médio, minha vontade era ingressar em algum curso superior, mas ainda tinha dúvidas sobre que curso seria. Dentre as possibilidades existentes em minha cidade optei por prestar o vestibular para o curso de Matemática.

Fui aprovado no exame vestibular e iniciei meus estudos no curso de Licenciatura em Matemática; logo nas primeiras aulas simpatizei com o modo como os conteúdos matemáticos eram abordados pelos professores. Os teoremas e suas

---

2 Usaremos a primeira pessoa do singular tendo em vista o caráter subjetivo que envolve esta parte do trabalho, um relato da nossa aproximação com a temática da pesquisa.

demonstrações me chamaram bastante atenção, a ponto de ter certeza que aquele era o caminho que gostaria de seguir.

No intuito de dominar com a mesma clareza que os meus professores, os conceitos matemáticos, passei a destinar um período diário para os estudos, que foi intensificado, no segundo ano de curso, devido ao fato de, em decorrência do meu bom aproveitamento no primeiro ano, ter sido escolhido como monitor da disciplina "Fundamentos de Matemática II" e, também, por ter deixado o trabalho de auxiliar de escritório em um despachante de minha cidade natal devido à bolsa que passei a receber.

Foi uma grande satisfação poder auxiliar os alunos da turma anterior nos seus exercícios, e isso aumentou ainda mais meu interesse pelos estudos. Tal interesse veio a ser novamente reconhecido quando, no terceiro ano do curso de matemática, fui convidado para participar do projeto intitulado "Estudo e Alicação de Funções Contínuas em R", na modalidade de iniciação científica avançada.

Obviamente aceitei o convite feito pelo professor Marcio Demetrius Martinez, e, então, passamos a trabalhar nesse projeto; toda sexta-feira eu apresentava seminários para o meu orientador. Nesse momento, sentia-me no ápice de minha vida acadêmica, passava horas estudando conteúdos de Álgebra Linear e Análise Real, ficava mais tempo com os professores da universidade do que com meus colegas de curso.

Movido por esse clima, fiz meu último ano de curso, obtendo bom aproveitamento nas disciplinas e recebendo o incentivo de alguns dos meus professores para dar sequência em meus estudos, em algum curso de pós-graduação em Matemática Pura e Aplicada. Esse também era o meu desejo, mas antes precisaria juntar algum dinheiro para custear minhas despesas durante o curso de verão[3].

Entreguei currículo em quase todas as escolas de minha cidade, na certeza de que logo eles veriam minhas boas notas e me contratariam para trabalhar. Confesso que demandou mais tempo do que eu esperava, mas comecei o ano letivo com uma boa quantidade de aulas, o que me deixou muito contente, pois, no final do ano, teria dinheiro suficiente para pagar minhas despesas com o curso de verão.

[3]Evento regular da Pós-graduação em Matemática que ocorre, geralmente, no período de Janeiro e fevereiro, e que oferta cursos em Matemática destinados a futuros alunos de mestrado, alunos de graduação e iniciação científica, alunos de mestrado e doutorado e professores de Matemática.

Ao iniciar meu trabalho como professor, percebi que as minhas expectativas em relação à docência no Ensino Fundamental e Médio não eram condizentes com a realidade, e que somente ter noção de conteúdos matemáticos não eram suficientes para prosperar na profissão; essa percepção acarretou-me uma série de problemas. Os alunos reclamavam que as atividades eram difíceis, que o professor não tinha paciência, que não conseguiam tirar boas notas, entre outros. Não demorou para que os pais aparecerem com novas ou velhas reclamações a respeito do meu trabalho em sala de aula.

Na minha cabeça, eu tinha certeza de que estava certo: a Matemática era difícil mesmo e o sucesso de poucos era algo normal. Certamente estava enganado; coordenadores e diretores tentavam me mostrar isso por meio de encontros, conversas e reuniões, mas não adiantava. Eu permanecia convicto de minhas razões, até porque não via uma forma diferente para realizar e pensar no meu trabalho. Em meio a esse “clima de guerra” criado nos primeiros meses de aula, optei por deixar algumas aulas, o que me deixou aborrecido, pois tinha certeza de que assim como me interessei pela Matemática meus alunos também passariam a ter interesse, após minhas aulas.

A relação conflituosa com a direção e com meus alunos durou todo o ano letivo, deixando-me cada vez mais insatisfeito e sem confiança, a ponto de pensar muitas vezes em desistir da profissão. No início do ano seguinte realizei o curso de verão, mas o meu encantamento com esse ramo da Matemática já não era o mesmo; fui até o final do curso, porém meu interesse era voltar para a sala de aula e buscar êxito naquele ambiente que para mim tornou-se enigmático.

Voltando para Nova Andradina, de início, consegui apenas cinco aulas em um sexto ano de uma escola de periferia. Durante o ano letivo busquei adotar uma nova postura em sala de aula, no sentido de repensar minhas práticas como professor de Matemática. Nesse mesmo ano me inscrevi no processo seletivo para professor da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, unidade de Nova Andradina, fui aprovado mediante um contrato de dois anos de duração.

Iniciei meu contrato como professor na disciplina “Análise Matemática”, que na época era oferecida aos alunos da 4ª série do curso de Matemática Licenciatura. Novamente busquei adotar uma postura diferente com a turma e, a meu ver, estava conseguindo extrair resultados positivos como professor dessa disciplina. No entanto, alguns professores assumiram o concurso e, meses depois de iniciar meu trabalho como professor do curso superior, tive que ceder lugar para um desses professores.

Nesse contexto, continuei com as minhas cinco aulas no ensino fundamental, terminei o ano letivo com essas cinco aulas, mas com a satisfação de que havia feito um melhor trabalho. No ano seguinte essa escola tornou-se municipal e passou a atender somente os primeiros anos do ensino fundamental; desse modo, não pude lá continuar como professor. Entretanto, como ainda tivesse mais um ano de contrato como professor do curso superior, nesse período pude atuar como professor na disciplina de “Cálculo Diferencial e Integral”, para os alunos da 1ª série do curso de Matemática. Foi nesse período que notei a dificuldade dos alunos em relação aos conceitos básicos relativos ao estudo do Cálculo; essa constatação me trouxe certa preocupação, pois além dessa dificuldade demonstrada pelos estudantes, poderia haver outras, próprias dos novos conteúdos matemáticos, de origens didáticas e históricas.

Nesse mesmo ano fui convidado para trabalhar como professor de uma turma de 9º ano, no período noturno, na escola onde havia trabalhado logo após terminar o curso de Matemática. Aceitei o convite e passei a trabalhar em uma sala improvisada na biblioteca da escola; o diretor havia me informado que uma das preocupações era em relação à participação e boa atuação dos alunos em uma das avaliações externas que aconteceria naquele ano.

Conciliei as aulas do Ensino Superior com as do Ensino Fundamental. Durante esse período busquei realizar atividades, no ensino superior, que pudessem minimizar os problemas já referidos e, no Ensino Fundamental, trabalhei de modo a atender ao que havia sido pedido pelo diretor da escola.

Nas duas áreas de ensino obtive alguns resultados positivos e, devido aos alcançados com o Ensino Fundamental, fui convidado pelo diretor para trabalhar em um projeto, como coordenador de Matemática da escola; aceitei o convite e no ano seguinte trabalhei somente com esse projeto.

A direção me fez alguns pedidos em relação ao meu trabalho, entre eles, que fossem convidados alguns alunos do curso de Matemática Licenciatura para atuar como estagiários na escola. Fui até à Universidade na qual o curso de Matemática era oferecido; um dos professores, coordenador de área do conhecimento do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (Pibid) encaminhou quatro estagiários desse projeto para a escola onde eu atuava.

Entre os quatro estagiários do projeto, dois deles participavam de um grupo de pesquisa no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática-PPGEdumat, oferecido pela Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, *campus* Campo Grande. Foram esses estagiários que me trouxeram algumas informações a respeito do programa e incentivaram a que eu viesse a conhecê-lo.

Trabalhei como coordenador de Matemática durante dois anos. Durante esse período realizamos diversas atividades e colaboramos para que a escola tivesse um bom desempenho em uma avaliação externa. No ano seguinte o projeto terminou, mas permaneci na escola como professor de Matemática e Raciocínio Lógico, além disso, voltei a participar do processo seletivo para professor colaborador da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, na unidade de Nova Andradina. Novamente fui aprovado e trabalhei com a disciplina de Geometria, para a 1ª série do curso.

Nesse mesmo ano iniciei meus contatos com o Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática-PPGEdumat, enviei um email para o Professor Doutor José Luiz Magalhães de Freitas, conversamos pessoalmente sobre assuntos diversos do programa, mas optei por não realizar a prova de seleção daquele ano, já que gostaria de conhecer melhor o programa.

No ano seguinte transferi-me para Campo Grande – MS, juntamente com a minha esposa, que foi uma das estagiárias que me apresentou o PPGEdumat. Inscrevi-me como aluno especial da disciplina Tópicos Especiais de Matemática, ofertada no primeiro semestre daquele ano e passei a frequentar o Grupo de Estudos em Didática da Matemática (DDMat), liderado pela Professora Dra. Marilena Bittar. A partir desse momento estava certo de que gostaria de prosseguir meus estudos por meio da Educação Matemática; sendo assim, passei a pensar sobre o tema do meu pré-projeto, cuja apresentação preenche uma das etapas avaliativas exigidas para ingressar no curso de mestrado do PPGEdumat.

Durante uma discussão a respeito do conceito de infinito, que ocorreu na disciplina Tópicos Especiais de Matemática, lembrei-me da dificuldade dos meus alunos durante o estudo dos conceitos iniciais do Cálculo Diferencial e Integral. A partir de então tomei a decisão de que adotaria esse tema para o pré-projeto e, como participava dos encontros do DDMat, busquei conciliar o tema escolhido com os assuntos abordados no grupo de pesquisa.

Para o semestre seguinte fiz minha inscrição para a disciplina Tópicos Especiais em Educação Matemática: *Cultura Matemática Escolar,* ministrada pelo professor Dr. Luiz Carlos Pais. As discussões realizadas nessa disciplina pareciam proporcionar alguma luz para começar a entender as dificuldades iniciais do estudo do Cálculo Diferencial e Integral, mas com o olhar voltado para questões de natureza histórica e cultural. Apesar disso, meu pré-projeto já tinha ganhado forma por meio das teorias de Didática da Matemática, razão por que optei por seguir minhas escritas por meio dessa teoria e entregar meu trabalho para ser avaliado sobre esse pressuposto teórico.

O pré-projeto foi aprovado e eu fui encaminhado para as outras duas etapas classificatórias, no processo para iniciar meus estudos no mestrado. Nessas outras duas etapas também fui avaliado de maneira positiva, restando, então, saber qual seria o meu orientador.

Durante e depois desse processo avaliativo, participava como aluno das aulas na disciplina Tópicos Especiais em Educação Matemática: *Cultura Matemática Escolar*. Foi nesse período que fiz meus primeiros contatos com o texto "HISTÓRIA DAS DISCIPLINAS ESCOLARES: REFLEXÕES SOBRE UM CAMPO DE PESQUISA" de André Chervel. No decorrer das aulas buscávamos entender esse campo de pesquisa proposto por Chervel denominado disciplinas e culturas escolares. Fazíamos associações, sempre que possível, com o presente e o passado e também uma análise na ótica da Educação Matemática. Por meio desses exercícios pude me inteirar um pouco mais a respeito do campo de pesquisa abordado na aula; dessa forma, fez crescer ainda mais o interesse em realizar minha pesquisa por meio de uma abordagem histórica.

Dias depois do término da disciplina, fui informado que teria como orientador o Professor Doutor Luiz Carlos Pais, que, ciente do meu interesse em pesquisar conteúdos do ensino secundário e suas relações com os conceitos matemáticos elementares que servem para fundamentar o estudo inicial do Cálculo Diferencial, propôs que isso fosse feito por um viés histórico.

Em nosso primeiro encontro conversamos[4] sobre alguns materiais que iriam servir de aporte teórico e outros que seriam úteis para as análises. Entre os materiais que pretendemos inserir no conjunto de fontes de nossa pesquisa estavam

[4] A partir deste ponto desta dissertação, o texto será escrito em primeira pessoa do plural, pois será levada em consideração a presença do Professor Doutor Luiz Carlos Pais.

os seguintes: livros didáticos da época considerada, programas de ensino, legislação educacional da época, entre outros elementos mais específicos da cultura matemática escolar tais como, definições usuais, propostas didáticas, teoremas, observações, entre outros elementos. Essa parte dos dados mais refinados destina-se ao nosso desafio de caracterizar a cultura matemática mais específica que envolvia o conteúdo matemático trabalhado nessa dissertação.

Com a escolha desses materiais para a pesquisa, passamos a investigar sobre eles, demandamos uma busca para encontrar esses documentos e, em seguida, realizar alguns estudos a fim de que pudéssemos definir o problema de pesquisa, os objetivos gerais e específicos, cuja descrição fazemos em seguida.

1.1 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA HISTÓRICO PESQUISADO

O “nascimento” do *problema de pesquisa* e também dos objetivos não se deu de maneira imediata, foram necessárias algumas discussões nos momentos de orientação e também durante as reuniões com os integrantes do Grupo de Estudo e Pesquisa em História da Educação Matemática Escolar – GEPHEME, liderado pelo Prof. Luiz Carlos Pais, orientador da pesquisa, e do qual o pesquisador passou a fazer parte desde o momento em que iniciou suas atividades como aluno regular do PPGEdumat.

Tais discussões direcionaram o estudoaram para o período compreendido entre o final do século XIX e início do século XX, pois enxergamos, nesse período, uma fase de transição que, impulsionada pelo avanço industrial implicou em mudanças sociais que influenciaram diretamente o sistema educacional e, consequentemente, a matemática.

Contudo, ainda se fazia necessária uma delimitação mais precisa a respeito desse recorte temporal do nosso trabalho e uma definição do problema a ser investigado. Em busca de respostas para esses dois impasses, passamos a pesquisar trabalhos que tratassem de uma temática educacional relacionada à nossa, em período histórico mais próximo ao do nosso estudo. Após a reunião e a leitura desses materiais, cujo tratamento será dado de forma mais aprofundada mais adiante[5], fechamos o recorte temporal do nosso estudo com os anos de 1889 a 1929, momento conhecido como Primeira República.

Nesse período, identificamos diversas reformas educacionais que visavam organizar a instrução pública brasileira, principalmente no que tange ao ensino secundário. Também identificamos o surgimento, no Brasil, de uma diversidade de obras didáticas para esse nível de ensino e a criação de escolas para a formação de engenheiros, como a escola Politécnica de São Paulo (1893), que foi precedida pela Escola Politécnica do Rio de Janeiro (1874) e a Escola de Minas de Ouro Preto (1876).

Definido o período e adquiridas as informações, direcionamos a investigação para o estudo do Cálculo Diferencial e Integral no ensino secundário brasileiro durante o período de 1889 a 1929. Entendemos que se trata de um problema histórico de ensino da Matemática relacionado à passagem do nível secundário para o ensino superior, num período em que houve o início de uma expansão dos primeiros cursos de Engenharia no Brasil. Com todo o progresso que houve nesse período, o ensino da Matemática correspondente ao atual ensino médio começou a sofrer mudanças significativas, num movimento mundial que recebeu influência do matemático alemão Félix Klein.

O passo seguinte à definição do nosso problema de pesquisa dizia respeito ao modo como iríamos operacionalizar esse problema, ou seja, a escolha de um objetivo geral e de, pelo menos, outros três específicos que estivessem relacionados e, assim, contribuíssem para o *modus operandi* da parte principal do nosso trabalho, que é a análise dos documentos.

Quanto ao *objetivo geral*, delineamos que seria: **analisar aspectos históricos, didáticos e epistemológicos relativos aos conteúdos matemáticos preparatórios, para a iniciação ao estudo do Cálculo Diferencial e Integral, nas quatro primeiras décadas do período republicano.** Esse objetivo geral foi traçado com base na percepção de que existe uma estreita relação entre o estudo de alguns conteúdos matemáticos trabalhados no ensino secundário e outros conteúdos constituintes da fase inicial do estudo do Cálculo Diferencial Integral. De maneira um pouco mais detalhada, acreditamos que dentre todos os conteúdos matemáticos vistos no ensino secundário, e que davam base para a continuidade dos estudos no nível superior, alguns eram passíveis de maior aproximação. Esses conteúdos

[5] Será abordado no segundo capítulo desta dissertação.

ofereciam subsídios à continuidade dos estudos matemáticos necessários para uma apropriação dos conceitos do Cálculo Diferencial e Integral, oferecidos pelos primeiros cursos de engenharia no Brasil. Assim**,** pretendemos analisar de forma mais ampla esses conteúdos, com vistas à composição do nosso trabalho.

Os caminhos que nos levariam a alcançar esse objetivo geral, ou seja, a forma como iríamos identificar esses conteúdos, analisá-los, relacioná-los com momentos históricos da época e, também, como eles eram trabalhados foram traçados e os apresentamos a seguir, na forma de objetivos específicos.

Primeiro objetivo específico**: analisar as políticas públicas na legislação do ensino secundário, no que diz respeito ao ensino da matemática voltado para a iniciação do estudo do Cálculo Diferencial e Integral, nas quatro primeiras décadas do período republicano.**

Para tentar esclarecer a ideia inicial, quanto à definição desse objetivo, entendemos que seria importante fazer um estudo detalhado da legislação do ensino, da época considerada, sobretudo referente à parte mais específica que tinha implicações para o ensino da Matemática.

Nesse sentido, identificamos, no intervalo delimitado - 1889 a 1929 -, a presença de sete reformas educacionais, popularmente associadas ao nome de seus autores, que aconteceram na seguinte ordem cronológica: Reforma Benjamin Constant (1890); Amaro Cavalcanti (1898); Reforma Epitácio Pessoa (1901); Reforma Augusto Tavares de Lyra (1908); Rivadávia Corrêa (1911); Reforma Carlos Maximiliano (1915) e Reforma João Luiz Alves (1925).

De todas essas reformas, aprofundamos nossos estudos históricos nas que foram implementadas[6] nos anos de 1890, 1898, 1911 e 1915, tendo em vista que as mudanças ocorridas por meio delas se mostraram importantes para o tema que propusemos investigar, ou seja, algumas imposições preconizadas nesses decretos implicaram questões importantes na relação entre o ensino de caráter geral e o de caráter específico, consequentemente na relação entre a Matemática e o Cálculo Diferencial e Integral oferecidos nesses dois níveis de ensino.

[6] Reformas referenciadas por Brasil (1895) composta por duas partes, Brasil (1900) composta por três partes, Brasil (1914) composta por três partes, Brasil (1917) composta por três partes.

Basicamente realizamos nossa investigação por meio da análise dos exames, das áreas matemáticas[7] previstas nessas reformas e das instituições que auxiliavam na organização do ensino nessa época.

Segundo objetivo específico**: identificar aspectos dos programas de ensino do Colégio Pedro II nas disciplinas de Aritmética e Álgebra, focalizando a parte específica de preparação para o Cálculo Diferencial e Integral, durante a última década do século XIX e as três primeiras do Século XX.**

O motivo pelo qual optamos por analisar os programas de ensino está no fato de que, por meio deles, seria possível identificar quais eram os conteúdos ensinados e a que eixos de ensino eles pertenciam, já que nessa época não existia a disciplina de Matemática, mas disciplinas associadas à Matemática, como Aritmética, Álgebra, Geometria e Trigonometria. Dessa forma, olhamos a coleção de conteúdos que compunha o eixo de Aritmética e de Álgebra, na intenção de encontrar os conteúdos que estariam mais próximos dos estudos iniciais do Cálculo Diferencial e Integral, e, também, se teria havido algum tipo de mudança em relação à manutenção, exclusão ou acréscimo de conteúdos no decorrer do tempo ou nas mudanças acontecidas entre um programa e outro.

As informações sobre a quantidade de programas dados no intervalo delimitado nessa pesquisa foram obtidas mediante a leitura dos trabalhos de Moreira (2008), Gussi (2011) e Vechia e Lorenz (1998).

A respeito da primeira das quatro décadas que investigamos, encontramos, na contribuição de Vechia e Lorenz (1998), os programas referentes aos anos de 1892, 1893, 1895 e 1898. Já o trabalho de Moreira (2008) citou a existência de um programa para cada um desses dez anos e trouxe, entre os seus anexos, além dos programas citados anteriormente, os programas de ensino para o ano de 1897 e 1899. Dessa forma, entre 1889 e 1899, optamos por tecer comentários a respeito desses seis programas de ensino, sendo os quatro trazidos por Vechia e Lorenz (1998) e os outros dois contidos no trabalho de Moreira (2008).

Para as outras três décadas, Vechia e Lorenz (1998) trouxeram os programas para os anos de 1912, 1915, 1923 e 1926. Outro autor que comentou sobre os programas existentes nesse mesmo período foi Gussi (2011). Ele apontou que, além do programa de 1912, existiu um programa para 1914 e, de 1919 até 1929, um

[7] Consideramos como essas áreas matemáticas, suas composições como: Aritmética, Álgebra, Trigonometria e Geometria.

programa para cada ano. Infelizmente não tivemos acesso a todos esses programas, por isso, decidimos que para essas últimas três décadas realizaríamos maiores comentários sobre os programas trazidos por Vechia e Lorenz (1998) e breves comentários embasados pelos escritos de Gussi (2011), sobre os outros programas de ensino.

Terceiro objetivo específico**: analisar aspectos didáticos e epistemológicos relativos aos conteúdos matemáticos e conceitos iniciais para o estudo Cálculo Diferencial e Integral, em livros didáticos adotados no Colégio Pedro II, do Rio de Janeiro, entre os anos de 1889 a 1929**.

Entendemos que a simples definição de um objetivo nem sempre esclarece devidamente nosso entendimento. Assim, cumpre esclarecer que a escolha de textos didáticos adotados no Colégio Pedro II decorre do fato de essa instituição ter sido considerada, por longas décadas, uma instituição modelo para os demais estabelecimentos de ensino secundário do país. Assim, qualquer estudante que desejasse ingressar nos cursos superiores, deveriam ter domínio dos conteúdos ensinados no Colégio Pedro II e estudar nos textos adotados por esse conceituado colégio.

Quanto à análise dos livros didáticos, o primeiro passo foi identificar, obter e escolher as obras concernentes ao período investigado. Uma das primeiras obras encontradas foi o livro de cálculo diferencial e integral, escrito por Hippolyte Sonnet e utilizado na politécnica de São Paulo. Nessa obra, observamos que os preceitos principais para o entendimento dos conteúdos iniciais do estudo do Cálculo Diferencial e Integral estavam presentes nas disciplinas de Aritmética e, principalmente, na de Álgebra, que constituem disciplinas do ensino secundário.

A partir dessa observação, obtivemos as obras de Serrasqueiro, Vianna, Aarão e Lucano Reis, e Arthur Thiré, todas referentes à disciplina de Aritmética. Quanto à disciplina de Álgebra, encontramos a obra de Serrasqueiro, utilizada de maneira majoritária durante o período investigado. Vale ressaltar que o fato de trabalharmos com uma quantidade maior de obras do ensino secundário está relacionado ao objetivo maior de nossa pesquisa, que é investigar conteúdos pertencentes às Matemáticas do ensino secundário e suas proximidades com conceitos iniciais do estudo de Cálculo Diferencial e Integral dados no ensino superior. Por isso, achamos importante entender como pelo menos um autor do ensino superior tratava dos conceitos primeiros do estudo do Cálculo Diferencial e

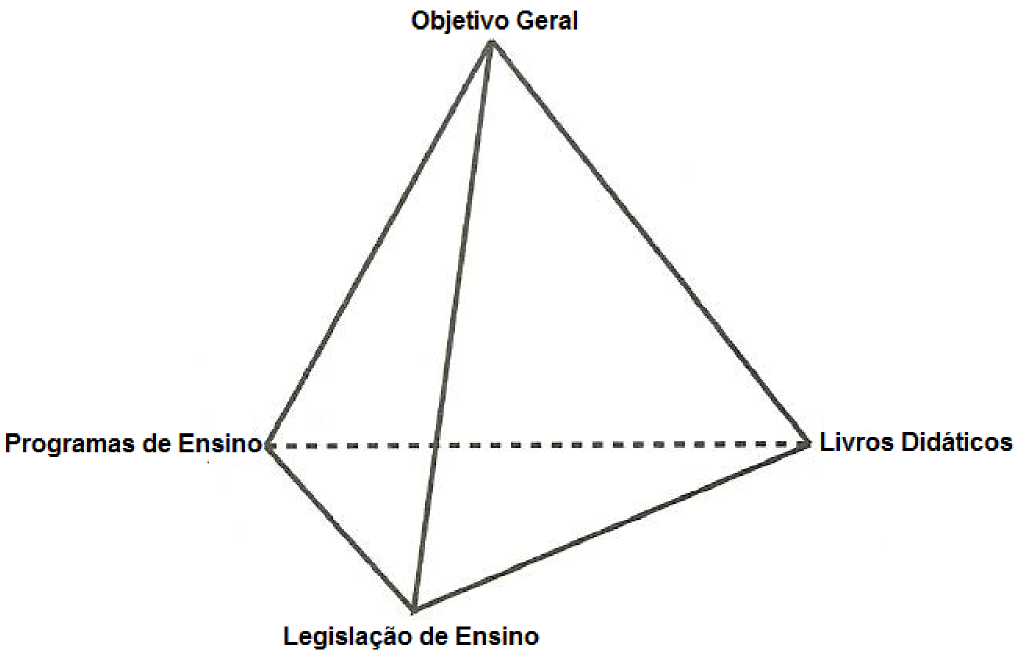
Integral, para relacionar com os conteúdos e conceitos vistos no estudo das Matemáticas do ensino secundário.

1.1.1 Inter-relação entre os objetivos

Por questões de apresentação e explicação, os objetivos apareceram de forma isolada, ou seja, sem uma ligação aparente entre cada um deles. Entretanto, entendemos que para o desenvolvimento e andamento desta pesquisa é de suma importância que saibamos relacioná-los, no sentido de que a pluralidade dos objetivos específicos e dos documentos inseridos no conjunto de cada um desses objetivos possa convergir para a singularidade expressada pelo objetivo geral.

Cientes de uma relação não equidistante entre todos os objetivos, mas na tentativa de uma representação das ideias que cercam nosso entendimento a respeito da relação entre eles, desenvolvemos a seguinte figura geométrica:

Figura 1 - Esboço geométrico da inter-relação dos objetivos



Fonte: Elaborado pelos autores

De acordo com a **Figura 1**, os objetivos específicos formam a base da figura, ao mesmo tempo em que se encontram ligados ao objetivo geral. Outra observação é referente às arestas da figura, que, para nós, indicam a ligação existente entre cada um desses objetivos; é a respeito da forma como “enxergamos” essas ligações que passamos a tratar a partir de agora.

Legislação de ensino e Programas de ensino: esses dois pontos de nossa figura geométrica indicam uma ligação entre a instituição política e a educacional. A primeira institui questões a respeito da organização geral da segunda, ou seja, nas legislações podemos encontrar informações a respeito das questões didáticas que estão ligadas diretamente com a relação professor e aluno, como, por exemplo, as disciplinas de Matemática que deveriam ser oferecidas no curso secundário, o ano (série) escolar que elas deveriam aparecer, os tipos de exames, a quantidade de exames e as funções a que cada um desses exames deveria corresponder. Outros aspectos as legislações estão associados aos órgãos políticos educacionais, como, o conjunto de pessoas responsáveis por avaliar e contratar os professores, a comissão que elabora, aplica e avalia os exames, os responsáveis pelas escolhas dos livros didáticos e da elaboração do programa de ensino.

Partes dessas medidas tornaram-se visíveis por meio dos programas de ensino, pois era neles que apareciam os conteúdos que deveriam ser ensinados em cada uma das disciplinas, a ordem desses conteúdos e as obras didáticas indicadas para auxiliar no ensino desses conteúdos.

Sendo assim, a aresta que liga os dois pontos indicados nessa subseção é formada por um conjunto de informações a respeito das normas instituídas nas reformas de ensino e, de como essas normas foram interpretadas por aqueles que criaram os programas de ensino. Dessa forma, coube a nós investigar sobre como esse processo aconteceu, no período que optamos investigar.

Legislação e Livros didáticos: essa relação marca a etapa em que as normas contidas na legislação foram aprofundadas e transparecidas. Buscamos analisar se a escolha da obra didática estava de acordo com os ideais políticos propostos na legislação, ou seja, se havia correspondência entre os preceitos que valorizavam a matemática e as escolhas das obras didáticas

Dessa maneira, investigamos se o pensamento que moldava a visão educacional do autor da legislação influenciava na escolha da obra didática e, ainda, se as trocas de reformas também acarretavam mudanças nas obras.

Programas de ensino e Obras didáticas: essa é a etapa que se voltou mais para as instituições escolares, quando identificamos quais foram os conteúdos propostos na época e como eles eram apresentados. Buscamos verificar se em algum momento os programas inseriram novos conteúdos próximos do estudo do Cálculo Diferencial Integral ou se alguns conteúdos não foram ensinados. E em meio a tudo isso, buscamos analisar, nos livros didáticos, se os autores corresponderam a essas mudanças, acrescentando ou deixando de abordar conteúdos dos programas de ensino.

Nessa relação não podemos deixar de fazer referência às influências que um ponto tem sobre o outro. Primeiramente tratamos da forma como a lista de conteúdos do programa de ensino teria implicado nos conteúdos apresentados pelo autor em sua obra; contudo, é preciso que observemos a presença de um movimento contrário, no sentido de os conteúdos apresentados no programa de ensino terem sido dados de acordo com o sumário da obra adotada no momento, cabendo, portanto, a nós, investigar os motivos que levaram a essa adoção.

2 REFERENCIAL TEÓRICO METODOLÓGICO

2.1 PEQUENO ESTADO DA ARTE

Esta é a parte do nosso trabalho em que tratamos as questões relacionadas ao levantamento de materiais que contribuíram para a definição do problema levantado e dos objetivos traçados para a pesquisa.

Em nossas conversas primeiras voltamo-nos para dois indícios que serviram para nortear o início de nossa pesquisa. O primeiro dizia respeito ao período histórico que nossa investigação abrangeria, tendo-se em conta que no período final do Império e os primeiros anos da República aconteceram mudanças de caráter social, econômico e político que poderiam ter provocado alterações no quadro educacional brasileiro. Diante disso, optamos por voltar nossos olhos para os anos finais do século XIX e iniciais do século XX. O segundo indício estava mais próximo das questões teóricas, pois, embasados por estudos de Chervel (1990), entendemos que para a nossa investigação era importante atentarmos para as legislações, programas de ensino e materiais didáticos vigentes nesse período. Movidos por essas ideias, partimos para as nossas buscas, pois, guardadas as devidas proporções, tínhamos em mente que “[...] o bom historiador se parece com o ogro da lenda. Onde fareja carne humana, sabe que ali está a sua caça (BLOCH, 2001)”.

Os trabalhos de Polon (2004), Martins (1984) e Mondini (2013), bem como outros trabalhos, convergiram para o período histórico compreendido entre os anos de 1890 e 1930, que correspondeu à fase inicial da República. Essa informação, associada com o primeiro indício e os dados colhidos durante a leitura desses trabalhos foram de grande importância para a definição do período de nossa investigação, os anos de 1889 a 1929.

Polon (2004), ao abordar esse período em sua dissertação, fez referência a cinco reformas nessa época: Benjamin Constant (1890); Epitácio Pessoa (1901); Rivadávia Corrêa (1911); Carlos Maximiliano (1915) e a Rocha Vaz (1925). Entre as reformas ocorridas nos anos de 1890 e 1901 o autor citou a reforma Amaro Cavalcanti, que ele chamou de “sub-reforma” e uma reforma escrita por Augusto Tavares de Lyra, além de algumas mudanças internas que ele apresentou em um quadro síntese das reformas ocorridas, na época, na parte destinada a tratar do Colégio Pedro II.

Cada legislação referida anteriormente foi comentada por Polon (2004), que estabeleceu um panorama geral a respeito das mudanças acarretadas no ensino secundário e os motivos que levaram à necessidade de escrita de um novo decreto.

Martins (1984), cuja dissertação tem como objetivo principal "*estudar a evolução do ensino secundário brasileiro, com ênfase nas disciplinas de Matemática*", abordou as mesmas reformas citadas por Polon (2004). Um fato curioso citado por Martins (1894) foi referente à reforma escrita por Tavares de Lyra. O autor mencionou que "não se tem notícia de sua aprovação pela Câmara. Sabe-se no entanto, que a reforma proposta por Tavares Lyra não foi implantada" (MARTINS, 1984, p. 80). Essa informação foi importante, pois nossa ideia foi "olhar" para cada legislação implantada na época e associar a uma possível ligação com o estudo do Cálculo Diferencial e Integral.

Outro ponto que consideramos importante, na abordagem feita por Martins (1984), é que, quando a autora apresenta as alterações ocorridas no ensino secundário mediante a troca de legislação, faz menção das mudanças acontecidas no quadro das disciplinas escolares, dando ênfase na disciplina de Matemática. Para nós, foi de grande relevância, pois percebemos a aproximação entre as leis da época e a disciplina de Matemática, algo semelhante ao que buscávamos fazer em nossa investigação, apenas com a diferença de que nosso olhar mais pontual era para os conteúdos matemáticos do ensino secundário que poderiam dar base ao estudo do Cálculo Diferencial e Integral.

Com laços mais estreitados com a Matemática e, mais especificamente, com o campo da Álgebra, temos a tese de Mondini (2013) cujo objetivo foi de *compreender a orientação dada ao ensino de Álgebra pela legislação escolar*. Como foi possível observar, a autora relacionou as alterações existentes em cada legislação com as discussões acerca do ensino da Matemática e a valorização da ciência, expandindo também para o ensino de Álgebra. Em certo momento de sua pesquisa a autora comenta que "No 2º grau, o aluno que pretende ingressar em uma das Engenharias tem um estudo complementar de Álgebra. E no Ensino Superior, a Álgebra se encontra nos estudos de Engenharia [...]." (MONDINI, 2013, p. 258).

Esse apontamento contribuiu para nosso estudo, na medida em que suger que na disciplina de Álgebra para o ensino secundário, poderia haver alguns conteúdos que davam base para o estudo de Cálculo Diferencial e Integral nos cursos de engenharia. Vale ressaltar que estamos falando de uma época em que a Matemática não constituía propriamente uma disciplina de ensino, uma vez que era constituída de suas composições nas disciplinas de Álgebra, Aritmética, Geometria e Trigonometria.

Após a leitura desses trabalhos e de alguns outros, observamos que em todos eles, em maior ou menor expressividade, circularam informações a respeito da função propedêutica que marcou o ensino secundário nessa época, ou seja, mesmo com as mudanças de legislação o ensino secundário permaneceu com a função de preparar seus alunos para o ensino superior. Essa verificação teve relevância para o nosso trabalho, porque estamos falando de uma época em que os cursos superiores mais visados eram os de medicina, direito e engenharia, sendo esse último o que estabelecia maior ligação com a Matemática e, portanto, associar o estudo de conteúdos matemáticos vistos no ensino secundário com o estudo do Cálculo Diferencial e Integral dado no ensino superior não parece ser algo descabido.

Nesse momento já estávamos cientes da importância de uma análise acerca dessas legislações para a composição de nosso trabalho, mas ao lermos, principalmente, os capítulos VII e VIII do livro intitulado “A educação secundária (Perspectiva histórica e teórica)”, de autoria de Geraldo Bastos Silva, entendemos que as discussões ocorridas nas reformas Benjamin Constant (1890), Amaro Cavalcanti (1898), Rivadávia Correa (1911) e Carlos Maximiliano (1915) eram passíveis de uma visão mais detalhada. Isso porque nas duas primeiras reformas o autor destacou a tentativa desses autores em estabelecer um projeto para organizar o sistema educacional brasileiro, principalmente no setor secundário e superior, apontando as estratégias utilizadas por esses legisladores, como um ensino de caráter enciclopedista que já era dado anteriormente por meio de uma visão clássica humanista, mas que foi acrescido pela valorização da ciência; uma busca pela uniformização do ensino secundário por meio da fiscalização de órgãos federais e os formatos dos exames, principalmente o de madureza, que possibilitava o ingresso ao estudo superior.

Todas essas estratégias traçadas pelos legisladores geraram uma série de discussões e uma busca por mudanças, sendo que tais mudanças só vieram a ocorrer, de forma geral, com a reforma Rivadávia Correa (1911). Por meio dessa reforma, o autor buscou descentralizar a educação secundária do governo federal, dando, às instituições, autonomia didática e apresentou um formato próximo ao do vestibular, para avaliar a entrada dos alunos no curso superior.

Novamente foram apontados problemas advindos das mudanças ocasionadas por essa reforma; para substituí-la surgiu a legislação de Carlos Maximiliano que, em lugar de apresentar algo novo, buscou reunir os pontos positivos das reformas anteriores, o que gerou um período de estabilidade em relação às mudanças no ensino secundário.

Relativamente aos programas de ensino, que formam outro ponto de grande importância para o nosso trabalho, procuramos algumas obras que abordassem essa temática dentro da Matemática. Durante o período de levantamento e obtenção de dados, tomamos conhecimento da dissertação intitulada "Os programas de ensino de matemática do Colégio Pedro II: 1837-1932", escrita por Josilene Beltrame, mas infelizmente não fomos bem sucedidos na obtenção desse material.

Porém, algumas outras fontes trouxeram informações importantes a respeito dos programas dessa época, como, por exemplo, o trabalho de Moreira (2008), que, conforme referido anteriormente, informou sobre alguns programas existentes na época investigada. Outro trabalho que fez abordagens a respeito dos programas de ensino foi o de Gussi (2011), que aponta algumas alterações realizadas nos programas de Matemática, após a implantação de novas reformas da época.

Outro trabalho de grande relevância em relação aos programas de ensino, foi o livro organizado por Vechia e Lorenz (1998). Nele foi localizada grande parte dos programas implantados no Ginásio Nacional ou Colégio Pedro II, durante os anos de 1889 a 1929. Esses programas foram elaborados de acordo com as reformas implantadas. Vechia e Lorenz (1998) apontam que, nos anos de 1899 e 1901, foram propostos programas para o Colégio Pedro II, que, entretanto, não foram encontrados.

O fato de Vechia e Lorenz (1998) tratarem dos programas de ensino em consonância com as reformas instituídas é algo interessante para o nosso trabalho, pois nos possibilita trabalhar algumas semelhanças e diferenças observadas na mudança dos programas frente à alteração da legislação educacional. Outro fato importante é que durante a apresentação do programa, além dos conteúdos que deveriam ser ensinados na época, constam os livros didáticos que deveriam ser seguidos durante o ano letivo. Isso nos possibilitou identificar a obra utilizada e, assim, procurar obtê-la, na intenção de encontrar conteúdos que pudessem estar associados ao estudo do Cálculo Diferencial e Integral no nível superior.

Sentimos necessidade de ter conhecimento a respeito da maneira como o curso de Cálculo Diferencial e Integral era oferecido nas escolas de engenharia daquela época. Para obtermos esse dado, primeiramente realizamos a leitura de parte da tese de Lima (2012), por meio da qual obtivemos algumas informações a respeito do curso de Cálculo Diferencial e Integral oferecidos pelas escolas politécnicas do Rio de Janeiro e de São Paulo.

No trabalho de Lima (2012) encontramos alguns apontamentos a respeito das características do ensino do Cálculo Diferencial e Integral durante o período que investigamos, além do fato de que a politécnica de São Paulo utilizava a obra Premiers Élements du Calcul Infinitesimal de Hyppolite Sonnet, durante os anos de 1893 até 1934, o que corresponde a boa parte do período referente ao nosso estudo.

As informações a respeito da politécnica de São Paulo, coletadas em Lima (2012), foram confirmadas e ampliadas por meio da leitura da dissertação de Oliveira (2004), que tem por objetivo "*analisar o desenvolvimento do ensino do Cálculo Diferencial e Integral na Escola Politécnica de São Paulo, no final do século XIX até o início do século XX".* Nesse último trabalho pudemos nos inteirar um pouco mais a respeito de questões históricas dessa instituição, do Curso de Cálculo Diferencial e Integral oferecido pela mesma e sobre o livro de Cálculo escrito por Sonnet, tendo em vista que no apêndice A desse trabalho encontra-se uma análise dessa obra. Ressaltamos a importância de obtermos informações a respeito de uma obra utilizada no curso de Cálculo no ensino superior, uma vez que proporcionou uma ideia a respeito de alguns conceitos importantes para a fase inicial desse curso e, dessa forma, pesquisar sobre conteúdos do ensino secundário que possam abordar tais conceitos.

Esse breve estado da arte revela uma síntese do movimento de busca referente às legislações, aos programas de ensino e conteúdos de ensino, material que correspondente aos instrumentos de coleta dos dados desta pesquisa. Em suma, buscamos delinear os caminhos para a obtenção de nossos objetivos e o problema de pesquisa.

Apesar de não ter sido dado, até aqui o merecido destaque, ressalto a importância dos debates com o professor Dr. Luiz Carlos Pais, com a professora

Dra. Edilene Simões Costa e também com todos os integrantes do Grupo GEPHEME para a construção deste trabalho.

2.2 APONTAMENTOS A RESPEITO DA ESCOLA DOS ANNALES

No GEPHEME, grande parte das nossas leituras e debates contemplam estudos de autores associados a um grupo que veio a ser conhecido pela nome Escola dos *Annales*, já que acreditamos ser relevante destacar as grandes linhas do novo pensamento historiográfico do século XX, procurando entender a diferença construída na atividade histórica em relação ao passado, bem como, de modo paralelo e simultâneo, interrogar nossa própria consciência a respeito das possíveis implicações, oriundas do referido movimento, para a escrita da história da educação matemática escolar.

Em outras palavras, além de estudar as diferenciadas propostas protagonizadas pelo referido movimento histórico do século XX, estamos também empenhados em projetar, na medida do possível, as grandes linhas de pensamento no campo da educação matemática. Assim, somos levados a fazer apontamentos a respeito desse grande movimento, que, segundo nosso entendimento, ultrapassou o próprio campo historiográfico, buscando retratar algumas características importantes de cada geração.

Em um período precedente ao da Escola dos Annales, a historiografia dominante era voltada basicamente para narrativas com temas geralmente ligados aos grandes conflitos bélicos, aos reinados, aspectos políticos, que retratavam, quase sempre, "temas oficiais" que, de acordo com a nossa compreensão, estavam mais voltados para o poder centralizado pelas grandes instituições sociais, estabelecidos na esteira de longa duração. De certo modo, menosprezavam temas ou questões mais voltadas para as classes sociais populares ou aos assuntos mais específicos.

Antes da criação do referido movimento, os enredos e temas históricos eram centrados em poucos personagens e com certas parcialidades acerca dos mesmos. Apesar de dominante, esse não era um formato exclusivo, pois existiam outros historiadores que acreditavam em uma maneira diferente de se abordar a história e, diante disso, levantaram críticas ao formato predominante. Com o passar do tempo, essas críticas se intensificaram; entre os personagens nelas envolvidos e influenciados por uma nova maneira de se fazer história, estavam Marc Bloch e Lucien Febvre, os criadores dos Annales e, consequentemente, personagens principais da primeira geração desse movimento.

O ponto inicial que marca o encontro entre Marc Bloch e Lucien Febvre é Estrasburgo. Foi lá que os dois se encontraram para ministrar aulas na universidade e se tornaram amigos. A respeito do ambiente encontrado por eles temos a seguinte informação:

> Nos anos que se seguiram à Primeira Guerra Mundial, Estrasburgo era efetivamente uma nova universidade, pois a cidade vinha de ser recentemente desanexada da Alemanha, criando um ambiente favorável à inovação intelectual e facilitando o intercâmbio de idéias através das fronteiras disciplinares. (BURKE, 1991, p. 19).

É nesse clima que, como podemos ver, era propício a inovações, que Mac Bloch concretiza a vontade de Febvre e cria uma revista para difundir suas ideias acerca de uma nova abordagem da história.

Com a criação da revista, os historiadores tinham como uma de suas metas “quebrar a barreira” existente entre eles e profissionais de outras áreas; por isso, a equipe contava, além de historiadores, com as contribuições de um geógrafo, um economista e um cientista político. Vale ressaltar que apesar da importância da revista não podemos nos limitar somente a ela para entender a grandiosidade desse grupo, pois apesar das convergências de opiniões existentes entre os dois principais personagens da criação dos Annales, seus trabalhos individuais possuem especificidades importantes e é por meio delas que podemos entender melhor quais são as inovações propostas pelos Annales nessa primeira geração.

A respeito de Marc Bloch temos, como uma de suas inovações, a questão do tempo escolhido para analisar o problema histórico. Ele, diferente de outros historiadores, buscou tratar do assunto não somente no período em que o problema histórico foi constatado, estendeu sua pesquisa a séculos seguintes para mostrar que o problema perdurou em épocas diferentes. Outra contribuição associada a ele é a de não se limitar a simplesmente contar determinado acontecimento e, sim, buscar entender os motivos que levaram a sociedade a ter tais atitudes, algo próximo ao que veio a ser mais explorados por historiadores da terceira geração do Annales e que ficou conhecido como “história das mentalidades”. Ainda sobre Bloch, sabe-se que ele fez uso da “história comparativa”, ou seja, buscou identificar acontecimentos semelhantes em regiões distintas, apontando as semelhanças e diferenças existentes entre tais acontecimentos.

Foi inovador, também, com relação às fontes usadas para pesquisa, pois utilizou documentos não tradicionais, como, por exemplo, mapa cartográfico. A respeito do “método regressivo” Burke (1991, p. 25) diz o seguinte: “Bloch não criou o novo método. Sua tarefa foi empregá-lo de uma maneira mais consciente e sistemática do que os seus predecessores”. Basicamente esse método consistia em iniciar a história do período mais recente para o mais distante, o que se justifica pelo fato de termos maior entendimento sobre fatos mais próximos do presente do que os ligados ao passado.

Com relação às inovações de Febvre, o que sabemos é que em certo momento suas ideias e as de Bloch pareceram convergir para um mesmo ponto, tendo em vista que Febvre passou a tratar do estudo de atitudes coletivas. Ele buscou estabelecer relações entre o indivíduo e o grupo, escrevendo um trabalho tão importante quanto o de Bloch a respeito da história das mentalidades coletivas. Com apreço pela linguística, utilizou a palavra, ou melhor, a falta dela em certo período histórico para justificar um dos problemas que resolveu abordar. Isso mostra uma característica já citada anteriormente, que é o fato de serem utilizados materiais não convencionais para a historiografia da época.

Outros três pontos a respeito das inovações associadas à Febvre merecem destaque. O primeiro diz respeito à importância da sociedade e não mais do indivíduo, com a ideia de que “o indivíduo, por mais singular e criativo que seja em comparação a outros homens de sua época, dissolve-se no coletivo" (BARROS, 2010, p. 9). O segundo é relativo à importância da geografia do lugar a ser estudado e, por último, o que se refere à importância de se buscar analisar o problema no tempo em que ele mesmo se deu, para não incorrer em um anacronismo[8].

Com o tempo, esse formato de abordagem histórica passou a ser reconhecido e, como reflexo disso, os fundadores dos Annales receberam propostas de emprego e passaram a trabalhar em lugares distintos. Outro reflexo desse reconhecimento foi a chegada de novos discípulos para o grupo, entre eles Fernando Braudel.

Com o início da Segunda Guerra Mundial, o desenvolvimento dos Annales passou por uma desaceleração; fora as causas naturais decorrentes de uma guerra,

[8] Atitude ou fato que não está de acordo com a sua época.

tornou-se crucial para o andamento dos Annales o fato de Bloch ter-se alistado e, algum tempo depois, ter sido capturado e morto pelos alemães.

Diferente de seu amigo, Febvre não vai à guerra e opta por dar continuidade em seus estudos, cujo foco era o “problema”. Dessa forma, ele toma como norte para seus trabalhos um problema que vai sendo aprimorado com o andamento da escrita e, diante dele, escreve a história do fato.

Semelhante ao momento vivido em Estrasburgo, que veio a ser importante para o nascimento da revista dos Annales, o período pós-guerra tem sua importância para impulsionar e dar ainda mais visibilidade ao movimento, isso porque com o fim da guerra os franceses buscaram reestruturar seu sistema educacional superior e, para contribuir nessa tarefa, Febvre foi convidado.

A partir desse momento, ele criou uma organização e convidou seus pares para auxiliar nos trabalhos, entre eles estava Braudel, que foi também convidado a trabalhar na revista dos Annales. Com isso, o movimento se consolidou, e mais do que isso, eram eles, então, que “ditavam as regras” acerca da historiografia francesa.

O encontro entre Febvre e Braudel aconteceu quando este volta do Brasil, após ter trabalhado como professor na Universidade de São Paulo. Em meio às suas conversas com Lucien Febvre, Braudel opta por dar um novo rumo à sua tese, cujo plano principal de pesquisa era o Mediterrâneo e não mais o rei Felipe II. Vale ressaltar que essa era uma característica dos Annales, valorizar o contexto geográfico em que o problema se inseria, a forma como as questões geográficas de determinada região acabam implicando em decisões e, até mesmo, na cultura do povo que ali habita; também era contada a história daquela sociedade e não somente a de um indivíduo, como era feito anteriormente.

A partir dessa nova direção Braudel escreve um importante trabalho que foi dividido em três partes, três histórias que serão tratadas, aqui, de forma superficial.

Basicamente temos que na primeira história predomina o fenômeno de longa duração. Essa terminologia adotada por Braudel, de maneira geral indica um estudo realizado no decorrer de um ou mais séculos. O tempo considerado por Braudel não foi somente o cronológico, mas também o tempo que a natureza leva para realizar mudanças significativas no solo, o tempo em relação às mudanças de caráter social, cultural e também o tempo do indivíduo em meio a tudo isso, impulsionado pelo fato de que, segundo Braudel (1969, p.26, apud, BURKE, 1991, p.38), “[...] todas as ‘estruturas’ estão sujeitas a mudanças, mesmo que lentas”.

A segunda história trata das instituições, das estruturas e das conjunturas associadas, passando a ser preponderante a presença do homem e suas atitudes, tendo em vista que ele mesmo cria e modifica, com o tempo, as estruturas, que são mensuradas por meio de datas e possuem normas precisas.

A terceira história é a dos eventos, dos acontecimentos, das datas. Essa última parte é a mais superficial da história, a “ponta do iceberg”, pois abaixo delas existem situações que a sustentam, porém não são vistas. É importante destacar que essa terceira história nada tem que ver com a narrativa predominante antes dos Annales; o que é feito no trabalho de Braudel “[..] é situar indivíduos e eventos num contexto, em seu meio, mas ele os torna inteligíveis ao preço de revelar sua fundamental desimportância” (BURKE, 1991, p. 33).

Braudel mostrou, também, sua preocupação com a visão global dos fatos, não ficou “preso” a uma única região e nem a um único fator para apresentar suas justificativas diante do problema escolhido. Buscou entender o todo, acreditava ser importante entender as aproximações existentes entre os fatos ocorridos na região em que estava situado o problema com outras regiões distantes e, diante disso, tirar conclusões importantes a respeito de determinados acontecimentos.

Uma das características que difere a primeira da segunda geração está no fato de o personagem principal dessa segunda geração não dar tanto valor à história das mentalidades. Sua preocupação ficou mais acentuada na cultura da população no sentido material, ou seja, objetos que as pessoas passaram a utilizar no seu dia a dia para resolver determinados problemas como, por exemplo, a utilização da cadeira para se sentar.

Esses três pontos foram marcantes para uma nova fase dos Annales, que ficou conhecida como a segunda geração, porque após a morte de Febvre, Braudel foi quem assumiu, no decorrer do tempo, a posição de nome mais forte dos Annales. A partir dessa nova direção, novos historiadores passaram a ser inseridos no movimento.

O prestígio conquistado pelos Annales somou-se ao poder político de Braudel, e isso fez com que o movimento ganhasse ainda mais força, por exemplo com o fato de Braudel dar preferência na distribuição de bolsas para pesquisadores de outros países que tivessem interesse em pesquisar na linha de propostas dos

Annales. Isso, de certa forma, contribuiu para que o modelo proposto por eles pudesse ultrapassar as fronteiras francesas. É importante deixar claro que a difusão das ideias dos Annales para outras regiões não se deu apenas por questões políticas ou financeiras, mas, principalmente, pelos excelentes trabalhos realizados.

Apesar da grande importância de Braudel na segunda geração, existiram outras abordagens históricas que também foram marcantes. Uma delas é a que ficou conhecida como “história quantitativa”. Essa história iniciou, nos Annales, por meio da economia; tempos depois também veio a ser associada à demografia e à história social. Os resultados que anteriormente eram dados por meio de análises entre regiões, passaram a ser reforçados por elementos quantitativos.

Por meio dessa nova forma de pesquisar dados históricos, aconteceu um crescimento da “história regional”, ou seja, historiadores passaram a realizar estudos a respeito de comunidades pertencentes à zona rural e urbana. Esses estudos eram fortalecidos por dados que convergiram para uma mesma ideia. Basicamente esses resultados levavam a conclusões acerca de situações que permaneceram em uma sociedade por longa dada e outras que não tiveram a mesma durabilidade (estruturas e conjunturas). Dessa forma, se anteriormente a tendência era de um estudo global, naquele momento, com a história quantitativa associada à história social passou-se a examinar o todo, mas pelos subconjuntos que o formam; por exemplo, para se estudar um país estudavam-se suas cidades, examinando alguns dados adquiridos.

Com a aposentadoria de Braudel e com a presença de jovens historiadores na administração dos Annales, o movimento entrou no que podemos chamar de terceira geração. Diferente das duas anteriores, nessa geração ficou difícil identificar um personagem que fosse o principal, até porque o grupo estava tomando proporções cada vez maiores; além disso, com essa expansão do grupo, os historiadores dessa geração dividiram-se em subgrupos com algumas características diferentes, porém todas ligadas à ideia dos Annales. Um fato marcante para essa terceira geração é a incorporação de mulheres, ao movimento, em mais do que isso a mulher passou a ter um papel de maior expressão dentro da história.

A respeito de novidades na forma de se escrever a história, isso também foi alterado. Nesse momento, as novas ideias não surgiram de forma hegemônica, na França. Outros países passaram a apresentar inovações, no campo da historiografia, que foram adotadas pelos novos historiadores dos Annales.

Um campo da história de grande destaque, na terceira geração, referia-se à história das mentalidades, ainda que alguns traços dessa história já fossem observados na segunda geração, com temas ligados à natureza humana, como a vida, a morte, a família, a sexualidade, amor e a infância, sendo essa última inserida no mapa histórico na segunda geração. Vale ressaltar que a história das mentalidades aparece nos Annales desde a primeira geração, mas parece ter sido menos valorizada na segunda por fugir dos interesses de Braudel e de outros historiadores da mesma época, e, também, por não estabelecer uma boa relação com a história quantitativa. Entre os historiadores da terceira geração que tiveram importância estava o medievalista Le Goff.

Outra história que marca a terceira geração é a história serial ou quantitativa, que teve origem em estudos de documentos da igreja e, por meio deles, auxiliava na história de fatos associados à religiosidade. Foram esses estudos realizados por historiadores contemporâneos de Bloch que inspiraram autores da terceira geração dos Annales. O método quantitativo e a religiosidade ainda mantiveram seus laços nessa geração e proporcionaram trabalhos importantes a respeito do pensamento de uma época e o cristianismo; dignos de nota foram os elementos estatísticos que contribuíram para a escrita dessa história, como, por exemplo, gráficos, tabelas e mapas. Porém, esse método não ficou restrito somente ao tema religioso, ele também foi útil para abordar fatos associados à alfabetização e ao livro.

Foi por meio de análise de documentos com abordagem quantitativa que historiadores da terceira geração comparam regiões francesas, chegando a conclusões sobre quais eram mais ou menos alfabetizadas. Um fato curioso acerca das pesquisas sobre a alfabetização é que no material usados para a análise estavam assinaturas de registro de casamento e até mesmo inscrições de soldados do exército.

Quanto aos estudos da história do livro, os historiadores dessa geração buscavam identificar os gêneros mais lidos em determinadas épocas, se havia mudança de gênero literário de acordo com a classe social e as mudanças que aconteciam, com o passar dos anos, acerca dos temas.

No decorrer do tempo, historiadores começaram a desconfiar do método quantitativo, acreditando que as conclusões extraídas por meio das análises dos documentos poderiam ser imprecisas. Com as críticas, que se tornaram a cada dia mais fortes, outras linhas passaram a ser apresentadas, entre elas a que Burke

(1991) chama de “viragem antropológica”, descrita, por ele, da seguinte forma: “a viragem antropológica pode ser descrita, com mais exatidão, como uma mudança em direção à antropologia cultural ou ‘simbólica’” (BURKE, 1991, p. 66). Um fator inovador, dessa geração, em relação à antropologia, é o fato de que alguns dos historiadores acreditavam em uma associação da história com uma nova área, a antropologia, que se misturaram formando um único campo de pesquisa.

Entre os contribuintes da terceira geração para uma história mais antropológica estão Jacques Le Goff, Roger Chartier e Michel de Certeau, sendo que este último teve como destaque, em seus estudos, a política da linguagem, a vida cotidiana francesa da época e ensaios sobre a escrita da história.

A importância de Chartier para essa geração está ligada, entre outros fatores, à inovação trazida por ele, como podemos observar na citação abaixo:

> A importância dos ensaios de Chartier está em que exemplificam e discutem uma mudança na abordagem, como ele diz, “da história social da cultura para a história cultural da sociedade”. Isto é, os ensaios sugerem que o que os historiadores anteriores, pertencentes ou não à tradição dos *Annales*, geralmente aceitavam como estruturas objetivas, devem ser vistas como culturalmente “constituídas” ou “construídas”. A sociedade em si mesma é uma representação coletiva (BURKE, 1991, p. 69).

Chartier acreditava, basicamente, que a sociedade era responsável por construir sua cultura, ao contrário do que se pensava, anteriormente, que a sociedade moldava-se em meio a uma determinada cultura. Corroborando essa ideia, ele aborda o fato de que a população faz as suas interpretações diante daquilo que está escrito em busca de criar soluções para seus problemas, ou seja, o ser humano utiliza-se de ideias contidas em textos para ter auxílio em situações do dia a dia.

Antes dos Annales, a política tinha seu lugar de destaque na história. Com a chegada e crescimento da nova historiografia francesa, esse campo não se extinguiu, mas perdeu o seu espaço durante a primeira e segunda geração, voltando a figurar no cenário historiográfico na terceira geração.

O interesse dos historiadores pela micro história contribuiu para o retorno da história política. Foi por meio também da micro história que nasceu a biografia histórica e também o interesse pela narrativa dos eventos. O fator inovador, neste último, foi em relação à ideia de que eventos também poderiam ter a potencialidade de modificar as estruturas, e não somente refleti-las, acreditando que após o acontecimento de alguns eventos passou-se a encarar determinadas questões de maneira diferente, como se aqueles eventos fossem pontos de inflexão diante de alguns assuntos históricos.

Após essa breve discussão de cunho relativamente metodológico, e também histórico, a respeito dos Annales, podemos concluir dizendo que, se a primeira geração foi importante para difundir a ideia de uma nova historiografia, dando início a um domínio dessa nova ideia na França, a segunda geração continuou a expansão dos Annales por meio de cargos importantes que auxiliaram para que a "história nova" pudesse ocupar espaço fora da França, e a terceira populariza de vez esse movimento, por meio de obras que tornaram-se *best-seller* e também por aparições em meios de comunicações como a TV e as rádios.

Nesse sentido que acabamos de destacar, é oportuno lembrar que o historiador francês André Chervel, pioneiro na proposição de um novo campo historiográfico voltado para as culturas e disciplinas escolares, dedicou décadas de sua trajetória acadêmica ao desafio de entender um problema específico e referente à educação escolar, centralizado em pontuar, mais refinadamente, as matérias e conteúdos ensinados nas instituições escolares. A possibilidade de atribuir estatuto histórico a essa temática por meio da valorização deste aspecto das culturas escolares resultou do movimento liderado por Marc Bloch e Lucien Febvre, iniciado na década de 1930. Assim, a intenção desta dissertação é enveredar por um problema bem específico, que consiste em entender e explicar a história de conteúdos associados ao estudo do cálculo diferencial, no contexto do ensino secundário brasileiro, delimitando-o ao período aproximado de 1889 a 1929.

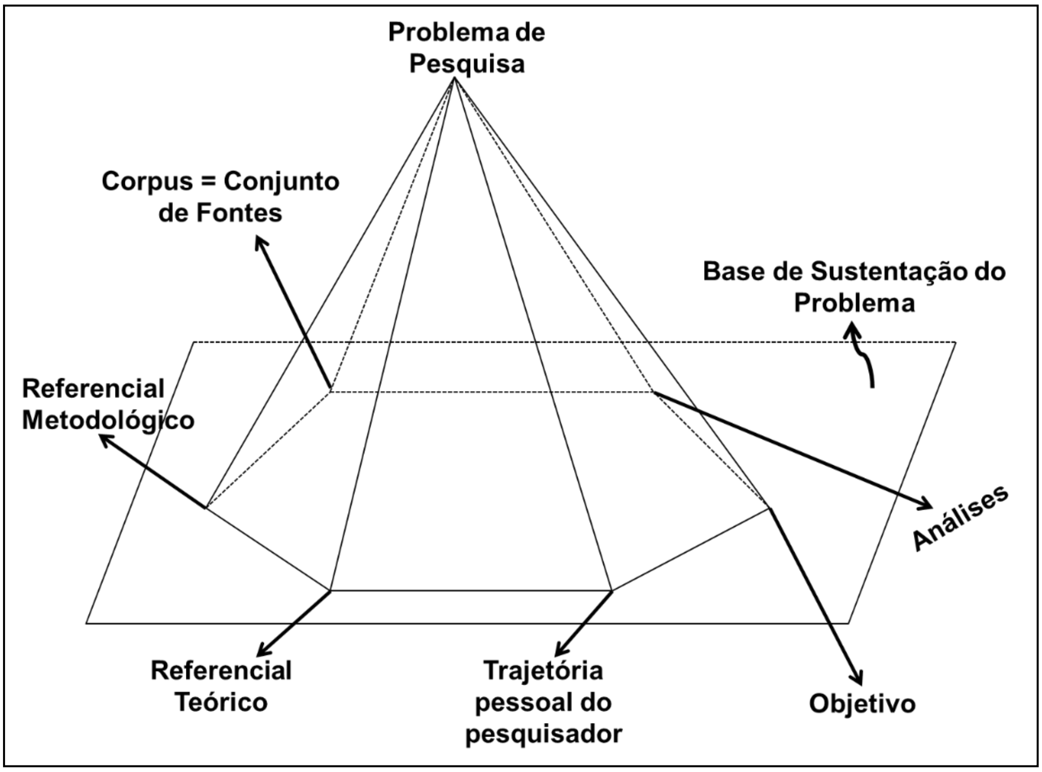
Estamos cientes da existência de algumas polêmicas que cercam o grupo dos Annales, principalmente aquelas que envolvem a ruptura ou não do movimento após a segunda geração; contudo, para este trabalho essas discussões não são de grande importância.

O que buscamos fazer é, primeiramente, entender como se deu o processo de criação do movimento e, principalmente, os métodos usados pelos historiadores no que veio a ser uma nova forma de se escrever a história, para, em seguida, utilizar esses elementos de maneira adaptada, na busca de compor uma escrita da história da matemática escolar.

2.3 ORGANIZAÇÃO DA PESQUISA POR MEIO DOS ELEMENTOS QUE COMPÕEM O ESQUEMA HEPTAGONAL

No contexto do grupo de pesquisa no qual estamos inseridos (GEPHEME), uma das temáticas recorrentes tem sido as questões sobre a estruturação de um trabalho de pesquisa, por meio de uma figura denominada por Pais (2016) como “Esquema Heptagonal”. Vejamos um esboço dessa figura.

Figura 2 - Modelo Heptagonal



Fonte: Pais (2016, p.28)

A impressão errônea que muitas vezes temos ao ver a figura é de que ela indica os caminhos ou os elementos exclusivos que devem ser percorridos para a elaboração de uma pesquisa no campo da Educação Matemática. Vale ressaltar que essa não foi a nossa intenção.

De acordo com Pais (2016, p.16), trata-se de uma proposta de “[...] análise de alguns elementos que acreditamos ser importantes na concepção e condução da pesquisa em Educação Matemática”. Com isso, é possível que no decorrer das discussões envolvendo a apresentação dessa figura surjam alguns outros elementos que possam compor sua base.

Outro ponto que destacamos, diz respeito ao comprimento das arestas, que, na figura, aparentam ser congruentes, induzindo o leitor a pensar que as ligações são uniformes e têm a mesma importância dentro de uma pesquisa na Educação Matemática, o que não é o caso. A figura é usada para representar todos os casos em que esses elementos auxiliam na organização da investigação, ou seja, ao apresentarmos essa figura estamos imaginando outros tantos casos possíveis. Entre eles, alguns em que as bases possam não ser regulares, pois o tratamento dado entre dois pontos ou dois elementos da figura pode demandar maior atenção em certo caso e menor atenção em outros, sendo isso influenciado pelos interesses dos autores diante da sua pesquisa.

Uma última observação a respeito das ligações entre os elementos, é que, além daquelas dadas entre os vértices da base e também entre cada um desses vértices e o vértice da pirâmide (Problema de Pesquisa), enxergamos a possibilidade de traçar as diagonais entre os elementos da base, ou seja, as ligações existentes entre elementos que não estão dispostos em sequência, e também as triangulações entre os elementos da base e o vértice da figura. Tudo isso, como uma forma de representar a possibilidade de interação entre pontos não subsequentes.

Novamente é importante alertar que o fato de expormos essas possibilidades não quer dizer que as mesmas devam acontecer em todas as pesquisas ou que, em particular, isso irá ocorrer nesta pesquisa. Entretanto, trata-se de apontar algumas possibilidades de exploração do modelo, destacando as potencialidades do mesmo para a organização de uma investigação na Educação Matemática.

Após elucidar de maneira sintética algumas ideias que estão por trás da figura que nos auxiliou a organizar a pesquisa, iremos comentar a respeito dos seus elementos, ou melhor, como estamos entendendo cada um desses elementos dentro da pesquisa em Educação Matemática.

Em princípio, gostaríamos de destacar a importância do *Problema de Pesquisa*, pois na figura é ele quem representa o vértice que dá origem à reunião de semirretas que passam pela região hexagonal. O fato de valorizarmos o problema em uma pesquisa tem inspiração no que foi iniciado na primeira geração dos Annales, com Febvre. A ideia é de que para escrevermos uma história é importante termos como ponto de partida um problema. Mas em nosso caso não podemos dizer que nossas influências estão restritas somente ao movimento Historiográfico

Francês, pois dentro da ciência na qual está inserida nossa pesquisa, que é a Matemática, o problema é um elemento de grande valor, que auxilia a mover ideias e desenvolver conhecimentos dentro dessa ciência.

Dessa forma, estamos respaldados por pelo menos dois grandes campos da pesquisa, que é o da Matemática e o da Nova Historiografia Francesa, no sentido de que ambos valorizam a importância de uma inquietação que propicia a busca de uma resposta, originando uma pesquisa.

Dentro do campo da Educação Matemática entendemos que o Problema de Pesquisa é a "válvula propulsora" da mesma. Seu surgimento se dá no momento em que o pesquisador se sente inquieto e passa a querer obter respostas para suas perguntas. Raramente esse problema surge de pronto. Geralmente o que se tem são apenas indícios do problema, que, aos poucos e mediante pesquisas, vão lhe dando forma, oferecendo algumas delimitações e possibilitando que ele venha a ser investigado.

Usando como exemplo a pesquisa aqui desenvolvida, temos que o nosso problema nasceu durante a atividade docente com a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, no ensino superior, tendo em vista as dificuldades dos alunos com os conceitos iniciais ou conteúdos que acreditávamos ter sido dado durante o ensino médio. Essa inquietação passou por uma primeira delimitação, que foi o fato de assumir um viés histórico. Em seguida procuramos as fontes, tanto no que dizia respeito a textos escritos sobre o assunto, o que entendemos ser "um pequeno estado da arte", quanto a obras que poderiam ser utilizadas durante o processo de análise.

Esse último movimento, que está relacionado à busca das fontes, foi de grande relevância para a definição do período, um dos pontos importantes para a pesquisa - definir sobre qual período seria feita a investigação e qual a importância do seu problema naquele período. No nosso caso, optamos pelo período entre os anos de 1889 a 1929, pelos motivos já explicitados anteriormente.

Contextualizamos, agor, os elementos que formam a base de sustentação, na figura, o que não é por acaso, pois é nessa base que iremos, nos "apoiar" para definir e investigar o Problema de Pesquisa. O primeiro deles é a *Trajetória Pessoal do Pesquisador* (um dos vértices da base). Acreditamos que a pesquisa não está desvinculada do pesquisador, não só porque é ele quem a escreve, mas também porque o que ele escreve tem influência de vivências anteriores ao seu contato com o ambiente de pesquisa ou de espaços onde ela foi desenvolvida, como, por exemplo, o Programa de Pós-graduação. Por isso, acreditamos ser importante valorizar a caminhada até o momento da pesquisa ou o que entendemos como "*Trajetória Pessoal do Pesquisador*", como uma forma de entender a escolha do Problema de Pesquisa e a maneira como o mesmo será visto durante a investigação.

É um momento de transição em que os questionamentos do autor deixam de ser pessoal e passam a buscar subsídios no campo científico, tornando-se pesquisa.

Não se trata de uma seção autobiográfica, pois não é uma narrativa sobre a vida do pesquisador. É preciso entender que esta é uma parte do trabalho de pesquisa e, por isso, os assuntos abordados devem privilegiá-la; é importante que sejam estabelecidas relações entre os momentos que propiciaram a chegada até a pesquisa, passando pelas decisões primeiras e pelas escolhas importantes, como a dos objetivos a serem alcançados.

No caso desta pesquisa, como já referido, houve uma forte ligação com a docência, por isso foram retratadas as primeiras lembranças e influências relacionadas ao exercício do magistério. De igual modo foram incluídas as experiências positivas e negativas que, de certa forma, culminaram em escolhas relacionadas à pesquisa, como a aproximação com a Educação Matemática, o interesse pelo viés histórico e por questões associadas ao estudo do Cálculo Diferencial e Integral no ensino secundário.

Passaremos a comentar sobre um segundo elemento pertencente à base da figura, intitulado "Conjunto de Fontes". Basicamente, esse elemento indica os materiais escolhidos para serem investigados em uma pesquisa. Essa escolha não ser feita aleatoriamente, já que esses materiais precisam ser dotados de grande potencialidade em relação ao problema escolhido, porque é sobre eles que serão dedicadas horas de estudos na busca de possíveis "respostas" para o conjunto de questionamentos contido no problema de pesquisa.

Para a nossa investigação, podemos associar esse conjunto de fontes ao conceito de *documentos,* sugerida por Le Goff (1990). Tal autor não trata desse conceito de maneira isolada, o mesmo vem acompanhado pelo conceito de *monumento*, e é a respeito desses que teceremos um breve comentário, na busca de apresentar o motivo pelo qual chamamos nossas fontes de *documentos*.

Esses conceitos foram construídos historicamente, ou seja, com o passar do tempo eles foram ampliados de acordo com as necessidades existentes na época.

De acordo com Le Goff (1990, p. 537) “o monumento tem como características o ligar-se ao poder de perpetuação, voluntária ou involuntária, das sociedades históricas (é um legado à memória coletiva) e o reenviar a testemunhos que só numa parcela mínima são testemunhos escritos”. Nesse sentido, entendemos que *monumento* é tudo quanto o passado deixou para a posteridade, tudo aquilo que uma geração deixa de herança para a outra.

Quanto ao segundo conceito, entendemos que todo *documento* é, também, um *monumento;* servindo-nos dessa e, também, de um pouco da teoria Matemática dos conjuntos, podemos fazer a seguinte associação: o conjunto *documento* encontra-se contido no conjunto *monumento*.

Uma das diferenças entre *monumento* e *documento* é que o segundo é escolhido pela sociedade. Mas essa escolha não acontece por acaso; as pessoas que fazem essa seleção o fazem com um propósito, uma intencionalidade, que é a de provar ou ensinar alguma coisa. No entanto, não é por isso que o documento deve ser considerado como verdade absoluta, pois no intervalo entre a escolha e a apresentação do mesmo, pode haver manipulações e daí vem a importância de que os fatos sejam interrogados.

Com base nessa exposição, os documentos pertencentes à nossa pesquisa são as legislações do período investigado, os programas de ensino e alguns conteúdos de livros didáticos utilizados nesse período.

Na base do modelo heptagonal encontram-se, também, os “objetivos”, que descrevem como vamos proceder com os documentos escolhidos, na busca por indícios de respostas para o nosso problema. Eles são estabelecidos de duas formas; a primeira é por meio do “objetivo geral” e, como o nome sugere, indica qual deve ser o propósito maior da pesquisa, ou seja, algo que o autor busca atingir ao término do seu trabalho. A segunda corresponde aos “objetivos específicos” que abordam procedimentos pontuais que devem ser realizados, pelos autores da pesquisa, diante dos seus documentos e na busca pela obtenção do “objetivo geral”. O alcance do “objetivo geral” deve, geralmente, acontecer por meio das relações existentes entre os objetivos específicos. Basicamente o que pensamos é que após a escolha dos documentos que serão investigados e do *objetivo geral*, os autores da pesquisa poderiam pensar em maneiras de investigar cada um desses documentos de forma isolada, mas sem perder o propósito maior da pesquisa, estabelecendo relações entre cada um deles e podendo, finalmente, reuni-los para dar forma ao objetivo geral.

Acreditamos que grande parte das escolhas feitas em uma pesquisa foram motivadas pelo “caminho científico” escolhido na busca da obtenção de “respostas” para o problema de pesquisa. Entendemos que esse caminho científico seja o *Referencial Metodológico* da pesquisa ou o *Método* utilizado para desenvolvê-la; esse é outro elemento pertencente ao vértice da base de nossa figura.

Temos em mente que existem diversos caminhos ou métodos que poderão aproximar o pesquisador do propósito desejado para a sua pesquisa. Dessa forma, um dos fatores importantes para a escolha desse percurso é o conhecimento prévio das bases teóricas a respeito desse método, até porque, no momento em que o autor realizar uma abordagem sobre esse assunto, ele

> [...] além de descrever os procedimentos vivenciados na realização do trabalho, incluindo parte empírica da coleta de dados e a parte analítica, admitimos ser importante explicitar as bases teóricas do método escolhido para conceber e realizar a pesquisa como um todo (PAIS, 2016, p.20).

Para a realização desta pesquisa fundamentamo-nos na abordagem metodológica crítica, ou seja, buscamos entender os principais princípios ou pressupostos do método crítico na história de modo geral, para, em seguida, aplicar na história da Educação Matemática escolar. Considerando os aspectos específicos que caracterizam a disciplina e a cultura relacionadas ao ensino escolar, apoiamo-nos na obra de Marc Bloch “Apologia da História ou o Ofício de Historiador”, e em outros autores que seguem a mesma linha de pensamento da nova historiografia do século XX.

Outro ponto da figura corresponde ao *Referencial Teórico*, que entendemos como um conjunto de materiais associados e que dão respaldo científico para a pesquisa. Nesse sentido, acreditamos que deva ser feito um levantamento a respeito de teóricos que tratam de conceitos que se coadunam com o tema do estudo. Após o levantamento desses teóricos é preciso realizar um estudo aprofundado sobre os conceitos abordados por eles, visando relacioná-los com o problema proposto e, assim, entender melhor sobre a importância desse problema e o “caminho científico” escolhido para a investigação.

Acreditamos também que deva ser feito outro levantamento de trabalhos que tenham ligações com a pesquisa, de modo que eles venham a contribuir para maior entendimento do tema.

Com relação às questões teóricas do nosso trabalho, realizamos estudos individuais e por meio do GEPHEME de autores que abordam conceitos que tenham contribuíssem para o desenvolvimento do nosso trabalho. Desses autores, acreditamos que aqueles que tratam de questões mais próximas da nossa temática foram: André Chervel, com sua abordagem a respeito das *finalidades da disciplina e escolar* e do conceito *vulgata;* Michel de Certeau, cuja contribuição foi dada por meio das ideias de *Estratégias* e *Táticas*.

Quanto à parte do levantamento de trabalhos relacionados à nossa pesquisa, esta já foi apresentada na parte que intitulamos “pequeno estado da arte”.

O último elemento que trazemos aqui para ser comentado é referente à *Análise, c*onsiderado o mais importante em uma pesquisa; estabelecendo uma analogia entre a pesquisa e o corpo humano, costumamos dizer no GEPHEME que esse elemento é o “coração” da pesquisa. Assim consideramos, porque é durante a realização da análise que o pesquisador emprega esforços para atingir o objetivo proposto na pesquisa; com base na relação entre os documentos, conceitos e questionamentos envolvidos ele aponta as evidências observadas a partir do problema de pesquisa

No nosso caso, dispusemo-nos a investigar o *estudo do Cálculo Diferencial e Integral no ensino secundário brasileiro entre os anos de 1889 a 1929,* com a hipótese de que as legislações, os programas de ensino e, principalmente, alguns conteúdos de Matemática apontados nos livros didáticos daquela época pudessem oferecer subsídios para o estudo dos conceitos iniciais associados ao Cálculo Diferencial e Integral

O que buscamos, nesta seção, foi tecer algumas considerações a respeito de como entendemos esse modelo organizacional que chamamos de *Esquema Heptagonal.* Ressaltamos que ele ainda está em fase de construção, contudo, com resultado dos debates ocorridos no GEPHEME acerca desse Esquema, foi possível utilizá-lo como contribuição à organização da nossa pesquisa.

2.4 ESTUDOS DE ALGUNS CONCEITOS DO MÉTODO CRÍTICO

Dentre os autores pertencentes ao grupo conhecido como *Escola dos Annales*, destaca-se Marc Bloch, que pertenceu à primeira fase desse grupo e foi um dos fundadores do mesmo, “[...] deixava inacabado em seus papéis um trabalho de metodologia histórica composto no final de sua vida, intitulado Apologie de l'histoire, o qual foi finalmente publicado em 1949 por Lucien Febvre sob o título Apologie de l'histoire ou Métier d'historien”. (LE GOFF *apud* Bolch, 2001). Cientes dessa obra e motivados por leituras de teóricos pertencentes ao grupo da *Nova História*, optamos por realizar a nossa pesquisa fundamentada na abordagem metodológica crítica, com a contribuição da obra de Marc Bloch que, na tradução feita para o português, recebeu o título “Apologia da História ou o Ofício de Historiador”.

A justificativa para a escolha dessa obra está relacionada ao fato de que

> [...] parece razoável admitir que a forma clássica está impregnada de vestígios, escolhas e formas que falseiam o curso de desenvolvimento histórico da cognição social e cultural da matemática. São razões pelas quais optamos pela conveniência de uma abordagem crítica[...]. (PAIS, 2016, p.30).

Os escritos anteriores foram utilizados para justificar o estudo de Bloch (2001) durante as reuniões do GEPHEME. Consideramos esses escritos válidos, também, para o nosso trabalho e, além disso, acreditamos que o método descrito por Bloch (2001) representa grande relevância para a pesquisa, tendo em vista que nosso ideal não era narrar os fatos apresentados nos documentos, da forma com que se apresentavam, tampouco evidenciar a importância de algum personagem pertencente ao período investigado. Nossa intenção era levantar questionamentos ou interrogar os documentos e personagens envolvidos no estudo do Cálculo Diferencial e Integral do ensino secundário durante os anos de 1889 e 1929, a fim de que “falassem” conosco e revelassem sua importância para o problema que optamos investigar.

Após uma série de estudos e debates ocorridos, principalmente, durante as reuniões do GEPHEME, tendo como norte a obra de Bloch (2001), mais especificamente o terceiro capítulo intitulado “A crítica”, passamos a entender que uma das formas de “caminhar” com um problema de pesquisa era por meio de ideias com “poderes” axiomáticos ou em termos não matemáticos, postulados que podemos “agarrar” visando dar base para argumentos futuros.

Até este momento abordamos sobre cinco postulados, quais sejam:

1º) Dúvida examinadora.

2º) Valorização da faculdade de observação.

3º) Direito de interrogar os testemunhos.

4º) Princípio da comparação

5º) Princípio da lógica.

É a respeito desses cinco postulados que iremos discorrer no item a seguir.

2.4.1 Dúvida examinadora

No campo da pesquisa é comum o ato de averiguar determinado resultado ou até mesmo contestá-lo até que seja considerado aceitável cientificamente em sua área. Isso porque algumas áreas possuem formas objetivas de validação, como por exemplo a da Matemática, na qual a comprovação é dada por meio de demonstrações, mesmo que os resultados como alguns da Teoria dos Números possam ser testados por diversas constantes. Se não passarem por esse processo de demonstração, não são tidos como verdadeiros, até porque, em alguns casos, já houve falhas, sendo possível apresentar alguns contraexemplos.

No campo em que estamos inseridos é impossível estabelecer um método que nos leve a uma verdade absoluta conforme já referido. Porém podemos realizar análises que nos aproximem da história ocorrida e a *dúvida examinadora* pode atuar de maneira positiva nesse sentido.

A princípio, esse postulado tinha o nome de *Ameaça dos embustes*, mas como o termo poderia levar a entendimentos não desejados por nós, optamos pela mudança, buscando uma expressão que condizesse a algo mais próximo do que realmente almejamos.

Na história é possível encontrarmos alguns exemplos passíveis da dúvida examinadora; ao encontro desse pensamento temos a seguinte fala:

> na Idade Média, diante da própria abundância de falsificações, a dúvida foi [frequentemente] como um reflexo natural de defesa. "Com tinta, qualquer um pode escrever qualquer coisa" exclamava, no século XI, um fidalgo provinciano loreno, em processo contra monges que armavam-se de provas documentais contra ele. (BLOCH, 2001, p.89).

Como podemos observar, não é de hoje que a dúvida se faz presente, mas o que entendemos é que, na pesquisa, duvidar é algo necessário, porém não é suficiente. Por isso, durante as discussões no GEPHEME, chegamos à conclusão de que o verbo *duvidar* deveria estar acompanhado do *examinar*, até porque "o ceticismo de princípio não é uma atitude intelectual mais estimável ou mais fecunda que a credulidade, com a qual, aliás, combina-se facilmente em muitos espíritos um pouco simplistas" (BLOCH, 2001, p. 89). Dessa forma, ao unir as ações *duvidar* e *examinar*, "fugimos" das polaridades descritas por Bloch (2001), isso porque não estamos somente na "zona branca" onde tudo o que está escrito é validado e nem na "zona escura" em que nada merece crédito e tudo deve ser duvidado.

O que estamos buscando fazer é nos posicionar na "zona cinza", ou seja, acreditamos que é preciso verificar se as informações adquiridas não são somente mais um exemplo de embuste, mas, além disso, cabe a nós também, caso seja comprovado tal fato, buscar entender quais os motivos que na época levaram a esse embuste.

Na nossa pesquisa, um dos momentos em que aplicamos a *dúvida examinadora* foi durante a análise dos escritos apresentados nas duas primeiras reformas, a de a Benjamin Constant (1890) e a de Amaro Cavalcanti (1898). Em tais reformas os autores citaram o fato de propiciar à mocidade brasileira a instrução secundária.

Vale destacar que a *dúvida examinadora* deve ser aplicada ao período em que o fato ocorreu, ou seja, precisamos ter uma ideia a respeito do que ocorria na época do fenômeno que estamos pesquisando, para não incorrer no anacronismo. No exercício de "voltar" à época em que foram escritas as reformas mencionadas, deparamo-nos com o fato de que as condições econômicas brasileiras não eram favoráveis, e, por isso, a educação era oferecida mais para uma parcela abastada da sociedade. Dessa forma, o ensino secundário também não poderia ser oferecido à 'mocidade brasileira', mas a uma parcela que detinha certo poder aquisitivo.

Esse é apenas um exemplo em que a *dúvida examinadora* pode ser aplicada; mas, a nosso ver, esse postulado assim como os outros que serão abordados, não são ferramentas que devem ser citadas constantemente durante as análises, mas correspondem a um conjunto de crenças que temos em mente no momento em que realizamos o estudo dos documentos.

Para finalizar essa subseção, é pertinente que apontemos uma observação feita por Marc Bloch, que nos motivou a respeito do estudo da *dúvida examinadora,* que se associa aos seguintes dizeres: “o verdadeiro progresso veio no dia em que a dúvida tornou-se, como dizia Volney, ‘examinadora’; em que regras [objetivas] em outros termos foram pouco a pouco elaboradas, as quais, entre a mentira e a verdade, permitem uma triagem” (BLOCH, 2001, p. 90). Assim, entendemos que a *dúvida examinadora* deve ocupar uma posição entre os nossos postulados, sendo ela complementada pelos outros quatro postulados que se seguem.

2.4.2 Valorizar a faculdade de observação

A escolha desse postulado foi feita diante da ideia de que, na História, as falhas nos testemunhos nem sempre são ocasionadas somente por esquecimento ou falta de atenção. A favor desse pensamento temos os seguintes dizeres:

> [...] a chamada faculdade de observação, que consiste em desenvolver uma atenção especial, além das ameaças dos embustes, do senso de percepção e reflexão constantes que circunscreve o campo de atuação do professor ou pesquisador. (PAIS, 2016, p.31).

Entendemos que o pesquisador deve estar atento em relação às *falhas nos testemunhos*, no sentido de que elas podem ocorrer em qualquer tipo de pessoa e por diferentes motivos. A esse respeito, Bloch (2001, p. 103) indicou que “algumas se dão na condição momentânea do observador: são o cansaço, por exemplo, ou a emoção. Outras, no nível de sua atenção”. Mantendo essa linha de raciocínio, acreditamos que nem todos os casos de *embustes* podem ser creditados às condições citadas e exemplificadas anteriormente, até porque “se os erros do testemunho fossem determinados, em última análise, apenas pelas fraquezas dos sentidos ou da atenção, o historiador só teria, em suma, que entregar seu estudo ao psicólogo”. (BLOCH, 2001, p. 105).

Em alguns casos, isso acontece de forma tendenciosa, com a ideia de tirar algum proveito com a situação, podendo vir a tomar proporções consideráveis e se estabelecer como um *Documento* ou *Monumento*. Como uma tentativa de não haver a propagação de testemunhos falaciosos, cabe a nós usarmos uma ferramenta, que é aqui denominada *faculdade de observação*. Tal ferramenta é de cunho individual, ou seja, cada pessoa tem a sua forma de usá-la em meio à investigação. Seu uso varia de acordo com o tempo; sendo assim, existem momentos na história em que essa ferramenta é mais usada, do que em outros.

Outro fator que contribui para um bom aproveitamento dessa ferramenta é a questão da intuição, ou seja, após um bom tempo dedicado a estudos correlacionados a certo tema investigado, o pesquisador passa a utilizar a *faculdade de observação* de uma maneira que possibilite torná-lo atento diante das possíveis trapaças que podem ultrapassar gerações, comprometendo historicamente o setor em que foram criadas.

2.4.3 Interrogar os testemunhos

Destacamos, em relação a esse postulado, a seguinte observação feita por Bloch (2001, p. 89): “que a palavra das testemunhas não deve ser obrigatoriamente digna de crédito os mais ingênuos dos policiais sabem bem”. Na busca por entender alguns conceitos apresentados pelo autor e tentar aplicá-los em nossa pesquisa, entendemos que as testemunhas citadas por ele, dentro de uma pesquisa, podem ser representadas pelos materiais utilizados na investigação, em nosso caso, as legislações da época, os programas de ensino e as obras didáticas utilizadas.

Acreditamos que não dar crédito ao testemunho signifique não aceitar de imediato um testemunho como verdade. É necessário que sejam feitos alguns questionamentos acerca dos fatos, para, então, extrair informações que indiciem verdades contidas nos *Documentos* e, dessa forma, aproximar-nos do fato histórico ocorrido em determinada época.

Diante de uma pesquisa histórica que utiliza o método crítico, entendemos que os documentos utilizados para o levantamento de dados acerca do problema escolhido, nem sempre terá sido escrito para esse fim, ou seja, uma pesquisa por meio desse método não busca analisar somente materiais que apontem sua visão a respeito do problema; documentos que não apresentem essa característica também podem trazer informações importantes. Mas, em ambos os casos, “antes de tudo, preocupa-se em fazê-las falar, para compreendê-las”. (BLOCH, 2001, p.96).

Em nossa pesquisa, por exemplo, alguns conteúdos citados nos programas de ensino e apresentados nos livros didáticos não indicam de forma explícita a existência de uma relação com o estudo de conceitos prévios referentes ao Cálculo Diferencial e Integral no ensino secundário brasileiro daquela época. Cabe a nós, então, interrogar esses e outros documentos da pesquisa e da época, na busca de indícios a respeito da relação entre o estudo do Cálculo e as Matemáticas do ensino secundário brasileiro.

2.4.4 Princípio da comparação

De acordo com Bloch (2001, p. 109), “na base de quase toda a crítica inscreve-se um trabalho de comparação”. Nossa compreensão, aqui, é de que o autor valoriza, dentro da pesquisa embasada pelo método crítico, o trabalho de comparação. Tendo-se isso em consideração, buscamos realizar um estudo do texto desse autor para, entre outras coisas, tentar entender seu ponto de vista acerca desse tema.

Acreditamos que, na visão de Bloch, para averiguarmos determinados fatos é necessário recorrer a diversas fontes, com vistas a compará-las, ou seja, primeiramente devemos ter um domínio a respeito do conteúdo dessas fontes, e, para isso, faz-se necessário realizar estudos separados de cada uma delas. Após esse processo, iremos contrapor essas ideias, na tentativa de encontrar *semelhanças* e *diferenças* a respeito das mesmas. Novamente precisamos refletir a respeito da ideia tanto de *semelhança* quanto de *diferença*.

A respeito da primeira “não é preciso, no entanto, que a semelhança seja muito grande. Ela deixaria então de depor em favor do testemunho. Pronunciaria, ao contrário, sua condenação” (BLOCH, 2001, p.111), dessa forma, ao comparar dois documentos devemos atentar para o grau de semelhança, pois caso esta seja grande, poderemos estar diante de uma cópia ou uma falsificação.

No caso de divergência, ou melhor, quando duas fontes nos levam a conclusões distintas, devemos novamente fazer a comparação com outras fontes, para decidirmos quais delas iremos considerar como mais próxima dos fatos conforme ocorreram.

O que não deve ser feito diante da divergência dos fatos é estabelecer uma resposta por meio de uma média, no sentido de tomar essas duas ideias divergentes, analisá-las e delas extrair uma terceira, que será considerada como verdade. Até porque as fontes são extraídas de uma determinada época, e, geralmente, tais épocas têm as suas marcas ou sua maneira de realizar atividades, o que poderia contribuir para encontrar evidências que nos deixem próximo da versão ocorrida.

2.4.5 Construção de uma lógica

A palavra *lógica*, muitas vezes, remete à ideia exclusiva de racionalidade, porém, com base nos estudos de referências iniciais sobre o método crítico, entendemos que a *construção de uma lógica,* nesse método, é feita por meio de uma articulação entre a racionalidade e a sensibilidade. Bloch contribui para esse entendimento quando explicita o seguinte:

> a crítica do testemunho, que trabalha sobre realidades psíquicas, permanecerá sempre uma arte de sensibilidade. Não existe, para ela, nenhum livro de receitas. Mas é também uma arte racional, que repousa na prática metódica de algumas grandes operações do espírito. Tem, em suma, sua dialética própria, que convém deduzir. (BLOCH, 2001, p. 109).

Nesse contexto, entendemos a sensibilidade ou a emoção como algo intuitivo, no sentido de que “a intuição é uma forma de conhecimento imediato que está sempre disponível no espírito das pessoas e cuja explicitação não requer uma dedução racional guiada por uma sequência lógica de argumentos deduzidos um dos outros” (PAIS, 1996, p. 72), enquanto a racionalidade é vista como algo científico, que foi submetida a um certo tipo de “[...] etapa de sua formalização atendendo aos rigores metodológicos pertinentes aos paradigmas da área científica.” (PAIS, 2000, p. 7).

Consideramos que tanto a sensibilidade quanto a racionalidade contribuem para o processo de construção de uma lógica, para a escolha dos documentos e para a sua inserção em uma série cronológica, um conjunto de elementos dotado de certa coerência.

A série cronológica não constitui algo pronto; o pesquisador é quem a constrói por meio de seus documentos e de seus objetivos, de maneira que ela possa ser utilizada para estabelecer uma coerência na pesquisa, impedindo a presença de contradições, até porque “[...] o mais universal dos postulados lógicos; o princípio da contradição proíbe impiedosamente que um acontecimento possa ser e não ser ao mesmo tempo”. (BLOCH, 2001, p. 110).

Em suma, a construção de uma lógica busca viabilizar o método crítico, os documentos escolhidos são colocados em uma série sincrônica, possibilitando que eles passem por um critério de comparação que aponte semelhanças e diferenças, e contribuindo para que os documentos ou testemunhos possam ser vistos como algo científico, sem, contudo, desvalorizar as questões intuitivas, como é possível observar em alguns exemplos apontados por Bloch (2001) em que testemunhos racionalmente vistos como inverossímeis, passam a ser creditados como verídicos, no momento em que o pesquisador tem a sensibilidade de apurar melhor os fatos.

Apesar da apresentação seriada desses postulados, não existe uma hierarquia entre eles, até porque um complementa o outro, no momento das análises. Assim, esses postulados são ideias com “poderes” axiomáticos que “agarramos” como um ponto de partida para um raciocínio futuro, ou seja, não quer dizer que vamos ficar procurando tais postulados o “tempo todo”, no momento da análise, mas que acreditamos neles, quando o fazemos.

A exposição que aqui fizemos a respeito do *método crítico* está relacionada à maneira como estamos buscando entendê-lo, no âmbito do GEPHEME, e também a forma como tentamos sintetizar a ideia de Bloch (2001), com a intenção de fazer uso de seus preceitos ao longo do desenvolvimento deste trabalho. Além das contribuições desse autor, buscamos “apoio” em outros teóricos que seguem a linha desenvolvida por ele, e é a respeito de alguns dos seus pensamentos que passaremos a discorrer a seguir.

2.5 CATEGORIA DE ANÁLISE E QUESTÕES TEÓRICAS DA HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA ESCOLAR

Entre os autores escolhidos cujas ideias contribuíram para a realização desta pesquisa, está o linguista francês André Chervel (1990). Esse autor propôs um campo de pesquisa no qual, basicamente, são abordadas questões referentes à *disciplina* e *cultura escolar*.

A respeito do campo de pesquisa proposto por Chervel (1990), observamos que ele define, em seu texto, os principais conceitos inseridos nesse campo científico, como, por exemplo, o conceito de *disciplina escolar*, *cultura escolar* e *vulgata*.

Entendemos que os dois primeiros conceitos estão associados e, para reforçar a nossa ideia, temos os seguintes dizeres:

> a instituição escolar não se limita, pois, a reproduzir o que está fora dela, mas sim, o adapta, o transforma e cria um saber e uma cultura próprias.

> Uma dessas produções ou criações próprias, resultado da mediação pedagógica em um campo de conhecimento, são as disciplinas escolares. (VIÑAO, 2008, p. 189).

Dessa forma, cabe a nós investigarmos a respeito da *cultura escolar* da época, ou melhor, dos saberes matemáticos dados no período investigado, por meio das disciplinas que tratam dos conteúdos matemáticos e sua relação com o estudo do Cálculo Diferencial e Integral na passagem do ensino secundário para o ensino superior. Mais especificamente, ao tratarmos do problema histórico de transição do ensino de caráter geral para o de caráter específico, tomamos, como ponto de referência, respectivamente, as Matemáticas do ensino secundário; desse modo, é importante entendermos as potencialidades das disciplinas escolares para uma pesquisa de cunho histórico. Chervel explicita que "uma disciplina escolar comporta não somente as práticas docentes de aulas, mas também as grandes finalidades que presidiram sua constituição e o fenômeno de aculturação de massa que ela determina" (CHERVEL, 1990, p.184).

Como nossa pesquisa foi iniciada por meio de uma intuição a respeito da relação existente entre o ensino de alguns conteúdos matemáticos como pré-requisitos para o estudo inicial do Cálculo Diferencial Integral, entendemos, com base nessas palavras de Chervel (1990), que o estudo dessas disciplinas pode nos aproximar de uma resposta para essa nossa intuição e, mais do que isso, pode nos apontar elementos da *cultura matemática escolar* que apontem para possíveis respostas ao nosso problema de pesquisa, iniciado também por essa intuição.

Chervel (1990) aponta alguns caminhos para serem seguidos em pesquisa caracterizada pela *História das Disciplinas Escolares*, sugerindo problemas ou questionamentos a serem pesquisados e, também, o que ele chama de *corpus* da pesquisa, que é o conjunto de documentos usados para pesquisar a cultura escolar. Esses documentos podem ser livros didáticos, programas de ensino (lista de conteúdos detalhados), planos de estudos (algo mais sintetizado), textos pedagógicos (escritos para os professores), os exames, as leis da educação e os regimentos da escola, os regulamentos, cadernos dos alunos e professores, apostilas, artigo de jornal, tese de doutorado entre outros que podem constituir esse *corpus*, e documentos que ajudam o pesquisador a fazer história.

A respeito do *corpus* da pesquisa, tomamos como base o seguinte excerto do texto:

> [...] neste estágio, uma primeira documentação abre-se imediatamente diante do historiador, a série de textos oficiais programáticos, discursos ministeriais, leis, ordens, decretos, acordos, instruções, circulares, fixando os planos de estudos, os programas, os métodos, os exercícios, etc. O estudo das finalidades começa evidentemente pela exploração deste corpus. Aí juntam-se ou preferentemente os precedem, os planos de estudos, os "ratio", os regulamentos diversos que, sob o Antigo Regime, expõem os objetivos que perseguem os colégios das universidades ou das congregações, ou das escolas, dos Lassalistas ou das Ursulinas, por exemplo. (CHERVEL, 1990, p. 188-189).

Orientados por essa ideia reunimos alguns documentos para análise, como os decretos instituídos no período histórico correspondente à nossa pesquisa. Por meio deles tentamos identificar indícios de intencionalidade do autor de cada legislação em aproximar o ensino secundário do ensino superior, examinando listas de disciplinas sugeridas em cada legislação, a forma como as disciplinas de Matemática eram dispostas, quais as disciplinas existentes, a carga horária dessas disciplinas, os órgãos responsáveis pela organização da instrução pública, seus afazeres e os exames instituídos em cada legislação.

Com relação aos exames, temos a seguinte indicação:

> último ponto importante na arquitetura das disciplinas: a função que aí preenchem as provas de natureza docimológica. As necessidades de avaliação dos alunos nos exames internos ou externos engendraram dois fenômenos que pesam sobre o desenrolar das disciplinas ensinadas. O primeiro, é a especialização de certos exercícios na sua função de exercícios de controle. [...] O segundo fenômeno é o peso considerável que as provas do exame final exercem por vezes sobre o desenrolar da classe e, portanto, sobre o desenvolvimento da disciplina, ao menos em algumas de suas formas (CHERVEL, 1990, p. 206).

Em harmonia com essa abordagem, mais especificamente em relação à parte que trata do segundo fenômeno, procuramos investigar se os exames aplicados na época tinham, como parte de suas *finalidades*, estabelecer alguma relação entre o ensino secundário e o ensino de caráter superior. Ligados a esses exames, pudemos investigar a respeito da participação ou não do órgão responsável pela instrução pública brasileira, quais integrantes desse órgão poderiam ter participado da elaboração desses exames, se esses integrantes pertenciam ao ensino secundário, superior ou se havia integrantes de ambos os níveis de ensino. Quanto às Matemáticas, verificamos quais as disciplinas que eram exigidas nesses exames e mais outras questões que pudessem contribuir para uma possível associação entre o ensino das Matemáticas da época e o Cálculo Diferencial e Integral ministrado nos cursos de engenharia por meio das escolas politécnicas existentes.

Apesar de o estudo da legislação ser necessário, ele não é suficiente, levando-se em consideração o fato de que “não podemos, pois, nos basear unicamente nos textos oficiais para descobrir as finalidades do ensino” (CHERVEL, 1990, p. 190). Munidos dessa observação e da anterior, referente à documentação de análise, voltamos nossos olhos para outros dois *documentos*, que são os programas de ensino e alguns conteúdos matemáticos dos livros utilizados na época.

Antes de tratarmos dessa parte mais próxima das questões didáticas envolvidas nas aulas de Matemática ou da maneira como os conteúdos matemáticos poderiam ter sido apresentados aos alunos, ressaltamos que não estamos considerando a escola como um ambiente completamente autônomo, ou seja, acreditamos na existência das instituições representadas pela família, comércio, igreja, políticas públicas, editoras, turismo, universidade, entre outras ao seu redor. Essas instituições podem não determinar completamente o que é feito na escola, mas exercem forte influência sobre ela, ideia que é também compartilhada por Souza (2010, p. 36) no seguinte excerto:

> após ser feita a depuração do conjunto de práticas, ora as instituições que estão fora da escola determinam sua cultura para dentro da escola, ora as instituições que estão dentro da escola, não se submetendo à cultura de instituições externas, produzem uma cultura dentro da escola. Essa cultura produzida pela escola é, quase sempre, aceita pelas instituições externas, podendo, por vezes, permanecer certo impasse por algum tempo.

Dessa forma, entendemos que por meio do estudo realizado nos programas de ensino e, principalmente, em alguns conteúdos dos livros didáticos, foi possível a aproximação com uma parte dessa *cultura* produzida pela escola; melhor ainda, conseguimos perceber como alguns conteúdos matemáticos eram ensinados e como esses conteúdos poderiam dar base para o estudo do Cálculo Diferencial e Integral no nível superior.

Quanto aos conteúdos de ensino, Chervel (1990) destaca a importância do estudo histórico acerca de como um conteúdo vem exposto também no livro didático. A justificativa que oferece, para sustentar essa importância é que “ele [o estudo histórico] que a distingue de todas as modalidades não escolares de aprendizagem, as da família ou da sociedade” (CHERVEL, 1990, p. 202). Consideramos, assim, que esse estudo pode indicar questões específicas das disciplinas escolares em relação aos métodos utilizados no ensino de um determinado conteúdo.

Foi durante o estudo dos conteúdos apresentados nos livros didáticos que pudemos fazer uso do conceito de *vulgata,* a respeito do qual temos a seguinte explicitação:

> em cada época, o ensino dispensado pelos professores é, grosso modo, idêntico, para a mesma disciplina e para o mesmo nível. Todos os manuais ou quase todos dizem então a mesma coisa, ou quase isso. Os conceitos ensinados, a terminologia adotada, a coleção de rubricas e capítulos, a organização do corpus de conhecimentos, mesmo os exemplos utilizados ou os tipos de exercícios praticados são idênticos, com variações aproximadas (CHERVEL, 1990, p. 203).

Relacionando esse excerto com a nossa pesquisa, pudemos elencar alguns elementos que caracterizavam a *vulgata* existente no período investigado, após o que buscamos estabelecer algumas associações com os conteúdos iniciais propostos no curso de Cálculo Diferencial e Integral, com o propósito de investigar *a história do estudo prévio do Cálculo Diferencial e Integral na passagem do ensino secundário para o ensino superior.*

Entendemos, por meio dos escritos de Chervel (1990), que as instituições que cercam a escola impõem-lhe algumas tarefas educacionais, que, por sua vez, são desempenhadas por profissionais pertencentes à instituição escolar (professores, coordenadores, diretores, autores de obras didáticas, entre outros). Esses profissionais buscam desempenhar essas tarefas por meio de um conjunto de práticas criadas por eles no decorrer do tempo e, desse modo, formam uma *cultura escolar*.

Seguindo essa linha de pensamento, mas voltando nossos olhos para a *cultura matemática escolar*, além de estudar as finalidades das Matemáticas (Aritmética e Álgebra) da época, buscamos investigar se as mesmas poderiam ter dado base para o estudo do Cálculo Diferencial e Integral no ensino superior. Para isso, investigamos o conjunto de práticas contidas em algumas obras didáticas da época, elencando categorias utilizadas pelos autores.

2.6 ESTRATÉGIAS E TÁTICAS

Outro autor influenciado pelo movimento conhecido como escola dos *Annales*, de quem tomaremos emprestados alguns conceitos que foram úteis para o desenvolvimento desta pesquisa é Michel de Certeau.

Esse autor, em sua obra intitulada *A invenção do Cotidiano* (1998), procura dar uma visão, ao cidadão comum, das formas como pode manipular regras impostas por aqueles que são detentores do poder e como reage diante delas. Assim, esse autor deixa de valorizar somente as atitudes dos dominadores, inserindo, na pauta de discussão a respeito do consumo, a importância daqueles que são dominados e suas formas de ação, que possibilitam certa liberdade e, consequentemente, limitam o domínio das regras criadas pelos dominadores.

É nesse contexto que De Certeau (1998) apresenta dois conceitos que julgamos importantes para a nossa pesquisa, as *estratégias e* as *táticas.* Com relação ao primeiro, o autor escreve:

> chamo de estratégia o cálculo (ou a manipulação) das relações de força que se torna possível a partir do momento em que o sujeito de querer e poder (uma empresa, um exército, uma cidade, uma instituição científica) pode ser isolado. A estratégia postula um lugar suscetível de ser circunscrito como algo próprio e ser a base de onde se podem gerir as relações com uma exterioridade de alvos ou ameaças (os clientes ou os concorrentes, os inimigos, o campo em torno da cidade, os objetivos e objetos da pesquisa etc.). (DE CERTEAU, 1998, p. 99).

Acreditamos, então, que as *estratégias* são criadas, traçadas e impostas pelas instituições visando alcançar seus grandes objetivos. Em nossa pesquisa, vale relembrar, acreditamos que existam várias instituições que cercam e ditam regras que, em partes, são obedecidas pelas pessoas que compõem o meio escolar. Dessa forma, cabe a nós investigarmos quais instituições são essas. De que forma elas influenciavam sobre o que era feito na escola? Em resumo, quais as *estratégias* utilizadas por aqueles de detinham certo poder sobre a instituição escolar da época?

Ao mesmo tempo em que temos em mente a existência de forças externas que agem sobre a escola, vemos que suas ações possuem um limite, pois cremos que a escola cria seus métodos próprios de operar com aquilo que já lhe foi imposto. Neste momento, acreditamos estar diante das *táticas* criadas pelos sujeitos da instituição escolar com o intuito de fazer frente às *estratégias.* Ressaltamos que, para De Certeau (1998, p.100), o conceito de *tática* é entendido da seguinte forma:

> [...] chamo de tática a ação calculada que é determinada pela ausência de um próprio. Então nenhuma delimitação de fora lhe fornece a condição de autonomia. A tática não tem por lugar senão o do outro. E por isso deve jogar com o terreno que lhe é imposto tal como o organiza a lei de uma força estranha. Não tem meios para se manter em si mesma, à distância, numa posição recuada, de previsão e de convocação própria: a tática é movimento "dentro do campo de visão do inimigo", como dizia Büllow, e no espaço por ele controlado. (DE CERTEAU, 1998, p. 100).

Entendemos que é em meio a um ambiente cercado por regras impostas e vigiadas por aqueles que as criaram, que os sujeitos inseridos nesse ambiente buscam, de certa forma, manipular ou alterar essas regras durante pequenos espaços que fogem do domínio dos criadores das *estratégias*, dando origem às *táticas.*

Em nossa investigação buscamos investigar quais são esses pequenos espaços de autonomia, quem são os sujeitos que criam esses espaços, buscando entender as *táticas* existentes na instituição escolar durante o período delimitado para a investigação.

Em suma, consideramos a instituição escolar como um espaço movimentado por *estratégias e táticas*, para o qual, em determinados períodos, foram estabelecidas leis destinadas à escola, na busca de organizar a instrução pública brasileira. Em contrapartida, autores escreveram programas de ensino, obras didáticas, organizaram os conteúdos e as apresentações dos mesmos.

É diante dessa movimentação que nos inserimos, à procura de evidências referentes às ações daqueles que eram detentores do poder e daqueles que buscavam estabelecer seus espaços de criação, para, dessa forma, obter informações sobre alguns conteúdos que dessem base *ao estudo do Cálculo Diferencial e Integral, na passagem do ensino secundário para o ensino superior*.

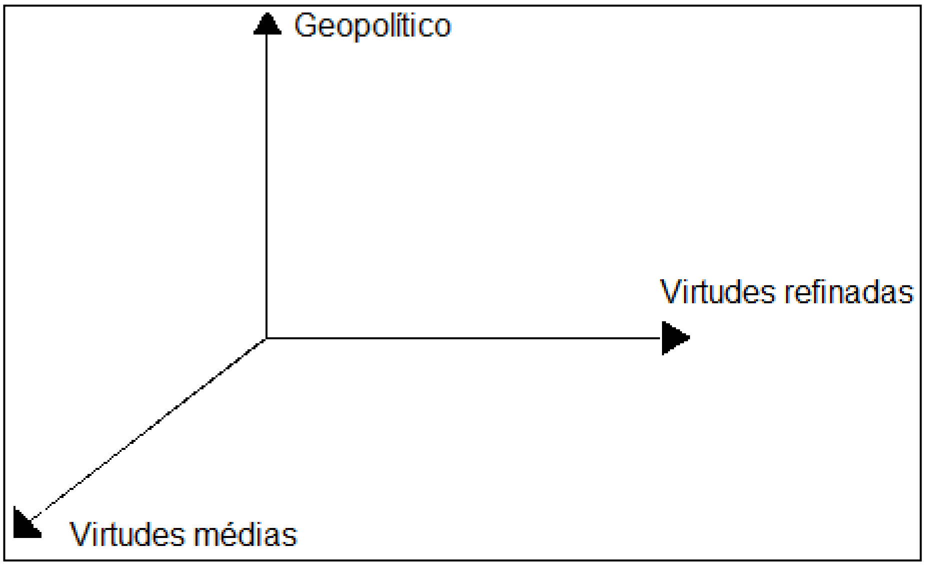
2.7 AS TRÊS DIMENSÕES DA ANÁLISE HISTÓRICA

Antes de dar início às análises correspondentes à nossa pesquisa, é pertinente que forneçamos um breve comentário a respeito de como pensamos a sua organização.

Ressaltamos que os estudos realizados no grupo GEPHEME acerca do texto de Chervel (1990), assim como de outros autores pertencentes à escola dos *Annales*, contribuíram para que desenvolvêssemos um esquema organizacional para a nossa análise.

Consideramos que, para a realização de uma análise histórica, devemos atentar para três dimensões, que são formadas por eixos intitulados, respectivamente, como geopolítico, virtudes médias e virtudes refinadas. Uma síntese esquemática e ilustrativa dessas dimensões pode ser visualizada na Figura 3.

Figura 3 - As três dimensões da análise histórica



Fonte: Elaboração própria

O eixo geopolítico corresponde a uma análise acerca dos fatos ocorridos internacionalmente, que estão diretamente ligados ao nosso problema de pesquisa. Em outras palavras, trata-se de uma investigação a respeito do que estava ocorrendo no mundo ou nas grandes forças políticas da época, que implicaram questões curriculares ocorridas na região que está sendo pesquisada.

Em nosso estudo, verificamos que nos países que representavam as grandes potências políticas da época aconteceu uma discussão a respeito do ensino da Matemática. Entre os temas centrais dessa discussão estava a inserção de elementos de Cálculo Diferencial e Integral no ensino secundário. Ao termos conhecimento sobre tal discussão, passamos a investigar quais as possíveis influências desses debates nas matemáticas do ensino secundário brasileiro.

No eixo correspondente às virtudes médias estão os assuntos referentes ao que deve ser feito, prescrito ou recomendado para a instituição escolar. É o que está “fora” da sala de aula, como, por exemplo, as leis de ensino e os programas de ensino.

Optamos por esse nome, pois essa potencialidade discursiva encontra-se entre os debates políticos ocorridos internacionalmente e as questões didáticas de dentro da sala de aula. Mais especificamente, esse eixo comporta as descrições e análises das leis e normativas legais do que deve ser feito em sala de aula.

Nem sempre os escritos em leis a respeito do que dever ser feito em sala de aula correspondeu ao que realmente foi feito. Por isso, além do estudo das documentações oficiais, atentamos para a documentação produzida pela escola. Por essa razão, destacamos a existência de um terceiro eixo, intitulado virtudes refinadas.

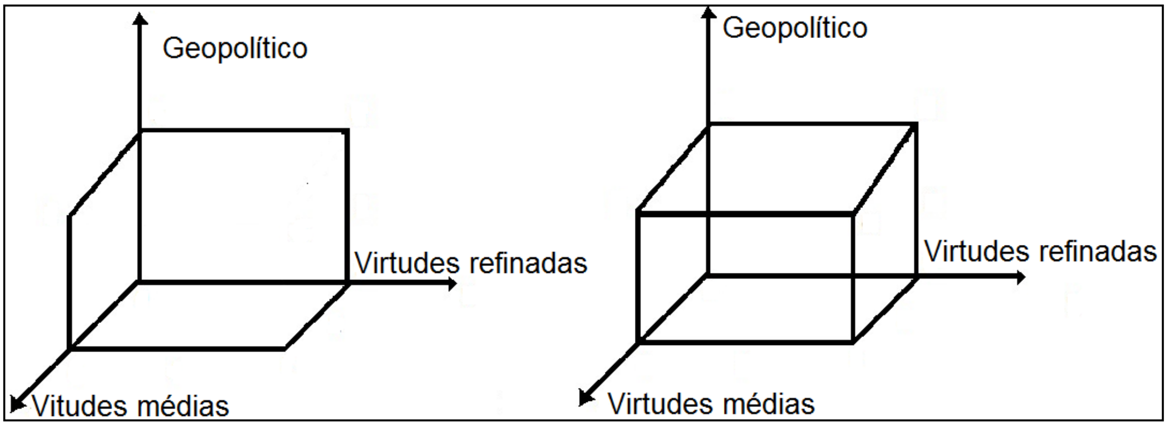
Consideramos que essas virtudes refinadas caracterizem uma análise mais próxima do que realmente aconteceu na instituição escolar durante o período investigado. É, em nosso caso, o estudo das especificidades da disciplina de Matemática.

Tudo que está na Matemática tem uma força latente que se transforma na prática. Sendo assim, cabe a nós, educadores matemáticos, realizar um estudo dessa prática, na busca de retratar, o mais próximo possível, um problema de cunho histórico.

Em nosso trabalho, os tópicos pertencentes aos capítulos 3 e 4, referentes à legislação de ensino e programas de ensino, aproximam-se mais do eixo das virtudes médias, enquanto o capítulo 5 está mais próximo das virtudes refinadas.

Ainda a respeito dos próximos capítulos 3, 4 e 5, além das análises pontuais, buscamos, dentro das possiblidades temporais de uma dissertação e nos documentos encontrados, estabelecer ligações entre temas de cada eixo, já que o esquema elaborado por nós permite uma infinidade de associações, conforme pode ser visualizado na Figura 4.

Figura 4 - Possibilidades de uma análise histórica nas três dimensões



Fonte: Elaborado pelos autores

A figura anterior constitui uma representação das possíveis relações existentes dentro desse esquema organizacional para as análises. Os três planos formados pelos eixos tomados dois a dois, indicam pontos na análise que possuem relação com dois eixos. O cubo, além de considerar os pontos pertencentes aos três planos, aponta para a existência de pontos na análise que podem ser orientados por temas pertencentes aos três eixos considerados por nós.

Nos tópicos a seguir, orientados por esse esquema organizacional, analisamos o estudo de elementos do Cálculo Diferencial e Integral na transição do ensino secundário para o superior, durante os anos de 1890 a 1930.

3 REFORMAS EDUCACIONAIS

3.1 A DIMENSÃO GEOPOLÍTICA DO ENSINO DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL ENTRE 1889 A 1929

Nesta seção, destacamos aspectos internacionais relacionados às discussões sobre as reformas educacionais ocorridas entre os anos de 1889 a 1929, que estavam associadas à questão da transição do ensino secundário para o ensino superior, tendo como foco central o estudo do Cálculo Diferencial e Integral no ensino superior.

Segundo Schubring (1999), no final do século XIX os países que representavam as grandes potências mundiais passaram por mudanças de caráter sociais, impulsionadas pelos avanços industriais da época.

A instituição escolar, de acordo com Chervel (1990), recebeu influência de instituições que a cercavam e reagiu a essas mudanças por meio de debates a respeito do ensino da Matemática, constando, entre os temas de sua pauta, o estudo de elementos do Cálculo Diferencial e Integral para os alunos do ensino secundário. É a respeito dos debates sobre esse tema que iremos discorrer nesta seção.

Com os avanços industriais, o ensino de matemática que "costumava servir como um paradigma para o pensamento lógico, de modo que os conteúdos eram usualmente bastante elementares e os métodos de ensino enfatizavam os aspectos formais" (SCHUBRING, 1999, p. 30), passou a ter destaque no cenário educacional, sendo exigido o ensino de novos conteúdos.

Alguns países iniciaram suas reformas educacionais, como, por exemplo, a França, que teve certo destaque, pois

> as mudanças curriculares mais impressionantes e de maior alcance tinham sido dedicadas em 1902 pelo gabinete ministerial da França, introduzindo até mesmo elementos do cálculo diferencial para as classes mais adiantadas das escolas secundárias. Entretanto, não era claro até que ponto os professores na França realizariam tal reforma, que havia sido mal preparada por uma comissão ministerial e ordenada por decreto. (SCHUBRING, 1999, p. 30).

Como é possível perceber, o governo francês utilizou a estratégia de inserir, na reforma curricular, elementos de Cálculo Diferencial e Integral, para algumas classes do ensino secundário. Tal estratégia sugere indícios de que, nesse período, houve uma valorização no ensino de Cálculo Diferencial e Integral, a ponto de alguns de seus tópicos serem indicados para o estudo no ensino secundário.

Essa suposta valorização acerca do estudo do Cálculo Diferencial e Integral não ficou restrita à França, suposição que se baseia no debate ocorrido nos primeiros anos do século XX, que tinha como tema central a inserção de elementos do Cálculo Diferencial e Integral no ensino secundário.

Para entendermos melhor como esse debate tomou proporções internacionais, faremos, primeiramente, um comentário sobre a mudança curricular ocorrida na Prússia, mediante as ideias de Felix Klein.

A ideia de Klein, de inserir elementos de Cálculo Diferencial e Integral no ensino secundário da Prússia emergiu devido a uma tentativa frustrada de reforma do ensino da Matemática no ensino superior. Após isso, o matemático alemão buscou, como alternativa para sua reforma, propor uma mudança que envolvesse o ensino secundário, o ensino universitário e técnico. Basicamente, essa nova proposta de Klein visava inserir, a partir do ensino secundário, conteúdos matemáticos que pudessem dar base ao estudo nas escolas técnicas superiores. Entre esses conteúdos foram sugeridos elementos do Cálculo Diferencial e Integral.

A proposta de Klein foi aprovada pelo ministério da Prússia, que, além de concordar com a ideia, sugeriu que esta deveria ser aplicada em todo o ensino básico. A estratégia sugerida pelo ministério foi acatada e, como resultado,

> o ministério da Prússia, como havia prometido, apoiou esse movimento a partir das base: a cinco escolas secundárias, cada uma de um tipo diferente, foi atribuído o status de instituições experimentais. Em outras escolas, professores ativistas também introduziram mudanças curriculares que incorporavam o espírito do conceito de função. Na verdade, em todas essas escolas, o objetivo dos professores era introduzir os elementos do cálculo diferencial e integral. (SCHUBRING, 1999, p. 34).

A ideia de Klein foi implantada no país, como podemos perceber pelo texto. Outro ponto de destaque é que, conforme podemos notar, nessa ideia havia um forte interesse em preparar os alunos do ensino secundário para a Matemática do ensino superior, e, de forma mais pontual, para o ensino do Cálculo Diferencial e Integral.

Após a implantação local de suas ideias, Klein buscou uma ampliação global, ou seja, tentou estender a implantação de um novo currículo de Matemática para regiões fora da Prússia. Para entendermos a maneira como essa estratégia foi traçada, devemos ter uma noção sobre a criação do IMUK[9], que contribuiu para o primeiro movimento internacional por uma reforma do currículo de Matemática.

De acordo com Valente (2003) e Schubring (1999), foi criado, em 1908, um comitê internacional para tratar do ensino da Matemática. O comitê contava com a participação de países do continente europeu, americano, asiático, africano e Oceania, tendo, o continente europeu, maioria expressiva em relação à participação e direito a voto.

Para dirigir o comitê internacional foram eleitos os matemáticos Félix Klein, Henri Fehr e George Greenhill; Felix Klein foi escolhido como presidente da comissão, fato importante, pois

> [...] foi essa presidência que transformou a tarefa descritiva proposta numa atividade dinâmica que foi além dos limites originalmente estabelecidos. A primeira decisão foi estender o trabalho de modo a incluir todos os tipos de escolas – do nível primário à educação superior, considerando até mesmo todos os tipos de educação vocacional. E, em vez de simplesmente coletar informações, o IMUK pôs-se a atuar como um agente de mudanças: disseminou a idéia de que a reforma da instrução matemática era necessária e urgente. (SCHUBRING, 1999, p. 30).

Podemos observar que, entre outras coisas, Klein utilizou sua posição de presidente do comitê para traçar estratégias em relação a uma reforma internacional no currículo de Matemática. De acordo com De Certeau (1998, p.99),

> a estratégia postula um lugar suscetível de ser circunscrito como algo próprio e ser base de onde se podem gerir as relações com uma exterioridade de alvos ou ameaças (os clientes ou os concorrentes, os inimigos, o campo em torno da cidade, os objetivos e objetos da pesquisa etc.).

Outra estratégia utilizada por Klein, visando à implantação de suas ideias em um âmbito internacional, foi trazer para o estudo comparativo do IMUK uma maioria de tópicos associados ao seu interesse, que "diziam respeito ou à transição da educação secundária para a superior ou mesmo à educação superior exclusivamente" (SCHUBRING, 1999, p. 45). Entre esses tópicos, um abarcava o estudo de elementos do Cálculo Diferencial e Integral no ensino secundário e o outro sobre como os países estão preparando matematicamente os seus engenheiros.

As discussões apresentadas até então, apontaram para como que, de maneira estratégica, os debates sobre a importância do estudo do Cálculo Diferencial e Integral foram inseridos no cenário internacional, indicando a

---

[9] Internationale Mathematische Unterrichtskommission.

importância desse tema no período final do século XIX e nos primeiros anos do século XX. Ainda nesse contexto, consideremos esta citação:

> em Paris, o tema que atraiu mais atenção e participação foi "a avaliação da introdução do cálculo nas escolas secundárias". Esse tema foi debatido calorosamente, e o relatório a ele referente foi o mais volumoso de todos os relatórios internacionais do IMUK. (SCHUBRING, 1999, p. 45).

Vemos, aqui reforçada, a ideia de que no plano discursivo o tema que tratava da inserção de elementos do Cálculo Diferencial e Integral no ensino secundário obteve grande destaque no cenário internacional. Sendo assim, comentaremos sobre a forma como essas discussões influenciaram ou não no ensino de Matemática de alguns países.

Juntamente com a estratégia observada anteriormente, houve, também, as táticas, que no lugar ditado pela estratégia "[..] só podem utilizá-los, manipular e alterar" (DE CERTEAU, 1998, p.92). Assim, alguns representantes de outros países buscaram alterar, com maior ou menor intensidade, as ideias impostas por Klein.

De acordo com Schubring (1999), países como a Inglaterra, Estados Unidos e Itália optaram pela tática da não adoção do ensino de elementos de Cálculo Diferencial e Integral no ensino secundário, sugerindo que tópicos não relacionados às ideias de Félix Klein fossem adotados. Porém, países como a Sérvia e o Brasil adotaram a ideia de uma reforma curricular proposta por Klein.

Com relação ao Brasil, Schubring (1999) e Valente (2003) indicaram que as ideias de Klein foram inseridas com maior ênfase a partir de 1930. Mas na virada do século XIX para o século XX o Brasil vivenciou seus primeiros anos dos cursos de engenharia oferecidos pelas escolas politécnicas. Sendo assim, em nosso trabalho, investigamos sobre as implicações que esses cursos trouxeram para o ensino secundário brasileiro, tomando, como foco central, o estudo do Cálculo Diferencial e Integral nas quatro décadas anteriores a 1930.

3.2 REFORMAS EDUCACIONAIS BENJAMIN CONSTANT E AMARO CAVALCANTI

As leis escolares abordadas a seguir foram popularmente e respectivamente conhecidas como reformas "Benjamin Constant" e "Amaro Cavalcanti". Essas duas leis de ensino marcaram a primeira década do período republicano no Brasil.

Concernente ao ensino secundário, as reformas Benjamin Constant e a Amaro Cavalcanti, na parte destinada a esse nível escolar, preconizam, em seus artigos primeiros, o seguinte:

Figura 5 - Artigo 1º da Reforma Benjamin Constant.

Art. 1.º O Gymnasio Nacional tem por fim proporcionar á mocidade brazileira a instrucção secundaria e fundamental, necessaria e sufficiente assim para a matricula nos cursos superiores da Republica, como em geral para o bom desempenho dos deveres do cidadão na vida social.

Fonte: Brasil (1895, p. 3865).

Art. 1.º O Gymnasio Nacional tem por fim proporcionar á mocidade brazileira a instrucção secundaria e fundamental necessaria e sufficiente não só para o bom desempenho dos deveres de cidadão, mas tambem para a matricula nos cursos de ensino superior e obtenção do gráo de bacharel em sciencias e lettras.

Figura 6 - - Art. 1º da Reforma Amaro Cavalcanti

Fonte: Brasil (1898, p.349).

Assim, entendemos que, entre as *finalidades das disciplinas escolares* impostas nesses decretos, estava presente a ideia de que a instrução oferecida no ensino secundário visava, entre outros fatores, dar base para a continuidade dos estudos em nível superior. Essa foi, também, uma preocupação demonstrada por Klein, quando de sua proposta de reforma do ensino secundário e que, possivelmente, tenha influenciado a decisão de Constant e Cavalcanti.

Na reforma Benjamin Constant, a *finalidade* de um ensino secundário como base para o ensino superior foi posta com tanta veemência, que aparece antes mesmo da questão de formar pessoas para a vida social como cidadãos. Essa é uma observação também feita por Moreira (2008), que, ao apresentar esse mesmo artigo da reforma Benjamin Constant comentou:

> [...] duas eram, portanto, aquelas finalidades. Uma delas — expressa, curiosamente, em primeiro lugar — seria "proporcionar à mocidade brasileira a instrução secundária e fundamental, necessária e suficiente [...] *para a matrícula nos cursos superiores da República*"; vê-se, daí, que o ensino secundário não perdia seu caráter *propedêutico* — pelo contrário, mantinha-o explicitamente. A outra finalidade, mais genérica, ligava-se à concepção *formativa* do ensino secundário: "proporcionar [...], *como em geral para o bom desempenho dos deveres do cidadão na vida social*". (MOREIRA, 2008, p. 122).

Outro ponto observado foi que a reforma Amaro Cavalcanti permitia a concessão do grau de Bacharel em Ciências e Letras, cujo portador poderia exercer o magistério secundário, bem como ser aprovado em concursos públicos ou ocupar cargos políticos, ser nomeado como tabelião, entre outras funções que, atualmente, são mais comumente exercidas pela classe média.

A possibilidade de receber o grau de bacharel funcionava como uma espécie de "sistema de formação compulsório de professores", expressão que denota o sentido de que, quisesse ou não, o estudante egresso do ensino secundário receberia um diploma que ele poderia usar para exercer o magistério, caso não fosse aprovado e concluísse um curso superior.

As duas reformas em questão estruturaram o curso secundário por meio de um amplo conjunto de disciplinas. Para melhor entender essa estruturação, elaboramos os quadros 1 e 2.

Quadro 1 - Distribuição das disciplinas do curso secundário – Reforma Benjamin Constant

Série	Disciplina	Carga Horária/ Semanal
1º	Aritmética (estudo completo). Álgebra elementar (estudo completo).	6
	Português. Estudo completo da gramática expositiva. Exercícios de redação (com auxílio ministrado pelo lente).	3
	Francês. Revisão da gramática elementar; leitura e tradução de autores fáceis. Versão de trechos simples e prosa. Exercícios de conversação.	3
	Latim. Gramática elementar; leitura e tradução de trechos fáceis.	3
	Geografia física, especialmente do Brasil; exercícios cartográficos. Noções concretas de astronomia	3
	Desenho, ginástica e música	2
		Total: 20
2º	Geometria preliminar. Trigonometria retilínea. Geometria especial (estudo perfunctório das seções cônicas, da conchóide, cissóide, da limaçon de Pascal e da espiral de Arquimedes).	6
	Português. Gramática histórica. Exercícios de composição.	3
	Francês. Revisão da gramática elementar: leitura e tradução de autores gradualmente mais difíceis. Exercícios de versão e conservação.	3

	Latim. Revisão da gramática, tradução de prosadores gradualmente mais difíceis.	3
	Geografia política e economia, especialmente do Brasil. Exercícios cartográficos. Estudo complementar da astronomia concreta	3
	Desenho, ginástica e música.	2
		Total: 20
3º	Geometria geral e o seu complemento algébrico. *Cálculo diferencial e integral*, limitado ao conhecimento das teorias rigorosamente indispensáveis ao estudo da mecânica geral propriamente dita.	6
	Geometria descritiva. Teoria das sombras e perspectiva. Trabalhos gráficos correspondentes.	3
	Francês. Gramática complementar. Tradução de autores mais difíceis. Exercícios de versão e conversação (estudo completo).	2
	Latim. Tradução de autores gradualmente mais difíceis (estudo completo).	2
	Inglês ou alemão. Gramática elementar; leitura, tradução e versão fácil. Exercícios de conversação.	3
	Desenho, ginástica e música.	2
	Revisão: Português, geografia.	1
		Total: 19
4º	Mecânica e astronomia.	6
	Inglês ou alemão. Revisão da gramática; leitura e tradução de prosadores fáceis. Exercícios graduados de versão e conversação.	3
	Grego. Gramática elementar; leitura e tradução de autores fáceis.	3
	Desenho, ginástica e música.	2
	Revisão: Cálculo e geometria, português, francês, latim e geografia.	1
		Total: 15
5º	Física geral e química geral.	6
	Inglês ou alemão. Leitura e tradução de autores mais difíceis. Exercícios de versão e conversação (estudo completo).	3
	Grego. Revisão da gramática; leitura e tradução de prosadores gradualmente mais difíceis.	3
	Desenho, ginástica e música.	2

	Revisão: *Cálculo e geometria*, mecânica e astronomia, geografia, português, francês e latim.	1
		Total: 15
6º	Biologia	6
	Meteorologia	3
	História universal	5
	Desenho e ginástica	1
	Revisão: *Cálculo e geometria*, mecânica e astronomia, física e química, francês, latim, inglês ou alemão, grego e geografia.	1
		Total: 16
7º	Sociologia e moral. Noções de direito pátrio e de economia política.	6
	História do Brasil.	3
	História da literatura nacional.	3
	Ginástica.	1
	Revisão: *Cálculo e geometria*, mecânica e astronomia, física e química, biologia, meteorologia, mineralogia e geologia, historia universal, geografia, francês, inglês ou alemão, latim e grego.	1
		Total: 14

Fonte: elaborada pelos autores- grifos nossos

Quadro 2 - Distribuição das disciplinas nos dois cursos – Reforma Amaro Cavalcanti

Ano letivo	Curso Realista	Curso Clássico
1º Ano	Disciplinas comuns aos dois cursos: Aritmética (3 horas), Português (5 horas), Francês (5 horas), Inglês ou Alemão (5 horas), Geografia (3 horas), Desenho (2 horas), Música (2 horas) e Ginástica (1 hora) – total 26 horas.	
2º Ano	Disciplinas comuns aos dois cursos: Aritmética (3 horas), Português (5 horas), Francês (5 horas), Inglês ou Alemão (5 horas), Geografia (3 horas), Desenho (2 horas), Música (2 horas) e Ginástica (1 hora) – total 26 horas.	Disciplina(s) específica(s) ao curso Clássico: Latim (3 horas) – total 29 horas.
3º Ano	Disciplinas comuns aos dois cursos: Aritmética (1 hora), Álgebra (3 horas), Português (5 horas), Francês (5 horas),	Disciplina(s) específica(s) ao curso Clássico: Latim (3 horas) – total 29 horas.

	Inglês ou Alemão (5 horas), Geografia (2 horas), Desenho (2 horas), Música (2 horas) e Ginástica (1 hora) – total 26 horas.	
4º Ano	Disciplinas comuns aos dois cursos: Aritmética (1 hora), Álgebra (1 hora), Geometria e Trigonometria (2 horas) Português (4 horas), Francês (4 horas), Inglês ou Alemão (4 horas), Geografia (2 horas), Zoologia e Botânica (3 horas), História Universal (2 horas), Desenho (1 hora), Música (1 hora) e Ginástica (1 hora) – total 26 horas.	Disciplina(s) específica(s) ao curso Clássico: Latim (3 horas) – total 29 horas.
5º Ano	Disciplinas comuns aos dois cursos: Aritmética (1 hora), Álgebra (1 hora), Geometria e Trigonometria (1 hora), *Cálculo e Geometria Descritiva* (3 horas), Física e Química (3 horas), Zoologia e Botânica (2 horas), Português (3 horas), Francês (3 horas), Inglês ou Alemão (3 horas), Geografia (1 hora), História Universal (2 horas) Desenho (1 hora), Música (1 hora) e Ginástica (1 hora) – total 26 horas.	Disciplina(s) específica(s) ao curso Clássico: Latim (1 hora) e Grego (3 horas) – total 30 horas.
6º Ano	Disciplinas comuns aos dois cursos: Aritmética (1 hora), Álgebra (1 hora), Geometria e Trigonometria (1 hora), *Cálculo e Geometria Descritiva* (1 hora), Mecânica e Astronomia (3 horas), Física e Química (2 horas), Mineralogia, Geologia e Meteorologia (2 horas), Biologia (1 hora), Português (2 horas), Francês (2 horas), Inglês ou Alemão (2 horas), História Universal (2 horas), História do Brasil (2 horas), Geografia (1 hora), Desenho (1 hora por semana), Música (1 hora) e	Disciplina(s) específica(s) ao curso Clássico: Latim (1 hora) e Grego (3 horas) – total 30 horas.

	Ginástica (1 hora) – total 26 horas.	
7 º Ano	______________________________	Disciplina(s) específica(s) ao curso Clássico: Aritmética (1 hora), Álgebra (1 hora), Geometria e Trigonometria (1 hora), *Cálculo e Geometria Descritiva* (1 hora), Mecânica e Astronomia (1 hora), Física e Química (1 hora), Mineralogia, Geologia e Meteorologia (1 hora), Biologia (1 hora), Francês (1 hora), Inglês ou Alemão (2 horas), Latim (1 hora), Grego (3 horas), Geografia (1 hora), História Universal (2 horas), História do Brasil (2 horas), História da Literatura Geral e da Nacional (3 horas), História da Filosofia (1 hora), Desenho (1 hora por semana), Música (1 hora) e Ginástica (1 hora) – total 27 horas.

Fonte: Elaboração própria

Pelos dados constantes nesses dois quadros, podemos notar que nas duas reformas foi instituída uma disciplina composta por Cálculo Diferencial e Integral. A diferença que se apresenta é que, na Reforma Benjamin Constant, essa disciplina foi prevista a partir do 3º ano de ensino e mantida como revisão nos quatro anos seguintes, anquanto na reforma Amaro Cavalcanti a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral era indicada a partir do 5º ano, permanecendo como disciplina, e não como revisão, no 6º e 7º ano.

O fato de ser estabelecida uma disciplina composta por Cálculo Diferencial e Integral no quadro de disciplinas do ensino secundário pode ser considerado uma *estratégia* dos autores das reformas em dar base para estudo do Cálculo Diferencial e Integral no nível superior, já que os cursos de engenharia da época também abordavam tópicos de Cálculo Diferencial e Integral.

A *estratégia* traçada por Benjamin Constant e Amaro Cavalcanti demonstra certa sintonia com as discussões curriculares ocorridas fora Brasil, tendo em vista o fato já referido anteriormente, de que em época próxima à da implantação dessas reformas houve debates de âmbito internacional acerca do estudo de elementos de Cálculo Diferencial e Integral para alunos do ensino secundário.

Quanto à questão dos docentes, as duas reformas prévia uma lista provisória de onze “lentes privativos” - expressão usada para designar os professores “donos das cadeiras”, que as ocupariam pelo seu direito de regência. A lista de lentes privativos prevista era composta das seguintes cadeiras: Língua Portuguesa, Língua Latina; Língua Grega; Língua Francesa; Língua Inglesa; Língua Alemã; Matemática Elementar; Geometria geral, Cálculo e Geometria Descritiva; Mecânica e Astronomia; Física e Química; Geografia.

Na análise dessa lista, chama-nos atenção a existência prevista de dois mestres de Matemática, um deles para atuar na cadeira denominada “Matemática Elementar” e outro para a cadeira chamada “Cálculo e Geometria Descritiva”. O critério de haver um professor específico para ensinar “Cálculo e Geometria Descritiva” e outro para as chamadas matemáticas elementares, estabelece uma diferença significativa para o nosso problema de pesquisa, no sentido de ditar a *finalidade* de uma disciplina que deveria existir diferente do que então se chamava Matemática Elementar.

André Chervel (1990) considera que a *finalidade de uma disciplina escolar* não é exatamente criada pela instituição escolar, mas por um conjunto mais amplo de instituições sociais que ditam, à escola, os objetivos maiores de uma matéria escolar. No quadro de nossos estudos, as Escolas Politécnicas do Rio de Janeiro e de São Paulo, bem como os Engenheiros Militares formados no clima do pensamento positivista, de certo modo, ditavam as finalidades maiores dessa disciplina, então chamada Cálculo e Geometria Descritiva, para qual o regulamento previa a existência de um professor privativo.

Todas essas informações a respeito da existência de uma disciplina que carrega o nome de *Cálculo Diferencial e Integral*, da presença de um professor exclusivo para tratar desse ensino e da ideia de o curso secundário ter entre as funções o compromisso de preparar seus alunos para o curso superior motivaram-nos a pensar que essas foram *estratégias* adotadas pelo legislador para corresponder à *finalidade* existente para as disciplinas de matemática, naquele período. Ou seja, essas ideias estavam associadas a um possível desejo de dar base aos alunos do ensino secundário para que eles tivessem bom desempenho nos conteúdos matemáticos propostos na formação em engenharia e, consequentemente, para o Cálculo Diferencial e Integral.

Para Chevell (1990), os exames finais podem influenciar no desenvolvimento da disciplina escolar; a isso creditamos a importância de um entendimento a respeito de como eram dados os exames finais da época.

No caso das reformas aqui abordadas, o exame aplicado no final do curso era intitulado como exame de madureza. A respeito desse exame, a reforma Benjamim Constant prevê o seguinte:

Figura 7 - Art. 38 - Reforma Benjamin Constant.

> Art. 38. A approvação no exame de madureza do *Gymnasio Nacional* dará direito á matricula em qualquer dos cursos superiores de caracter federal na Republica; ao candidato, que nelle obtiver pelo menos dous terços de notas — plenamente —, será conferido o titulo de *Bacharel em sciencias e lettras*.

Fonte: Brasil (1895, p. 3486)

Por seu turno, a reforma Amaro Cavalcanti preconiza que

> Art. 15. Nos cursos de sciencias juridicas e sociaes, no curso geral e nos especiaes de medicina e no curso geral da Escola Polytechnica e de Minas, ninguem será admittido á matricula sem que exhiba certificado de approvação em exame de madureza, salva a disposição do art. 6º, ultima parte, ou titulo de bacharel em sciencias e lettras (BRASIL, 1898, p. 354).

A respeito das possíveis influências acarretadas pelo exame de madureza, observamos, por meio desses artigos, que o fato de esse exame ser exigido ao aluno que quisesse realizar sua matrícula em algum curso superior e, ainda, no de engenharia, pode ser visto como uma *estratégia* dos autores das reformas para corresponder à *finalidade* de estabelecer alianças entre o ensino secundário e o ensino superior.

De maneira mais específica, entendemos que as Matemáticas vistas no ensino secundário poderiam ser ensinadas com o objetivo de preparar os alunos para o exame de madureza; por outro lado, poderiam ser elaboradas no sentido de exigir conceitos básicos para que o aluno pudesse dar continuidade em seus estudos no curso superior. Desse modo, preparar os alunos para o exame de madureza implicaria prepará-los, também, para o estudo no ensino superior.

Ainda sobre o exame de madureza, notamos que na reforma Amaro Cavalcanti houve uma maior aproximação entre o exame e o ensino superior. Isso porque a banca examinadora e organizadora dos programas do exame era composta por cinco integrantes, todos eles do curso superior, o que difere da reforma Benjamin Constant, na qual, além de serem os professores do secundário a proporem os pontos para o exame de madureza, a banca examinadora constava de alguns desses docentes.

Apesar dessas diferenças acerca do exame de madureza, identificamos que, nas duas reformas, esses exames poderiam contribuir para estreitar os laços ente o ensino secundário e o superior, pois, além de servirem como “ponte” entre esses dois níveis de ensino, traziam, em seu contexto de elaboração, uma decisão no sentido de a instituição superior ter sido, aos poucos, incumbida de elaborar a avalição e a de ensino secundário coube ceder o espaço físico e preparar os estudantes para esse exame final.

Vale ressaltar que destacamos essa aproximação entre o ensino superior e o secundário, tendo em vista que poderia ser pensada no Brasil de maneira semelhante à proposta feita por Felix Klein, em que a Matemática, entre outras funções, poderia esta subsidiar os estudantes para enfrentarem o estudo do Cálculo Diferencial e Integral oferecido pelos cursos de Engenharia das escolas politécnicas.

As reformas que, em partes, foram abordadas aqui, constituíram projetos ambiciosos e, como tal, exigiam um alto investimento financeiro que se contrapunha à situação econômica de nosso país, na época.

Outro fato implicado nessas reformas era o de trazerem propostas intelectuais rebuscadas, não correspondentes ao quadro profissional da época, ou seja, fugiam dos padrões financeiros e profissionais; por consequência, vieram a falhar, mas não deixaram de ser importantes, pois representaram marcos iniciais perante as leis referentes ao ensino público de nosso país.

Baseados em informações obtidas pelo estudo da obra de Silva (1969), entendemos que o regulamento Amaro Cavalcanti permaneceu ativo até, pelo menos, fevereiro de 1899, pois a obra citada anteriormente nos assegurou que o exame de madureza ocorrido nessa data ainda foi regido pela reforma Amaro Cavalcanti.

A virada para o século XX foi marcada por uma série de discussões a respeito da instrução secundária. Em meio a essas discussões, constava também uma preocupação com o formato do exame de madureza que, de acordo com Silva (1969), trazia certas desconfianças acerca de sua importância para o cenário do ensino secundário.

Como forma de reação a essas desconfianças, a reforma Augusto Tavares de Lyra, de 1907, aparenta ser a primeira a não trazer nada a respeito do exame de madureza. No entanto, há indícios de que esse exame tenha perdurado até 1910, sendo substituído pelos exames vestibulares, que tiveram seus primeiros vestígios na reforma Rivadávia Corrêa, a próxima a ser analisada neste trabalho.

3.3 REFORMA EDUCACIONAL RIVADÁVIA CORRÊA

A quinta reforma identificada por nós durante o período conhecido como "primeira república", compreendido entre os anos de 1890 a 1930, levou, em seu título, parte do nome de Rivadávia da Cunha Corrêa.

A Lei Orgânica do Ensino Superior e Fundamental na República de 1911, mais conhecida como reforma Rivadávia Corrêa, trazia, antes da parte específica destinada a assuntos relacionados ao ensino secundário, apontamentos que acreditamos implicarem diretamente em fatores ligados a este ensino e de valor considerável para o nosso trabalho.

A seguir, transcrevemos, na Figura 8, os quatro primeiros artigos dessa legislação, sobre os quais discorremos em seguida.

Figura 8 - Art. 1º, 2º, 3º e 4º da Reforma Rivadávia Corrêa.

> Art. 1.º A instrucção superior e fundamental, diffundidas pelos institutos creados pela União, não gosarão de privilegio de qualquer especie.
> Art. 2.º Os institutos, até agora subordinados ao Ministerio do Interior, serão, de ora em diante, considerados corporações autonomas, tanto do ponto de vista didactico, como do administrativo.
> Art. 3.º Aos institutos federaes de ensino superior e fundamental é attribuida, como ás corporações de mão morta, personalidade juridica, para receberem doações, legados e outros bens e administrarem seus patrimonios, não podendo, comtudo, sem autorização do Governo, alienal-os.
> Art. 4.º Nas faculdades de medicina do Rio de Janeiro e da Bahia será ministrada cultura medica; nas faculdades de direito de S. Paulo e de Pernambuco, a das lettras juridicas; na Escola Polytechnica do Rio de Janeiro, a de mathematica superior e engenharia, com todas as suas modalidades; no Collegio Pedro II se ensinarão as disciplinas do curso fundamental, com o seu desenvolvimento litterario e scientifico.

Fonte: Brasil (1911, p.492).

Esses quatro primeiros artigos dão destaque à ideia de que, nesse momento, estaria havendo certa ruptura entre os órgãos de instruções e a política pública quanto às decisões de cunho didático, administrativo e até mesmo financeiro. Entendemos que, por meio dessa nova lei, as instituições de ensino passaram a ter maior autonomia com relação a grande parte das atitudes a serem tomadas no andamento dos seus trabalhos. Além disso, entendemos também que tais *estratégias* buscavam como *finalidade* um distanciamento em relação ao propósito de as disciplinas do ensino secundário serem usadas somente como transição para o ensino superior, ideia que parece fortalecida pelos dizeres contidos no artigo sexto dessa reforma; vejamos:

Figura 9 - Art. 6º - Reforma Rivadávia Corrêa.

> Art. 6.º Pela completa autonomia didactica que lhes é conferida, cabe aos institutos a organização dos programmas de seus cursos, devendo os do Collegio Pedro II revestir-se de caracter pratico e libertar-se da condição subalterna de meio preparatorio para as academias.

Fonte: Brasil (1911, p.493).

Dessa forma, temos pelo menos dois pontos a serem examinados. O primeiro é que, entre os propósitos dessa reforma, encontra-se a preocupação em separar ensino secundário do superior, no sentido de atribuir a esses níveis de ensino funções didáticas distintas. A segunda, de certa forma é uma extensão da primeira, pois, a partir do momento em que busca essa ruptura, garante que anteriormente existia essa ligação, o que reforça as desconfianças que levantamos nas análises anteriores.

De maneira semelhante, mas tratando da legislação como um todo, Silva (1969, p. 270) citou que “em relação ao secundário, o objetivo da ‘Lei Orgânica do Ensino Superior e Fundamental na República’ era fazer com que ele adquirisse um conteúdo próprio, deixando de ser um mero estágio preparatório ao ensino superior”.

Outra mudança estipulada nessa lei, mas decorrente dessa ideia de “independência” das instituições, estava na fiscalização dos institutos de ensino. Essa tarefa passou a não ser mais do Ministério Interior e sim do Conselho Superior de Ensino. Ao conselho foram atribuídos diretamente dez artigos, com um deles dividido em onze subtópicos e outro em sete. Esses artigos tratam da composição do conselho e das atribuições do mesmo, sendo, em alguns casos, especificadas as funções dos integrantes desse conselho.

A respeito da composição do Conselho Superior de Ensino, este era constituído por diretores dos cursos de Medicina, Direito, Engenharia, além do diretor do Colégio Pedro II e de um docente de cada uma dessas instituições. Essa composição do conselho pode ser vista como uma estratégia de não se apartar totalmente o ensino secundário do superior, pois o fato de aproximar esses diretores em um conselho de tamanha grandeza para a época parece gerar a ideia de aproximação e parcialidade entre seus órgãos de ensino.

Quanto às funções deliberadas para esse conselho, pudemos ver que a ele cabia liberar ou não gastos fora do orçamento, suspender custos em caso de problemas com a ordem e disciplina, solicitar ao governo a nomeação de docentes, prestar informações ao Ministério Interior, promover reforma e melhoramentos necessários ao ensino, tendo total autonomia para resolver problemas não previstos por lei, mas de interesse dos institutos de ensino.

Entendemos, assim, que o Conselho formado por diretores dos cursos superiores e do Colégio Pedro II tinha considerável força diante das instituições de ensino existentes naquele período. Ainda a respeito do conselho, percebemos uma valorização da ciência, na medida em que o artigo décimo quinto especifica que o presidente do conselho, entre outros requisitos, deveria ser uma pessoa de alto valor e reconhecimento científico.

A respeito da parte didática foi comentado, no parágrafo único, do artigo vigésimo oitavo, que ela era de responsabilidade da congregação. No entanto, caso o diretor a considerasse inadequada, poderia recorrer ao Conselho Superior, que, por sua vez, jugaria se o ensinamento proposto deveria ser mantido ou não. Em nosso entendimento, tal prerrogativa parece indiciar um envolvimento didático do ensino superior com o secundário, o que poderia também causar implicações nas finalidades das disciplinas escolares, já que a formação do conselho era dada de forma majoritária por integrantes do ensino superior sendo valorizado o conhecimento científico.

Outro órgão de grande importância para as instituições educacionais era a Congregação. Sua composição era feita de professores ordinários, professores extraordinários efetivos, um representante dos professores extraordinários honorários e livres docentes, contando com a presença dos mestres dos institutos superiores e do Colégio Pedro II, quando o assunto fosse relacionado aos cursos oferecidos nesses estabelecimentos.

Entre as atribuições das Congregações estavam aprovar os programas de ensino e propor ao Conselho Superior medidas para o melhoramento do ensino. Entendemos que essas atribuições dadas à Congregação representam uma estratégia para permitir certa independência em relação às questões didáticas do ensino secundário, pelo fato de ser um órgão formado pelos docentes e de oportunizar que estes aprovassem os programas de ensino organizados pelos professores ordinários, prevendo, entretanto, a participação do Conselho Superior nessa decisão em casos de divergência entre professor ordinário e diretor, como já citado anteriormente.

Destacamos as estratégias relacionadas a certa autonomia do ensino secundário em relação ao ensino superior, porque esta poderia estar relacionada à finalidade de dar ao ensino secundário um caráter que não fosse exclusivamente ou predominantemente propedêutico.

Um pouco mais adiante, essa legislação tratou das condições exigidas para o requerimento e concessão de matrícula dos alunos para o curso superior, sendo que para o primeiro eram exigidas apenas idade mínima de 16 anos e idoneidade moral, enquanto para o segundo era exigida aprovação em um exame escrito e outro oral, que comprovasse a capacidade do aluno em realizar estudos concernentes com o curso escolhido. A Congregação era quem ficava responsável de escolher os examinadores dessa avaliação, que, por sua vez, eram fiscalizados pelo diretor e um representante do Conselho Superior.

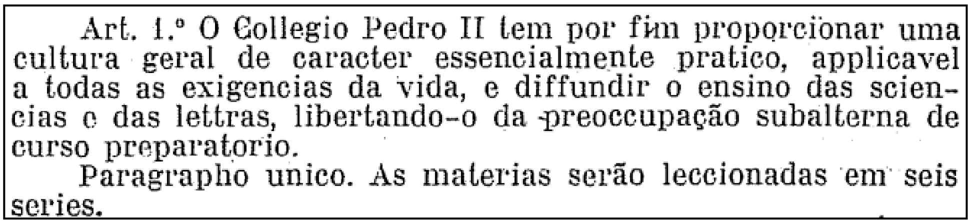
Algo que chamou nossa atenção, referente ao processo que envolvia os exames de admissão ao ensino superior, é que, aparentemente, não era exigida a comprovação do estudo secundário, conforme é possível observar neste excerto:

> como no ensino superior, postulava-se que liberto o ensino secundário dos regulamentos impostos, o livre jogo da competição o impulsionaria no caminho do aperfeiçoamento. O exame de admissão aos cursos superiores, para cuja inscrição nenhuma exigência de comprovação de estudos anteriores seria feita, habilitaria “a um juízo conjunto sobre o desenvolvimento intelectual e a capacidade do aluno para empreender eficazmente o estudo das matérias que constituem o ensino da faculdade”. Vê-se, assim, que ele deveria atender ao mesmo fim do exame de *madureza* da reforma Benjamin Constant, porém com um sentido mais liberal, pois que em vez de versar sobre as matérias de um currículo prescrito, visavam a habilitar a um “juízo de conjunto” sobre o desenvolvimento e a aptidão (SILVA, 1969, p. 271).

Diante disso, entendemos que a reforma Rivadávia Corrêa, por meio da parte destinada aos exames, propunha um distanciamento entre o ensino secundário e o superior no momento em que não considera o primeiro como pré-requisito para o ingresso no segundo.

A parte da legislação destinada ao ensino secundário, mais especificamente, ao Colégio Pedro II - Da Organização Científica do Instituto e Seu Objetivo – trazia, em seu primeiro artigo, os seguintes dizeres:

Figura 10 - Art. 1º - Reforma Rivadávia Corrêa.



Art. 1.º O Collegio Pedro II tem por fim proporcionar uma cultura geral de caracter essencialmente pratico, applicavel a todas as exigencias da vida, e diffundir o ensino das sciencias e das lettras, libertando-o da preoccupação subalterna de curso preparatorio.

Paragrapho unico. As materias serão leccionadas em seis series.

Fonte: Brasil (1911, p.513).

Esse artigo prevê um aspecto já referido anteriormente a respeito dos exames. Ele reforça a dissociação do ensino secundário e superior, quando registra: “libertando-o da preocupação subalterna de curso preparatório” e ressalta a finalidade correspondente a um ensino de caráter geral, visando uma aplicabilidade para a vida diária do estudante com foco nas ciências e letras.

O Colégio Pedro II passou a ter uma estrutura organizada na forma de “Externato” e “Internato”, em que este oferecia somente os quatro dos seis anos estipulados para a conclusão do ensino secundário, ficando a cargo do “Externato” a realização dos dois últimos anos.

Durante todo o curso as disciplinas ensinadas eram: Português, estudo prático e literário; Francês, estudo prático e literário; Inglês ou Alemão (a escolha do estudante), estudo prático e literário; Geografia geral, Chorografia[10] do Brasil e noções de cosmografia; Matemática elementar; Física e Química; História natural; Noções de higiene; Instrução cívica e noções gerais de direito; Latim e sua literatura; Grego e sua literatura; História Universal, especialmente da América e do Brasil; Desenho e ginástica.

O quadro docente do curso secundário era formado por um professor de cada uma das disciplinas citadas anteriormente, exceto matemática elementar, que contava com dois professores, o que deixa transparecer, mais uma vez, a ênfase na valorização da Matemática, tendo em vista que exigia um número maior de professores, quando comparada com as outras disciplinas.

Na reforma não continha o programa de ensino da instituição, até porque, como já citado anteriormente, isso ficava a cargo de cada estabelecimento de ensino mediante aprovação da Congregação. Mas apesar disso, a legislação aqui analisada trazia, em seu artigo sétimo, o que se chamava de linhas gerais, que deveriam ser seguidas pelos programas, ficando a cargo da matemática elementar o seguinte:

Figura 11 - Linhas Gerais que a Matemática Elementar Deveria Atender.

d) O curso de mathematica elementar dotará os estudantes de um meio poderoso de cultura mental, tendente a desenvolver o raciocinio e a proporcionar noções indispensaveis na vida pratica. De accôrdo com taes preceitos, o estudo da arithmetica abrangerá na primeira serie o systema decimal de numeração, as operações sobre inteiros e fracções, suas transformações, dizimas periodicas, fazendo-se uso do calculo mental; na segunda serie virão as proporções e suas applicações, progressões e logarithmos, e o estudo da algebra que se estenderá ás equações do primeiro gráo ; na terceira serie se completará o estudo da algebra elementar e se iniciará o da geometria com o desenvolvimento relativo á egualdade, á semelhança, á equivalencia, á rectificação da circumferencia, á avaliação das áreas e dos volumes, tudo com applicações praticas; á quarta serie caberão o desenvolvimento da algebra com o estudo do binomio de Newton, com a determinação dos principios geraes da composição das equações e sua resolução numerica pelos methodos mais simples e praticos, o estudo da geometria, que englobará o das secções conicas com o traçado e principaes propriedades das curvas correspondentes, e o ensino da trigonometria rectilinea. Um dos lentes se encarregará da 1ª e 3ª series, o outro da 2ª e 4ª, e se revesarão annualmente.

Fonte: Brasil (1911, p.514).

[10] Estudo geográfico de uma região ou de uma parte importante de um território.

Notamos, por esse documento, que, aparentemente, os estudos matemáticos relativos ao ensino secundário não visavam à continuidade no ensino superior, mas a uma educação que fosse útil à vida prática dos alunos, que fosse profissionalizante e desenvolvesse o raciocínio. Destacamos, do texto, que, em seguida ao estudo de conteúdos ligados à Álgebra e Aritmética seriam introduzidos conteúdos associados à Geometria, com a proposta de que os mesmos fossem trabalhados com vistas a aplicações práticas. Quanto ao desenvolvimento do raciocínio, os conceitos básicos propostos na primeira série eram acompanhados pela a sugestão do uso do cálculo mental.

O Quadro 3 apresenta a distribuição das disciplinas e suas respectivas cargas horárias semanais, conforme divididas pelos seis anos de curso secundário e constantes na reforma em questão.

Quadro 3 - Distribuição das disciplinas do curso secundário – Reforma Rivadávia Corrêa

Série	Disciplina	Carga Horária
1ª	Aritmética	4
	Geografia	3
	Português	3
	Francês	3
	Desenho	3
	Ginástica	3
		Total: 19
2ª	Aritmética e Álgebra	4
	Geografia	3
	Português	3
	Francês	3
	Inglês ou Alemão	3
	Desenho	3
	Ginástica	3

		Total: 22
3ª	Geometria	4
	Álgebra	
	Geografia	3
	Português	3
	Francês	3
	Inglês ou Alemão	3
	Desenho	2
	Ginástica	3
		Total: 21
4ª	Álgebra, Geometria e Trigonometria.	6
	Português	3
	Inglês ou Alemão	4
	Desenho	4
	Ginástica	3
		Total: 20
5ª	Higiene	3
	Latim	5
	Grego	3
	História Universal	4
	Física e Química	3
	História Natural	3
		Total: 21
6ª	Latim	5
	Grego	3
	História Universal	4

	Física e Química	3
	História Natural	3
	Instrução Cívica	3
		Total: 21

Fonte: elaborada pelos autores

Fazendo uma breve comparação entre as reformas analisadas até o momento, com relação à distribuição das disciplinas podemos verificar, primeiramente, que essa última apresentava um ano a menos que as outras, já que o curso integral das outras duas reformas era de sete anos enquanto nessa última era de seis.

Outro ponto a ser destacado é que a Reforma Rivadávia Corrêa não previa disciplinas que, de certa forma, tinham aproximação com o ensino superior, como Cálculo e Geometria Descritiva, mas listava disciplinas de caráter geral, como Aritmética, Álgebra, Geometria e Trigonometria. Essa constatação reforça a ideia de que na reforma Rivadávia Corrêa, não havia o interesse de tornar o secundário como estágio prévio para o ensino superior.

Ainda nesse sentido, considerando as disciplinas que em nosso entendimento tratavam exclusivamente de assuntos matemáticos, contabilizamos, na reforma Benjamin Constant, um total de 22 horas, contagem feita por meio das horas semanais de cada disciplina consideradas no ano letivo.

Já na reforma Amaro Cavalcanti constava um total de 28 horas e, por fim, a Rivadavia Corrêa trazia em seu total apenas 18 horas; mesmo que a matemática fosse a disciplina com maior carga horária, o somatório das aulas, nessa última reforma, ainda era menor que o das outras reformas consideradas aqui.

A respeito da documentação “oferecida” ao aluno no término do curso secundário, o artigo décimo dessa legislação indica que, mediante o pagamento de uma taxa o aluno receberia o **certificado** do curso fundamental.

A substituição do termo diploma por certificado representou também uma mudança, de certa forma, de caráter ideológico do curso secundário, já que “um diploma, de modo geral e pela legislação precedente, é profissionalizante e tem um valor oficial. Já um certificado é um atestado de conclusão de um curso sem os privilégios de um diploma” (CURY, 2009, p. 730).

Assim, a mudança de ensino proposta por essa legislação é representada também no documento de conclusão do curso, que, além de não mais servir como “passaporte” para o ensino superior, perdeu vantagens como as que foram referidas anteriormente, quando tratamos da reforma Amaro Cavalcanti.

Diante do que foi visto até agora, entendemos que essa última reforma trouxe, em seu contexto, estratégias que, de certa forma, buscavam distanciar suas finalidades daquelas propostas pelas reformas anteriores; com a intenção de oferecer mais liberdade de ensino, essa reforma, em determinados pontos, adotou princípios totalmente opostos aos que se tinha anteriormente.

O resultado dessa mudança aparentemente mais radical, acabou trazendo alguns problemas tanto no que refere ao ensino superior quanto ao ensino secundário, como podemos ver na seguinte citação:

> no período de vigência da lei Rivadávia, derrogados os privilégios dos institutos federais de ensino superior, e extinta equiparação, puderam livremente surgir estabelecimentos destinados à produção de bacharéis e doutores. A crer em certos testemunhos, o resultado da liberdade de ensino não foi diferente daquele facilmente previsível: a caça ao diploma, por uma clientela ávida de ascensão social ou pouco disposta a um esforço sério de justificação das posições sociais herdadas, estimula uma espécie de *encilhamento* no campo de ensino (SILVA, 1969, p. 269).

Resumindo, o que vimos, em relação às três legislações, é que elas seguiram duas vertentes opostas: uma que estreitava os laços entre secundário e superior, outra com uma visão separatista em relação a esses dois níveis de ensino; destacamos, entretanto, que esses dois “extremos” vieram a falhar, com o passar do tempo. Em seguida, apresentamos as considerações sobre a reforma de 1915 que sucedeu a Rivadavia Corrêa e como se apoiou ou não em algumas ideias apresentadas nas reformas anteriores.

3.4 REFORMA EDUCACIONAL CARLOS MAXIMILIANO

Entre o controle excessivo das instituições públicas visto nas duas primeiras reformas do início da república e a “total liberdade” da reforma Rivadávia Corrêa, Carlos Maximiliano aparentou ter escolhido o meio termo:

Figura 12 - Art. 1º Reforma Carlos Maximiliano.

Art. 1.º O Governo Federal continuará a manter os seis institutos de instrucção secundaria e superior subordinados ao Ministerio da Justiça e Negocios Interiores, dando-lhes autonomia didactica e administrativa de accôrdo com as disposições deste decreto.

Fonte: Brasil (1915, p. 1107).

A nosso ver, o autor da reforma adotou a estratégia de manter algumas autonomias na parte didática e administrativa, contudo sem ausentar o governo de supervisioná-la.

Os artigos seguintes abordam questões relacionadas a essa administração, dando a impressão de uma forte participação do governo nessas decisões, apesar de o texto do artigo 1º prever que este daria autonomia para as instituições. Fazemos esta referência pelo fato de que, ao tratar de deliberações administrativas, o texto deixava explícito que isso só viria a acontecer mediante aprovação do Ministro da Justiça e Negócios Interiores.

Quanto a questões didáticas, mais especificamente dos exames para ingressar no ensino superior, os artigos décimo primeiro e décimo quarto traziam informações que consideramos importantes para o nosso trabalho. Vejamos:

Figura 13 - Art. 11º e 14º Reforma Carlos Maximiliano**.**

Art. 11. As academias que pretenderem que os diplomas por ellas conferidos sejam registados nas repartições federaes, afim de produzirem os fins previstos em leis vigentes, requererão ao Conselho Superior do Ensino o deposito da quota de fiscalização na Delegacia Fiscal do Estado em que funccionarem.

Art. 14. O inspector inquirirá, por todos os meios ao seu alcance, inclusive o exame de toda a escripta do instituto:

a) se este funcciona regularmente ha mais de cinco annos;
b) se ha moralidade nas distribuições de notas de exames;
c) se os professores manteem cursos particulares frequentados pelos alumnos da academia;
d) se as materias constantes dos programmas são sufficientes para os cursos de Engenharia, Direito, Medicina ou Pharmacia;
e) se, pelo menos, tres quartas partes do programma de cada materia são effectivamente explicadas pelo respectivo professor;
f) se ha exame vestibular e se é este rigoroso;
g) se a academia possue os laboratorios indispensaveis e se estes são utilizados convenientemente;
h) se o corpo docente é escolhido pelo processo de concurso de provas estabelecido na presente lei;
i) se as rendas da academia são sufficientes para o custeio de um ensino integral, das materias do curso, ministrado por professores sufficientemente remunerados;
j) se a quota de fiscalização é depositada na época legal.

Fonte: Brasil (1915, p. 1108).

Basicamente, esses artigos tratam de critérios que devem ser atendidos para que instituições de ensino superior, não associadas ao governo federal, pudessem desfrutar dos prestígios oferecidos para as instituições associadas.

Entre os critérios exigidos, o item “f” foi o que chamou mais a nossa atenção. Aparentemente ele sugere que os exames permaneciam sendo elaborados e aplicados pela própria academia e visavam avaliar se o aluno possuía condições ou não de ingressar no ensino superior; contudo, esses traços já eram enxergados na reforma Rivadavia Corrêa. Esse assunto será abordado, ainda, mais adiante, entretanto, vamos tratar, aqui, dos órgãos responsáveis pela fiscalização das instituições superiores e secundárias.

De acordo com a reforma Carlos Maximiliano, cabia ao Conselho Superior auxiliar o Governo nas fiscalizações das instituições federais e daquelas equiparadas. Esse Conselho era formado por um presidente, nomeado pelo Presidente da República, os diretores dos institutos federais e um professor de cada instituto.

Aparentemente suas deliberações correspondiam mais a questões administrativas, com um item que ressalta a tarefa de promover reforma e melhoramento necessários ao ensino. Ficava a cargo do professor catedrático a função de elaborar os programas de cursos e enviá-los à Congregação para serem aprovados.

Essa Congregação era composta pelos professores catedráticos, seus substitutos e um representante dos livres docentes. Parecia ser um órgão abaixo do Conselho Superior, como uma espécie de “ponte” entre a instituição escolar e o Conselho, atuando, também, mais com questões administrativas por meio de propostas ao Conselho Superior.

Voltando a tratar dos exames, verificamos que na reforma Carlos Maximiliano os exames vestibulares iniciados na reforma Rivadávia Corrêa foram mantidos, ou seja, para o aluno realizar sua inscrição no ensino superior era necessário ter sido aprovado no exame vestibular.

Figura 14 - Art. 77. Reforma Carlos Maximiliano.

> Art. 77. Para requerer matricula nos institutos de ensino superior os candidatos deverão provar :
>
> *a*) edade minima de 16 annos ;
> *b*) idoneidade moral ;
> *c*) approvação no exame vestibular.

Fonte: Brasil (1915, p. 115).

Dessa forma, o mecanismo de exame final escolhido por Carlos Maximiliano foi semelhante ao da reforma anterior, em lugar dos exames de madureza existentes nas duas primeiras reformas do início da República. Contudo, o exame vestibular dessa reforma apresentava algumas diferenças, comparado com o da reforma anterior; uma delas refere-se às exigências em relação ao término dos estudos secundários e matrícula no exame vestibular:

Figura 15 - Art. 78. Reforma Carlos Maximiliano**.**

> Art. 78. O candidato a exame vestibular deve exhibir :
>
> *a*) certificado de approvação em todas as materias que constituem o curso gymnasial do Collegio Pedro II, conferido pelo mesmo collegio ou pelos institutos a elle equiparados, mantidos pelos governos dos Estados e inspeccionados pelo Conselho Superior do Ensino ;

Fonte: Brasil (1915, p. 115).

Entendemos que essa exigência transparece a intenção de reaproximação entre os estudos secundários ou ginasiais e o estudo superior, que foi afastada por meio da reforma Rivadávia Corrêa.

Ainda nessa linha de pensamento, temos o seguinte:

Figura 16 - Art. 81 Reforma Carlos Maximiliano.

> Art. 81. A prova oral do exame vestibular versará sobre Elementos de Physica e Chimica e de Historia Natural, nas Escolas de Medicina ; sobre Mathematica Elementar, na Escola Polytechnica, e sobre Historia Universal, Elementos de Psychologia e de Logica e Historia da Philosophia por meio da exposição das doutrinas das principaes escolas philosophicas, nas Faculdades de Direito.

Fonte: Brasil (1915, p. 1116).

Se o exame vestibular aproximou o secundário do ensino superior, então, de maneira mais pontual, a forma como foram distribuídas as disciplinas na prova oral para o acesso a cada curso superior sugere que a matemática proposta pelo secundário tinha, entre as suas *finalidades*, contribuir para a continuidade nos estudos oferecidos pelos cursos de engenharia das escolas politécnicas.

A relação entre secundário e superior podia ser vista, também, no critério de julgamento dos exames, já que eram os professores do secundário que, sob a presidência de um professor da academia, realizavam as correções dos exames.

Na parte destinada a tratar de questões do ensino secundário, encontramos, no segundo artigo dessa seção, o seguinte:

Figura 17 - Art. 158 Reforma Carlos Maximiliano.

Art. 158. Em ambas as secções se fará em cinco annos um curso gymnasial sufficiente para ministrar aos estudantes solida instrucção fundamental, habilitando-os a prestar, em qualquer academia, rigoroso exame vestibular.

Fonte: Brasil (1915, p. 1123).

Esse artigo, além de prever a duração do ensino secundário, que passou a ser de cinco anos, parece retomar o propósito de, no ensino secundário, serem ensinados conteúdos que dessem base para o estudo superior, propósito que também foi enxergado por Silva (1969, p. 273), quando, ao escrever sobre a reforma Maximiliano, refere-se ao seguinte:

> sua preocupação relativamente ao ensino secundário não é mais do que melhorar, ou firmar em bases menos precárias, sua função principal ou exclusiva, que ainda era a preparação para o ensino superior. (SILVA, 1969, p. 273).

Vale lembrar que a reforma anterior parecia se desvencilhar dessa finalidade, haja vista não ser uma exigência, para a matrícula no curso superior, um comprovante do término dos estudos secundários. Esse propósito parece ser reforçado em artigo anterior a esse, o Art. 166, destinado a tratar das matérias que constituíam o ensino secundário:

Figura 18 - Art. 166 Reforma Carlos Maximiliano.

Art. 166. As materias que constituem o curso gymnasial indispensavel para a inscripção para exame vestibular são as seguintes: Portuguez, Francez, Latim, Inglez ou Allemão, Arithmetica, Algebra Elementar, Geometria, Geographia e Elementos de Cosmographia, Historia do Brazil, Historia Universal, Physica e Chimica e Historia Natural.

Fonte: Brasil (1915, p. 1124).

Para dar sustentação à nossa ideia de que existia uma preocupação em dar base ao futuro estudante do ensino superior, por meio das disciplinas escolares, tomamos como bse a preocupação do autor da reforma em explicitar quais eram as matérias indispensáveis para o exame vestibular.

De forma mais específica, entendemos que a maneira como eram propostos os exames vestibulares visava verificar se os estudantes possuíam habilidades para iniciar seus estudos superiores, ou seja, o que era cobrado nesses exames deveria atender essas condições. O secundário presava pela aprovação dos seus alunos nesses exames, logo buscava, por meio de suas disciplinas, abordar conteúdos que dessem base para os exames e, consequentemente, para o estudo superior.

Com respeito à distribuição das disciplinas durante os cinco anos de estudos previstos para o secundário, observamos que o autor dessa reforma optou pela redução do número de disciplinas, assim como o autor da reforma anterior a esta. Vamos ao quadro:

Quadro 4 - Distribuição das disciplinas do curso secundário – Reforma Carlos Maximiliano

Série	Disciplina
1ª	Português
	Francês
	Latim
	Geografia Geral
2ª	Português
	Francês
	Latim
	Aritmética
	Chorografia do Brasil e noções de Cosmografia
3ª	Português
	Francês
	Inglês ou Alemão
	Latim
	Álgebra e Geometria plana
4ª	Inglês ou Alemão
	História Universal
	Geometria no espaço
	Trigonometria retilínea

	Física e Química
5ª	Inglês ou Alemão
	Física e Química
	História do Brasil e História Natural

Fonte: elaboração própria

Além das disciplinas expostas nesse quadro, temos informações de que eram oferecidas lições de Ginástica e Desenho, nos quatro primeiros anos. Outra questão relacionada às disciplinas é que, aparentemente, a carga horária delas era de responsabilidade de cada instituição por meio de seu regimento interno.

A reforma Carlos Maximiliano também apontava para uma valorização da Matemática, haja vista que no quadro de professores constava um professor para cada disciplina, enquanto que para a matemática havia a indicação de dois professores.

Para finalizar o estudo dessa legislação, importa concordar com Silva (1969, p.274) em sua consideração: “realmente, manter das reformas precedentes o que nelas houvesse de progressivo e fosse conciliável com a experiência anterior, foi a preocupação de Maximiliano”. Em outras palavras, Maximiliano não buscou inovar, mas manter, de outras legislações, o que acreditava ser melhor, de acordo com as condições gerais do nosso país.

Em suma, analisamos quatro legislações, duas delas no período inicial da conhecida primeira república e as outras duas vão do período intermediário até próximo ao final desse período. Em três delas encontramos indícios da finalidade de oferecer, aos alunos do secundário, condições para o estudo superior; desse modo, estipulavam, para as disciplinas escolares, conteúdos que favorecessem essa finalidade e, em particular, incluíam, na matemática, elementos que dessem base ao estudo do cálculo nos cursos de engenharia.

Assim, finalizamos esta seção e damos início a outra voltada para a apresentação e disposição dos conteúdos matemáticos, buscando identificar através desses conteúdos indícios da relação entre a matemática secundária e o Cálculo Diferencial e Integral no ensino superior.

4 PROGRAMAS DE ENSINO

Neste capítulo estabelecemos a comparação entre alguns programas propostos para o Colégio Pedro II durante os anos de 1890 a 1929. Para tanto, tomamos como parâmetro as semelhanças e diferenças apresentadas na lista de conteúdos das disciplinas de Aritmética e Álgebra, assim como os livros indicados para essas disciplinas, já que em alguns casos os programas ofereciam essa informação.

Ao todo realizamos o estudo de oito programas de ensino, correspondentes, respectivamente, aos anos de 1892, 1893, 1895, 1897, 1898, 1899, 1912, 1915 e 1926. Alguns desses programas constam na obra de Vechia e Lorenz (1998); de acordo com essas autoras os programas de ensino eram organizados em consonância com a reforma instituída na época, no mesmo ano ou no ano seguinte à implantação da reforma.

Em Vechia e Lorenz, os programas referentes às reformas de 1899 e 1901 não foram encontrados. Entretanto, na obra de Moreira (2008), esse programa foi visto, e, também, o programa para o ano de 1897.

Outra informação fornecida por essas autoras é de que “o currículo era um mecanismo utilizado na tentativa de conciliar os interesses do ensino superior e os objetivos próprios do ensino secundário” (VECHIA; LORENZ, 1998, p. vii). Por meio desse “jogo de interesses” procuramos identificar indícios de *táticas* dos autores dos programas de ensino, diante das possíveis *estratégias* das instituições políticas e do ensino superior.

4.1 PROGRAMAS DE ENSINO DE 1892 A 1898

A primeira observação que fizemos em relação aos programas de ensino para os anos de 1892 e 1893 foi no estudo referente à reforma Benjamin Constant, quando mencionamos as disciplinas especificadas como *Geometria geral, seu complemento algebrico* e *Calculo differencial e integral, limitado ao conhecimento das theorias indispensaveis ao estudo da mecanica geral propriamente dita*, assim como a presença de um professor específico para tratar desses assuntos. Porém, conforme podemos conferir nos Anexos A e B, nesses programas de ensino não consta a presença dessa disciplina e dos conteúdos que deveriam compô-la. Inferimos, dessa forma, que durante o período em que esses programas foram utilizados não houve o ensino dessa disciplina.

Encontramos uma discussão, na dissertação de Moreira (2008), na qual o autor faz referência a uma explicação de Moacyr (1941, p. 100) sobre essa questão, mostrando que ela decorre de um "ofício enviado em 18.03.1891 ao novo Ministro da Instrução, João Barbalho, pelo Sr. Ramiz Galvão, Inspetor Geral da Instrução Primária e Secundária do Distrito Federal e presidente do Conselho".

No texto a seguir trazemos a parte em que o ensino do Cálculo Diferencial e Integral foi mencionado:

> Especializemos a questão: desde que o Regulamento mandou dar aos alunos do 3º ano do Ginásio, isto é, a meninos de14 ou 15 anos de idade, geometria geral e seu complemento algébrico, cálculo diferencial e integral, limitado ao conhecimento das teorias rigorosamente indispensáveis ao estudo da mecânica geral propriamente dita, geometria descritiva, teoria das sombras, e perspectivas, trabalhos gráficos correspondentes [...], a verdade é que não há meios de fugir à maior parte das intrincadas questões de alta matemática que no projeto encontramos. As verdades destas ciências provêm de uma dedução rigorosa, os princípios concatenam-se como uma exigência imprescindível, e a teoria posterior não será jamais compreendida com proveito se não tiverem sido bem assentadas as teorias anteriores, que lhe servem de base. Como, portanto, reduzir semelhante programa a uma proporção pelo menos aparentemente razoável, sem prejudicar o nexo, a dedução lógica e, conseqüentemente, o equilíbrio mental dos alunos e a seriedade do plano geral? Nestas circunstâncias, o Conselho, em homenagem à memória do imortal autor da reforma, Benjamin Constant, que já não vive para dar-nos a orientação de seu ideal, certamente muito outro do que ora se nos oferece, o Conselho julga preferível propor francamente a modificação do plano de estudos do Ginásio Nacional por acreditar que a execução dos programas organizados sobre a base decretada a 8 de novembro não pode ser levada à prática senão com descrédito e mácula à memória do sábio legislador, com perversão de seu próprio ideal, e com gravíssimo prejuízo da mocidade [...]. O Conselho é de parecer que, sem alterar profundamente os lineamentos gerais da reforma, lhe é possível apresentar um plano de ensino mais prático, adequado à natureza dos estudos secundários, perfeitamente exeqüível, sem demasias e especializações que competem ao ensino superior, com ponderado equilíbrio das partes científicas e literária do curso do Ginásio e adaptado ao desenvolvimento intelectual dos alunos. Sendo informação prestada pelo presidente da Congregação, a maioria de lentes do Ginásio concorda com a inexeqüibilidade do plano de ensino da reforma e adota este mesmo parecer que externamos. O Conselho acredita dever imperioso de patriotismo e justa homenagem ao imortal legislador não comparticipar da responsabilidade que a aprovação de tais programas acarretaria, e recorrer ao governo submetendo-lhe a necessidade urgente de retoques na lei que regulou esta parte da instrução pública. (MOACYR, 1941, p. 100, apud, MOREIRA, 2008, p. 124).

O contexto do qual esse trecho foi retrirado abordava o fato da impossibilidade da elaboração de um programa que atendesse a todos os requisitos propostos na Reforma Benjamin Constant; entre as críticas apresentadas em relação a isso, estavam as questões matemáticas e, como podemos perceber pelos escritos anteriores, o ensino de conteúdos associados ao Cálculo Diferencial e Integral.

Nosso entendimento acerca dessas discussões, é de que os responsáveis pela elaboração e aceitação de um novo programa de ensino optaram pela *tática* de elaborar seus programas com base nas ideias educacionais propostas por Benjamin Constant, desde que não prejudicassem a aprendizagem da mocidade brasileira, referindo-se, inclusive, a um possível prejuízo mental desses adolescentes.

Após uma série de discussões entre professores, congregação de ensino, conselho de ensino e ministro da instrução, ficou decidido que as mudanças baseadas nas orientações de Benjamin Constant seriam dadas somente para o 1º ano de ensino, mantendo, para os outros anos, o que foi proposto no programa anterior. Assim, entendemos o porquê da não aparição da disciplina que tratava de conteúdos referentes ao Cálculo Diferencial e Integral.

Ainda sobre a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral sugerida na reforma Benjamin Constant, encontramos, no programa para o ano de 1895, uma disciplina que trazia tópicos relacionados ao ensino superior, que era dividida em quatro partes, sendo uma delas identificada como *Noções de cálculo diferencial e integral.* A esse respeito, temos a seguinte citação.

> [...] observemos que esta inclusão do cálculo no programa de 1895 é coerente
> com o exposto antes: se os programas a partir de 1891 deviam incluir o cálculo, mas sem exigi-lo para os alunos anteriores a 1891, e como o quarto ano dos alunos admitidos em 1891 ocorreria exatamente em 1895, então o primeiro ano em que, na prática, o cálculo seria presença obrigatória nos programas realmente executados seria o de 1895. (CARVALHO, 1996, p. 66, apud, MOREIRA, 2008, p. 138).

Outra *tática* identificada refere-se à inserção, de maneira gradativa, das sugestões feitas por Benjamin Constant; diante disso, ao invés de essa disciplina aparecer a partir do terceiro ano de ensino, como sugerido por Constant, a mesma apareceu somente no quarto ano de ensino.

Os tópicos de Cálculo Diferencial e Integral indicados pelos autores do programa para o ano de 1895 podem ser vistos no Anexo C desta dissertação. A obra indicada para tratar desses tópicos foi a de *Hippolyte Sonnet*. Seu texto original era em língua francesa; até o fechamento desta pesquisa não obtivemos informações a respeito de sua tradução para o português.

Nos programas para os anos de 1897 e 1898, que podem ser visualizados nos Anexos D e E, é possível notar, entre outras coisas, a permanência da disciplina que contemplava o estudo de tópicos de Cálculo Diferencial e Integral.

Uma das diferenças entre os programas de ensino para o ano de 1895, 1897 e 1898 é que, no do ano de 1897, os conteúdos propostos para a disciplina Cálculo Diferencial e Integral foram distribuídos em 27 tópicos, 25 a mais que nos outros dois programas. Consideramos que havia uma preocupação dos autores do programa em detalhar os conteúdos propostos para essa disciplina, sendo isso, também observado por Moreira (2008).

Outra diferença observada nesses três programas de ensino foi que, seguindo as indicações da reforma Amaro Cavalcanti, a disciplina que abordava conteúdos de Cálculo Diferencial e Integral foi sugerida no programa de ensino para o ano de 1898, a partir do quinto ano de ensino, enquanto no programa para o ano de 1897 essa mesma disciplina foi sugerida a partir do quarto ano de ensino, sendo indicada, no programa de1895, somente para o quarto ano.

A semelhança entre esses três programas está na indicação da obra que trazia a abordagem dos tópicos de Cálculo Diferencial e Integral - o livro de Cálculo de Hyppolite Sonnet, também utilizado na Escola Politécnica de São Paulo.

A *tática* de adotar a mesma obra da escola politécnica, além de transparecer uma correspondência com a finalidade escolar de preparar os alunos para o estudo do Cálculo Diferencial e Integral no ensino superior, sugere a ideia de que os autores desses programas poderiam ter sido influenciados pelas discussões educacionais ocorridas na França.

Além da disciplina que abordava conteúdos de Cálculo Diferencial e Integral no ensino secundário, também foram de nosso interesse as disciplinas de Aritmética e de Álgebra, devido a uma possível aproximação de alguns conteúdos pertencentes a essas áreas de ensino com outros específicos do estudo do Cálculo Diferencial e Integral, e, também, pela manutenção dessa disciplina durante o período investigado.

A respeito da disciplina de Aritmética, notamos que, com o passar do tempo, os autores dos programas adotaram a *tática* de dividir o ensino dessa disciplina em partes; no programa para o ano de 1892, por exemplo, Aritmética e Álgebra figuraram juntas no primeiro ano de ensino, da forma como foi sugerido por Benjamin Constant. Já no programa para 1893 foi feita uma primeira divisão, sendo Aritmética e Álgebra indicadas separadamente, ficando a Aritmética para o primeiro ano e a Álgebra para o segundo. Porém, nos programas para os anos 1895, 1897 e 1898, a disciplina de Aritmética apareceu primeiramente sozinha, no primeiro ou nos primeiros anos de ensino e, posteriormente, junto à disciplina de Álgebra, no ano ou nos anos seguintes.

Esse critério de divisão pode ter constituído uma *tática* para que os conceitos abstratos da Aritmética fossem inseridos aos poucos. Consideramos que essa tática tenha sido importante, pois essa transição de conceitos concretos para o abstrato por meio da relação entre Aritmética e Álgebra contribuiu para o estudo do Cálculo Diferencial e Integral.

A respeito do material didático sugerido nos programas de ensino que marcaram quase toda a última década do século XIX, destacamos que para o ensino de Álgebra foi sugerida, em todos os programas, a obra de Serrasqueiro. Para o ensino de Aritmética identificamos uma variedade de livros didáticos: a obra de Serrasqueiro, para o ano de 1892 e 1893; a obra de Vianna e dos irmãos Reis, para os programas de ensino de 1895, 1897 e 1898.

Sobre as obras de Serrasqueiro, Viana e dos irmãos Reis, Valente (2007) comentou que tinham certa semelhança com a Aritmética de Ottoni, que tinha as seguintes especificidades:

> a compilação de Ottoni, seus *Elementos de Aritmética,* orientam a distribuição dos conteúdos de ensino da disciplina já a partir de 1855, pelo Regulamento do Colégio Pedro II. O ensino da Aritmética passa a ser dividido em dois exatamente seguindo numa primeira parte a Aritmética sem uso de expressões literais o noutro com a notação algébrica. Trata-se do embrião do ensino seriado da matemática escolar. (VALENTE, 2007, p.151).

Consideramos, aqui, a ideia de que os autores dos programas buscaram dispor o ensino de Aritmética e Álgebra de forma a que as abstrações dessas disciplinas fossem dadas gradativamente.

Tendo em vista a *finalidade* de o ensino secundário dar base para o estudo no ensino superior, entendemos que os conteúdos que poderiam dar suporte para o estudo do Cálculo Diferencial e Integral das escolas de engenharia eram as *conversões: frações periódicas e contínuas*, devido aos conceitos de aproximações, infinito e infinitésimo; *função e equação,* que inclusive foram mencionados por

Moreira (2008) como conteúdos de base ao estudo do Cálculo Diferencial e Integral; *equações exponenciais*, que poderiam ter relação com o Cálculo Diferencial e Integral, pois, além de poder ser abordado como uma função, contribuía com a ideia de valores infinitamente grandes ou pequenos.

4.2 PROGRAMAS DE ENSINO DE 1899 A 1915

Os programas de ensino sugeridos para os anos de 1899 a 1915 trouxeram alguns aspectos divergentes dos que foram explicitados até agora. A primeira observação que fazemos diz respeito à retirada da disciplina que abordava tópicos de Cálculo Diferencial e Integral, cuja justificativa para o fato pode ser encontrada na seguinte explicitação constante no programa de ensino para o ano de 1899:

> No caso de mathematica elementar o lente considerará as disciplinas a seu cargo não só como um complexo de theorias uteis em si mesmas, de que os alumnos deverão ter conhecimento para applical-as ás necessidades da vida, sinão tambem como um poderoso meio de cultura mental, tendente a vivificar e desenvolver a capacidade de raciocinio. Os limites desta maneira deverão ser assaz restrictos, afim de que não possa acontecer que os alumnos se vejam opprimidos de excesso de extensão e difficuldades. (BELTRAME 2000, p. 195 apud, MOREIRA, 2008, p. 213).

Por esse excerto, entendemos que o estudo do Cálculo Diferencial e Integral teria sido retirado pelo fato deos autores do programa terem entendido esse estudo como algo dotado de uma complexidade excessiva para os alunos do ensino secundário. Mesmo com a possível retirada dessa disciplina, não acreditamos que as Matemáticas do ensino secundário tenham deixado de oferecer subsídios ao ensino do Cálculo Diferencial e Integral, já que os conteúdos relacionados a Aritmética e a Álgebra poderiam contribuir nesse sentido.

Outro ponto divergente, aqui, em relação aos programas anteriores, foi a não indicação dos livros que deveriam ser seguidos para as disciplinas de Aritmética e Álgebra. Uma justificativa para isso poderia ser a de que

> [...] certos programas foram explanados de modo geral com o fito de dar a mais absoluta liberdade ao methodo didactico dos professores extranhos ao Gymnasio Nacional; é o caso do programma de mathematica, onde a commissão preferiu, em vez de enunciar os theoremas e problemas, indicar as theorias que devem ser exigidas no ensino e sobre que devem versar os exames; desse modo não se obrigará [sic] todos os professores de instrucção secundaria a seguirem a mesma marcha e os mesmos processos de demonstração. (BELTRAME 2000, p. 195 apud, MOREIRA, 2008, p. 212).

Com isso, entendemos que a não indicação de uma obra didática seria uma *tática* adotada pelos autores desses programas de ensino, no sentido de não interferir na maneira como os conteúdos seriam apresentados aos alunos. Essa medida foi algo relevante para a nossa pesquisa, pois além das leis de ensino e da lista de conteúdos, usamos a abordagem didática contida no livro para analisar a relação com o estudo do Cálculo Diferencial e Integral no ensino superior.

Voltando a falar da aparente liberdade didática contida nos programas de ensino, observamos que esta teve mais expressividade no programa de ensino para o ano de 1912. Além de não indicar as obras didáticas, o programa para esse ano não especificava a disciplina à qual os conteúdos pertenciam, o que pode ser conferido no Anexo G. A quantidade de tópicos de conteúdos desse programa foi menor do que a de qualquer outro analisado nesta pesquisa, o que supõe uma preocupação dos autores em não especificar o conteúdo a ser trabalhado.

Já o programa de 1915 não apresentou a mesma autonomia observada no programa de 1912. A quantidade de tópicos, que no programa para 1915 eram tratadas como lições, foi a maior entre os programas analisados (cf. Anexo H). A esse respeito, Gussi (2011, p. 90) explicita que “a divisão dos conteúdos em lições representa, apenas, simplesmente uma forma de organizar, melhor, o programa de ensino”, o que pode ser visto, também, como uma resposta à “liberdade didática” observada no programa para o ano de 1912.

Os conteúdos de Aritmética que poderiam dar base ao estudo do Cálculo Diferencial e Integral estavam associados aos tópicos de fração. No programa de 1899 notamos a permanência dos conteúdos *frações decimais periódicas, noções de frações contínuas.* No programa de 1912, diante da suposta autonomia, foi dado somente um único tópico intitulado como *fração.*

Quanto aos conteúdos do programa de 1915, pressupomos que *quocientes aproximados*, *conversão de frações ordinárias em frações decimais* e *dízimas periódicas* poderiam ter contribuído para o estudo prévio do Cálculo Diferencial e Integral.

Com relação à Álgebra, notamos uma baixa em relação aos conteúdos de *função*, que constavam desde o programa de 1892, e *equação exponencial*, sugerido desde o programa para o ano de 1893.

Outro ponto relacionado à disciplina de Álgebra foi que, a partir do programa de 1912, parece ter ocorrido uma desassociação da Aritmética e uma união com a

Geometria. Esta suposição está relacionada ao fato de que, no programa de 1912, no terceiro ano de ensino, alguns tópicos algébricos foram dados juntos aos de geométricos. Já no programa para o ano de 1915 a disciplina de Álgebra foi indicada junto à de Geomertria, no terceiro ano de ensino.

A suposta separação entre Aritmética e Álgebra também foi citada por Valente (2007), no momento em que o autor fez uma abordagem sobre a obra Elementos de Aritmética por FIC[11], obra que ele comentou ter sido indicada até 1922 para o ensino secundário do Colégio Pedro II.

> outra observação a ser feita sobre os *Elementos de Aritmética por FIC* é a preocupação de não incluir elementos algébricos no tratamento dos temas da Aritmética. Não há o emprego da notação literal ao longo do livro. Isso possivelmente reflete o que bem notou Glaeser (1984, p.131) nos *Exercices d´Arithmétique par FIC* onde é possível ler o seguinte do abade Moigno: "A invasão dos procedimentos algébricos no ensino da Aritmética será um malefício, pois a Álgebra torna preguiçosos e superficiais os espíritos que o estudo da Aritmética tornaria ativos e profundos. (VALENTE, 2007, p. 186).

Essa separação entre a Aritmética e a Álgebra tratou-se de um ponto relevante, já que alguns tópicos de Aritmética poderiam ser dados sem contemplar a transição de conceitos concretos para o abstrato, o que, na verdade, consideramos negativo em relação ao estudo inicial do Cálculo Diferencial e Integral.

4.3 PROGRAMA DE ENSINO PARA O ANO DE 1926

Após os programas de ensino para o ano de 1915, Gussi (2011) citou que, de 1919 até 1925, para cada ano foi elaborado um programa de ensino; o de 1919 apresentava algumas diferenças em relação aos três posteriores e o de 1923, em relação aos dois posteriores.

Ressaltamos que não tivemos acesso a esses programas, contudo, pela leitura dos escritos de Gussi (2011), observamos que uma das *táticas* adotadas pelos autores dos programas de ensino do Colégio Pedro II foi a de voltar a indicar obras didáticas, o que contribuiu para que analisássemos a maneira didática com que alguns conteúdos foram apresentados, buscando estabelecer relação com o estudo do Cálculo Diferencial e Integral.

O programa de ensino para o ano de 1919 indicou apenas a "[...] Aritmética, dos Frades da Instrução Cristã (F.I.C), traduzido por Raja Gabaglia, professor do Colégio Pedro II". (Gussi, 2011, p. 95), enquanto o de 1923 adotou a obra de

[11] Frères de l'Instruction Chétienne.

Euclides Roxo, para a Aritmética, a de Serrasqueiro e a de Joaquim Lisboa, para a Álgebra, destacando que a obra de Serrasqueiro foi indicada de 1892 até 1898.

Assim como no programa de ensino para o ano de 1915, as disciplinas de Aritmética e Álgebra figuraram em anos de ensino diferentes. A Aritmética foi indicada para o primeiro e segundo ano de ensino, nesse ano de 1919.

No primeiro ano de ensino a disciplina de Aritmética é apresentada com a observação de que “o ensino terá, no primeiro ano, um caráter acentuadamente prático” (VECHIA; LORENZ, 1998, p. 250). Tal observação indica, entre outras coisas, que, no primeiro ano, aparentemente, a abordagem dos conteúdos era feita de forma não muito aprofundada.

Essa disciplina voltou a ser indicada no segundo ano de ensino, aparentando uma tentativa de detalhamento dos conteúdos propostos no primeiro ano, já que eles foram propostos novamente e, em alguns casos, foram indicados os estudos de método, definições, notação, propriedades, teoria e teoremas, relacionados a esses conteúdos.

A divisão proposta para o ensino de Aritmética pode ser considerada como uma *tática* dos autores do programa de ensino, em que, primeiramente, era apresentada a parte concreta dessa disciplina e, depois, feita ampliação e formalização de alguns conceitos Aritméticos, estabelecendo, assim, uma relação entre a parte concreta e abstrata da Aritmética. Ter noção do porquê e como o conceito foi formalizado poderia contribuir com o estudo do Cálculo Diferencial e Integral no ensino superior.

Em relação aos conteúdos de ensino propostos para a Aritmética, os pontos que achamos importantes foram em relação ao estudo da *conversão de uma fração ordinária em decimal, dízimas periódicas, definição, determinação da geratriz, características de convertibilidade e também da extração da raiz quadrada e cubica, a menos de uma unidade e com uma aproximação dada, de um inteiro ou fracionário*. Destacamos esses pontos, pois acreditamos em uma relação entre esses conceitos e o conceito de infinito, infinitésimos e as aproximações, sendo estes últimos importantes para o estudo do Cálculo Diferencial e Integral.

As obras adotadas para o ensino de Aritmética, tanto no primeiro ano de ensino quanto no segundo, eram as de Euclides Roxo, Cecil Thiré e H. Costa, E. Roxo e O. Castro. Ressaltamos que não tivemos acesso a essas obras.

A disciplina de Álgebra era oferecida no terceiro ano de ensino e os seus conteúdos foram divididos em dezesseis tópicos. Entre esses tópicos notamos que o conteúdo *equação exponencial* voltou a ser indicado, tema que, de acordo com os programas estudados por nós, foi sugerido a partir de 1893 e deixou de ser citado nos programas de 1912 e 1915.

Outro dado importante para o nosso trabalho refer-se à indicação da Álgebra de Serrasqueiro, que apareceu junto às Lições de Álgebra, de Joaquim Barbosa, e os Exercícios de Álgebra, de H. Costa, E. Roxo e O. Castro.

Um fato que nos chamou a atenção foi que, apesar de o conteúdo função não aparecer no programa, os conteúdos de expressão algébrica e valor numérico das expressões algébricas figuravam, respectivamente, nesse programa de ensino; nessa mesma ordem, eles apareciam no livro de Serrasqueiro, sendo o estudo de função referenciado entre eles, o que poderia sugerir que ele tivesse sido estudado.

Ainda nesse sentido, o conteúdo *equação exponencial*, ao ser trabalhado no livro de Serrasqueiro, fez uso do conceito de *função* e também do conceito de *frações contínuas*, o que favorecia um possível estudo desses conceitos, que, por sua vez, mantiveram certa relação com conceitos apresentados no estudo do Cálculo Diferencial e Integral no ensino superior.

O programa para o ano de 1926 foi o último a constar no período investigado por nós, pois, de acordo com Vechia e Lorenz (1998), o programa seguinte só foi proposto para o ano de 1929, já não previsto para o nosso estudo.

Durante o estudo feito nos programas de ensino que tivemos acesso, buscamos encontrar pontos que, de certa forma, poderiam ter ligação com estudo do Cálculo Diferencial no ensino superior.

A partir dos dados obtidos, destacamos algumas obras e conteúdos de ensino propostos para o período investigado. É a respeito da forma como esses conteúdos foram abordados nos livros didáticos e a suposta relação com o estudo do Cálculo Diferencial e Integral que abordamos no capítulo que se segue.

5 LIVROS DIDÁTICOS

As informações obtidas por meio da leitura dos trabalhos de Oliveira (2004) e Lima (2008) indicaram que a disciplina de cálculo, oferecida pelos cursos de engenharia de São Paulo e Rio de Janeiro, tinha um caráter voltado para a prática do futuro engenheiro, ou seja, os conteúdos ensinados no curso eram apresentados de forma que pudessem contribuir com o ofício desse profissional.

Nesse sentido, Lima (2012, p. 79) comenta que

> nos casos dos cursos de Cálculo da Academia Real Militar do Rio de Janeiro e da Escola Politécnica de São Paulo, as grades curriculares eram construídas com a finalidade de formar profissionais da área militar e engenheiros; pessoas que deveriam ser capazes de utilizar, em seu cotidiano profissional, as ferramentas fornecidas pela Matemática. No entanto, aparentemente não eram apresentadas situações práticas envolvendo as aplicações dos conceitos do Cálculo; o conteúdo resumia-se basicamente a derivação e integração, sempre com ênfase nas regras destes processos, nos exercícios de cálculo. E os próprios livros-textos eram adotados levando em consideração este objetivo. [...] Esse caráter prático, supervalorizando as regras foi, sem dúvida, umas das principais características do ensino da disciplina no Brasil durante todo o século XIX e início do século XX.

Munidos dessas informações, buscamos identificar vestígios de materiais didáticos utilizados nas escolas superiores do Rio de Janeiro e de São Paulo, para, em seguida, estabelecer relação entre alguns conteúdos apresentados em textos do ensino superior e outros contemplados nas obras utilizadas no ensino secundário, no sentido de avaliar como estes poderiam oferecer subsídios para o entendimento daqueles.

No que diz respeito à politécnica do Rio de Janeiro, verificamos que “[...] ao contrário do que ocorreu na Europa, não foi adotado um livro texto de Cálculo escrito especialmente para esse tipo de escola (LIMA, 2008, p. 12) ”. Ainda nesse sentido, o mesmo autor indicou a obra *Traité Élémentaire de Calcul Différentiel et de Calcul Intégral*, escrita por Lacroix, como texto base para os estudos do cálculo na Escola Real Militar do Rio de Janeiro, até aproximadamente o final do século XIX; até o fechamento de nossa pesquisa não identificamos nenhum material didático que era seguido nas aulas de Cálculo oferecida pela politécnica do Rio de Janeiro no período investigado por nós.

5.1 ELEMENTOS DO CÁLCULO INFINITESIMAL POR HYPPOLITE SONNET

A Escola Politécnica de São Paulo, que, segundo Lima (2012), foi criada no formato *Eidgenössische Technische Hochschule* de Zurique, utilizava, até 1934, de acordo com Oliveira (2004), o livro *Premiers Élements du Calcul Infinitesimal* de Hyppolite Sonnet, como referência para as aulas de Cálculo Diferencial Integral. Assim, voltamos nossos olhares para essa obra, em busca de alcançar o propósito referido anteriormente. Nossa primeira atitude em relação a isso foi traduzir algumas páginas da obra de Sonnet, já que o arquivo encontrado estava em francês. Apresentamos, a seguir, imagens de algumas partes do texto original.

Figura 19 - Folha de rosto da obra de Cálculo de H. Sonnet


PREMIERS ÉLÉMENTS

DU

CALCUL INFINITÉSIMAL

A L'USAGE DES JEUNES GENS

QUI SE DESTINENT

A LA CARRIÈRE D'INGÉNIEUR

PAR

H. SONNET

TROISIÈME ÉDITION

PARIS

LIBRAIRIE HACHETTE ET Cie

79, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, 79

1884

Tous droits réservés.

Fonte: Sonnet (1884)

PREMIERS ÉLÉMENTS

DU

CALCUL INFINITÉSIMAL

PREMIÈRE PARTIE

PREMIERS ÉLÉMENTS DU CALCUL DIFFÉRENTIEL

I. — NOTIONS PRÉLIMINAIRES

1. — Le calcul différentiel est la partie des mathématiques qui traite des variations infiniment petites des fonctions.

2. — On sait qu'une variable y est dite *fonction* d'une autre variable x, si y varie avec x, et si y prend une ou plusieurs valeurs déterminées quand on attribue une valeur déterminée à x. Ainsi, en coordonnées rectilignes, l'ordonnée d'une courbe est une fonction de l'abscisse.

Si la relation qui lie x et y est exprimée par une équation résolue par rapport à y, comme $y = f(x)$, on dit que y est une fonction *explicite* de x. Si cette relation est exprimée par une équation non résolue, comme $f(x, y) = 0$, on dit que y est une fonction *implicite* de x. Dans l'un et l'autre cas, x prend le nom de *variable indépendante*; c'est celle à laquelle on

1

Figura 20 - Primeira página da obra de Cálculo de H. Sonnet

Fonte: Sonnet (1884, p.1)

Figura 21 - Segunda página da obra de Cálculo de H. Sonnet.

2 PREMIERS ÉLÉMENTS DU CALCUL INFINITÉSIMAL.

attribue des valeurs particulières pour en déduire les valeurs correspondantes de la fonction y.

3. — De même, une variable z est dite fonction de deux autres variables x et y, si elle varie en même temps que x et y, et si elle prend une ou plusieurs valeurs déterminées quand on attribue des valeurs déterminées à x et y. Ainsi, en coordonnées rectilignes, l'ordonnée z d'une surface courbe est une fonction des deux autres coordonnées x et y.

C'est une fonction *explicite* si la relation qui lie les trois variables est exprimée par une équation résolue par rapport à z comme $z=f(x,y)$; c'est une fonction *implicite* si cette relation est exprimée par une équation non résolue, comme $f(x,y,z)=0$. Dans l'un et l'autre cas, x et à y sont les *variables indépendantes;* ce sont celles auxquelles on attribue des couples de valeurs particulières, pour en déduire les valeurs correspondantes de la fonction z.

4. — On pourrait avoir à considérer des fonctions de plus de deux variables indépendantes, comme $z=f(x,y,t)$, ou $f(x,y,z,t)=0$.

5. — On appelle *infiniment petit* une quantité qui tend vers zéro, et que l'on considère dans un état très-voisin de sa limite.

Il résulte de cette définition que si un infiniment petit α est ajouté à une quantité finie et déterminée a, on peut toujours négliger α devant a, puisque, à la limite, $a+\alpha$ se réduit à a. Il en serait de même si a tendait lui-même vers une limite finie a_1 ; car, à la limite, $a+\alpha$ se réduirait à a_1.

6. — Dans une question où l'on a divers infiniment petits à considérer, il y en a toujours un auquel on rapporte tous les autres, et que, pour cette raison, on appelle *infiniment petit principal*.

Soit α l'infiniment petit principal ; et soit β un autre infiniment petit qu'on lui compare. Si le rapport $\frac{\beta}{\alpha}$ tend vers une

Fonte: Sonnet (1884, p.2)

Figura 22 - Terceira página da obra de Cálculo de H. Sonnet.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES. 3

limite finie k, différente de zéro, on dit que β est un *infiniment petit du premier ordre ;* et l'on peut le représenter par $k\alpha$. Si le rapport $\frac{\beta}{\alpha}$ tend vers un infiniment petit du premier ordre $k\alpha$, on dit que β est un *infiniment petit du second ordre ;* et l'on peut le représenter par $k\alpha^2$. Si le rapport $\frac{\beta}{\alpha}$ tend vers un infiniment petit de second ordre $k\alpha^2$, on dit que β est un *infiniment petit du troisième ordre ;* et l'on peut le représenter par $k\alpha^3$. En général, si un infiniment petit peut être représenté par $k\alpha^n$, on dit que c'est un *infiniment petit de l'ordre* n.

7. — La somme de plusieurs infiniment petits du même ordre, en nombre déterminé, est encore un infiniment petit du même ordre. Car si $k\alpha^n$, $k'\alpha^n$, $k''\alpha^n$, ..., représentent les infiniment petits considérés, leur somme sera

$$(k + k' + k'' + \ldots)\,\alpha^n.$$

Or les termes étant en nombre déterminé, la quantité entre parenthèses est une quantité finie K ; la somme cherchée est donc $K\alpha^n$, c'est-à-dire un infiniment petit de l'ordre n.

8. — La différence de deux infiniment petits du même ordre $k\alpha^n$ et $k'\alpha^n$ est un infiniment petit du même ordre $(k - k')\,\alpha^n$.

9. — Le produit d'un infiniment petit $k\alpha^n$ par un facteur fini A est encore un infiniment petit du même ordre. Car $Ak\alpha^n$ ou $Ak\,.\,\alpha^n$ est encore le produit de α^n par un facteur fini Ak.

10. — Le rapport de deux infiniment petits du même ordre $k\alpha^n$ et $k'\alpha^n$ est une quantité généralement finie $\frac{k}{k'}$. (Ce n'est que dans des cas particuliers que ce rapport prend la valeur *zéro* ou une valeur *infinie.*)

11. — Un infiniment petit d'ordre n, soit $k'\alpha^n$, peut tou-

Fonte: Sonnet (1884, p.3)

Figura 23 - Quarta página da obra de Cálculo de H. Sonnet.

4 PREMIERS ÉLÉMENTS DU CALCUL INFINITÉSIMAL.

jours être négligé vis-à-vis d'un infiniment petit de l'ordre immédiatement inférieur $k\alpha^{n-1}$. Car la somme $k\alpha^{n-1}+k'\alpha^{n}$ peut s'écrire $\alpha^{n-1}(k+k'\alpha)$. Or l'infiniment petit $k'\alpha$ peut être négligé vis-à-vis de la quantité finie k, et il reste $k\alpha^{n-1}$.

Généralement, tout infiniment petit peut être négligé vis-à-vis d'un infiniment petit d'un ordre inférieur ; comme $k'\alpha^2$ devant $k\alpha$, par exemple, ou $k'\alpha^3$ devant $k\alpha^2$; etc.

12. — Lorsque deux variables x et y sont liées par une relation telle que

$$(1) \qquad y=f(x),$$

si l'on donne à x un accroissement Δx, il en résulte pour y un accroissement correspondant, positif ou négatif, Δy ; et l'on a

$$y+\Delta y=f(x+\Delta x);$$

d'où l'on déduit par soustraction

$$(2) \qquad \Delta y=f(x+\Delta x)-f(x).$$

Les accroissements Δx et Δy portent le nom de *différences*.

La fonction f est dite *continue*, si l'on peut prendre Δx assez petit pour que Δy puisse être rendu moindre que toute quantité donnée. Nous ne considérerons que les fonctions continues, les seules que l'on rencontre dans les applications. Dans ce cas, si Δx devient infiniment petit, il en est en général de même de Δy ; les différences prennent alors le nom de *différentielles* ; et l'on remplace la caractéristique Δ par la caractéristique d. On écrit ainsi

$$(3) \qquad dy=f(x+dx)-f(x).$$

La différentielle dy de la fonction y est donc l'accroissement que $f(x)$ a éprouvé quand on a ajouté à x sa différentielle dx.

La partie de l'analyse qui a pour objet principal la recherche des différentielles est le *calcul différentiel* ; et chercher la

Fonte: Sonnet (1884, p.4)

Figura 24 - Quinta página da obra de Cálculo de H. Sonnet.

PRINCIPES DE DIFFÉRENTIATION. 5

différentielle d'une fonction est ce que l'on appelle *différentier* cette fonction.

Nous nous occuperons d'abord des fonctions d'une seule variable, en commençant par les fonctions explicites.

II. — PRINCIPES DE DIFFÉRENTIATION

§ I. — DIFFÉRENTIATION DES FONCTIONS EXPLICITES

FONCTIONS EXPLICITES D'UNE SEULE VARIABLE

13. — Divisons par Δx les deux membres de l'équation (2) du numéro précédent ; il viendra

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Si l'on fait tendre Δx vers *zéro*, Δy tendra aussi vers *zéro;* mais le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ne deviendra pas pour cela indéterminé ; il tend toujours, comme le calcul le démontrera, vers une limite déterminée; cette limite est encore une fonction de x, qui *dérive* de $f(x)$, et que pour cette raison on appelle *fonction dérivée* ou simplement *dérivée*, et qu'on désigne par la notation $f'(x)$.

On écrit en conséquence

$$(4) \quad \lim.\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim.\ \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

On voit, d'après cette relation, que *la dérivée d'une fonction est la limite du rapport entre l'accroissement de cette fonction et l'accroissement de la variable*, et que, *pour obtenir cette dérivée, il faut, dans la fonction* $f(x)$, *changer* x *en* $x+\Delta x$, *retrancher* $f(x)$ *de* $f(x+\Delta x)$, *diviser le reste par* Δx, *et chercher la limite vers laquelle tend le quotient lorsque* Δx *tend vers zéro.*

Fonte: Sonnet (1884, p.5)

Figura 25 - Sexta página da obra de Cálculo de H. Sonnet.

6 PREMIERS ÉLÉMENTS DU CALCUL INFINITESIMAL.

14. — D'un autre côté, il résulte de la relation (4) que $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ est égal à $f'(x)$ plus une quantité ε qui tend vers zéro en même temps que Δx, et qu'on peut écrire

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon.$$

Si l'on remplace les accroissements Δx et Δy par les infiniment petits dx et dy, ε devient aussi un infiniment petit, que l'on peut négliger vis-à-vis de la quantité finie $f'(x)$, et il reste

$$\frac{dy}{dx} = f'(x). \tag{5}$$

On en tire

$$dy = f'(x)dx. \tag{6}$$

Cette relation exprime que *la différentielle d'une fonction est égale à sa dérivée*, *multipliée par la différentielle de la variable.*

La relation (5) montre que réciproquement *la dérivée d'une fonction est égale à sa différentielle divisée par la différentielle de la variable.*

On voit que le calcul des différentielles revient au calcul des dérivées.

Remarque. Lorsque la dérivée est représentée par $\frac{dy}{dx}$, elle prend souvent le nom de *coefficient différentiel.*

15. — La relation (4) du n° 13 indique la marche à suivre pour trouver la dérivée d'une fonction explicite de x. Mais on n'applique directement cette règle qu'à trois fonctions fondamentales : x^m (pour m entier et positif), $\log x$, et $\sin x$. A l'aide de principes faciles à établir, on déduit ensuite de la différentiation de ces trois fonctions celle de toutes les autres.

16. — Soit donc d'abord $y = x^m$. Si, pour se conformer à

Fonte: Sonnet (1884, p.6)

Figura 26 - Sétima página da obra de Cálculo de H. Sonnet.

PRINCIPES DE DIFFÉRENTIATION. 7

la règle du n° 13, on change x en $x+\Delta x$, par suite y en $y+\Delta y$, et qu'on développe, on obtient

$$y+\Delta y = x^m + m\,.\,x^{m-1}\Delta x + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}x^{m-2}\Delta x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}x^{m-3}\Delta x^3 + \ldots;$$

les termes non écrits contenant tous le facteur Δx à des puissances supérieures à la troisième. En retranchant ces deux égalités membre à membre, et divisant ensuite par Δx, on trouve

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = mx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}x^{m-2}\Delta x + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}x^{m-3}\Delta x^2 + \ldots;$$

les termes non écrits contenant tous le facteur Δx à des puissances supérieures à la seconde.

Faisons tendre Δx vers zéro ; le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tendra vers la dérivée de y, que l'on représente habituellement par y' ; tous les termes du second membre, à l'exception du premier, contenant le facteur Δx, tendront chacun vers zéro ; et, comme ils sont en nombre fini, leur somme tendra elle-même vers zéro ; il viendra donc

$$y' = mx^{m-1},$$

et par conséquent

$$dy = mx^{m-1}dx, \quad \text{ou} \quad d\,.\,x^m = mx^{m-1}dx,$$

c'est-à-dire que, *pour différentier* x^m, *il faut multiplier par l'exposant* m, *diminuer ensuite cet exposant d'une unité, et multiplier par* dx.

On tirerait ainsi, par exemple,

$$\text{de} \quad y = x^5, \qquad dy = 5\,x^4\,dx,$$
$$\text{de} \quad y = x^9, \qquad dy = 9\,x^8\,dx,$$

et ainsi de suite.

Fonte: Sonnet (1884, p.7)

5.1.1 Noções preliminares

Antes de iniciarmos a transcrever e comentar, na versão[12] em português, as sete primeiras páginas da obra de Sonnet, conforme apresentadas nas figuras anteriores, vale destacar que o intuito de trazermos parte dessa obra em nosso texto, é de analisar as aproximações entre conteúdos matemáticos do ensino secundário com os que compõem o estudo inicial do Cálculo Diferencial e Integral no ensino superior. Apesar de o nosso interesse, quase que total, estar voltado às matemáticas do ensino secundário, era preciso ter conhecimento de alguns vestígios didáticos do Cálculo Diferencial e Integral no ensino superior, para justificar essa proximidade.

É preciso que tenhamos em mente que o momento histórico ao qual a obra de Sonnet pertenceu era diferente do nosso; isso representa dizer que coube a nós identificar alguns conceitos primários considerados importantes para o estudo do Cálculo Diferencial e Integral, com base na visão de Sonnet, para, em seguida, estabelecermos uma relação com conceitos presentes nos livros didáticos de Matemática do ensino secundário, que poderiam ter contribuído para o processo de *aculturação em massa*, dando base para o estudo do Cálculo Diferencial e Integral no ensino superior.

Dessa forma, influenciados por Chervel (1990), destacamos algumas características ou categorias pertencentes à educação matemática, identificadas retiradas de Sonnet (1884), ao mesmo tempo em que explicitamos nosso entendimento acerca dessas características.

Começamos por destacar a *definição* que o autor oferece em relação ao cálculo diferencial.

> 1. - O cálculo diferencial é a parte da matemática que trata das variações infinitamente pequenas das funções. (SONNET, 1884, p.1).

O fato de o autor iniciar uma temática por meio da definição associa-se ao método ou procedimento adotado para conduzir a escrita de sua obra. Primeiramente ele define a área da matemática à qual sua obra pertence. Essa é uma prática também vista na Álgebra de Serrasqueiro e nas Aritméticas de Vianna e do irmão Reis.

---

[12] Entendemos nosso texto como versão, pois em alguns momentos fizemos alterações nas palavras originais na busca de conservar a intenção original do autor. O texto não foi encontrado em língua portuguesa.

Ao fazer essa definição, Sonnet deixa explícita uma divisão da Matemática em setores e aponta que um deles é denominado cálculo diferencial, sendo suas abordagens referidas aos conceitos de variações, infinitésimos (*infiniment petits*) e funções.

Entendemos que a presença desses conceitos na definição sugere a importância dos mesmos para o entendimento desse setor de conhecimento que é o cálculo. Em outras palavras, apontam para os requisitos ou pré-requisitos importantes para o entendimento dessa parte da matemática.

No item seguinte o autor apresenta outras definições, mas com a diferença de que essas eram referentes a conceitos matemáticos e não a uma área especifica da ciência Matemática.

> 2. **-** Sabemos que uma variável y é dita função de outra variável x, se varia com x, e se y leva um ou mais valores determinados quando se atribui um valor determinado a x. Assim, em coordenadas retilíneas, a ordenada de uma curva é uma função da abscissa. Se a relação que liga x e y é expressa por uma equação resolvida em relação ao y, como $y = f(x)$, dizemos que y é uma função explicita de x. Se esta relação é expressa por uma equação, como $f(x, y) = 0$, dizemos que y é uma função implícita de x. Tanto num caso como no outro, x leva o nome de variável independente; quando atribuímos valores específicos para deduzir valores da função y.(SONNET, 1884, p. 1 - 2).

Ao realizar essa definição, o autor mesclou a linguagem corrente e a linguagem matemática, sendo esse último caso amparado pelos elementos algébricos.

Ao fato de o autor formular frases interpondo expressões algébricas com palavras em língua materna chamamos de *linguagem mista*. Outra observação que fazemos, com relação a essa definição, é que o autor utilizou-se de outra característica da matemática, que é a *nomenclatura*, quando fez uso de elementos cujos nomes são utilizados exclusivamente na matemática ou possuem significado exclusivo nessa área de conhecimento. Os elementos identificados por nós com essa característica foram: função, coordenadas retilíneas, ordenada, curva, abscissa, equação e variável independente.

No item 3 o autor procede de maneira análoga ao item 2, ampliando o conceito de função de uma variável para funções de duas variáveis. O fato de utilizar um resultado anterior para uma abordagem seguinte é entendido por nós como pertencente à categoria da *observação didática*

Dessa forma ele definiu função de duas variáveis no item 3, conservando a ordem de aparição das *nomenclaturas* e fazendo as devidas adaptações, como, por exemplo, o desenho gráfico que era uma curva passou a ser uma superfície curva. Essas adaptações também foram dadas em relação às notações matemáticas

Novamente por meio da *observação didática* ou *explicação,* nos itens 3 e 4 o autor generaliza o conceito de função estendendo tal conceito para funções de mais de duas variáveis.

> 3. - De maneira semelhante, uma variável z é dita função de duas outras variáveis x e y, se ela varia ao mesmo tempo que x e y, e se ele leva um ou mais valores determinados quando se atribui valores determinados a x e y. Assim, em coordenadas retilíneas, a ordenada z de uma superfície curva é uma função de duas outras coordenadas x e y.
> É uma função explicita se a relação que liga as três variáveis é expressa por uma equação resolvida em relação ao z como $z = f(x, y)$; é uma função implícita se esta relação é expressa por uma equação não resolvível, como $f(x, y, z) = 0$. Em alguns casos, x e y são as variáveis independentes; são aqueles que atribuímos pares de valores, para encontrar os valores correspondentes da função z.
> 4. - Poderemos ter que considerar funções de mais de duas variáveis independentes, como $z = f(x, y, t)$, ou $f(x, y, z, t) = 0$. (SONNET, 1884, p. 2).

Nos itens 2, 3 e 4 o autor dedicou-se a tratar exclusivamente dos conceitos de variação e de função, atendendo, assim, a dois dos três conceitos citados durante a sua definição de cálculo diferencial.

No item seguinte, o de número 5, Sonnet inicia o processo de definição de infinitésimos, outro ponto comentado na primeira definição.

> 5. - Chamamos infinitésimos uma quantidade que tende a zero, e que se encontra muito próximo de seu limite.
>
> [...] Decorre dessa definição que se um infinitésimo α for associado a uma quantidade finita e determinada a, podemos ignorar α perante a, uma vez, que o limite, $a+\alpha$ se reduz a a. Seria semelhante se a tendesse para um limite finito a_1; porque, o limite, $a + \alpha$ seria reduzido à a_1. (SONNET, 1884, p. 2).

Para essa definição o autor fez uso, na primeira parte, exclusivamente da *linguagem materna*; contudo, na segunda parte ele se expressa por meio da *linguagem mista*, quando faz uma *observação didática* ou *explicação*, relativa a um resultado sobre os infinitésimos.

No item seis, o autor delineou uma série de definições; na verdade, trata-se de uma sequência na qual uma definição dá origem à outra e, ao fim, o autor sugere uma definição conclusa. Observemos:

> 6. - Em uma questão onde se tem diversos infinitésimos considerados, há sempre um considerado entre todos os outros, e que, por essa razão, é chamado infinitésimo principal.
> Se α é o infinitésimo principal; e se β é um outro infinitésimo comparado. Se a razão $\frac{\beta}{\alpha}$ tende para um limite finito k, diferente de zero, dizemos que β é um infinitésimo de primeira ordem; e pode ser representado por $k\alpha$. Se a razão $\frac{\beta}{\alpha}$ tende para um infinitésimo de primeira ordem $k\alpha$, dizemos que β é um infinitésimo de segunda ordem, e pode ser representado por $k\alpha^2$. Se a razão $\frac{\beta}{\alpha}$ tende para um infinitésimo de segunda ordem $k\alpha^2$, dizemos que β é um infinitésimo de terceira ordem, e pode ser representado por $k\alpha^3$. Em geral, se um infinitésimo pode ser representado por $k\alpha^n$, se dito que este é um infinitésimo de ordem n. (SONNET, 1884, p. 2 - 3).

Nesse item, o conceito oferecido pelo autor implicou uma série de *proposições matemáticas*, que vêm explicitados nos itens 7, 8, 9 e 10, a respeito das quatro operações fundamentais nos infinitésimos de mesma ordem. Consideramos esses resultados, aqui, como *proposições matemáticas* por terem sido acompanhados de uma *demonstração*, ou seja, uma sequência lógica que aqui envolveu a *linguagem mista* e validou a afirmação dada anteriormente.

> 7. - A soma de vários infinitésimos de mesma ordem, em número determina, ainda um infinitésimo de mesma ordem. Porque se $k\alpha^n, k'\alpha^n, k''\alpha^n,...,$ representa os infinitésimos considerados, sua soma será
> $(k + k' + k'' + ...)\alpha^n$.
> Pois os termos estando em um número determinado, a quantia entre parênteses é uma quantia finita K; a soma procurada é, portanto, $K\alpha^n$, ou seja, um infinitésimo de ordem n.(SONNET, 1884, p.3).

Na proposição acima. o autor colocou o termo *semelhante* em evidência para, em seguida, justificar que a operação dada nos elementos algébricos entre parênteses resultava em um valor finito e, por isso, a ordem era mantida. Por ter feito essa justificativa, tal fato não é comentado no item seguinte.

> 8. – A diferença de dois infinitésimos de mesma ordem $k\alpha^n$ e $k'\alpha^n$ é um infinitésimo de mesma ordem $(k - k')\alpha^n$.(SONNET, 1884, p. 3).

Na proposição abaixo foi utilizada a propriedade comutativa para justificar o resultado.

> 9. - O produto de um infinitésimo $k\alpha^n$ por um fator finito A é novamente um infinitésimo de mesma ordem. Porque $Ak\alpha^n$ ou $Ak \bullet \alpha^n$ é novamente o produto de α^n por um fator finito Ak.
> 10. - A razão de dois infinitésimos de mesma ordem $k\alpha^n$ e $k'\alpha^n$ é uma quantidade geralmente finita $\frac{k}{k'}$. (Apenas em casos particulares que a proporção assume o valor zero ou um valor infinito.).(SONNET, 1884, p. 3).

No item seguinte o autor apresenta mais uma *propriedade matemática*, porém, o que chamou a nossa atenção, nesse caso, foi o fato de depois da anunciação e da demonstração do resultado o autor apresentar dois *exemplos*, uma prática não utilizada até o momento, mas que faz parte de uma das categorias matemáticas observadas por nós.

> 11. - Um infinitésimo de ordem n, se $k'\alpha^n$, sempre pode ser ignorado em relação a um infinitésimo de ordem imediatamente inferior $k\alpha^{n-1}$. Porque a soma $k\alpha^{n-1} + k'\alpha^n$ pode ser escrita $\alpha^{n-1}(k + k'\alpha)$. Pois o infinitésimo $k'\alpha$ pode ser ignorado em relação a quantidade finita k, permanecendo $k\alpha^{n-1}$.
> Geralmente, todo infinitésimo pode ser ignorado em relação a um infinitésimo de ordem inferior, como $k'\alpha^3$ frente $k\alpha$, por exemplo, ou $k'\alpha^5$ frente $k\alpha^2$; etc. (SONNET, 1884, p. 3 - 4).

Em seguida, o autor parte de uma *observação didática* ou uma *explicação* por meio da linguagem mista, para chegar a uma *definição*.

> 12. - Quando duas variáveis x e y estão ligadas por uma relação tal que
> (1) $$y = f(x),$$
> Se nós dermos a x um acréscimo Δx, resultará para y em um acréscimo correspondente, positivo ou negativo, Δy; tendo
> $$y + \Delta y = f(x + \Delta x);$$
> a partir daí é deduzido pela subtração
> (2) $$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$
> Os acréscimos Δx e Δy são chamados diferenças. (SONNET, 1884, p. 4).

Na sequência, Sonnet relaciona a definição anterior com os conceitos de função e infinitésimos, apresentando, assim, mais duas novas *definições*, a de *função contínua* e de *diferenciais*. O autor prossegue com uma observação didática ou explicação sobre a última *definição* apresentada e finaliza apontando uma nova *definição* para Cálculo Diferencial, mas agora relacionando com o último conceito definido.

> A função f é dita contínua, se pudermos tomar Δx pequeno suficiente para que Δy possa ser menor do que qualquer quantidade dada. Vamos considerar somente as funções contínuas, que se encontram nas aplicações. Nesse caso, se Δx torna-se infinitamente pequeno, o mesmo ocorre com Δy ; as diferenças levam o nome de diferenciais; e podemos substituir o símbolo Δ pela letra d . Escrevendo assim
> (3) $dy = f(x+dx) - f(x)$. (SONNET, 1884, p. 4)
> O diferencial dy da função y é portanto o acréscimo $f(x)$ experimentado quando nos adicionamos a x seu diferencial dx.
> A parte da análise cujo o principal objetivo é a pesquisa dos diferenciais é o cálculo diferencial, e pesquisar o diferencial de uma função é chamado de diferenciar esta função. Nós nos ocuparemos em abordar as funções de uma única variável, começando pelas funções explicitas. (SONNET, 1884, p. 4 - 5).

Da maneira análoga à anterior, após definir cálculo diferencial o autor passou a tratar de conceitos presentes em sua definição; após essa nova definição passou a tratar de conceitos envolvendo a ideia de *diferencial*. Novamente buscou amparar-se em uma *observação didática* ou *explicação* para apresentar uma nova definição a respeito da derivada.

> 13. - Dividindo por Δx os dois membros da equação (2) dada anteriormente; teremos
> $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$
> Se fizermos Δx tender pra zero, Δy também tenderá para zero; mas a razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ não se torna indeterminada; ele tende sempre, como o cálculo irá demonstrar, para um limite determinado; este limite é novamente uma função de x , que deriva de $f(x)$, e que por essa razão é chamada função derivada ou simplesmente derivada, denotada como $f'(x)$.
> Escrevemos nesse sentido
> (4) $$\lim \bullet \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \bullet \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$
> (SONNET,1884, p. 5).

O processo de realizar uma observação didática ou explicação e ir desenvolvendo até que seja dada uma nova definição é algo que o autor buscou fazer nos itens seguintes.

> Vemos, a partir dessa relação, que a derivada de uma função é o limite da razão entre o acréscimo dessa função e o acréscimo da variável, e que,

para obter essa derivada, é necessário, na função $f(x)$, trocar x por $x+\Delta x$, subtrair $f(x)$ de $f(x+\Delta x)$, dividir o restante por Δx, e procurar o limite para quando o quociente Δx tenda para zero. (SONET, 1884, p. 5)

14. - Por outro lado, segue-se a partir da relação (4) que $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ é igual a $f'(x)$ mais uma quantidade ε que tende para zero ao mesmo tempo que Δx, e que podemos escrever

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon .$$

Se substituirmos os acréscimos Δx e Δy pelos infinitésimos dx e dy, ε torna-se assim um infinitésimo, não considerável em relação à quantidade finita $f'(x)$, e permanece

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) . \tag{5}$$

Escrevemos

$$dy = f'(x)dx . \tag{6}$$

Esta relação exprime que o diferencial de uma função é igual a sua derivada, multiplicada pelo diferencial da variável.

A relação (5) mostra que reciprocamente a derivada de uma função é igual ao seu diferencial dividido pelo diferencial da variável.
Vemos que o cálculo dos diferenciais retorna ao cálculo das derivadas.

OBSERVAÇÃO. Quando a derivada é representada por $\frac{dy}{dx}$, geralmente leva o nome de coeficiente diferencial. (SONNET, 1884, p. 6).

Nesse momento da sua obra, o autor estabelece uma mudança em relação ao *método* que vinha sendo utilizado pelo autor, tendo em vista que passou a dar maior atenção à categoria das *aplicações* do que das *definições*. Ele considerou válido todo o processo dado anteriormente, mas apresentou uma nova *técnica* para ser usada no momento da aplicação.

15. - A relação (4) do nº 13 indica os procedimentos para encontrar a derivada de uma função explícita de x. Mas nós não aplicaremos diretamente esta regra para três funções: x^m (para m inteiro e positivo), $\log x$ e $senx$. Com a ajuda de princípios fáceis a estabelecer, é deduzido a partir da diferenciação dessas três funções a de todas as outras. (SONNET, 1884, p. 6)

A apresentação anterior representa uma *proposição matemática*, acompanhada de sua *demonstração*.

16. - Seja então primeiro $y = x^m$. Se para cumprir a regra do nº 13 troca-se x por $x+\Delta x$, portanto y por $y+\Delta y$, e que desenvolvida, obtemos

$$y + \Delta y = x^m + mx^{m-1}\Delta x + \frac{m(m-1)}{1 \bullet 2} x^{m-2}\Delta x \quad + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \bullet 2 \bullet 3} x^{m-3}\Delta x^2 + ...;$$

> os termos Δx com potências superiores a segunda não foram escritos.
> Fazendo Δx tender a zero; a razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tende para a derivada de y, que é representada habitualmente por y'; todos os termos do segundo membro, a exceção do primeiro, contém o fator Δx, que tendem para zero; e, como eles são números finitos, sua soma tende a zero; por isso vem
> $y' = mx^{m-1}$,
> e por consequência $dy = mx^{m-1}dx$ ou $d \bullet x^m = mx^{m-1}dx$,
> ou seja, para diferenciar x^m, deve multiplicá-lo pelo expoente m, diminuir em seguida uma unidade deste expoente, e multiplicar por dx .
> Decorre disso, por exemplo,
> de $y = x^5$, $\quad dy = 5x^4dx$,
> de $y = x^9$, $\quad dy = 9x^8dx$,
> e assim sucessivamente. (SONNET, 1884, p. 6 - 7).

Por fim, o autor fez uso da categoria dos *exemplos*, trazendo dois deles para ilustrar a propriedade demonstrada.

Ao realizarmos um estudo das primeiras páginas da obra de Sonnet, observamos que o autor utilizou a linguagem algébrica juntamente com a linguagem corrente para tratar dos conteúdos matemáticos, utilizando-se de poucos exemplos e dando a impressão de que os conceitos iniciais ali abordados, como os de função, infinitésimos, limites, indeterminações, entre outros, tinham o intuído mais de uma revisão do que uma explicação propriamente dita.

Com relação aos conceitos de infinitésimos e limite, identificamos esta abordagem crítica de Oliveira (2004), referente à obra de Sonnet, que, de certa forma se coaduna com o que pudemos observar:

> os infinitésimos são introduzidos como quantidades que tendem a zero, sendo considerados “em um estado muito próximo de seu limite”. A palavra limite aparece, pela primeira vez, no texto sem uma definição adequada. O leitor deve familiarizar-se com a noção pela sua utilização, ou ter adquirido o conceito anteriormente. O autor estabelece um caráter definitivo para o conhecimento. A argumentação é omissa e não internalista, podendo o leitor usar a sua intuição (OLIVEIRA, 2004, p. 61).

Com respeito à parte algébrica, esse mesmo autor também teceu comentários que vêm ao encontro de nosso pensamento, em relação ao livro de Sonnet:

> o livro não complementa a idéia com condições de sua existência, não discute as dificuldades inerentes ao conceito e não utiliza a linguagem corrente como retórica de convencimento. Podemos dizer que o texto, nessa parte, apresenta o Cálculo em construção, partindo em seguida para

> um esquema revelador, com argumentos algébricos e analíticos, utilizando a linguagem matemática. (OLIVEIRA, 2004, p. 65).

A partir dessas observações, voltamos nosso olhar para os livros didáticos utilizados no Colégio Pedro II, mais precisamente para alguns conteúdos que, supostamente, serviram como pré-requisitos para o estudo do Cálculo, tendo como parâmetro nossas impressões acerca do livro utilizado, na politécnica de São Paulo, até aproximadamente 1934.

Detivemo-nos nos seguintes conceitos matemáticos: definições, teoremas, regras, justificativas, deduções, demonstrações, bem como nos aspectos didáticos contidos nos livros. Ainda a respeito dos conteúdos, optamos por analisar aqueles relacionados às cadeiras de Aritmética e Álgebra; essa escolha se deve aos estudos que realizamos na obra utilizada no ensino superior, a que nós tivemos acesso.

Os livros didáticos nos quais os conteúdos analisados estão inseridos foram dispostos de acordo com os programas de ensino do Colégio Pedro II, que também já foi chamado Ginásio Nacional. Respeitando a ordem cronológica, disponibilizamos, no Quadro 5, informações sobre o ano do programa, o ano escolar em que foi utilizado, a disciplina e o(s) autor(es). Vejamos:

Quadro 5 - Livros didáticos usados no colégio Pedro II nos anos de 1892 á 1928.

Ano do programa	Ano escolar	Disciplinas	Autore(s)
1892	1º ano	Aritmética	Serrasqueiro.
		Álgebra	Serrasqueiro.
	3º ano	Aritmética	Serrasqueiro.
		Álgebra	Serrasqueiro.
1893	1º ano	Aritmética	Serrasqueiro.
	2º ano	Álgebra	Serrasqueiro.
1895	1ºano	Aritmética	J.J.L. Vianna.
	2º ano	Aritmética	Aarão e Lucano Reis.
		Álgebra	Serrasqueiro.

1898	1º ano	Aritmética	João José Luiz Vianna e de Aarão e Lucano Reis.
	2º ano	Aritmética	João José Luiz Vianna e de Aarão e Lucano Reis.
	3º ano	Aritmética	João José Luiz Vianna e de Aarão e Lucano Reis.
		Álgebra	Serrasqueiro.
	4º ano	Aritmética	João José Luiz Vianna e de Aarão e Lucano Reis.
		Álgebra	Serrasqueiro.
	5º ano	Aritmética	João José Luiz Vianna e de Aarão e Lucano Reis.
		Álgebra	Serrasqueiro.
	6º ano	Aritmética	João José Luiz Vianna e de Aarão e Lucano Reis.
1899	1º ano	Aritmética	Nenhum livro foi indicado.
	2º ano	Aritmética	Nenhum livro foi indicado.
	2º ano	Álgebra	Nenhum livro foi indicado.
	3º ano	Álgebra	Nenhum livro foi indicado.

	4º ano	Álgebra	Nenhum livro foi indicado.
1912	1ª série	Matemática	Nenhum livro foi indicado.
	2ª série		
	3ª série		
	4ª série		
1915	2º ano	Aritmética	Nenhum livro foi indicado.
	3º anno	Álgebra	Nenhum livro foi indicado.
1919	1º ano	Aritmética	Elementos de Aritmética por *FIC*.
	2º ano	Aritmética	Elementos de Aritmética por *FIC*.
	2º ano	Álgebra	Nenhum livro foi indicado.
	3º ano	Álgebra	Nenhum livro foi indicado.
1923	1º ano	Aritmética	Euclides Roxo.
	2º ano	Aritmética	Euclides Roxo.
	2º ano	Álgebra	Serrasqueiro e Joaquim Lisboa.
	3º ano	Álgebra	Serrasqueiro e Joaquim Lisboa.

1926	1º ano	Aritmética	Euclides Roxo; Cecil Thiré e H. Costa, E. Roxo e O. Castro.
	2º ano	Aritmética	Euclides Roxo; Cecil Thiré e H. Costa, E. Roxo e O. Castro.
	3º ano	Álgebra	A. Serrasqueiro; Joaquim Lisboa e H. Costa, E. Roxo e O. Castro.
1928	1º ano	Aritmética	Euclides Roxo; Cecil Thiré e H. Costa, E. Roxo e O. Castro.
	2º ano	Aritmética	Euclides Roxo; Cecil Thiré e H. Costa, E. Roxo e O. Castro.
	3º ano	Álgebra	A. Serrasqueiro; Cecil Thiré e H. Costa, E. Roxo e O. Castro.

Fonte: elaboração própria

Como é possível observar no Quadro 5, durante boa parte do período investigado a álgebra de Serrasqueiro foi a indicada para o estudo dessa disciplina. Por isso, ela será o nosso texto base, ao tratarmos de conteúdos algébricos do secundário, que, possivelmente, ofereciam respaldo ao estudo do Cálculo no ensino superior.

Quanto à aritmética, observamos uma maior quantidade de livros indicados, entre esses, constam em nosso arquivo da pesquisa, as Aritméticas, de Serrasqueiro, a de Viana e a de Aarão e Lucano Reis, sendo, as duas últimas, cujos conceitos que pudessem contribuir para o estudo do Cálculo no nível superior foram comentados por nós.

5.2 COMPARATIVO ENTRE AS DEFINIÇÕES DE FUNÇÃO E FUNÇÃO CONTÍNUA DADAS POR SERRASQUEIRO E SONNET

Assim como no livro de Sonnet, o texto de Serrasqueiro tem seu primeiro capítulo intitulado como “Noções preliminares”. Esse autor divide essa parte em sete pontos, enquanto Sonnet o fez em doze pontos. Nesses pontos Serrasqueiro trata, basicamente, de alguns conceitos e notações que auxiliavam o leitor no entendimento de questões futuras abordadas nessas obras.

Relativamente a essas divisões, os dois autores trazem, no primeiro item, a definição da parte matemática para qual o texto foi destinado, quais sejam, na obra de Sonnet, sobre Cálculo Diferencial, na obra de Serrasqueiro, sobre Álgebra. Seguindo-se a essas definições, os dois autores oferecem explicações acerca do que seria importante saber para entender os conteúdos tratados nas obras. No caso do cálculo, foram citadas as variações infinitesimais das funções, enquanto Serrasqueiro é mais contundente, pois além de afirmar o que seria a Álgebra elementar, indica três passos necessários para a obtenção do resultado expresso durante sua definição, quais sejam, “sinais das quantidades, sinais das operações e sinais de relação” (SERRASQUEIRO, 1906, p. 5). Os dois autores discorrem a respeito desses temas nos tópicos que dividem o primeiro capítulo.

Partindo para as partes mais pontuais a respeito da aproximação entre secundário e superior por meio do Cálculo Diferencial e Integral, observamos que, após serem abordadas questões básicas da álgebra elementar, relativas às *notações algébricas* e *termos da expressão algébrica*, Serrasqueiro apresentou uma definição para o conceito de *função*:

Figura 27 - Definição de função na obra de Serrasqueiro

16. Diz-se que uma quantidade x é *variavel*, quando passa por differentes estados de grandeza; e á expressão algebrica, que contém uma ou mais quantidades variaveis, dá-se o nome de *funcção* d'essas variaveis. Portanto :

Funcção de uma ou mais variaveis é a expressão composta d'essas variaveis e de quantidades constantes.

Assim, $3x^3 - 4x + 8$ é uma funcção de x; e $2x^2 - 4xy + 8$ é uma funcção de x e y.

Uma funcção de x representa-se pelas seguintes notações :

$$f(x),\ F(x),\ \varphi(x),\ \text{etc.}$$

Uma funcção de duas variaveis x, y, representa-se do seguinte modo :

$$f(x, y),\ F(x, y),\ \varphi(x, y),\ \text{etc.}$$

Quando as funcções são differentes, fazem-se preceder os parenthesis de letras ou caracteristicas differentes. Assim

$$3x^2 + 5x - 8 = f(x)$$
$$7x^4 - 4x^5 + 8x - 9 = F(x).$$

Quando as funcções se compõem do mesmo modo com as variaveis que ellas contêm, representam-se pela mesma letra ou caracteristica. Assim

$$8x^4 - 3x^2 + 7x + 8 = f(x)$$
$$8y^4 - 3y^2 + 7y + 8 = f(y).$$

Fonte: Serrasqueiro (1906, p.13)

Fazendo uma breve comparação entre a definição apresentada por Sonnet e a que consta no livro de Serrasqueiro, observamos que ambas iniciam tratando primeiramente da ideia de variação de uma quantidade. Porém, na obra destinada ao secundário, a continuidade da conceituação de função foi dada mediante a utilização de conhecimentos algébricos citados anteriormente, ou seja, o autor buscou relacionar *função* com a *ideia de variação* e *noções de expressões algébricas*, dando a entender que função poderia ser dada mediante uma expressão algébrica, onde os termos literários que a compõe seriam as variáveis dessa função.

Na obra utilizada no ensino superior, a ideia de função, além da variação, utilizou conceitos associados à relação de conjunto, pois o autor citou o fato de y

“levar” um ou mais valores à medida que atribuímos valores determinados a x, e também elementos da geometria, já que o mesmo cita a representação gráfica de uma função no momento em que expõe sua definição. Ainda nesse primeiro movimento foi apresentada de forma exclusiva, na obra utilizada no ensino superior, a definição de função explícita e implícita.

Os dois autores seguiram com seus textos por meio de abordagens a respeito de funções de mais de uma variável; o autor da obra destinada ao secundário trabalhou a associação com a definição do início do seu texto, já que a mesma possibilitava essa ampliação, e, dessa forma, acrescentou dois exemplos, sendo um para a função de uma variável e outro para a de duas. Já o autor do livro utilizado na escola de engenharia de São Paulo definiu função de duas variáveis de maneira análoga à feita para a função de uma variável, apenas alterando elementos necessários a essa nova definição e também em relação às notações utilizadas.

Para finalizar a abordagem sobre *função*, Serrasqueiro apresentou as notações utilizadas para função de uma e de duas variáveis e registrou alguns exemplos que ilustrassem esse conteúdo, aproveitando para justificar que, para funções diferentes, são usadas notações distintas. Sonnet, na parte final desse primeiro capítulo, justifica que os conceitos explicitados até então poderiam ser expandidos para função de mais de duas variáveis, usando, como exemplo, uma função de três variáveis.

Com base nessas considerações, acreditamos que a apresentação dada por Serrasqueiro a respeito do conceito de função poderia ser utilizada como base para o estudante, que, futuramente, poderia estudar esse mesmo conceito na obra de Sonnet. Assim consideramos, pelo fato de termos observado que Serrasqueiro tratou esse conteúdo por meio de aspectos não comentados por Sonnet, e, também, porque acompanhou suas definições com alguns exemplos, o que favorece a compreensão do estudante. Destacamos que esse método não foi identificado na obra adotada no ensino superior. Ainda com respeito a esse assunto, pensamos que os conceitos vistos no secundário poderiam ser somados àqueles dados no superior, ou seja, o aluno acrescentaria ao seu conhecimento sobre função a ideia de que ela trata, também, de uma relação de conjuntos, podendo ser expressa geometricamente e apresentada tanto de maneira implícita quanto de maneira explícita.

A definição de função citada anteriormente aparece na obra de Serrasqueiro pela primeira vez, no livro primeiro[13], capítulo I, antes do parágrafo 3, intitulado "Valor das expressões algébricas. Quantidades negativas".

O autor voltou a fazer uso da representação de função no momento em que aborda a "divisibilidade de um polinômio inteiro em relação a x por $x-a$". Tal representação aparece da seguinte forma:

Figura 28 - Notação da função polinomial na obra de Serrasqueiro.

Supponhamos o polynomio inteiro em relação a x

$$f(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots + A_{m-1}x + A_m.$$

Fonte: Serrasqueiro (1906, p.41)

Apesar de Serrasqueiro não se deter em conceitos envolvidos em uma função polinomial e dar foco somente à divisão de um polinômio por $x-a$, acreditamos que o fato de trazer a forma escrita de uma função polinomial em relação a um x qualquer pode contribuir para que o aluno se familiarize com esse conceito, quando se deparar, no ensino superior, com um caso como o da Figura 29, por exemplo:

Figura 29 - Notação da função polinomial na obra de Sonnet.

34. — *Fonctions algébriques rationnelles.* Les fonctions que l'on rencontre le plus souvent sont les fonctions algébriques entièιes, telles que

(1) $$y = Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} \ldots + Tx + U.$$

Fonte: Sonnet (1884, p.25).

Nesse sentido, voltamos a perceber uma aproximação entre notação vista no secundário e no superior, quando Serrasqueiro apresenta um resultado envolvendo o resto de uma divisão polinomial em x por $x-a$ e Sonnet faz o mesmo, porém para o resultado da derivada dessa função em relação a x, conforme podemos conferir nas figuras 30 e 31.

Figura 30 - Resto de uma divisão polinomial por Serrasqueiro.

$$R = A_0a^m + A_1a^{m-1} + A_2a^{m-2} + \ldots + A_{m-1}a + A_m.$$

Fonte: Serrasqueiro (1906, p.42).

[13] Os conteúdos na obra de Serrasqueiro eram divididos e apresentados no sumário em livro, capítulo e parágrafo.

Figura 31- Derivada de uma função polinomial por Sonnet.

$$dy = [mAx^{m-1} + (m-1)Bx^{m-2} + (m-2)Cx^{m-3} \ldots + T]\,dx;$$

Fonte: Sonnet (1884, p.25).

Acreditamos que a proximidade entre as notações auxiliaria no entendimento do aluno, de modo que ele pudesse sentir-se familiarizado com a matéria, empregando seus esforços para buscar o novo conhecimento que ali estaria sendo exposto e não com questões de notações que ele não tinha conhecimento.

Ainda sobre o conteúdo *função*, observamos que no livro terceiro, capítulo I, parágrafo 5º intitulado "Propriedades do trinômio do segundo grau", antes de serem apresentadas as *propriedades envolvendo as raízes de uma equação do 2º grau*, Serrasqueiro trouxe a seguinte definição.

Figura 32 – Definição de função contínua por Serrasqueiro

239. Uma expressão algebrica diz-se *funcção continua* de uma variavel x, quando, dando a x valores que differem entre si tão pouco quanto quizermos, os valores correspondentes da expressão differem tambem entre si tão pouco quanto quizermos.

O trinomio do segundo grau $ax^2 + bx + c$ *é uma funcção continua de* x.

Com effeito, sejam $x = \alpha$ e $x = \alpha + h$ dois valores de x que differem entre si tão pouco quanto quizermos, tomando h sufficientemente pequeno: os valores correspondentes do trinomio são

$$a\alpha^2 + b\alpha + c,\ a(\alpha + h)^2 + b(\alpha + h) + c;$$

e a differença d'estes valores é

$$a\alpha^2 + 2\alpha h + ah^2 + b\alpha + bh + c - a\alpha^2 - b\alpha - c = h(2a\alpha + b + ah).$$

quantidade que pode tornar-se menor que qualquer grandeza, visto que h tende para zero.

Fonte: Serrasqueiro (1906, p.230).

Essa definição é referente ao conceito de *função contínua.* O motivo pelo qual a registramos aqui é que Sonnet também apresenta uma definição desse conceito, em sua obra de Cálculo Diferencial e Integral, sendo que tal definição pode ser vista no tópico doze da subseção 5.1.1.

Comparando essas duas definições, vemos que Serrasqueiro, além de utilizar a linguagem corrente para definir o conceito, buscou adotar um exemplo por meio de um trinômio do segundo grau qualquer que auxiliasse no resultado que foi apresentado; além do mais, reservou esse tópico para definir somente o conceito de função contínua.

Já a obra de Sonnet não trouxe nenhum exemplo sobre função contínua, além de apresentar a definição desse conceito juntamente com a definição de *diferenças e diferencial*, usando o conceito de função contínua como parte da definição de *diferencial.* Desse modo, o autor dá a entender que o estudante já deveria ter certo conhecimento a respeito do conteúdo. Diante dessas impressões acreditamos que a definição feita por Serrasqueiro poderia contribuir como base para que o aluno viesse a estudar o conceito de função contínua na obra de Sonnet.

O conceito de função contínua foi citado novamente por Serrasqueiro no momento em que ele abordou o conteúdo *equação exponencial*, tal como podemos conferir na Figura 33, que continua na Figura 34.

Figura 33 - Continuidade da função exponencial por Serrasqueiro.

329. *A funcção* a^x *é continua, isto é, varía por graus insensiveis, quando se dão a* x *valores que differem entre si tão pouco quanto quizermos.*

Sejam $x = m$ e $x = m + h$ dois valores de x que differem entre si tão pouco quanto quizermos, tomando h sufficientemente

Fonte: Serrasqueiro (1906, p.313).

Figura 34 – Continuidade da função exponencial por Serrasqueiro – continuação.

pequeno: os valores correspondentes de a^x são a^m e a^{m+h}; e a differença d'estes valores é

$$a^{m+h} - a^m = a^m . a^h - a^m = a^m(a^h - 1),$$

quantidade que pode tornar-se menor que qualquer grandeza. Com effeito, tendendo h para zero, a^h tendo para a unidade: portanto o factor $a^h - 1$, sendo a differença entre a unidade e uma quantidade que tem por limite a unidade, pode tornar-se menor que qualquer grandeza; e o mesmo dizemos a respeito do producto $a^m(a^h - 1)$, por ser constante o factor a^m.

Fonte: Serrasqueiro (1906, p.314).

As terminologias utilizadas para definir a *função exponencial* como *função contínua* diferem daquelas apresentadas anteriormente, assim como o exemplo utilizado logo após essa definição, o que possibilitava que o aluno ampliasse seu repertório acerca desse tema. Vale ressaltar que a função contínua teve certo destaque em nossa pesquisa, pois no livro de Sonnet ela surge junto com a definição de diferencial, conceito importante para o estudo do Cálculo Diferencial e Integral, pelo que observamos no estudo da obra de Sonnet.

5.3 INDICATIVOS DE UMA APROXIMAÇÃO COM O ESTUDO DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL POR MEIO DOS CONCEITOS DE INFINITÉSIMOS E INDETERMINAÇÕES DADOS POR SERRASQUEIRO

Outros conceitos vistos anteriormente, considerados importantes para essa movimentação entre secundário e superior que nos propusemos fazer, são o trato com os *infinitésimos* e as *indeterminações*.

Esses conceitos aparecem, no livro de Serrasqueiro, no livro segundo, capítulo I, parágrafo 4º com o título "Estudo de algumas formas notáveis que podem apresentar as expressões algébricas". Primeiramente o autor trata do caso em que se tem uma determinada razão em que o numerador é determinado por um número qualquer e o denominador apresenta um valor tão próximo a zero quanto se queira. Observemos as Figurras 35 e 36 que se complementam:

Figura 35 - Intepretação do símbolo $\frac{m}{0}$.

119. *Interpretação do symbolo* $\frac{m}{0}$. Esta expressão provém de um quebrado, cujo denominador se tornou nullo em virtude de certas hypotheses. Para a interpretar, consideremos um quebrado $\frac{m}{n}$, cujo numerador é constante e cujo denominador pode

Fonte: Serrasqueiro (1906, p.91)

Figura 36 - Continuação da intepretação do símbolo $\frac{m}{0}$

tornar-se menor do que qualquer grandeza: será $\frac{m}{0}$ o valor limite para que tende $\frac{m}{n}$, quando n tende para zero. Supponhamos que n toma os valores decrescentes

$$0{,}1 \quad 0{,}01, \quad 0{,}001, \quad 0{,}0001, \ldots :$$

o quebrado $\frac{m}{n}$ tomará os valores crescentes

$$\frac{m}{0{,}1}, \quad \frac{m}{0{,}01}, \quad \frac{m}{0{,}001}, \quad \frac{m}{0{,}0001}, \ldots$$

ou $\qquad 10m, \quad 100m, \quad 1000m, \quad 10000m, \ldots$

D'onde se vê que, á medida que o denominador n tende para zero, o valor do quebrado augmenta continuamente de modo a exceder toda e qualquer quantidade. É esta a razão, por que ao valor limite $\frac{m}{0}$ se dá o nome de *valor infinito*, pois que elle é maior do que toda a grandeza dada.

Para exprimir o infinito emprega-se o signal ∞; e d'este modo temos $\frac{m}{0} = \infty$.

O valor infinito deve-se fazer preceder do signal + ou do signal —, para indicar o signal que tinha a grandeza, antes de tomar aquelle valor.

ADVERTENCIA. Um quebrado tem um valor infinito, quando o seu numerador é infinito, ou quando o seu denominador é nullo. Assim

$$\frac{\infty}{a} = \frac{a}{0} = \infty.$$

Um quebrado tem o valor nullo, quando o seu numerador é nullo, ou quando o seu denominador é infinito. Assim

$$\frac{0}{a} = \frac{a}{\infty} = 0.$$

Fonte: Serrasqueiro (1906, p.92).

As ferramentas utilizadas pelo autor para justificar o resultado chamaram bastante a nossa atenção, tendo em vista que este não foi apresentado de forma direta; antes o autor apresentou alguns resultados numéricos que dão ao leitor uma noção a respeito do conceito de limite. Ele vai tomando valores numéricos cada vez menores, para o denominador, de forma que os respectivos valores obtidos vão sendo cada vez maiores, transparecendo, então, que o resultado daquela razão seria infinito. Durante a explicação o autor ainda associou a ideia de infinito a um valor que excede qualquer quantidade, apresentou notação de infinito e explicitou acerca de quando tal notação deve ser acompanhada do sinal de $+$ ou de $-$.

Ainda a respeito das explicações descritas nas Figuras 35 e 36, observamos que o autor não só apresentou de forma intuitiva, o conceito de limite, mas também fez uso desse termo para apresentar o resultado desejado. Consideramos interessante toda essa movimentação, uma vez que ela não aparece nas explicações da obra de Sonnet, ou melhor, o autor até utiliza a notação de limite e comenta sobre os infinitésimos, mas não com a ideia de apresentar ao aluno e, sim, como uma ferramenta para tratar de resultados do Cálculo, subtendendo que o aluno já tenha domínio sobre aqueles aspectos. Daí a importância desse conteúdo em Serrasqueiro, pois, de certa forma, faria corresponder às possíveis expectativas do autor da obra utilizada no ensino superior – a de Sonnet.

Para finalizar a explicação desse resultado, Serrasqueiro apresentou as possibilidades para que uma razão possa resultar em valor nulo, indicando que isso pode ocorrer quando o numerador é zero ou quando o denominador é infinito, sendo esse apontamento também importante para a base do estudo do cálculo diferencial, por questões já expostas anteriormente.

O autor prossegue seu raciocínio apresentando ao leitor alguns casos de indeterminação, conforme podemos visualizar nas Figuras 37 a 41:

Figura 37 - Primeiro caso de indeterminação na obra de Serrasqueiro.

120. *Interpretação do symbolo* $\frac{0}{0}$. Esta expressão provém de um quebrado, cujos dois termos se aniquilaram em virtude de uma ou mais hypotheses. Para a interpretar, notaremos que o quociente multiplicado pelo divisor reproduz o dividendo; e como um numero qualquer, multiplicado por zero, dá sempre zero, segue-se que o quociente pode ser qualquer, quando o dividendo e o divisor forem nullos. Portanto $\frac{0}{0}$ tem um *valor indeterminado*, isto é admitte uma infinidade de valores.

Fonte: Serrasqueiro (1906, p.93).

Figura 38 - Segundo caso de indeterminação na obra de Serrasqueiro.

122. *Interpretação do symbolo* $0 \times \infty$. Temos

$$a \times \frac{1}{b} = \frac{a}{b}:$$

Fonte: Serrasqueiro (1906, p.94).

Figura 39 - Continuação do segundo caso de indeterminação.

fazendo $a = 0$, $b = 0$, resulta

$$0 \times \frac{1}{0} = \frac{0}{0}, \text{ ou } 0 \times \infty = \frac{0}{0},$$

e por consequencia $0 \times \infty$ deve considerar-se como symbolo de indeterminação.

Esta indeterminação pode ser apparente, como a indicada por $\frac{0}{0}$; e por isso temos ainda de procurar o verdadeiro valor da expressão que, numa hypothese particular, se torna em $0 \times \infty$.

Fonte: Serrasqueiro (1906, p.95).

Figura 40 - Terceiro caso de indeterminação na obra de Serrasqueiro.

123. *Interpretação do symbolo* $\infty - \infty$. Temos

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b - a}{ab}:$$

fazendo $a = 0$, $b = 0$, vem

$$\frac{1}{0} - \frac{1}{0} = \frac{0}{0}, \text{ ou } \infty - \infty = \frac{0}{0},$$

e por consequencia $\infty - \infty$ deve considerar-se como symbolo de indeterminação.

Esta indeterminação pode ser apparente, e por isso temos ainda de procurar o verdadeiro valor da expressão.

Fonte: Serrasqueiro (1906, p.95).

Figura 41 - Quarto caso de indeterminação na obra de Serrasqueiro.

124. *Interpretação do symbolo* $\frac{\infty}{\infty}$. Temos

$$\frac{1}{a} : \frac{1}{b} = \frac{b}{a} ;$$

fazendo $a = 0$, $b = 0$, vem

$$\frac{1}{0} : \frac{1}{0} = \frac{0}{0}, \text{ ou } \infty : \infty = \frac{0}{0},$$

e portanto $\infty : \infty$ é um symbolo de indeterminação.

Fonte: Serrasqueiro (1906, p.96).

Trouxemos esses quatro momentos iniciais em que Serrasqueiro tratou das indeterminações, a fim de que observemos que o autor justificou o fato de tais símbolos serem considerados indeterminações e não simplesmente apresentou os casos. Alguns cálculos foram aqui omitidos devido à sua extensão, entretanto, o autor do livro apresentou alguns resultados e explicou que nem sempre casos que aparentam ser indeterminações resultam nelas; além disso, Serrasqueiro oferece alguns exemplos que, aparentemente, representariam uma indeterminação, contudo, submetidos a algumas simplificações, deram resultados nulos, finitos ou infinitos. Em alguns casos, o autor justifica que os exemplos serviam para ilustrar melhor os resultados ali apresentados.

Entendemos que todo esse processo explicativo que acompanha a obra de Serrasqueiro poderia vir a somar com outros momentos observados na obra de Sonnet, como, por exemplo, este caso apresentado na Figura 42:

Figura 42 - Derivada da função seno na obra de Sonnet.

18. — Soit enfin $y = \sin x$. On en tire

$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x),$$

et

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}.$$

Si l'on faisait tendre immédiatement Δx vers zéro, le second membre prendrait la forme $\frac{0}{0}$. Pour l'éviter, on transforme, au numérateur, la différence des deux sinus en un produit conformément à la formule

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \tfrac{1}{2}(p - q) . \cos \tfrac{1}{2}(p + q),$$

on obtient ainsi

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \sin \frac{1}{2} \Delta x . \cos (x + \frac{1}{2} \Delta x)}{\Delta x};$$

Fonte: Sonnet (1884, p.9).

Nessa proposição Sonnet estava demonstrando o resultado da derivada da *função seno,* e utilizou o fato de esse resultado gerar uma indeterminação, na medida em que Δx tende a zero, para justificar uma mudança de variável em seu cálculo. Porém, antes do uso dessa indeterminação nada foi comentado a respeito, reforçando a ideia da importância do tema ter sido comentado na obra utilizada no secundário, que, além da justificativa sobre a indeterminação foram realizados alguns artifícios para prosseguir com o cálculo mediante uma indeterminação.

O autor da obra destinada ao curso de engenharia de São Paulo, volta a tratar das indeterminações na seguinte seção:

Figura 43 - Artifícios para indeterminações na obra de Sonnet.

§ 2. — VÉRITABLE VALEUR DES EXPRESSIONS QUI PRENNENT L'UNE DES FORMES $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \times \infty$

Fonte: Sonnet (1884, p.74).

Basicamente, nessa seção, o autor fez referência a alguns casos em que, ao substituir a variável por um dado valor, o cálculo entre as funções acarretaram uma indeterminação. O primeiro caso apresentado foi dado pela razão $\frac{0}{0}$; a partir desse resultado o autor realizou algumas passagens matemáticas, chegando à conclusão que a razão que gerou a indeterminação era igual ao cálculo da razão dada pela derivada de cada uma das funções no ponto em que a indeterminação foi gerada.

Os outros dois casos foram justificados por meio de alguns cálculos, até que estes se igualassem ao primeiro; em consequência disso, o autor justificava que, para ambos, valia a mesma regra dada para o primeiro caso, ou seja, o autor mostrou que os outros dois casos eram resultados particulares do primeiro.

Novamente enxergamos esses resultados apresentados nesta seção com algumas associações em relação aos que foram observados na obra referente ao ensino secundário, ou seja, os cálculos desenvolvidos no livro de Serrasqueiro poderiam dar base para o estudo desses mesmos cálculos desenvolvidos pelos alunos de engenharia, no ensino superior.

5.4 FRAÇÕES CONTÍNUAS NA ÁLGEBRA DE SERRASQUEIRO

A fração contínua é outro tema que poderia contribuir para o “florescer” do conhecimento acerca das *noções de aproximação* e de *limite*, já que por meio dela torna-se possível encontrar números racionais que possam ser usados como uma boa aproximação para números irracionais. Diante disso, passamos a analisar como os livros abordavam essas questões, iniciando pela obra de Serrasqueiro.

No programa de 1892, no primeiro ano do curso secundário, a cadeira destinada a assuntos mais próximos da matemática era intitulada “Arithmética (estudo completo) Álgebra Elementar (estudo completo)”, dessa forma, os conteúdos eram dados de maneira que contemplassem esses dois eixos, mas, pelo que tudo indica, o conteúdo *fração contínua*, nesse período, estava associado à Álgebra, pois era na obra referente a ela que esse conteúdo estava presente.

Para dar início a esse assunto, o autor definiu *fração contínua* e, em seguida, exemplifica com uma expressão composta por elementos algébricos, acompanhada dos termos e das frações que compõem a expressão:

Figura 44 - Definição de Frações contínuas por Serrasqueiro.

CAPITULO II

Fracções continuas

§ 1.º **Definições**

304. *Fracção continua* é uma expressão composta de um inteiro, que pode ser zero, e de uma fracção, cujo numerador é a unidade e cujo denominador é um inteiro augmentado de uma fracção, cujo numerador é a unidade e cujo denominador é um inteiro augmentado de uma fracção, e assim por deante.

Tal é a expressão

$$N = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \ldots}}}$$

Os termes a, b, c, ... chamam-se *quocientes incompletos;* e ás fracções $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{d}$ ... dá-se o nome de *fracções integrantes.*

Fonte: Serrasqueiro (1906, p. 289).

Nessa primeira abordagem, na obra, sobre o conteúdo aqui analisado, percebemos algo importante, referente à linguagem adotada, mais especificamente sobre as reticências apresentadas ao final de cada sequência. A importância desse sinal é creditada primeiramente porque as mesmas foram usadas com o objetivo de indicar a infinitude dos termos, sendo o conceito de infinito algo importante para a nossa investigação. Também porque esse é um formato de escrita que aparece diversas vezes, na obra de Sonnet; desse modo, vemos esse momento como um pré-requisito para o estudo da obra utilizada no ensino superior.

O autor não acompanhou a definição com exemplos e prosseguiu apresentando mais uma definição, agora referente à “reduzida” ou “fração convergente”. O que nos chamou a atenção é a aparição do termo *convergente*, isso porque o mesmo possui seus laços estreitados com o Cálculo, ou melhor, é um termo de grande significância para o estudo do Cálculo Diferencial Integral. No sentido proposto por Serrasqueiro, esse termo representou um momento inicial entre as relações dos temas *frações contínuas*, *aproximação* e *limite*, pois o termo convergência indicou que o valor expressado por meio da *fração contínua* estaria próximo suficiente para que fosse igualado a um outro valor, ideia que foi explorada pouco a pouco nas páginas seguintes. Porém antes de passar para a subseção seguinte, foi apresentado um exemplo numérico e uma forma simplificada de escrita da fração contínua.

Na segunda das quatro subseções em que o capítulo de frações contínuas foi dividido, o tema principal fazia referência às conversões de grandezas em frações contínuas. Então, de início, foi abordado, de forma geral, sobre como proceder na transformação de uma grandeza em fração contínua, sendo que para a representação dessa explicação foram usadas equações de cunho algébrico, como uma espécie de generalização da ideia de transformação sem que, entretanto, algum exemplo fosse apresentado, antes ou depois da explicitação do conteúdo.

Figura 45- Explicação sobre Conversão de Grandezas em Frações contínuas**.**

§ 2.º Conversão das grandezas em fracções continuas

366. *Para desenvolver* uma grandeza A em fracção continua, determina-se a sua parte inteira *a*; e teremos

$$A = a + \frac{1}{B}, \text{ sendo } B > 1.$$

D'esta egualdade tira-se

$$\frac{1}{B} = A - a, \text{ e } B = \frac{1}{A - a}, \text{ sendo } A - a < 1.$$

Determina-se a parte inteira de B, e pomos

$$B = b + \frac{1}{C}, \text{ d'onde } \frac{1}{C} = B - b, \text{ e } C = \frac{1}{B - b}.$$

Determina-se a parte inteira de C, e pomos

$$C = c + \frac{1}{D}, \text{ d'onde } \frac{1}{D} = C - c, \text{ e } D = \frac{1}{C - c}.$$

Fonte: Serrasqueiro (1906, p. 290).

Figura 46 - Continuação da Explicação sobre Conversão de Grandezas em Frações contínuas.

ALGEBRA ELEMENTAR 291

Determina-se a parte inteira de D, e pomos

$$D = d + \frac{1}{E},$$

e assim por deante. Depois por meio de substituições successivas acha-se

$$A = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \dots}}}$$

que é o desenvolvimento pedido. Este processo é geral, e sómente exige que se saiba determinar a parte inteira da grandeza de que se tracta.

Se algum dos numeros B, C, D, etc., for inteiro, a fracção continua é *limitada;* e no caso contrario é *illimitada.*

Quando, numa fracção continua illimitada, os termos se reproduzem pela mesma ordem, a fracção continua chama-se *periodica: simples,* se os termos se reproduzem a partir do primeiro; e *composta* no caso contrario.

Fonte: Serrasqueiro (1906, p. 291).

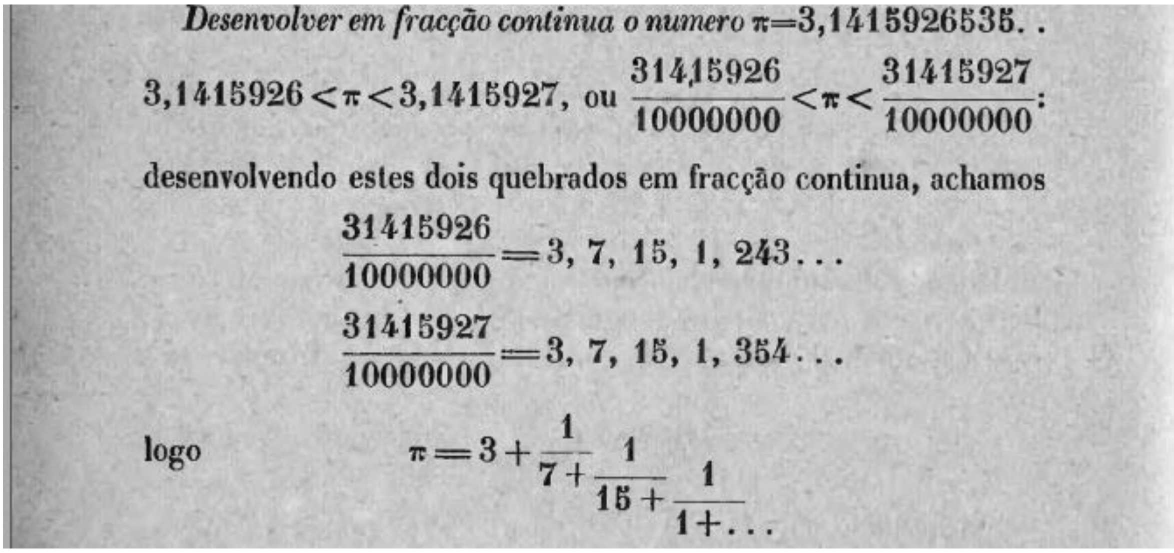
Um fato interessante, para nós, é que durante esse processo de explicação das transformações o autor serviu-se da ideia de fração contínua *limitada* e *ilimitada*; o uso desses termos, associados com a ideia por ele apresentada, aparenta uma boa noção para questões futuras do estudante de Cálculo, preconizando a ideia sobre o que vem a ser limitado e ilimitado, no campo matemático, e, consequentemente, uma prévia da ideia de infinito.

O autor do livro, dando continuidade a essa subseção, forneceu informações acerca de transformações, envolvendo casos particulares, ou seja, apresentou ao leitor como proceder na transformação de um quebrado ordinário, em uma fração decimal ou uma quantidade irracional em fração contínua.

No primeiro caso, o processo foi semelhante aos que foram vistos anteriormente - o autor fez a definição por meio de explicações escritas em língua corrente e matemática, dotadas por elementos algébricos. O que apresentou alguma diferença foi que, ao final, juntamente com um resultado deduzido pelo processo que envolve a definição, o autor trouxe um exemplo numérico, resolvido por meio de resultado deduzido.

O segundo caso é tratado de duas formas: a primeira corresponde à fração decimal, que veio acompanhada da orientação de que bastava transformá-la em quebrado ordinário e proceder como na forma anterior; a outra desrespeitou as aproximações e, neste caso, a orientação foi no sentido de que sejam tomadas duas aproximações decimais, uma por falta e outra por excesso, para, então, serem encontradas as frações contínuas de ambas, de forma que a parte comum entre elas represnte a fração contínua da grandeza procurada. Para justificar esse processo, o autor apresentou, logo em seguida, uma demonstração e, por fim, um exemplo que envolvia o número irracional π (pi).

Figura 47 - Exemplo de aproximações utilizando frações contínuas.



Desenvolver em fracção continua o numero π=3,1415926535. .

$$3{,}1415926<\pi<3{,}1415927, \text{ ou } \frac{31415926}{10000000}<\pi<\frac{31415927}{10000000}:$$

desenvolvendo estes dois quebrados em fracção continua, achamos

$$\frac{31415926}{10000000}=3,\ 7,\ 15,\ 1,\ 243\ldots$$

$$\frac{31415927}{10000000}=3,\ 7,\ 15,\ 1,\ 354\ldots$$

logo

$$\pi=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\ldots}}}$$

Fonte: Serrasqueiro (1906, p. 294).

Novamente foi possível notar a relação que envolve a ideia de aproximação e também de infinito, ressaltando que essa ideia de aproximação é algo importante para o trabalho do engenheiro e, por isso, foi citada por Sonnet em sua obra. Para finalizar essa segunda parte, o autor explica, por meio de um exemplo numérico, como transformar uma quantidade irracional do segundo grau em fração contínua; apesar de não deixar explícito no texto que essa transformação representa uma aproximação dessa quantidade irracional, o autor utilizou em cada passo da transformação o conceito de aproximação.

A terceira parte tem como título “Lei da formação das reduzidas” e trouxe seis resultados relacionados a essa questão. O primeiro deles referia uma fórmula de recorrência para encontrar uma reduzida por meio das duas antecedentes, sendo que isso foi feito, primeiramente, por meio de uma observação de quatro primeiras reduzidas quaisquer e, em seguida, por uma demonstração. O segundo é, de certa forma, um processo inverso do que fora visto até então, pois explica como encontrar, por meio da fração contínua, a grandeza que ela representa. Essa noção foi passada por meio de uma explicação escrita, seguida por dois exemplos numéricos e finalizada com a informação de que se a fração contínua for ilimitada, então o valor encontrado é somente uma aproximação da grandeza. O terceiro diz respeito ao fato de que se a fração contínua for periódica, então o valor da grandeza encontrada é exato. Para chegar a esse resultado o autor utilizou três resultados precedentes, o primeiro cujo a demonstração pode ser vista no anexo J, foi o seguinte:

Figura 48 - Primeiro resultado da relação entre fração contínua periódica e sua grandeza.

1.º *Em uma fracção continua periodica simples, a reduzida composta de um certo numero de periodos e a reduzida, que tem um periodo a mais, differem entre si em menos do que qualquer grandeza, tomando um numero de periodos sufficientemente grande.* Supponhamos a fracção continua

Fonte: Serrasqueiro (1906, p. 298).

Na figura anterior o que chamou a nossa atenção foi o fato de o autor ter usado a expressão “tomando um número de períodos suficientemente grande”, pois ter essa noção de algo suficientemente grande é fundamental para entender o processo que envolve o limite de uma variável tendendo ao infinito, por exemplo. Dessa forma, o autor termina essa primeira parte com os seguintes dizeres:

Figura 49 - Parte final do primeiro resultado da relação entre fração contínua periódica e sua grandeza.

Suppondo a reduzida $\frac{r}{r'}$ composta de um numero de periodos sufficientemente grande, o seu denominador r', pela lei da formação das reduzidas, excede toda e qualquer grandeza; e por consequencia a differença $\frac{v}{v'} - \frac{r}{r'}$ tende para zero.

Fonte: Serrasqueiro (1906, p. 298).

Observamos que, na figura anterior, Serrasqueiro utilizou a expressão “tende para zero”, no momento em que concluiu o resultado referente à diferença entre dois termos. O uso dessa expressão pode ser visto como uma tentativa de aproximação com o Cálculo Diferencial e Integral. Destacamos que essa já constituía uma expressão usual no estudo da disciplina de Cálculo.

Para concluir o resultado que relacionou a fração contínua periódica com a sua grandeza, o autor fez uso de linguagens associadas ao conceito de limite, e, ainda mais, utilizou esse conceito para justificar o resultado almejado.

Figura 50 - Parte final do segundo resultado da relação entre fração contínua periódica e sua grandeza.

Ora a differença α entre x_i e x tende para zero, tomando i sufficientemente grande: logo $x-\alpha$ é uma variavel que tem por limite x. Além d'isto, a differença δ entre a reduzida x_i e a reduzida x_{i-1}, que tem menos um periodo, tende tambem para zero: logo $k+\frac{1}{x-(\alpha+\delta)}$ é uma variavel que tem por limite $k+\frac{1}{x}$; e por consequencia, pelo principio fundamental dos limites, é

$$x = k+\frac{1}{x} = a+\cfrac{1}{b+\cfrac{\vdots}{+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{x}}}}$$

Fonte: Serrasqueiro (1906, p. 299).

Diante de tudo isso, entendemos que, à medida que o autor deu sequência nos resultados que envolviam o conteúdo de fração contínua, sua linguagem foi se tornando cada vez mais próxima daquela utilizada por estudantes de Cálculo Diferencial Integral em nível superior. Isso é interessante, porque propiciava ao aluno experiências com conceitos abordados de modo breve, por Hyppolyte Sonnet, autor da obra utilizada no ensino superior.

No caso, Serrasqueiro apresentou de maneira intuitiva, por meio de aproximações, o que corresponde à ideia de infinitésimos, ou seja, valores extremamente pequenos ou também de infinitos, no caso de valores extremante grandes. Ofereceu uma boa noção sobre o que vem a ser o limite, conceito citado por Sonnet, mas não muito explorado; por isso, tornava-se importante toda a movimentação referida anteriormente, na obra destinada ao secundário, já que a mesma poderia complementar questões que seriam vistas no ensino superior.

Prosseguindo com os resultados sobre *fração contínua,* o autor da obra utilizada no secundário indicou que "toda fração contínua periódica é uma das raízes de uma equação do segundo grau de coeficientes racionais" (SERRASQUEIRO, 1906, p. 300). Para demonstrar esse resultado o autor dividiu em dois casos; o primeiro para quando a fração contínua fosse periódica simples e o segundo para quando a mesma fosse periódica mista. Após as respectivas demonstrações, Serrasqueiro afirmou que encontrar a grandeza geradora de uma a fração continua tratava-se de um processo fácil, e apresentou dois exemplos.

Para finalizar a terceira parte referente à fração contínua, o autor estabeleceu uma relação entre quantidade comensurável e incomensurável com fração contínua limitada e ilimitada, respectivamente, e de maneira bicondicional. Novamente o autor apresentou resultados condizentes com a ideia de infinito e que poderiam ser utilizados pelos alunos perante novos conceitos estudados na disciplina de Cálculo oferecida no curso de engenharia da época.

A quarta e última parte da seção destinada a tratar das frações contínuas foi intitulada “Propriedade das reduzidas”. De imediato, o autor apresentou dois resultados, o primeiro referente à diferença entre duas reduzidas consecutivas e o segundo, decorrente do primeiro, indicava que reduzidas diferentes eram frações irredutíveis. Por meio desse último resultado o autor concluiu que as reduzidas poderiam ser usadas como a forma simplificada de um “quebrado”, sendo que após essa conclusão foram dadas as passagens para a obtenção desse resultado, acompanhadas de um exemplo numérico.

Na sequência, o autor disponibilizou mais dois resultados acerca das frações contínuas, um a respeito da diferença entre as reduzidas consecutivas, que ficam cada vez menores quanto maior for sua ordem. O outro explicitava sobre o fato do valor da fração contínua estar entre os valores das reduzidas de ordem par e as de ordem ímpar.

Esses quatro resultados, principalmente os dois últimos, remetia a uma questão já abordada no começo do texto, concernente à obtenção de boas aproximações por meio das frações contínuas:

Figura 51 - Observação a respeito da aproximação entre as reduzidas.

ADVERTENCIA. Vimos já que a differença de duas reduzidas consecutivas é tanto menor, quanto mais elevada for a sua ordem; e como o valor da fracção continua está comprehendido entre duas reduzidas consecutivas, segue-se que: *as reduzidas consecutivas vão-se aproximando, cada vez mais, do valor da fracção continua.* É por esta razão que ás reduzidas se dá o nome de *fracções convergentes.*

Fonte: Serrasqueiro (1906, p. 305).

Nesse ponto, o autor passou a discorrer sobre essa ideia; destacou o conceito de *erro*, um conceito de grande importância para o trabalho do engenheiro, que, no texto apareceu interligado com a ideia de infinitésimos e limite. O início da abordagem sobre essa temática aparece, na obra, da seguinte forma:

Figura 52 - Erro entre a reduzida e a fração contínua.

321. 1.º *O erro que se commette, tomando uma reduzida qualquer para valor da fracção continua, é menor que a unidade dividida, pelo producto dos denominadores d'essa reduzida e da seguinte.*

Fonte: Serrasqueiro (1906, p. 305).

Esse é um dos três resultados apresentados, pelo autor, em relação ao erro que se obtém quandose faz uma aproximação da fração contínua por meio de sua reduzida.

Dessa forma, primeiramente ele indicou o erro, por meio da razão dada entre a unidade e o produto dos denominadores da reduzida escolhida e da reduzida seguinte. Após a demonstração desse resultado o autor apresentou um segundo, que relacionava o erro à razão entre a unidade e o quadrado do denominador, ressaltando que esse resultado apareceu como consequência do primeiro.

Desse segundo resultado o autor apresentou o terceiro por meio da seguinte conclusão:

Figura 53 - Estimativa para o erro.

322. Por meio d'este ultimo principio podemos determinar a reduzida que convem tomar, para que o erro commettido seja menor que a unidade fraccionaria $\frac{1}{n}$. Com effeito, seja $\frac{A}{B}$ uma reduzida qualquer. Designando por δ o erro que se commette, tomando $\frac{A}{B}$ para valor da fracção continua, é

$$\delta < \frac{1}{B^2}:$$

Fonte: Serrasqueiro (1906, p. 306).

Esse resultado tratava do resultado que se obtám a partir do erro cometido quando uma reduzida é tomada como aproximação de uma fração contínua. Esse “controle” acerca do erro representava mais um momento da relação entre o aluno e os valores próximos a zero, algo que poderia contribuir com o conceito de infinitésimos dados na obra de Sonnet.

Ainda a respeito desse terceiro resultado, o autor ofereceu uma explicação de como proceder para encontrar uma reduzida por meio do erro dado:

Figura 54 - Procedimento para encontrar a reduzida com erro menor que uma unidade.

Portanto: *para obter o valor de uma grandeza com um erro menor que uma unidade fraccionaria dada, desenvolve-se essa grandeza em fracção continua, e formam-se as reduzidas consecutivas até chegarmos a uma, cujo denominador seja egual ou maior do que a raiz quadrada do denominador d'essa unidade fraccionaria. Esta reduzida é o valor pedido.*

Fonte: Serrasqueiro (1906, p. 307).

Esse assunto foi finalizado por meio de um exemplo que envolvia um número irracional e um erro dado por milésimos:

Figura 55 - Exemplo da aproximação com erro menor que 0,001.

Exemplo: *Achar o valor de* $\sqrt{6}$ *com um erro menor que* $0{,}001 = \frac{1}{1000}$.

Desenvolvendo $\sqrt{6}$ em fracção continua, achamos

$$\sqrt{6} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 \ldots}}}}$$

Ora, como $\sqrt{1000} = 31$, temos de calcular as reduzidas até chegarmos a uma, cujo denominador seja egual ou maior do que 31. As reduzidas são

$$\frac{2}{1}, \frac{5}{2}, \frac{22}{9}, \frac{49}{20}, \frac{218}{89}, \ldots$$

logo $\sqrt{6} = \frac{218}{89}$, com um erro menor que **0,001.**

Fonte: Serrasqueiro (1906, p. 307).

Esse tipo de exemplo possibilitava que o aluno trabalhasse com valores próximos a zero e, consequentemente, estabelecesse relações com situações que auxiliavam no entendimento dos infinitésimos.

Um último fator importante para nós, em relação à abordagem de Serrasqueiro a respeito das frações contínuas, foi que o autor buscou justificar por que era vantajoso tomar aproximações por meio das reduzidas. Para isso, ele primeiramente apresentou o resultado abaixo:

Figura 56 – Resultado utilizado para justificar o uso das reduzidas como aproximação de uma fração contínua.

323. *Uma fracção, que se aproxima mais do valor da fracção continua* x, *do que uma reduzida qualquer, está comprehendida entre esta reduzida e a antecedente.*

Fonte: Serrasqueiro (1906, p. 307).

Após a demonstração desse resultado, Serrasqueiro se serviu desse mesmo resultado, para demonstrar a proposição que vinha em seguida, que dizia o seguinte:

Figura 57 - Proposição a respeito do uso das reduzidas como aproximação de uma fração contínua.

324. *Uma reduzida qualquer aproxima-se mais do valor da fracção continua* x, *do que outra fracção cujos termos sejam mais simples do que os seus.*

Fonte: Serrasqueiro (1906, p. 308).

Com esse último resultado, entendemos que o autor justificou, por meio de demonstrações, a importância de estabelecermos aproximações por meio das frações contínuas, ou seja, ele demonstrou ter preocupação em apresentar uma ferramenta que pudesse ser usada para aproximar valores, além disso demonstrou, também, que essa ferramenta era de grande importância para esse trabalho. Para reforçar essa importância, Serrasqueiro o autor também disponibilizou uma observação seguida de um exemplo, utilizando o número irracional π.

Figura 58 – Exemplo do uso das reduzidas para a aproximação de um irracional na obra de Serrasqueiro.

325. Esta propriedade das reduzidas mostra bem a vantagem das fracções continuas. Pois que, desenvolvendo uma grandeza em fracção continua, e formando as reduzidas consecutivas, obtemos uma serie de valores cada vez mais aproximados, e expressas o mais simplesmente possivel em relação ao seu grau de aproximação.

Exemplo. *Achar o valor de π debaixo da fórma fraccionaria, e tal que nenhum outro quebrado de termos mais simples se aproxime tanto de π.*

Desenvolvendo π em fracção continua, achámos (n.º 308)

$$\pi = 3, 7, 15, 1, \ldots\ldots$$

Fonte: Serrasqueiro (1906, p. 309).

Figura 59 – Continuação do exemplo do uso das reduzidas para a aproximação de um irracional na obra de Serrasqueiro.

e formando as reduzidas consecutivas, temos

$$\frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \ldots$$

fracções que se aproximam mais de π do que outro qualquer quebrado de termos mais simples.

A segunda reduzida é o valor de π achado por Archimedes; e como é de ordem par, é aproximado por excesso.

A quarta reduzida é o valor achado por Adriano Metius, e é tambem aproximado por excesso.

Fonte: Serrasqueiro (1906, p. 310).

Dois fatos chamaram a nossa atenção; o primeiro é que o autor, para evitar ser redundante, indicou um resultado dado anteriormente por ele em relação ao desenvolvimento de π em fração contínua. O outro fato é que, após a resolução do exemplo, ele trouxe um pequeno relato histórico a respeito das aproximações que envolvem o valor de π, citando personagens importantes da História da Matemática, como Arquimedes e o professor de matemática Adriano Metius.

O conteúdo frações contínuas, de acordo com Vechia e Lorenz (1998), estavam entre os conteúdos a serem ensinados nos programas de ensino de 1892, 1893 e 1898. Apesar dos outros programas não trazerem especificamente, em suas listas de conteúdos, o nome frações contínuas, isso não representa que esse conteúdo não tenha sido ensinado nesses programas, haja vista que “Serrasqueiro é referência para o ensino de Álgebra até, no mínimo, 1923 [...] (VALENTE, 2007, P. 168) ”. Conforme já vimos, esse autor destinava parte de sua obra para tratar das frações contínuas.

Outro indício de que o conteúdo frações contínuas poderia ter sido ensinado além daqueles anos registrados anteriormente, foi que Arthur Thiré fez a seguinte observação, em sua obra de Aritmética:

> é para desejar que o assunto das frações continuas seja retirado do Programa de Aritmética do I.º ano do Curso Ginasial, e que este estudo seja transferido para o lugar que lhe compete racionalmente no Programa da Matemática (THIRÉ, 1911, p. 510).

Precisamos ter em mente que Arthur Thiré foi quem assinou o programa de ensino do colégio Pedro II para o ano de 1915 e, de acordo com informações obtidas por meio de Gussi (2011), tal programa veio a ser substituído, em 1919. Por isso, acreditamos na possibilidade de que esse conteúdo tenha sido ensinado em outras épocas, mesmo que essa informação não conste nas listas de conteúdos.

A questão do tema frações contínuas ter sido apresentado em disciplinas diferentes, foi algo que nós também observamos, e é a respeito disso que iremos comentar a seguir.

No programa de 1892, Serrasqueiro era o autor indicado tanto para o estudo de aritmética quanto para o de álgebra. Nesse programa, os conteúdos ensinados na disciplina de aritmética e álgebra elementar apareciam juntos; como a parte destinada a tratar de frações contínuas estava no livro de álgebra, acreditamos que, nesse programa, tal conteúdo era associado à disciplina de álgebra.

Para o programa de 1893 foi mantida a obra de Serrasqueiro para a disciplina de álgebra e de aritmética, porém o conteúdo frações contínuas apareceu entre os conteúdos ensinados na disciplina de aritmética, mas, como já citado anteriormente, a obra de aritmética de Serrasqueiro parecia não ter trabalhado o tema, logo, supomos que para esse assunto o livro utilizado poderia ter sido o de álgebra.

Quanto ao programa 1898, o conteúdo frações contínuas apareceu entre os conteúdos a serem ensinados, tanto na parte destinada à álgebra quanto na de aritmética. Na primeira, a obra indicada ainda foi a de Serrasqueiro; já na segunda houve mudanças, e as obras indicadas passaram a ser de João José Luiz Vianna e a de Aarão e Lucano Reis.

Dessa forma, passamos a discorrer, sobre conteúdos que poderiam ter dado base ao estudo do Cálculo Diferencial e Integral, abordados por meio das obras de Vianna e Aarão e Lucano Reis.

5.5 FRAÇÕES CONTÍNUAS NAS OBRA DE JOÃO JOSÉ LUIZ VIANNA

A impressão que tivemos, ao analisar a Aritmética de Vianna, na parte em que trata do conteúdo frações contínuas, é que a mesma apresentava poucas relações com os conceitos de infinito, infinitésimos, aproximações e limite.

O autor apresentou esse conteúdo relacionando-o com frações de termos mais simples e com a ideia de sucessivas aproximações. Tomou um exemplo numérico, dividiu a resolução dele em seis partes e tomou a última como definição para fração contínua.

Após a definição, concluiu que o processo utilizado na resolução do exemplo era equivalente a um método que envolvia o máximo divisor comum dos termos da fração dada. Apresentou mais um exemplo, resolvido com o auxílio do máximo divisor comum; aproveitando os termos que compunham a resolução do exemplo, o autor indicou o nome de cada um deles. Nesse ponto, o autor associou o conceito de frações convergentes ou reduzidas a diversas aproximações, o que, de certa forma, auxilia no entendimento a respeito da ideia de convergência, que é importante para a compreensão de conceitos ligados ao cálculo, como o de aproximação e limite.

Porém, o autor não fez nenhum tipo de ligação específica entre convergência, limite e aproximações, deixando para que o leitor fizesse essa relação.

Na sequência, o autor procedeu a um processo para encontrar diversas reduzidas ou, até mesmo, a fração ordinária correspondente à fração contínua. Fez isso por meio da escrita da forma geral de uma fração contínua, ou seja, utilizando elementos algébricos para indicar seus termos.

Observando como foi dada a formação da terceira e da quarta reduzida, enunciou uma proposição para esse caso, sendo tal proposição demonstrada logo em seguida. Ainda nesse sentido, trouxe dois exemplos resolvidos por meio da última proposição demonstrada. Do segundo exemplo foram feitas observações que resultaram em três conclusões sobre a relação existente entre as reduzidas de ordem par ou ímpar e sua proximidade com as frações dadas.

Esse foi mais um dos poucos momentos em que o autor apresentou elementos que poderiam auxiliar no estudo do cálculo, por meio da obra de Sonnet. A apresentação utilizou a linguagem corrente, ou seja, o autor não buscou fazer cálculos específicos para demonstrar a proximidade entre as reduzidas e as frações dadas, como por exemplo foi feito por Serrasqueiro, ao abordar o mesmo exemplo.

Para finalizar esse assunto, o autor demonstrou duas propriedades. A primeira a respeito da diferença entre duas reduzidas consecutivas e o fato de seus numeradores resultarem em uma unidade positiva ou negativa, e o denominador ser o produto dos denominadores das duas reduzidas. A segunda dizia respeito ao erro que é cometido quando uma reduzida é tomada como aproximação para uma determinada fração, o que, de certa forma, poderia expressar a importância de se tomar uma reduzida como aproximação para uma fração. Ressaltamos, contudo, que o autor não afirmou nada nesse sentido.

De maneira geral, os momentos de aproximação com conceitos ou linguagens que poderiam subsidiar o estudo do cálculo superior, por meio da obra de Sonnet, foram poucos, deixando a impressão de que o autor buscou mais apresentar resultados ou ferramentas que auxiliavam nas operações que envolviam frações contínuas.

Nesse sentido, Luiz Vianna utilizou exemplos, para apresentar, definir e generalizar conceitos, mas sem se ter aprofundado nos mesmos, o que poderia ser de grande proveito para o estudo do cálculo, pois em certos momentos foram citadas as ideias de convergência, aproximação e erro.

Apesar de o livro abordar esse conceito, talvez o estudo das frações contínuas não tenha sido dado por meio dele, na medida em que no programa de ensino de 1895, quando o livro aparece pela primeira vez, aparentemente, a obra indicada para tratar das frações e suas transformações, no primeiro ano de ensino, era a Aritmética de Vianna. A obra dos irmãos Reis ficava incumbida de tratar da divisibilidade dos números, potenciação, radiciação, proporções, metrologia, progressões e logaritmos.

No programa de ensino de 1898 essas obras voltam a figurar, mas a lista de conteúdos não foi disposta da mesma forma que a do programa antecedente, ou seja, não vinha epecificada a obra que trabalharia determinado conteúdo. Mas, nesse sentido, havia a divisão do estudo prático para a aritmética, do primeiro ano, e o estudo teórico dessa disciplina, para a do segundo, sendo mantidos os mesmos conteúdos para os dois anos.

O fato de, aparentemente, ter ocorrido o estudo dos mesmos conteúdos aritméticos no primeiro e no segundo ano, motivou-nos a pensar que em certo momento a obra dos irmãos Reis teria sido utilizada para auxiliar na explicação das frações contínuas e das frações decimais. É a respeito dela que iremos comentar a partir de agora.

5.6 FRAÇÕES DECIMAIS E CONTÍNUAS NA OBRA DE AARÃO E LUCANO REIS

Primeiramente observamos que os autores demonstravam certa preocupação em escrever uma obra que oferecesse subsídios para o estudo da matemática dada no ensino superior, pois a parte intitulada "ADVERTÊNCIA DA PRIMEIRA EDIÇÃO", trouxe os seguintes dizeres:

Figura 60 – Referência a respeito da relação entre o ensino secundário e o superior na obra dos irmãos Reis.

Nesse intuito, poderiamos — não ha duvida — ter restringido as proporções deste modesto trabalho ao estrictamente indispensavel para seu objectivo principal: — entendemos, porém, que, sem nos afastarmos deste, conviria dar ao presente trabalho mais algum desenvolvimento, de modo a approprial-o, ao mesmo tempo, ao ensino da MATHEMATICA ELEMENTAR *aos candidatos á matricula nos diversos estabelecimentos de ensino superior do paiz, aos alumnos das* ESCHOLAS NAVAL *e* NORMAES, *e, ainda, aos que desejarem seguir a carreira commercial, ou a nobre profissão de* engenheiros agrimensores, *que tão importante é, de presente, no Brazil.*

Fonte: Reis, A. e L. (1892, p. xviii).

Essas afirmações são, para nós, de grande importância, porque estão associadas ao nosso pensamento de que, de certa forma, alguns conteúdos matemáticos pertinentes ao ensino secundário poderiam ter seus laços estreitados com outros trabalhados na fase inicial do estudo do cálculo, no ensino superior.

Passamos, agora, a tratar de questões mais pontuais em relação ao envolvimento da matemática do ensino secundário e a matemática do nível superior.

No capítulo destinado a tratar das operações entre frações, mais especificamente na parte em que aborda o tema divisão, os autores trazem o seguinte *corolário*, acompanhado de um exemplo e de duas *observações didáticas*.

Figura 61 – Ideia sobre o conceito de limite por meio da divisão de um número qualquer por outros sucessivamente crescentes.

412. — Corollarios : — I. — *O quociente das divisões de um numero qualquer por outros successivamente crescentes sem limite vam decrescendo, e podem approximar-se de zéro tanto quanto se queira, mas sem nunca attingil-o.* — Com effeito, sendo 17, por exemplo, o numero considerado, temos que :

Fonte: Reis, A. e L. (1892, p.352).

Figura 62 - Continuação da ideia sobre o conceito de limite por meio da divisão de um número qualquer por outros sucessivamente crescentes.

1.° — os quocientes de 17 pelos numeros 2, 3, 4, 5, 6, 7......., vam sempre decrescendo, porque as fracções

$$\frac{17}{2},\quad \frac{17}{3},\quad \frac{17}{4},\quad \frac{17}{5},\quad \frac{17}{6},\quad \frac{17}{7},\quad \ldots\ldots,$$

cujo numerador é invariavel, decrescem de valor á medida que crescem seus respectivos denominadores (362);

2.° — augmentando successivamente o divisor, podemos tornal-o tão grande que o valor da fracção quociente $\frac{17}{n}$ (representando por n esse divisor) approxime-se, quanto nos convenha, de zéro, por ser o numero de partes eguaes em que é dividida a unidade tão grande que o valor de cada uma dessas partes approxima-se indefinidamente de zéro;

3.° — por maior, porém, que seja o valor attribuido a esse divisor n, nunca a fracção quociente $\frac{17}{n}$ poderá ser egual a zéro, porque, para isso, seria mistér que, sendo $\frac{17}{n} = 0$, fosse $17 = n \times 0$, o que é absurdo.

Fonte: Reis, A. e L. (1892, p. 353).

A ideia expressada pelos irmãos Reis, no corolário, estava próxima da que foi explorada por Sonnet no item 5, uma vez que ambos abordaram o conceito de *infinitésimo;* porém, a obra dos irmãos Reis apresentou um *resultado* que encaminha para a obtenção do infinitésimo, além de disponibilizar um *exemplo*, visando um melhor entendimento do assunto. Esse exemplo veio acompanhado de duas observações didáticas, que estabelecem ligações com os cálculos numéricos oferecidos, dando a impressão de que, caso os cálculos não fossem suficientes, o aluno ainda poderia contar com os comentários, para confirmar ou entender as ideias que ali estavam sendo transmitidas.

Um pouco mais adiante, na parte destinada a tratar das conversões, na qual foram apresentados procedimentos para converter uma fração da forma ordinária para sua forma decimal, os autores ofereceram a seguinte *observação didática:*

Figura 63 - Definição de dízima finita e infinita pelos irmãos Reis.

464. — Quocientes finito e infinito. — Nesta série de divisões successivas, ou se chega a um quociente exacto, e, então, a fracção decimal obtida é exactamente equivalente á fracção ordinaria dada, como succedeu no exemplo figurado; ou nunca as divisões successivas se operam com exactidão, e, então, não é possivel, por mais que se prolongue a operação, determinar uma fracção decimal que equivalha exactamente á ordinaria dada. No primeiro caso, o quociente da divisão do numerador pelo denominador é *finito*, e a fracção decimal resultante é uma — DIZIMA FINITA; e, no segundo caso, esse quociente é *infinito*, e a fracção decimal resultante, uma — DIZIMA INFINITA.

Fonte: Reis, A. e L. (1892, p. 364).

Em meio a tais *observações didáticas*, os autores definiram dízima finita e infinita, de forma que os conceitos de finito e infinito foram associados às casas decimais.

Após a definição de dízima infinita, os autores voltaram a fornecer uma observação didática.

Figura 64 - Ideia de infinitésimos por meio do erro em uma aproximação.

Prolongada convenientemente a série das divisões successivas, póde-se determinar uma fracção decimal que, desprezado o ultimo resto, diffira do valor real da fracção ordinaria de uma quantidade tão pequena quanto se queira, menor que qualquer quantidade apreciavel, ou antes *infinitamente pequena*.

Em tal caso, a fracção ordinaria representa o *limite* para que tende o valor da fracção decimal á medida que se prolonga a série das divisões successivas; e a fracção decimal nada mais é que um *valor mais, ou menos, approximado* da fracção ordinaria.

Exemplificando, temos que, procurando converter em fracção decimal a ordinaria $\frac{3}{7}$, acha-se :

$$\frac{3}{7} = 0{,}428571\ldots\ldots\ldots$$

Si, desprezados os restos que ainda se seguem, tomarmos a fracção decimal 0,428571, representará ella um *valor approximado* de $\frac{3}{7}$ *a menos* de 1 *millionesimo por defeito*, isto é, o valor real de $\frac{3}{7}$ *excederá* o da fracção decimal 0,428571 *de menos de* 1 *millionesimo*.

Si, em vez de tomarmos 0,428571, tomarmos 0,428572, forçando o ultimo algarismo, esta fracção decimal representará ainda um *valor approximado* de $\frac{3}{7}$ *a menos de* 1 *millionesimo*, mas *por excesso;* porque, então, será o valor desta fracção decimal que *excederá* o da ordinaria $\frac{3}{7}$ *de menos de* 1 *millionesimo*.

De modo que

$$0{,}428571 < \frac{3}{7} < 0{,}428572.$$

Fonte: Reis, A. e L. (1892, p. 395).

O exemplo anterior foi mais um em que os autores fizeram uso do conceito de *infinitésimos*, só que, agora, ele foi utilizado como erro cometido ao tomar a fração decimal como aproximação da fração ordinária.

Em comparação com o que foi apresentado anteriormente a respeito do cálculo diferencial e integral, esse é um momento de certo avanço. Porque além dos conceitos de infinitésimos e aproximações, os autores ainda abordam o conceito de limite, que também é de grande importância para o estudo do Cálculo.

De maneira geral, para a *observação didática* anteriormente oferecida, os autores utilizaram, na maior parte de tempo, a linguagem materna, trazendo algumas *nomenclaturas* como, quociente finito e infinito, quantidade tão pequena quanto se queira, infinitamente pequena e limite, que estão próximas às utilizadas por Sonnet em sua obra.

A categoria dos exemplos também esteve presente, sendo ela complementada por observações dadas pelos autores, o que poderia auxiliar o leitor no entendimento a respeito dos infinitésimos, já que para representá-lo os autores utilizaram números decimais pequenos.

No momento precedente, os autores abordaram rapidamente o tema *limite*, que, nesse mesmo capítulo, após tratarem da "conversão de uma fração ordinária em decimal", eles voltaram ao tema limite, iniciando com a seguinte nota:

Figura 65 - Nota sobre a relação entre o conceito de limite e dízima periódica.

NOTA. — Em LIVRO especial, estudaremos mais adeante as *approximações numericas*, com o devido cuidado; de presente, porém, nos limitaremos a dar ligeiras noções elementares sobre os *limites*, que permittam a boa comprehensão da theoria das *dizimas periodicas*, de que temos de tratar no presente LIVRO.

Fonte: Reis, A. e L. (1892, p. 398).

Essa nota sugeria que as *noções de limite* se apresentavam com a importância de serem requisitos para maior compreensão das *dízimas periódicas*. Como esse último tema constava na lista de conteúdo dos programas de ensino da época em que esse livro foi adotado, esse fato representou um indício de que, nessa mesma época, os alunos vieram a estudar as *noções elementares de limite* por meio da obra dos irmãos Reis.

O autor inicia a abordagem a respeito de *limite* por meio de uma definição; para isso, utiliza-se de *nomenclaturas* e expressões associadas ao estudo do Cálculo, como, por exemplo, em "difiram de uma quantidade *tão pequena quanto se queira*" e em "ao tomar uma razão em que o denominador torna-se *tão grande* quanto se queira resulta em um valor *tão pequeno* quanto se queira".

Essas nomenclaturas foram utilizadas para indicar uma proximidade entre grandezas, e significam dizer que as diferenças entre elas vão se tornando extremamente pequenas, um *infinitésimo*. Entendemos que esse foi um momento em que os autores da obra utilizada no ensino secundário abordaram a ideia de variações que foram se tornando cada vez mais próximas; para nós, essa foi uma relação destacada por Sonnet em sua primeira definição para Cálculo Diferencial, por isso, acreditamos na importância e na relação entre esse tema, no ensino secundário e o Cálculo do ensino superior.

Ainda na primeira parte, notamos mais uma relação entre esse tema e o Cálculo, sendo essa dada por meio das seguintes definições:

Figura 66 – Ideia de reta tangente a uma curva pelos Irmãos Reis.

Assim, n'uma circumferencia, a *tangente* é o *limite* das posições da *secante*, que se move parallelamente a si mesma tendendo a sahir do circulo.

Fonte: Reis, A. e L. (1892, p. 399).

Figura 67 – Ideia de reta tangente a uma curva por Sonnet.

97. — On sait que l'on appelle *tangente* à une courbe, en un point donné de cette courbe, la limite des positions que

Fonte: Sonnet (1884, p. 91).

Figura 68 – Continuação da Ideia de reta tangente a uma curva por Sonnet.

prend une sécante menée par ce point, lorsqu'on la fait tourner jusqu'à ce qu'un second point d'intersection vienne se confondre avec le premier.

Fonte: Sonnet (1884, p. 92).

Observamos que os dois autores se apoiaram no conceito de *limite*, para apresentar uma definição para reta tangente a uma curva.

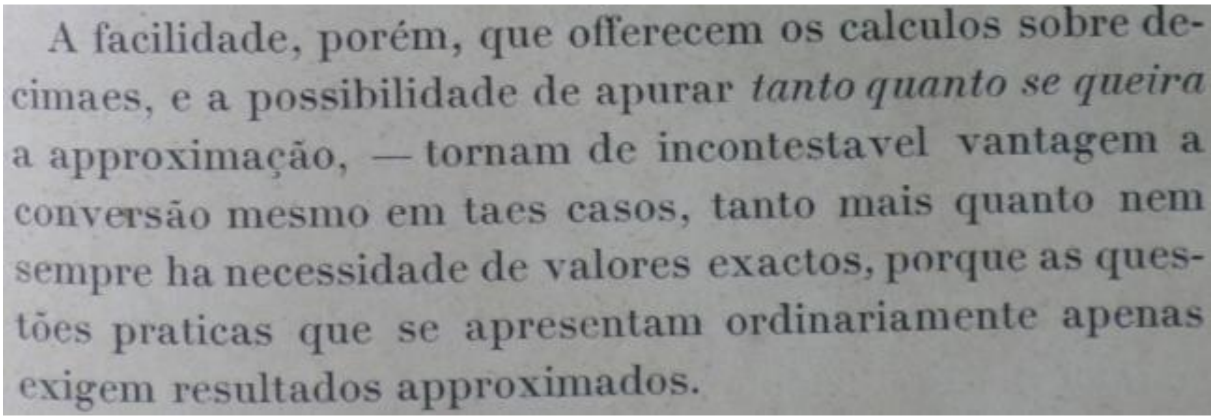
Na sequência, foram dados sete teoremas a respeito do conceito de *limite*, sendo que nos três primeiros foi utilizado o conceito de infinitésimo durante as demonstrações e os quatro últimos foram utilizados o resultado dado no terceiro teorema.

Basicamente os infinitésimos foram utilizados na demonstração desses teoremas, no sentido de serem valores que se anulavam à medida que outras variáveis tornavam-se cada vez mais próximas.

Como indicado pelos autores, as noções de limite foram estabelecidas devido à importância que tinham para o estudo das dízimas. Movidos por essa informação, buscamos observar como os autores relacionaram esses conceitos e se os mesmos tinham alguma ligação com o estudo do Cálculo Diferencial e Integral.

Os autores buscaram relacionar as dízimas periódicas com o estudo de aproximações entre frações ordinárias e frações decimais, e, para justificar a importância dessas aproximações, os autores afirmaram o seguinte:

Figura 69 – Uso de aproximação em questões práticas.



A facilidade, porém, que offerecem os calculos sobre decimaes, e a possibilidade de apurar *tanto quanto se queira* a approximação, — tornam de incontestavel vantagem a conversão mesmo em taes casos, tanto mais quanto nem sempre ha necessidade de valores exactos, porque as questões praticas que se apresentam ordinariamente apenas exigem resultados approximados.

Fonte: Reis, A. e L. (1892, p. 405).

Observamos que nessa justificativa os autores citaram as questões práticas, que, no mod de entendermos, tais questões poderiam estar relacionadas ao ofício do engenheiro, já que Aarão Reis, um dos autores dessa obra, era formado em engenharia civil. Como aqui estamos tratando do Cálculo Diferencial e Integral nos cursos de engenharia, acreditamos que essa seja uma nota de destaque.

Voltando a falar das dízimas periódicas e sua relação com *limite*, foi possível perceber que essa ligação começou a ser estabelecida logo após a definição de *dízima periódica*, mais especificamente no teorema que sucede a definição. Tal teorema indicava que à proporção que o número de períodos de uma dízima aumenta, seu valor tende a alcançar um limite determinado.

Para esse teorema não foi disponibilizada uma demonstração matemática; os autores optaram por apresentar um exemplo e, por meio dele, extrair algumas conclusões que levassem os leitores ao entendimento da afirmação dada. No momento em que os autores teceram os comentários referentes ao exemplo, eles utilizaram *nomenclaturas* próximas às que são utilizadas no estudo do Cálculo Diferencial e Integral, como *diferir tão pouco quanto se queira*, *valor tão grande quanto se queira* e *se aproxima tanto quanto se queira a medida que n cresce incessantemente.*

Todas essas nomenclaturas foram dispostas no sentido de que as variações dadas tornavam-se cada vez mais próximas de um valor determinado, ou melhor, que as diferenças entre essas variações e o tal valor tornavam-se infinitamente pequenas. Devido a isso, consideramos esse momento associado ao estudo do Cálculo contido na obra de Sonnet.

Na sequência, os autores apresentaram uma *observação didática* para indicar que o valor para o qual a dízima periódica tende, à medida que seus períodos crescem ilimitadamente, é uma fração ordinária que, ao ser simplificada, não possui em seu denominador os fatores primos 2 e 5. Nesse sentido, passaram a apresentar resultados que auxiliavam na busca da fração ordinária para a qual a dízima periódica tenderia.

O primeiro resultado foi apresentado por meio de um teorema referente à dízima periódica simples. Para ilustrar esse teorema os autores fizeram uso da categoria do *exemplo*, dividindo-o em duas partes.

Figura 70 – Conversão de uma fração decimal periódica em uma fração ordinária.

Seja, com effeito, a fracção decimal periodica simples

$$0{,}431431431\ldots$$

Trata-se de demonstrar : — 1.º, que o limite L para que tende este numero decimal, quando o numero dos periodos cresce sem limites, é a fracção ordinaria $\frac{431}{999}$; — e 2.º, que, reciprocamente, esta fracção ordinaria, convertida em decimal, reproduz a fracção decimal proposta.

Fonte: Reis, A. e L. (1892, p. 416).

Observamos que na primeira parte os autores utilizaram o fato de a razão tornar-se um infinitésimo, à medida que o seu denominador vai crescendo de acordo com n e, dessa forma, esse valor é visto tão pequeno que deixa de ser considerado na operação.

Assim, observamos dois artifícios: o primeiro foi o de a razão tornar-se suficientemente pequena à medida que o seu denominador seja de um valor suficientemente grande. Esse é um caso que, no item 10 da obra de Sonnet é apenas mencionado, sem a presença de nenhuma outra categoria que pudesse contribuir com o entendimento dessa informação; por isso, acreditamos que a abordagem feita pelos irmãos Reis pudesse ser pensada como um pré-requisito.

O segundo foi o fato de não considerar o infinitésimo, no momento da soma entre ele e um valor finito; esse artifício foi comentado por Sonnet, no item 5, e utilizado por ele no item 14. Assim, vemos como positivo o fato de os alunos terem contato com essa ideia no ensino secundário, pois poderia auxiliar no momento em que ela fosse vista no curso superior.

Após trazer alguns corolários referentes à demonstração citada anteriormente, esses autores apresentaram um teorema semelhante ao primeiro, mas que envolvia *dízima periódica mista*. A forma como eles procederam, em seguida, foi semelhante à do teorema anterior, inclusive em relação aos artifícios utilizados para chegar ao resultado desejado, o que pode ser visto como mais um momento em que os alunos teriam a oportunidade de se familiarizar com os termos e com os procedimentos, de forma a contribuir com suas experiências futuras.

Na mesma seção, porém no livro seguinte, os autores abordaram o tema *frações contínuas*. Inicialmente, eles buscaram definir frações contínuas, apontando que estas podem ser *limitadas* ou *ilimitadas*, e utilizaram**,** também, algumas nomenclaturas.

Em seguida, os autores abordaram sobre conversões de frações ordinárias em frações contínuas. Para isso, efetuaram uma série de cálculos com elementos algébricos e concluíram que o processo poderia se dar por meio do máximo divisor comum e, também, que toda quantidade comensurável poderia ser expressa por uma fração contínua limitada, e toda quantidade incomensurável, por uma fração contínua ilimitada; para este último caso, utilizaram, como exemplo, a raiz quadrada de 7. Na explicitação da resolução desse exemplo, os autores procuraram atentar para as operações envolvidas, sem buscar relacioná-las com aproximações ou diferenças infinitesimais.

Outro processo comentado foi que, ao ser dada uma fração contínua, era possível determinar sua representação na forma de fração ordinária. Para isso, os autores indicaram uma regra por meio da linguagem corrente e um exemplo numérico para ilustrar tal regra. Em seguida, buscaram ampliar esse processo para qualquer tipo de fração contínua, sendo isso feito por uma série de cálculos com elementos algébricos que depois foram aplicados em um exemplo numérico de uma fração contínua limitada. Essa parte veio a ser concluída por meio de uma *observação didática* a respeito da obtenção da reduzida.

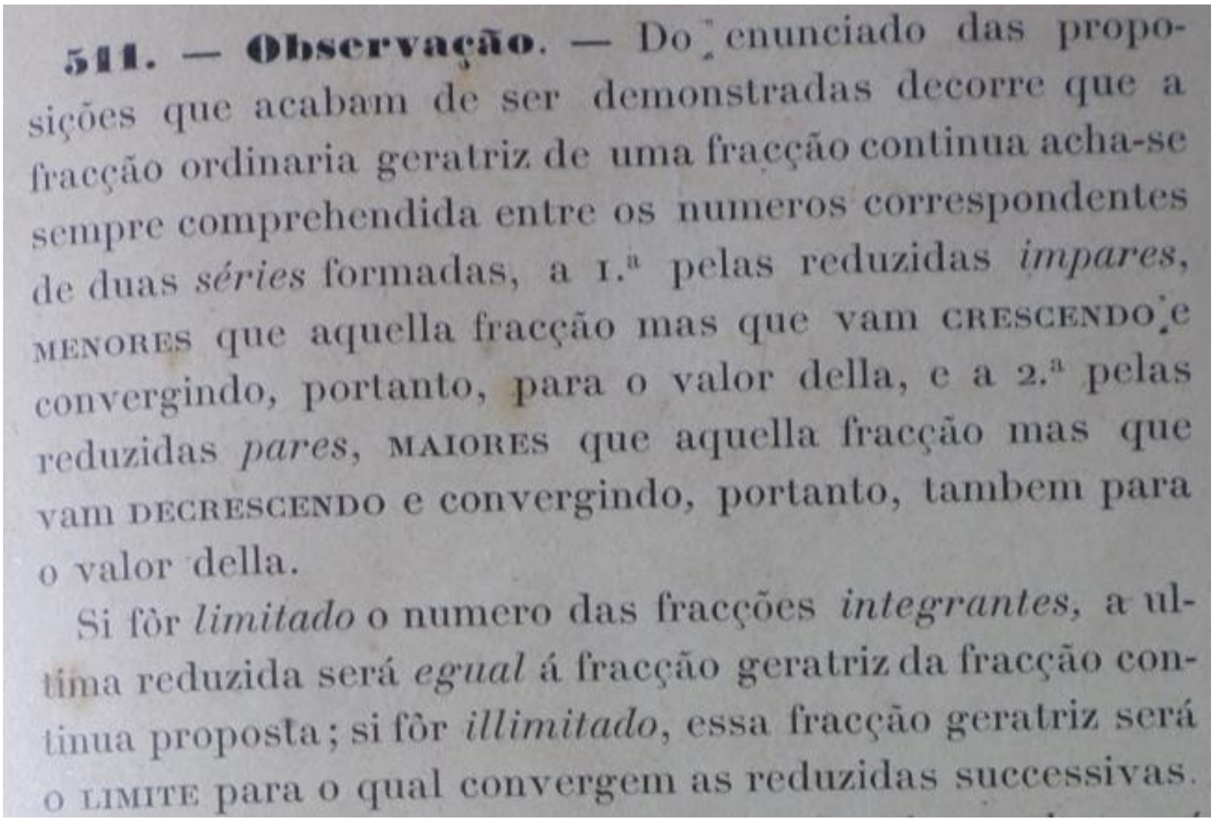
Em continuidade ao conceito de frações contínuas, os autores apresentaram algumas propriedades das reduzidas. A primeira propriedade foi demonstrada por meio de um teorema sobre a comparação entre as reduzidas de ordem par e ímpar e sua fração ordinária geratriz.

Para a dedução desse teorema os autores tomaram uma fração contínua qualquer e mostraram, por meio de cálculos algébricos, que a afirmação feita no teorem era válida para a 2ª e 3ª reduzida, demonstrando que o cálculo era o mesmo para as reduzidas seguintes. Seguindo-se à apresentação desse teorema, os autores sugeriram um corolário para demonstrar que o valor de uma fração ordinária geratriz de uma fração contínua está entre duas reduzidas consecutivas; além disso, apresentaram um teorema sobre o crescimento das reduzidas de ordem ímpar e o decréscimo daquelas de ordem par. Esse último teorema não foi demonstrado;

apenas foi sugerido que esse resultado poderia ser observado por meio das reduzidas.

Após essa movimentação, os autores disponibilizaram a seguinte observação didática:

Figura 71 - Propriedade das reduzidas de ordem par e ímpar pelos irmãos Reis.



511. — Observação. — Do enunciado das proposições que acabam de ser demonstradas decorre que a fracção ordinaria geratriz de uma fracção continua acha-se sempre comprehendida entre os numeros correspondentes de duas *séries* formadas, a 1.ª pelas reduzidas *impares*, MENORES que aquella fracção mas que vam CRESCENDO e convergindo, portanto, para o valor della, e a 2.ª pelas reduzidas *pares*, MAIORES que aquella fracção mas que vam DECRESCENDO e convergindo, portanto, tambem para o valor della.

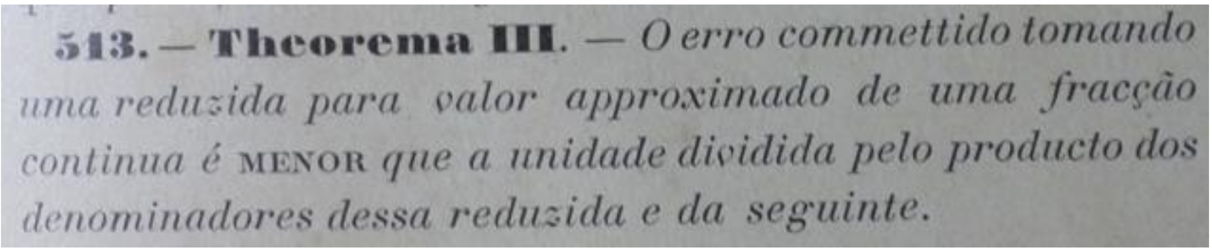
Si fôr *limitado* o numero das fracções *integrantes*, a ultima reduzida será *egual* á fracção geratriz da fracção continua proposta; si fôr *illimitado*, essa fracção geratriz será O LIMITE para o qual convergem as reduzidas successivas.

Fonte: Reis, A. e L. (1892, p. 447).

Essa observação sugeria a ideia de aproximação entre uma série de valores das reduzidas, de ordem par e ímpar, e o da fração ordinária geratriz de uma fração contínua, dando a entender que à medida que tomamos elementos maiores dessas séries, mais próximos estaremos do valor da fração ordinária. Tal ideia seria importante para o estudo de Cálculo Diferencial e Integral, ainda que os autores não tenham sugerido que exista uma associação dessa ideia com o conceito de limite.

No corolário seguinte, os autores confirmaram a ideia transparecida na observação acima, a respeito de uma reduzida qualquer estar mais próxima da fração contínua geratriz do que uma reduzida antecedente, e prosseguiram com este teorema:

Figura 72 - Erro cometido ao tomar uma reduzida como aproximação de uma fração ordinaria.



513. — Theorema III. — *O erro commettido tomando uma reduzida para valor approximado de uma fracção continua é* MENOR *que a unidade dividida pelo producto dos denominadores dessa reduzida e da seguinte.*

Fonte: Reis, A. e L. (1892, p. 399).

É possível perceber que esse teorema utilizou a ideia de proximidade entre as reduzidas e sua fração ordinária geratriz e, ainda, acrescentou o fato de poder “controlar” o erro cometido de acordo com a reduzida escolhida, dando a entender que esse erro pode ser tão pequeno quanto se queira, conceito importante para o ofício do engenheiro e que foi utilizado na obra de Sonnet.

Para finalizar esse assunto, os autores trouxeram dois exemplos, o primeiro foi para justificar o teorema e o segundo como uma aplicação do mesmo.

O último exemplo foi dado a fim de servir como uma observação didática para indicar que o teorema também era utilizado com números decimais; para justificar, serviu-se de uma aproximação com o número *pi*, comentando, ao final do cálculo, que os valores encontrados corresponderam aos dados por Archimedes e Adriano Metius.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Desenvolvida esta pesquisa, chegamos à parte deste trabalho em que apresentamos uma síntese de nossas análises, tomando como norte os objetivos específicos que foram delineados. As ideias aqui apresentadas são decorrentes dos estudos realizados acerca das reformas educacionais, programas de ensino e livros didáticos, tendo como propósito analisar os aspectos históricos, didáticos e epistemológicos relativos ao ensino do Cálculo Diferencial e Integral no ensino secundário brasileiro durante os anos de 1889 até 1929.

Antes de serem apresentados os comentários mais pontuais a respeito das conclusões obtidas, destacamos que, de acordo com Chervel (1990, p. 190), "a distinção entre finalidades reais e finalidades de objetivos é uma necessidade imperiosa para o historiador das disciplinas". Por meio desses dizeres e do contexto que o cerca, entendemos que as conclusões a que chegamos tiveram seu início no que Chervel (1990) chamou de finalidades de objetivos e se encaminharam para as finalidades reais.

Dessa maneira, iniciamos nossas considerações conclusivas pelos textos oficiais ou reformas educacionais, passando pelos programas de ensino e chegando aos livros didáticos, que constituem o tipo de documento que nos deixou mais próximos do que possivelmente aconteceu em sala de aula.

Por meio dos estudos realizados nas quatro reformas educacionais, concluímos que as duas primeiras, conhecidas como Benjamin Constant e Amaro Cavalcanti, foram as que apresentaram um maior número de estratégias ligadas à finalidade de aproximar o ensino secundário com o superior. Em consequência, notamos uma possível aproximação entre as Matemáticas do ensino secundário com os estudos iniciais do Cálculo Diferencial e Integral no ensino superior.

A suposição feita anteriormente esteve relacionada, a princípio, ao fato de o Art. 1º das reformas Benjamin Constant e Amaro Cavalcant ter utilizado uma expressão matemática impactante (necessário e suficiente) para expressar o propósito de instruir os alunos para entrar nos cursos superiores. Nesse sentido era importante que os conteúdos trabalhados em cada matéria tivessem como norte, o preparo para conhecimentos futuros no ensino superior.

Aliado a esse propósito de transição de ensino, observamos que os decretos de 1890 e 1898 apresentavam os exames de madureza. Os mesmos aparentavam ter um caráter importante nesse processo, já que era por meio de sua aprovação que o aluno estaria apto para dar continuidade aos estudos em nível superior.

Ligadas aos exames, e também ao artigo primeiro, estavam as instituições associadas à instrução pública, eram as mesmas que organizavam e aplicavam esses exames. Nas legislações, foi possível notar que nessas instituições associadas à instrução pública, havia a presença de membros do ensino superior encarregados de elaborar e aplicar esses exames.

Consideramos que a presença de membros do ensino superior na composição dessas instituições estabeleceu uma interessante relação entre o nível secundário e o superior, de modo que o professor do secundário ficava incumbido de encaminhar seus alunos até o exame, enquanto o professor do superior é quem garantia se esse aluno teria condições de prosseguir ou não em seus estudos. Era como se o exame de madureza e o seu formato indicassem um ponto de inflexão na trajetória estudantil rumo ao ensino superior.

Uma última observação analítica acerca dos descretos de 1890 e 1898 refere-se à indicação de uma disciplina composta pelo Cálculo e um professor exclusivo para a mesma, o que sugere elementos pertencentes à cultura escolar da época, que correspondeu ao fato de oferecer subsídios para que os alunos pudessem lidar com os enfrentamentos dos estudos do Cálculo Diferencial e Integral ofertado pelos cursos de engenharia, nas escolas politécnicas.

O formato de ensino secundário proposto nas reformas Benjamin Constant e Amaro Cavalcanti foi alvo de várias discussões, na virada para o século XX. No entanto, foi por meio da reforma Rivadávia Corrêa, de 1912, que observamos um maior distanciamento entre os propósitos establecidos por Constant e Cavalcanti, no que tange ao fato de as matemáticas do ensino secundário servirem de base ao estudo do Cálculo Diferencial e Integral no ensino superior.

A indicação de Rivadávia Corrêa para que os docentes da instituição secundária criassem um programa de ensino que atendesse às questões práticas do cotidiano do aluno e que, ao mesmo tempo, se afatasse do propósito de dar base ao ensino superior, representou uma possível mudança de finalidade das disciplinas escolares. Tal fato possibilitou o entendimento de que as Matemáticas poderiam não mais ser trabalhadas, ficando como um de seus propósitos dar base ao estudo do Cálculo Diferencial e Integral.

Nossa suspeita foi intensificada mediante as linhas gerais que o programa de ensino deveria seguir, pois na parte destinada as Matemáticas, Rivadávia Corrêa demonstrou interesse em questões ligadas à vida prática do aluno e não ao fato de dar subsídios aos conteúdos abordados no ensino superior.

As exigências feitas para o aluno adentrar no ensino superior também representaram um momento de “independência” do ensino secundário em relação a esse nível de ensino. O aluno, que antes recebia um diploma que garantia sua entrada direta para o ensino superior, passou a receber um certificado e a ter que fazer o exame de admissão ao ensino superior caso quisesse cursar alguma faculdade.

O fato de não ter sido exigido o certificado do ensino secundário para o aluno que quisesse prestar o exame de admissão, contribuiu para pensarmos que, naquele momento, o ensino secundário tinha como finalidade escolar a “independência” do ensino superior. Como consequência disso e dos outros aspectos citados, as Matemáticas poderiam estar sendo ensinadas sem a finalidade de dar base aos enfrentamentos iniciais do Cálculo Diferencial e Integral.

O momento histórico posterior ao da reforma Rivadávia Corrêa foi orientado pela reforma educacional Carlos Maximiliano, de 1915, a última a ser abordada em nossa pesquisa. Observamos uma reaproximação com a finalidade de o ensino secundário dar base ao estudo superior, porém de forma menos expressiva do que a que observamos no estudo das reformas Benjamin Constant e Amaro Cavalcanti.

O exame final escolhido por Carlos Maximiliano foi o exame vestibular; o mesmo tinha caraterísticas próximas ao que foi dado na reforma Rivadávia Corrêa, contudo, exigia do candidato o certificado de conclusão do ensino secundário. Isso representou uma reaproximação entre os ensinos secundário e superior.

O formato proposto para a parte oral do exame final fortaleceu nosso pensamento a respeito dessa reaproximação, mas de uma forma mais pontual, tendo em vista que, nas descrições deste exame final, foram sugeridas associações entre a Matemática elementar do ensino secundário e os cursos de engenharia oferecidos nas escolas politécnicas.

Foi referido, também, o propósito de o ensino secundário dar suporte para os alunos prestarem o exame vestibular; entre as disciplinas essenciais que dessem esse suporte estavam a Álgebra e a Aritmética. Diante disso, concluímos que a reaproximação entre a instituição secundária e superior poderia ter representado, também, uma reaproximação entre disciplinas matemáticas do ensino secundário com o estudo inicial do Cálculo Diferencial e Integral nos cursos de engenharia.

Após a análise das reformas educacionais, voltamos nossos olhos para os programas de ensino. Nesses programas, notamos a presença de três momentos distintos em relação a uma possível finalidade de as disciplinas de Álgebra e Aritmética darem base ao estudo do Cálculo Diferencial e Integral.

O primeiro momento correspondeu à década final do século XIX, mais especificamente entre os anos de 1892 até 1898. Todos os programas analisados nesse período trouxeram a indicação do livro didático que deveria ser seguido. Isso foi algo importante para a nossa investigação, pois nos deu oportunidade de fazer uma análise da relação entre alguns conteúdos propostos para o ensino secundário e o estudo do Cálculo Diferencial e Integral dado no ensino superior.

Os conteúdos mencionados anteriormente corresponderam às frações contínuas, frações periódicas; função e equação exponencial; os dois primeiros tiveram destaque devido à relação com os conceitos de aproximação, infinito e infinitésimo. A função se destacou por ser um tema abordado tanto no secundário quanto no superior, e a equação exponencial, devido à ligação com o conceito de função e por contribuir com a ideia de infnito e infinitésimo.

Sobre as disciplinas de Aritmética e Álgebra, notamos que a proximidade entre elas, de 1895 a 1898, se mostrou importante para o nosso trabalho, já que a transição da parte concreta da Aritmética para a abstração da Álgebra transpareceu se tratar de algo relevante para o estudo do Cálculo Diferencial e Integral.

O período entre 1895 e 1898 foi visto como o ápice da relação entre as Matemáticas do ensino secundário e o Cálculo Diferencial e Integral do ensino superior. Essa suposição consistiu no fato de que, além das disciplinas ditas elementares da Matemática, foi sugerida, ao ensino secundário, uma disciplina com tópicos do ensino superior e composta por Cálculo Diferencial e Integral.

Para o segundo período, tomamos como base os programas para os anos de 1899, 1912 e 1915. Uma semelhança entre esses programas foi a não indicação de uma obra a ser seguida e a extinção da disciplina composta por Cálculo Diferencial e Integral. Diante dessas semelhanças, não foi possível afirmar que nesse segundo período as disciplinas escolares do ensino secundário não dessem base ao estudo do Cálculo, contudo representaram um fator interferente para que pudéssemos fazer afirmações mais contundentes em relação a esse fato.

Entre os anos de 1912 e 1915 notamos um afastamento entre as disciplinas de Álgebra e Aritmética, o que consideramos como algo negativo em relação ao nosso trabalho, pois, como já mencionado anteriormente, a proximidade entre essas duas disciplinas poderia ter contribuído para os estudos iniciais do Cálculo.

Outro aspecto negativo observado nos programas de ensino dos 1912 e 1915 diz respeito aos conteúdos frações contínuas, função e equação exponencial. Tais conteúdos que, aparentemente, davam base ao estudo do Cálculo, deixaram de figurar entre os temas propostos para o ensino secundário. Apesar disso, os conteúdos frações, quocientes aproximados, conversão de frações ordinárias em frações decimais e as dízimas periódicas poderiam, ainda, estabelecer uma ligação com o Cálculo, na parte destinada a tratar das aproximações, inifinitos e infinitésimos.

Mesmo com a exclusão de alguns conteúdos e a inclusão de outros, o fato de não termos encontrado a indicação de uma obra didática impediu que fizéssemos maiores afirmações a respeito da relação entre os tópicos de Álgebra e Aritmética com o estudo inicial do Cálculo Diferencial e Integral.

O terceiro e último período identificado por nós foi o de 1919 até o ano limite de nossa pesquisa. Um dos motivos pelos quais destacamos esse período esteve relacionado à volta da indicação das obras didáticas que deveriam ser seguidas para o ensino de Aritmética e Álgebra.

De início, constatamos somente a indicação da obra a ser seguida no estudo de Aritmética. Tal livro corrensppondeu à Aritmética, dos Frades da Instrução Cristã (F.I.C). Infelizmente esse livro não constou do nosso acervo de pesquisa, o que dificultou que fizéssemos algum tipo de consideração a respeito de sua parte didática e a relação com o estudo prévio do Cálculo.

Já no programa de 1923, de acordo com Gussi (2011), além da obra de Aritmética, foram sugeridos os livros para a disciplina de Álgebra, sendo os mesmos correspondentes às obras de Serrasqueiro e de Joaquim Lisboa. A volta da indicação da obra de Serrasqueiro foi representativa para nós, pois ela já havia sido indicada entre 1892 a 1898. A presença dessa obra em dois períodos do nosso trabalho possibilitou extrair algumas conclusões a respeito da abordagem algébrica, no sentido de ela ter proporcionado base ao estudo do Cálculo Diferencial e Integral do ensino superior.

A respeito da disciplina de Aritmética, observamos que a maneira como foi disposta no programa de ensino para o ano de 1926 deu a impressão de aspectos positivos em relação ao estudo inicial do Cálculo. Essa suposição baseou-se no fato de que, apesar de no primeiro ano, apenas os conceitos concretos dessa disciplina terem sido elencados, no segundo ano eles foram ampliados e formalizados por meio do ensino dos métodos, definições, notação, propriedades, teoria e teoremas, relacionados a esses conteúdos.

Sobre os conteúdos trazidos no programa para o ano de 1926, aqueles pertencentes à Aritmética e que aparentaram ter relações com o Cálculo Diferencial e Integral foram: *conversão de uma fração ordinária em decimal, dízimas periódicas, definição, determinação da geratriz, características de convertibilidade e também da extração da raiz quadrada e cúbica, a menos de uma unidade e com uma aproximação dada, de um inteiro ou fracionário*. Apesar de termos ciência desses conteúdos, não foi possível extrair conclusões mais contundentes, pois não tivemos acesso às obras indicadas pelo programa, sendo elas a de Euclides Roxo, Cecil Thiré e H. Costa, E. Roxo e O. Castro.

Quanto à disciplina de Álgebra, notamos que, no programa para o ano de 1926, o conteúdo equação exponencial voltou a ser indicado. Esse foi um fato relevante, pois além da relação direta com a introdução ao estudo do Cálculo, a maneira como esse conteúdo foi trabalhado, na obra de Serrasqueiro, deixou transparecer a ideia de que conteúdos como função e frações contínuas poderiam ter sido ensinados novamente.

Ainda sobre a disciplina de Álgebra e nos aproximando do que supostamente aconteceu nas salas de aula da época, analisamos, por meio da obra de Serrasqueiro os conteúdos: função, equação exponencial, indeterminação e fração contínua.

A respeito do tema função, pressupomos que o mesmo deu base para o estudo de Cálculo, pois foi abordado tanto na obra utilizada no ensino secundário quanto no superior. Além disso, a definição e os exemplos trazidos na obra de Serrasqueiro poderiam contribuir e serem ampliadas por meio da abordagem feita por Sonnet.

O conceito de indeterminação foi outro tema abordado tanto na obra do ensino superior quanto na do secundário. Ao longo da exposição desse conceito, o autor da obra utilizada no ensino secundário optou por não apenas apresentar o resultado, mas por justificar a razão por que ele foi desenvolvido; para isso, utilizou explicações em linguagens correntes, exemplos numéricos e demonstrações.

Valorizamos o desenvolvimento dado por Serrasqueiro, tendo em vista que ele possibilitava ao aluno do curso de engenharia um conhecimento prévio acerca de justificativas, que não foram dadas por Sonnet.

Em relação à equação exponencial, Serrasqueiro associou esse conteúdo ao de função contínua. Utilizou terminologias e exemplos que dariam ao aluno do ensino secundário um bom repertório para quando estivesse estudando os conceitos específicos do Cálculo, como, por exemplo, o conceito de diferencial.

O tema fração contínua aparentemente não foi comentato por Sonnet, mas as relações entre esse conteúdo e os conceitos de aproximação, infinito e inifinitésimos, poderiam contribuir com a base para o estudo do Cálculo Diferencial e Integral.

Sobre a exposição de Serrasqueiro a respeito do conteúdo frações contínuas, notamos que, à medida que o autor dava sequência nos resultados, a linguagem adotada, os cálculos e os conceitos utilizados foram se tornando cada vez mais próximos daqueles utilizados por Sonnet. Desse modo, a obra de Serrasqueiro ofereceu uma boa noção a respeito do conceito de limite, tema utilizado por Sonnet e de grande importância para o Cálculo Diferencial e Integral.

Com respeito à disciplina de Aritmética, realizamos um breve estudo nas obras de Vianna e dos irmãos Reis. Na primeira, não encontramos grandes proximidades entre os temas propostos para o secundário e outros dados na obra de Sonnet. Foi por meio da obra dos irmãos Reis, na parte em que abordou os conceitos de divisão entre fração e dízimas periódicas, que encontramos uma abordagem mais próxima às contidas no livro de Cálculo de Sonnet.

Acreditamos que os conceitos citados anteriormente poderiam ter contribuído com o estudo inicial do Cálculo Diferencial e Integral, porque ao longo da exposição dos autores pudemos perceber uma relação entre esses conceitos e a ideia de infinitésimos e aproximações.

Para as ideiais de inifinitésimos, antes de ser feita a sua conceitualização, os autores apresentaram alguns exemplos com números decimais de valor absoluto pequeno, possivelmente na intenção de oferecer, ao aluno, subsídios para que fosse feita àatransição da parte concreta para a abstrata. Além dos exemplos, as nomenclaturas utilizadas pelos irmãos Reis na explicação dos conteúdos foi semelhante às empregadas por Sonnet.

É importante que tenhamos em mente que Sonnet também trouxe algumas definições a respeito dos infinitésimos, mas sem nenhum tipo de exemplo, razão porque destacamos a importância do desenvolvimento dado pelos irmãos Reis acerca dos infinitésimos.

Quanto às dízimas periódicas, os autores realizaram as devidas explanações, tendo como base os conceitos de limite. Dessa forma, as poderações a respeito de aproximação foram abordadas contemplando exemplos e nomenclaturas importantes para o estudo do Cálculo Diferencial e Integral na obra de Sonnet.

Até aqui, tecemos considerações acerca das análises realizadas neste trabalho. Contudo, a partir deste ponto, pretendemos mencionar os resultados que colhemos e as perspectivas que surgiram à medida que esse estudo avançava.

Observamos que, na última década do século XIX e nos primeiros anos do século XX, emergiram fortes indícios de uma valorização da Matemática, em particular acerca do estudo do Cálculo Diferencial e Integral.

Essa percepção foi corroborada pelas discussões ocorridas internacionalmente, pelas indicações apontadas nas reformas educacionais brasileiras, pelos conteúdos propostos nos livros didáticos e pela análise feita em obras didáticas possivelmente utilizadas no final do século XIX, início do século XX.

No início da segunda década do século XX, surgiram indicativos de que a Matemática do ensino secundário teria alcançado características próprias. Como consequência disso, foi possível perceber certo distanciamento em relação ao estudo do Cálculo Diferencial e Integral. Alguns pontos da reforma Rivadavia Corrêa e o programa de ensino para o ano de 1912 contribuíram para que pensássemos dessa forma.

A partir de 1915 foi identificada uma reaproximação entre a Matemática do ensino secundário e o Cálculo Diferencial e Integral do ensino superior, sinalizada por meio de indicações contidas na reforma Carlos Maximiliano, passando pela volta da indicação da Álgebra de Serrasqueiro em 1923 e pelo suposto retorno de conteúdos que ofereciam subsídios para o estudo do Cálculo.

Apesar das conclusões extraídas em nossa pesquisa, acreditamos que ela tenha deixado algumas questões em aberto. Um exemplo disso são as inferências mencionadas nos parágrafos anteriores, que poderiam ter sido analisadas de maneira mais específica por meio de discussões de caráter geopolítico.

Em outras palavras, estamos querendo dizer que não contemplamos uma discussão detalhada acerca de como os debates educacionais ocorridos nos Estados Unidos e em outros países da Europa tiveram influência nos três momentos educacionais que envolveram a Matemática do ensino secundário brasileiro e o estudo do Cálculo Diferencial e Integral.

Outro ponto que poderia, em nossa concepção, ter sido explorado, diz respeito às influências das instituições externas sobre as decisões tomadas na instituição escolar, em relação ao estudo prévio do Cálculo Diferencial e Integral. Essa é uma abordagem que também poderia abarcar um caráter geopolítico, por meio de uma análise dos momentos políticos e econômicos das grandes potências mundiais e das implicações que isso poderia ter acarretado ao Brasil e ao estudo inicial do Cálculo Diferencial e Integral.

Contemplando esses pontos mencionados, poder-se-ia pensar em uma investigação que, de posse de todos os programas de ensino propostos para o recorte temporal estabelecido para esta pesquisa, assim como as discussões registradas em atas, houvesse uma atualização dos dados recolhidos com este estudo. Com isso, seria possível ter um melhor entendimento das escolhas feitas a respeito da inclusão ou exclusão de conteúdos que davam suporte ao estudo do Cálculo e, em alguns casos, dos livros didáticos propostos para o ensino desses conteúdos.

Uma última consideração diz respeito às obras didáticas. Sugerimos a realização de novos estudos por meio dos quais se fizesse uma abordagem de todas as obras utilizadas entre 1889 a 1929 para o ensino de Álgebra e Aritmética, analisando seus textos e indicando categorias que poderiam favorecer o estudo do Cálculo Diferencial e Integral.

Enfim, essas são algumas considerações que emergem da experiência com este estudo. Em meio a “respostas”, a inconsistências e dúvidas que surgiram, acreditamos que existe um longo caminho a ser percorrido, tendo como norte apontamentos da transição da Matemática do ensino secundário para o Cálculo Diferencial e Integral, no nível superior.

REFERÊNCIAS

BARROS, J. A. **A escola dos annales**: considerações sobre a História do Movimento. *História em Reflexão*, Dourados, v. 4, n. 8, jul/dez. 2010. Disponível em: <http://ojs.ufgd.edu.br/index.php?journal=historiaemreflexao&page=article&op=view &path%5B%5D=953>. Acesso em: 07 mar. 2017.

BLOCH, M. **Apologia da História:** ou o ofício de Historiador. Rio de Janeiro: Zahar, 2001. 159 p. Tradução: André Telles.

BRASIL. **Collecção das Leis da Republica dos Estados Unidos do Brazil de 1890.** Parte 2. Rio de Janeiro: Typographia Nacional, 1895. Disponível em: < http://bd.camara.gov.br/bd/handle/bdcamara/19080> Acesso em: 30 de novembro de 2016a.

______. **Collecção das Leis da Republica dos Estados Unidos do Brazil de 1898.** Parte 2. Rio de Janeiro: Typographia Nacional, 1900. Disponível em: < **http://bd.camara.leg.br/bd/handle/bdcamara/19081**#> Acesso em: 30 de novembro de 2016b.

______. **Collecção das Leis da Republica dos Estados Unidos do Brazil de 1911.** Parte 2. Rio de Janeiro: Typographia Nacional, 1914. Disponível em: < **http://bd.camara.leg.br/bd/handle/bdcamara/18732**#> Acesso em: 30 de novembro de 2016c.

______. Collecção das Leis da Republica dos Estados Unidos do Brazil de 1915. Parte 2. Rio de Janeiro: Typographia Nacional, 1917. Disponível em: < **http://bd.camara.leg.br/bd/handle/bdcamara/18782**#> Acesso em: 30 de novembro de 2016d.

BURKE, P. **A Revolução Francesa da historiografia: a Escola dos *Annales* 1929 - 1989**. 2ª. ed. São Paulo: Universidade Estadual Paulista, 1991. 115 p. Tradução: Nilo Odália.

CARTOLANO, M. T. P. **Benjamin Constant e a instrução pública no início da república**. 1994. 288 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1994.

CARVALHO, J. B. P. **Euclides Roxo e as polêmicas sobre a modernização do ensino da matemática.** In: VALENTE, Wagner R. (Org.) Euclides Roxo e a modernização do ensino de Matemática no Brasil. Brasília: Editora da UnB, 2004. p. 85 - 140.

CERTEAU, M. de. **A invenção do cotidiano**: Artes de fazer. 3.ed. v.1. Petrópolis: Vozes, 1998. 352 p. Tradução: Ephraim Ferreira Alves

CHERVEL, A. **História das disciplinas escolares:** reflexões sobre um campo de pesquisa. In: Teoria & Educação. Porto Alegre: Pannonica, 1990. n.2, p.117-229.

CURY, C. R. J. **A desoficialização do ensino no Brasil**: a Reforma Rivadávia. *Educação & Sociedade*, Campinas, v. 30, n. 108, p. 717-738, out. 2009.

GUSSI, J. C. **O ensino da Matemática no Brasil**: análise dos programas de ensino do Colégio Pedro II (1837 A 1931). 2011. 142f. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Ciências Humanas, Universidade Metodista de Piracicaba, Piracicaba, 2011.

LE GOFF, J. Prefácio. IN: BLOCH, Marc. **Apologia da História:** ou o oficio de Historiador. Rio de Janeiro: Zahar, 2001. p. 15-34. Tradução: André Telles.

LEMOS, R. **Benjamin Constant**: biografia e explicação histórica. Estudos Históricos (Rio de Janeiro), Rio de Janeiro, v. 10, n.19, p. 67-81, 1997. Disponível em: < http://buscatextual.cnpq.br/buscatextual/visualizacv.do?id=K4783208U6> Acesso em: 21 de abril de 2017.

LIMA, G. L. **A Disciplina de Cálculo I do Curso de Matemática da Universidade de São Paulo**: um estudo de seu desenvolvimento, de 1934 a 1994. 2012. 444f. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2012.

______. **O Ensino de Cálculo Diferencial e Integral no Brasil entre 1810 e 1934**: os cursos das escolas militares do Rio de Janeiro e da Escola Politécnica de São Paulo. In: Encontro brasileiro de estudantes de pós-graduação em educação Matemática, XII, 2008, Rio Claro SP. Anais..., Rio Claro: UNESP, 2008. Disponível em: < http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/upload/57-1-A-gt10_lima_ta.pdf >. Acesso em: 21 de abril de 2017.

LOPES, R. H. CORREIA, Rivadávia. In: ABREU, A. A. da (coord. ger.). **Dicionário histórico–biográfico da primeira república 1889–1930**. Rio de Janeiro: CPDOC/FGV, 2015.

MOREIRA, L. E. F. B. **A influência da Reforma Benjamin Constant no currículo de Matemática do Colégio Pedro II**. 2008. 218f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Departamento de Educação, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

MOREIRA, R. L. MAXIMILIANO, Carlos. In: ABREU, A. A. da (coord. ger.). **Dicionário histórico–biográfico da primeira república 1889–1930**. Rio de Janeiro: CPDOC/FGV, 2015.

MARTINS, M. A. M. **Estudo da evolução do ensino secundário no Brasil e no estado do Paraná com ênfase na disciplina de Matemática**. 1984. 276f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Curso de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 1984.

MONDINI, F. **A Presença da Álgebra na Legislação Escolar Brasileira**. 2013. 433f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2013.

OLIVEIRA, A. S. V. **O Ensino do Cálculo Diferencial e Integral na Escola Politécnica de São Paulo, no ano de 1904**: uma análise documental. 2004. 135f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2004.

PAIS, L. C. **Considerações sobre as questões de método na pesquisa em educação matemática** In: Seminário sul-mato-grossense de pesquisa em educação matemática, 10, 2016, Campo Grande. *Anais...* Campo Grande, 2016. Disponível em: <http://seer.ufms.br/index.php/sesemat/article/view/2835/2196>. Acesso em 07 de Março de 2017

______. **Intuição, experiência e teoria geométrica**. Zetetiké, v. 4, p. 65 – 74, 1996.

______. **Uma análise do significado da utilização de recursos didáticos no ensino da Geometria**. 2000. Disponível em: < http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_23/analise_significado.pdf >

Polon, T. L. P. **Políticas públicas para o ensino médio nos anos 90:** Trajetória do Colégio Pedro II-RJ. 2004. 216 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Departamento Educação, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2004.

REIS, A. e L. **Curso Elementar de Matemática:** ARITMÉTICA, 2. ed. Rio de Janeiro. F. Alves e cia. 1892. 709 p. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/127570>. Acesso em 07 de Março de 2017.

SERRASQUEIRO, J. A. **Tratado Elementar de Arthimética**. 22. ed. Coimbra. Livraria Central de J. Diogo Pires. 1926. 387 p. Disponível em: < https://pt.wikisource.org/wiki/Tratado_de_Algebra_Elementar>. Acesso em 07 de Março de 2017.

SCHUBRING, G. **O primeiro movimento internacional de reforma curricular em Matemática e o papel da Alemanha:** um estudo de caso na transmissão de conceitos**.** In: Zetetiké. Campinas, SP: FE/Unicamp. Vol. 7, no. 11, 1999.

SILVA, G. B. A **Educação Secundária**: perspectiva histórica e teoria. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1969. 416 p. (Coleção Atualidades Pedagógicas, v. 94)

SONNET, H. **Premiers Éléments du Calcul Infinitésimal**. 3. ed. Paris: Hachette, 1884. 341 p. Disponível em: < http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k91919z>. Acesso em 07 de Março de 2017.

SOUZA, T. L. L. **Elementos históricos da educação matemática no Amazonas:** livros didáticos para ensino primário no período de 1870 a 1910. 2010. 160f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas e Tecnologias, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, MS, 2010.

THIRÉ, A. **Arthimética Gymnasial**. Francisco Alves & Cia. 1911. 552 p.

VALENTE, W. R. **Uma história da matemática escolar no Brasil, 1730 – 1930**. 2. ed. São Paulo: Annablume: FAPESP, 2007. 214 p.

VECHIA, A.; LORENZ, K. M. (Org.). **Programa de Ensino da Escola Secundária Brasileira**: 1850-1951. Curitiba: do Autor, 1998. 406 p.

VIANNA, J. J. L. **Elementos de Arthimetica**. 11. ed. 1906 . 298 p. Disponível em: < https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/105103>. Acesso em 07 de Março de 2017.

VIÑAO, A. **A história das disciplinas escolares**. *Revista Brasileira de História da Educação*, v. 8, n.18, p. 173 – 215, 2008.

ANEXOS

ANEXO A – PROGRAMA DE ENSINO PARA O ANO DE 1892

(VECHIA; LORENZ, 1998, p.110; 115. TRANSCRITO APENAS O PROGRAMA DE ARITMÉTICA E ÁLGEBRA).

Programma do Ensino do Gymnasio Nacional no anno de 1892, organisado pelo Plano de Reforma de 8 de novembro, Art. 6º do Regulamento de 22 de novembro de 1890.

PRIMEIRO ANNO

Pelo Plano de Reforma de 8 de novembro, Art. 6º do Regulamento de 22 de novembro de 1890.

1ª CADEIRA

ARITHMETICA (estudo completo) **ALGEBRA ELEMENTAR** (estudo completo)

1. Quantidade, unidade e numero. Numeração e consideração sobre os signaes.
2. Operações sobre numeros inteiros e decimaes (seis operações).
3. Operações sobre fracções ordinarias e numeros mixtos (seis operações).
4. Divisibilidade; suas consequencias: restos e provas.
5. Maximo commum divisor e menor multiplo commum. Simplificação e reducção de fracções ao mesmo denominador.
6. Conversões: fracções periodicas e continuas. Metrologia.
7. Igualdade. Razões e proporções. Regra de tres, de juro simples, de desconto e de companhia ou das partes proporcionaes.
8. Estudo sobre a composição do polynomio.
9. Multiplicação. Divisão. Quadrado e raiz quadrada dos polynomios.
10. Da funcção e da equação.
11. Resolução da equação do 1º gráo a uma incognita. Discussão.
12. Da eliminação na resolução dos differentes systemas de equações do 1º gráo.181
13. Resolução e composição da equação do 2º gráo. Discussão, tudo a uma incognita.
14. Equações reductiveis ao 2º gráo.

15. Analyse indeterminada do 1º gráo.
16. Progressão. Logarithmos. Regra de juro composto e annuidade.
17. Formula do binomio. Formulas de Cramer. Discussão geral das equações do 1º gráo.

Todos os pontos deste programma serão seguidos de exercicios e problemas.

Por ultimo: consideração geral sobre o estudo da arithmetica e algebra, precisando suas differenças e acompanhando suas evoluções.

LIVROS:
Serrasqueiro, Arihmetica.
Idem, Algebra.

TERCEIRO ANNO

ARITHMETICA E ALGEBRA

Arithmetica. – Revisão das doutrinas estudadas no anno anterior, de modo mais completo.
Algebra. – Emprego dos signaes algebricos, e suas consequencias principais.
Estudo comparativo das operações fundamentaes, bem assim das potencias e raizes que se referem ao 2º gráo. Propriedades geraes dos numeros. Equações do 1º e 2º gráos a uma incognita. Da eliminação nas equações do 1º gráo a muitas incognitas. Analyse indeterminada do 1º gráo entre duas variaveis. Discussão dos problemas e equações do 1º e 2º gráos a uma incognita. Problemas. Exercicios sobre calculo algebrico.
Arithmetica. - Proporções. Progressões. Logarithmos. Regra de tres, de juro, de desconto, de companhia e de annuidade. Problemas e calculos praticos.

Livros: Serrasqueiro, Arihmetica.
Idem, Algebra.

ANEXO B – PROGRAMA DE ENSINO PARA O ANO DE 1893

(VECHIA; LORENZ, 1998, p.125; 127; 128. TRANSCRITO APENAS O PROGRAMA DE ARITMÉTICA E ÁLGEBRA).

Programma de Ensino do Gymnasio Nacional no anno de 1893 pelo Plano da Reforma de 28 de dezembro de 1892.

PRIMEIRO ANNO

1ª CADEIRA

ARITHMETICA

Estudo completo

1. Quantidade, unidade e numero. Numeração e consideração sobre os signaes.
2. Das seis operações sobre numeros inteiros e decimaes.
3. Das seis operações sobre fracções ordinarias e numeros mixtos.
4. Numeros primos; divisibilidade; suas consequencias: restos e provas.
5. Maximo commum divisor e menor multiplo commum.
6. Simplificação de fracções e reducção ao mesmo denominador.
7. Conversões: fracções periodicas e continuas.
8. Metrologia e numeros complexos.
9. Razões e proporções.
10. Regra de tres, de juro simples, de desconto.
11. Regra das partes proporcionaes e de companhia.
12. Progressões.
13. Logarithmos.
14. Regra de juro composto e de annuidade.

Todos os pontos deste programma serão seguidos de exercicios e problemas.

LIVROS:

Arithmetica: Serrasqueiro.

ALGEBRA ELEMENTAR

Estudo completo e revisão da arithmetica

1. Estudo sobre o monomio e o polynomio.
2. Addição e subtracção.
3. Multiplicação.
4. Divisão.
5. Potenciação.
6. Radiciação.
7. Da funcção e da equação.
8. Resolução e discussão da equação do 1º gráo a uma incognita.
9. Da eliminação nos differentes systemas de equações do 1º gráo.
10. Resolução, composição e discussão da equação do 2º gráo a uma incognita.
11. Equações reductiveis ao 2º gráo.
12. Analyse indeterminada do 1º gráo.
13. Formula do binomio de Newton.
14. Formulas de Cramer. Discussão geral das equações do 1º gráo.
15. Progressão e logarithmos.
16. Equações exponenciais. Consideração geral sobre a arithmetica e a algebra.

Todos os pontos deste programma serão seguidos de exercicios e problemas.

LIVRO:
Algebra: Serrasqueiro

ANEXO C – PROGRAMA DE ENSINO PARA O ANO DE 1895

(VECHIA; LORENZ, 1998, p.145; 147; 151. TRANSCRITO APENAS O PROGRAMA DE ARITMÉTICA, ÁLGEBRA E GEOMETRIA GERAL, CÁLCULO E GEOMETRIA DESCRTITIVA).

Programma de Ensino do Gymnasio Nacional para o anno de 1895, de accordo com o regulamento approvado pelo decreto n° 1.652, de 15 de janeiro de 1894.

PRIMEIRO ANNO

1ª CADEIRA

ARITHMETICA

Estudo completo até fracções inclusive e pratico d'ahi em deante.

1. Preliminares. Estudo dos diversos systemas de numeração e especialmente do systema decimal.
2. Theoria das quatro primeiras operações sobre numeros inteiros.
3. Idem sobre as fracções ordinarias.
4. Idem sobre as fracções decimaes.
5. Theoria das transformações nas fracções. Parte exclusivamente pratica.
6. Divisibilidade dos numeros. Numeros primos.
7. Potencias e raizes dos numeros.
8. Proporções. Regras de tres e questões connexas.
9. Metrologia em geral e especialmente a decimal.
10. Progressões. Logarithmos.

LIVROS:
J. J. L. Vianna: - Arithmetica.

SEGUNDO ANNO

1ª CADEIRA

ARITHMETICA E ALGEBRA

Algebra elementar: estudo completo. Arithmetica: estudo completo da 2ª parte.

Arithmetica. - Estudo theorico dos assumptos contidos nos pontos 6, 7, 8, 9 e 10 do programma do 1° anno.

Algebra

1. Preliminares. Somma, subtracção, mutiplicação e divisão algebricas. Divisibilidade por x + a.
2. Binomio de Newton. Potencias e raizes das expressões algebricas.
3. Fracções algebricas e sua simplificação.
4. Das funcções e das equações e sua respectiva classificação.
5. Resolução e discussão das equações do 1° grau com uma ou mais variaveis. Processos de eliminação.
6. Calculo indeterminado do 1° grau.
7. Resolução, composição e discussão da equação do segundo grau com uma variavel.
8. Equações reductiveis ao 2° grau. Noções sobre o calculo exponencial.
9. Progressões por quociente. Theoria algebrica dos logarithmos.
10. Problemas do 1° e 2° graus. Juros compostos e annuidades.

Considerações sobre a Arithmetica e Algebra; suas differenças fundamentaes.

LIVROS:

Aarão e Lucano Reis: – Arithmetica.

Serrasqueiro: – Algebra.

QUARTO ANNO

1ª CADEIRA

GEOMETRIA GERAL, CALCULO E GEOMETRIA DESCRIPTIVA

Algebra

(Theoria das equações de forma $Ax^m + Bx^{m-1} + ... + Tx + U = 0$, sendo **m** inteiro e positivo).

1. Numero das raízes, decomposição do 1° membro em factores do 1° grau.
2. Relação entre as raizes e os coefficientes A, B, etc. Condição para que a equação tenha raizes iguaes a zero.
3. Limite das raizes.
4. Determinação das raizes commensuraveis.

Noções de calculo differencial e integral

1. Definição de derivada e differencial. Regras de differenciação das funções explicitas a uma só variavel.
2. Definição de integral. Formação da tabella das integraes immediatas. Methodos de integração. Applicações faceis.

Geometria analytica

1. Definição de geometria analytica. Systema de coordenadas em geral. Systema rectilineo e polar.
2. Equação da linha recta no systema rectilineo. Problemas.
3. Equação da ellipse referida a seus eixos.
4. Equação da hyperbole referida a seus eixos.
5. Equação da parabola referida a seu eixo e a tangente de seu vertice.
6. Equações polares na ellipse, hyperbole e parabola.
7. Intersecção de duas rectas; angulo de duas rectas, sendo os eixos rectangulares.
8. Conhecida a equação de uma curva no systema rectilineo, achar a da tangente em um ponto dado.
9. Coordenadas rectilineas no espaço. Equações do plano e da linha recta.

Geometria descriptiva

1. Planos de projecção. Representação do ponto e das linhas. Epura.
Representação do plano.
2. Determinação dos traços de uma recta. Projecção de uma recta cujos traços são dados.
3. Intersecção de dous planos. Intersecção de duas rectas.
4. Planos que passam por uma recta. Intersecção de uma recta e um plano.
5. Condições para que: 1° Dous planos sejam parallelos; 2° Duas rectas sejam parallelas; 3° Uma recta e um plano sejam parallelos; 4° Uma recta seja perpendicular a um plano.
6. Distancia entre dous pontos; entre um ponto e um plano; entre um ponto e uma recta; menor distancia entre duas rectas.

LIVROS:
Bourdon: - Algebra.
Sonnet: - Calculo differencial e integral.
Sonnet e Frontera: - Geometria analytica.
F. I. C.: - Geometria descriptiva.

ANEXO D – PROGRAMA DE ENSINO PARA O ANO DE 1897

(BELTRAME, 2002, apud, MOREIRA, 2008, p. 196 – 198; 199 - 203. TRANSCRITO APENAS O PROGRAMA DE ARITMÉTICA, ÁLGEBRA E GEOMETRIA GERAL, CÁLCULO E GEOMETRIA DESCRTITIVA).

Programma do Ensino do Gymnasio Nacional de accordo com o regulamento approvado pelo decreto n° 1.652, de 15 de janeiro de 1894, para o anno de 1897.

1° ANNO

1ª CADEIRA

Arithmetica

(estudo completo até fracções inclusive e pratico d'ahi em deante)

1. Quantidade – unidade – numero.
2. Numeração. Systemas de numeração – signaes.
3. Addição e subtracção dos numeros inteiros e decimaes.
4. Multiplicação dos numeros inteiros e decimaes.
5. Divisão dos numeros inteiros e decimaes.
6. Potencia dos numeros inteiros e decimaes em geral e particularmente do 2° e do 3° gráo.
7. Raiz dos numeros inteiros e decimaes em geral e particularmente do 2° e do 3° gráo.
8. Estudo das operações supra e segundo a mesma ordem, sobre as fracções ordinarias e numeros mistos.
9. Numeros primos e divisibilidade.
10. Maximo commum divisor e menor multiplo commum.
11. Reducção das fracções ordinarias ao mesmo denominador e simplificação.
12. Metrologia – diversos systemas de pesos e medidas. Numeros complexos e metricos decimaes.
13. Estudo das fracções decimaes periodicas e das fracções continuas.

Parte pratica

14. Das razões e proporções.

15. Das progressões.
16. Dos logarithmos.
17. Das regras de tres, de juro simples e desconto.
18. Da regra de companhia.

Todos os pontos deste programma serão seguidos de exercicios de calculo e problemas.

Livro: J. L. Vianna: – Arithmetica.

2° ANNO

1ª CADEIRA

Arithmetica e Algebra

(Algebra elementar: estudo completo. Arithmetica: estudo completo da 2ª parte)

1. Numero – numeração – signaes – monomio – polynomio – coefficiente – espoente – grão – homogeneidade – semelhança – lei dos signaes.
2. Addição e subtracção algebrica.
3. Multiplicação algebrica.
4. Divisão algebrica.
5. Potencia e raiz algebrica. Binomio de Newton.
6. Propriedades geraes dos numeros e theoria do maximo commum divisor e do menor multiplo commum e suas consequencias.
7. Das funcções e das equações, classificação e transformação.
8. Resolução e discussão da equação do 1° grão a uma incognita.
9. Eliminação nos systemas de equações do 1° grão. Formulas de Cramer.
10. Analyse indeterminada do 1° grão.
11. Resolução, composição e discussão das equações do 2° grão a uma incognita.
12. Equações reductiveis ao 2° grão.
13. Proporções e progressões.
14. Logarithmos. Calculo exponencial e fracções continuas.[198]
15. Juros compostos, annuidades. Consideração geral sobre a arithmetica e a algebra, suas differenças fundamentaes.

Todos os pontos deste programma serão seguidos de exercicios de calculo pratico e problemas.

Livros: Aarão e Lucano Reis: – *Arithmetica*; Serrasqueiro: – *Algebra*.

4° ANNO

1ª CADEIRA

Geometria Geral, Calculo e Geometria Descriptiva

I – Algebra

1. Noções sobre series. Convergencias das series.
2. O numero *e*.
3. Calculo dos imaginarios. Representação trigonometrica dos imaginarios.
4. Formula de Moivre.
5. Maximo commum divisor de dois polynomios.
6. Polynomios derivados.
7. Principios sobre equações algebricas: generalidades e definições.
8. Composição dos coefficientes.
9. Transformações das equações.
10. Limites das raizes.
11. Depressão do gráo das equações. Equações reciprocas. Equações trinomiais.
12. Raizes communs a duas equações.
13. Theoria das raizes iguaes.
14. Raizes nullas e infinitas.
15. Theoremas relativos á existencia de raizes reaes.
16. Theorema de Descartes.
17. Theorema de Rolle.
18. Theorema de Sturm.
19. Determinação das raizes inteiras.
20. Determinação das raizes fraccionarias.
21. Raizes incommensuraveis. Separação das raizes.
22. Avaliação das raizes incommensuraveis. Processos de Newton e de Lagrange.

23. Raizes imaginarias.

24. Noções geraes sobre a resolução das equações transcendentes; applicação á equação que resolve o problema de Kepler.

25. Equações binomiais.

26. Noções geraes sobre eliminação. Processo do maximo commum divisor.

27. Noções geraes sobre determinante.

28. Decomposição das fracções racionaes.

29. Considerações geraes sobre a algebra superior. Methodo e historico.

II – Geometria analytica

30. Applicação da algebra á geometria. Methodo de Vieta; seu objecto. Exemplos.

31. Methodo de Descartes, seu objecto. Coordenadas de um ponto. Coordenadas rectilineas.

32. Determinar a distancia entre dous pontos.

33. Toda a linha geometricamente definida póde ser representada por uma equação. Methodo geral para obter a equação de um logar geometrico.

34. Equação da linha recta.

35. Os seguintes problemas sobre linhas rectas:

1° Equação das rectas que passão por um ponto dado;

2° Equação da recta que passa por dous pontos dados;

3° Calcular as coordenadas do ponto de intersecção de duas rectas dadas por uma equação;

4° Angulo de duas rectas em coordenadas rectangulares;

5° Equação da perpendicular baixada de um ponto dado sobre uma recta dada.

36. Equação geral da circumferencia do circulo, referida a eixos rectangulares.

Diversas posições. Symetria da curva. Intersecção de uma recta e de uma circumferencia; caso de tangencia. Posições relativas de duas circumferencias.

37. Equação focal da ellipse. Symetria da curva. Circumferencia como caso particular da ellipse. Intersecção de uma recta e de uma ellipse; caso de tangencia.

38. Equação focal da hyperbole. Symetria da curva. Equação da hyperbole equilatera. Intersecção de uma recta e de uma hyperbole; caso de tangencia.

Asymptotas da hyperbole.

39. Equação focal da parabola. Symetria da curva. Intersecção de uma recta e de uma parabola; caso de tangencia. Parabola considerada como uma ellipse de eixo maior infinitamente grande.

40. Toda equação da fórma y = f(x) póde representar uma linha.

41. Construcção das curvas; sua utilidade. Curvas empiricas; diversos exemplos.

42. Construcção da linha representada pela equação y = ax + b, discussão. Caso em que a equação é dada sob a fórma implicita.

43. Resolução da equação do 2° gráo a 2 variaveis; casos fundamentaes a distinguir, segundo $B^2 - 4AC$ for menor, maior ou igual a zero. Condições pra que essa equação represente uma circumferencia.

44. Construcção das curvas do 2° gráo; exemplos numericos cuidadosamente escolhidos, permitindo estudar os diversos casos.

45. Secções planas do cone de revolução.

46. Secções planas do cylindro de revolução.

47. Construcção das curvas da fórma $y = (ax^2 + bx + c)/(mx^2 + nx + p)$. Discussão e exemplos numericos.

48. Construcção das curvas: y = sen x; y = tg x; y = sec x; y = Lx.

49. Coordenadas polares. Equações polares da linha recta, das curvas do 2° gráo e da espiral de Archimedes.

50. Transformação das coordenadas rectilineas em polares e vice-versa.

51. Coordenadas rectangulares de um ponto no espaço. Distancia entre dous pontos. Relação entre os co-senos dos angulos de uma recta com os 3 eixos; angulos de duas rectas.

52. Equações isoladas a uma, a duas e a tres variaveis; caso da superficie plana. Equações simultaneas; caso da linha recta.

III – Calculo infinitesimal

53. Da variavel e da funcção.

54. Dos infinitamente pequenos. Limite. Objecto e divisão do calculo infinitesimal.

55. Derivadas e differenciaes. Interpretação geometrica.

56. Derivadas e differenciaes das funcções explicitas.

57. Derivadas e differenciaes das funcções implicitas.

58. Derivadas e differenciaes successivas.
59. Desenvolvimento das funcções em serie.
60. Formula de Taylor. Serie de MacLaurin; applicações.
61. Applicações das expressões apparentemente indeterminadas.
62. Theoria dos maxima e minima.
63. Theoria das tangentes. Normaes.
64. Theoria das asymptotas.
65. Convexidade e concavidade das curvas.
66. Theoria dos centros nas curvas planas.
67. Theoria dos diametros nas curvas planas.
68. Pontos singulares.
69. Noções sobre contacto, osculação e curvatura das linhas planas.
70. Princípios fundamentaes de integração.
71. Methodos de integração.
72. Integração das fracções racionaes.
73. Integração das fracções irracionaes.
74. Integração de algumas funcções circulares.
75. Integração das funcções exponenciaes e logarythmicas.
76. Integração definida.
77. Quadratura das curvas planas.
78. Rectificação das curvas planas.
79. Estudo minucioso de uma ou mais curvas planas, á escolha do professor, applicando os recursos de analyse estudados durante o anno lectivo.

IV – GEOMETRIA DESCRIPTIVA

80. Objecto e utilidade da geometria descriptiva. Definição. Methodo de Monge.
81. Representação do ponto; da linha recta; e do plano.
82. Problemas sobre representação dos pontos e das rectas satisfazendo a condições dadas.
83. Traços do plano satisfazendo a condições dadas.
84. Intersecção de rectas e planos.
85. Rectas e planos perpendiculares.
86. Rotação de um ponto em torno de um eixo.

87. Rebatimento de um plano.
88. Applicação do methodo de rebatimento á determinação de distancias e de angulos.
89. Representação dos solidos.
90. Secções planas dos polyedros, do cone de revolução e do cylindro de revolução.

Este programma será desenvolvido não só durante o curso do 4° anno, como também durante a revisão nos annos superiores.

LIVROS:
Bourdon – Algèbre; Sonnet et Frontera – Géometrie Analytique; Sonnet – Calcul Infinitesimal; Julien – Cours Elementaire de Géometrie Descriptive.

REVISÕES

Mathematica Elementar

(5° anno)

Estudo synthetico da matemathica elementar estudada nos 1°, 2° e 3° annos.

Geometria Geral, Calculo e Geometria Descriptiva

(6° e 7° annos)

O mesmo programma do curso.

ANEXO E – PROGRAMA DE ENSINO PARA O ANO DE 1898 (GEOMETRIA GERAL, CÁLCULO E GEOMETRIA DESCRITIVA 4º ANO).

(VECHIA; LORENZ, 2008, p. 162; 164; 166; 168; 170; 171; 175; 181. TRANSCRITO APENAS O PROGRAMA DE ARITMÉTICA, ÁLGEBRA E GEOMETRIA GERAL, CÁLCULO E GEOMETRIA DESCRTITIVA).

Programmas Provisorios do Gymnasio Nacional para o Ensino no Anno Lectivo de 1898, organizado de accordo com o Regulamento n. 2.857, de 30 de março de 1898.

PRIMEIRO ANNO

1ª CADEIRA

ARITHMETICA

Estudo pratico

1. Quantidade – Unidade – Numero.
2. Numeração. Systemas de numeração – Signaes.
3. Addição e subtracção dos numeros inteiros e decimaes.
4. Multiplicação dos numeros inteiros e decimaes.
5. Divisão dos numeros inteiros e decimaes.
6. Potencia dos numeros inteiros e decimaes em geral e particularmente do 2° e 3° gráo.
7. Raiz dos numeros inteiros e decimaes em geral e particularmente do 2° e do 3° gráo.
8. Estudo das operações supra e segundo a mesma ordem sobre as fracções ordinarias e numeros mixtos.
9. Numeros primos e divisibilidade.
10. Maximo commum divisor e menor multiplo commum.
11. Reducção das fracções ordinarias ao mesmo denominador e simplificação.
12. Metrologia – Diversos systemas de pesos e medidas. Numeros complexos e metricos decimaes.
13. Estudo das fracções decimaes periodicas.
14. Estudo das fracções continuas.
15. Das razões e proporções.
16. Das progressões.

17. Dos logarithmos.

18. Da regra de tres, de juro simples e desconto.

19. Da regra de companhia.

LIVRO:
Arithmetica de João José Luiz Vianna e de Aarão e Lucano Reis.

SEGUNDO ANNO

CURSO REALISTA

1ª CADEIRA

ARITHMETICA

Estudo theorico de arithmetica. Programma e livros do 1° anno.

TERCEIRO ANNO

CURSO REALISTA

1ª CADEIRA

ARITHMETICA

Estudo mais desenvolvido do programma anterior.

LIVROS:
Os mesmos do 1° anno.

2ª CADEIRA

ALGEBRA

1. Numero – Numeração – Signaes – Monomio – Polynomio – Coefficiente – Expoente – Gráo – Homogeneidade – Semelhança – Lei dos signaes.

2. Addição e subtracção algebrica.

3. Multiplicação algebrica.

4. Divisão algebrica.

5. Potencia e raiz algebrica. Binomio de Newton.

6. Theoria do maximo commum divisor e do menor multiplo commum e suas consequencias.

7. Das funcções e das equações, classificação e transformação.

8. Resolução e discussão das equações do 1° gráo a uma incognita.

9. Eliminação nos systemas de equações do 1° gráo. Formulas de Cramer.

10. Calculo indeterminado do 1° gráo.

11. Resolução, composição e discussão das equações do 2° gráo a uma incognita.

12. Equações reductiveis ao 2° gráo. Equações irracionaes.

13. Progressões.

14. Logarithmos. Calculo exponencial e fracções continuas.

15. Juros compostos, annuidades. Consideração geral sobre a arithmetica e a algebra, suas differenças fundamentaes.

Todos os pontos deste programma serão seguidos de exercicios de calculo pratico e problemas.

LIVROS:
De **Arithmetica** os mesmos.
Serrasqueiro: – **Algebra.**

QUARTO ANNO

CURSO REALISTA

1ª CADEIRA

ARITHMETICA

O estudo versará sobre o programma precedente.

2ª CADEIRA

ALGEBRA

O estudo versará sobre o programma precedente.

QUINTO ANNO

CURSO REALISTA

1ª CADEIRA

ARITHMETICA

O estudo versará sobre o programma precedente.

2ª CADEIRA

ALGEBRA

O estudo versará sobre o programma precedente.

4ª CADEIRA

CALCULO E GEOMETRIA DESCRIPTIVA

Noções de calculo differencial e integral

1. Definição de derivada e de differencial. Regras de differenciação das funções explicitas de uma só variavel. Formulas de Taylor e MacLaurin.
2. Definição de integral. Formação da tabella das integraes immediatas. Methodos de integração. Applicações faceis.

Geometria analytica

1. Systema de coordenadas em geral. Systemas rectilineo e polar.
2. Equação geral da linha recta no systema rectilineo; casos particulares.
3. Problemas sobre a linha recta.
4. Equação da ellipse referida aos seus eixos.
5. Equação da hyperbole referida aos seus eixos.
6. Equação da parabola referida ao seu eixo e á tangente, ao vertice ou á directriz.
7. Equações polares da ellipse, hyperbole e parabola.
8. Tangente e normal a uma curva.
9. Coordenadas rectilineas no espaço. Equações do plano e da linha recta.
10. Problemas sobre o plano e linha recta no espaço.

Geometria Descriptiva

1. Planos de projecção. Representação de um ponto e das linhas. Epura. Representação de um plano.
2. Determinação dos traços de uma recta.
3. Projecção de uma recta cujos traços são dados.
4. Intersecção de dous planos.
5. Intersecção de duas rectas.
6. Planos que passam por uma recta.
7. Intersecção de um plano e de uma recta.
8. Condições para que: 1° dous planos sejam parallelos; 2° duas rectas sejam parallelas; 3° uma recta e um plano sejam parallelos; 4° uma recta seja perpendicular a um plano.

9. Distancia entre dous pontos; entre um ponto e uma recta; entre um ponto e um plano.

10. Menor distancia entre duas rectas.

LIVROS:
Sonnet – **Calculo differencial e integral**.
Sonnet et Frontera – **Geometria analytica**.
F. I. C. – **Geometria Descriptiva**.

SEXTO ANNO

CURSO REALISTA

1ª CADEIRA

ARITHMETICA

O estudo versará sobre o programma precedente.

2ª CADEIRA

ALGEBRA

O estudo versará sobre o programma precedente.

4ª CADEIRA

CALCULO E GEOMETRIA DESCRIPTIVA

O programma é o desenvolvido no 5° anno.

SETIMO ANNO

CURSO CLASSICO

1ª CADEIRA

ARITHMETICA

Theoria dos numeros e suas applicações.

LIVROS:
Théorie des nombres, de Legendre.
Disquisitiones Arithmeticae, de Gauss.

2ª CADEIRA

ALGEBRA

Estudo sobre funcções e equações. Resolução da equação do 3° gráo – formula de Cardan, caso irreductivel.

Resolução da equação do 4° gráo pelos processos de Ferrari e Descartes. Theoria dos determinantes.

LIVROS:
Algebra de Briot e de Comberousse.

4ª CADEIRA

CALCULO E GEOMETRIA DESCRIPTIVA

O programma é o desenvolvimento do 5° anno.

ANEXO F – PROGRAMA DE ENSINO PARA O ANO DE 1899

(BELTRAME, 2002, apud, MOREIRA, 2008, p. 212 – 217. TRANSCRITO APENAS O PROGRAMA DE ARITMÉTICA E ÁLGEBRA).

Programma do Ensino do Gymnasio Nacional, de accordo com o regulamento approvado pelo decreto n° 3.251, de 8 de abril de 1899, para os annos de 1899, 1900 e 1901.

PARECER DA COMMISSÃO DE PROGRAMMAS DE SCIENCIAS

A commissão abaixo assignada, encarregada de examinar os programas de sciencias e desenho, vem desempenhar-se dessa honrosa incumbencia.

Ella estudou attentamente os programmas appresentados e, de acordo com os respectivos autores, fez alterações necessarias para que as condições impostas pelo art. 9° cap. 3° do actual regulamento fossem preenchidas.

A commissão procurou tambem dar aos programmas cunho technico, e para isso em alguns delles, como no de historia natural e no de physica e chimica, teve de descer a minudencias; assim, v. g., naquella disciplina indicou nominalmente as famílias vegetaes a estudar, e nesta os typos de pilha a descrever. Semelhante limitação era indispensavel; pois os nossos programas servem de base aos exames de madureza, e é necessario que o alumno tenha pleno conhecimento do que lhe será exigido, principalmente em materias, como as exemplificadas, de grande extensão e compostas de partes cada qual mais interessante e util; porém, cuja importancia relativa varia segundo as vistas intellectuaes do professor e o meio em que vive. Ao contrario, certos programas foram explanados de modo geral com o fito de dar a mais absoluta liberdade ao methodo didactico dos professores extranhos ao Gymnasio Nacional; é o caso do programma de mathematica, onde a commissão preferiu, em vez de enunciar os theoremas e problemas, indicar as theorias que devem ser exigidas no ensino e sobre que devem versar os exames; desse modo não se obrigará *[sic]* todos os professores de instrucção secundaria a seguirem a mesma marcha e os mesmos processos de demonstração.

O mesmo deu-se com a historia que, num curso como o nosso, não é a descripção monotona de innumeros combates e batalhas, e sim um quadro luminoso da vida social em dado momento, variavel portanto com o ponto de vista em que se colloca o observador. É ainda o caso do programma de logica.

A commissão, consequentemente, termina pedindo que sejam aprovados os programmas juntos.

Rio de Janeiro, 27 de maio de 1899.

Raja Gabaglia (relator)
Wenceslav Bello
João Ribeiro
Sylvio Romero
Nerval de Gouvêa
Oliveira Menezes
Araujo Lima

Este parecer foi approvado em sessão da Congregação de 27 de maio de1899.

Paulo Tavares, secretario.

MATHEMATICA

No caso de mathematica elementar o lente considerará as disciplinas a seu cargo não só como um complexo de theorias uteis em si mesmas, de que os alumnos deverão ter conhecimento para applical-as ás necessidades da vida, sinão tambem como um poderoso meio de cultura mental, tendente a vivificar e desenvolver a capacidade de raciocinio. Os limites desta maneira deverão ser assaz restrictos, afim de que não possa acontecer que os alumnos se vejam opprimidos de excesso de extensão e difficuldades. O programma, além de se conservar nos convenientes limites, attenderá acuradamente ao lado pratico, de maneira que o ensino se torne utilitário por numerosos exercicios de applicação e por judiciosa escolha de problemas graduados da vida commum.

De accordo com taes preceitos, o respectivo docente fará, no primeiro anno, o estudo da arithmetica abranger o systema decimal de numeração, as operações sobre números inteiros e fracções, as transformações que estas comportam, até ás dizimas periodicas, fazendo durante o curso uso habitual do calculo mental e do methodo de reducção á unidade; no segundo anno, tratará das proporções e suas applicações, progressões e logarithmos; o estudo da álgebra deverá ahi ser levado até equações do 1° grau; no terceiro anno, completará o estudo da algebra elementar, e o outro docente dará a geometria com o desenvolvimento usual relativo á igualdades, á semelhança, á rectificação da circumferencia, avaliação das areas e dos volumes, com abundantes aplicações praticas; no quarto anno, encarregar-se-ha do desenvolvimento da algebra no estudo do binomio de Newton, principios geraes da composição das equações e sua resolução numerica pelos methodos mais simples e, portanto, mais praticos; levará o estudo da geometria a abranger o das secções conicas, com o traçado e principaes propridades das curvas correspondentes, e fará o estudo da trigonometria rectilinea, sempre com o escrupuloso cuidado de tornar frequentes as applicações e a pratica dos logarithmos, iniciada no 2° anno e desenvolvida no 3°. (Art. 9° n. 4 do regulamento de 8 de abril de 1899.)

I – ARITHMETICA

1° ANNO (4 horas)

1. Quantidade. Unidade. Numero.
2. Numeração. Systema decimal.
3. Addição de numeros inteiros e decimaes.
4. Subtracção de numeros inteiros e decimaes.
5. Multiplicação de numeros inteiros e decimaes.
6. Divisão de numeros inteiros e decimaes.
7. Potencia dos numeros inteiros e decimaes em geral e particularmente do 2° e 3° grau.
8. Raiz dos numeros inteiros e decimaes em geral e particularmente do 2° e do 3° grau.
9. Estudo das operações supra guardando a mesma ordem sobre as fracções ordinarias e numeros mistos.
10. Numeros primos e theoria da divisibilidade.
11. Maximo commum divisor e menor multiplo commum.
12. Reducção das fracções ordinarias ao mesmo denominador e simplificação.
13. Fracções decimaes periodicas.
14. Noções sobre fracções continuas.
15. Metrologia; systemas de pesos e medidas. Numeros complexos e métricos decimaes.

2° ANNO (3 horas)

1. Equidifferenças.
2. Proporções geometricas.
3. Regras de tres. Applicação do methodo de reducção á unidade á solução das questões.
4. Regra de juros.
5. Regra das partes proporcionaes e sua immediata applicação.
6. Progressões por differença.
7. Progressões por quociente.
8. Logarithmos. Uso das taboas.

II – ALGEBRA

2° ANNO (3 horas)

1. Objecto da algebra. Definições preliminares.
2. Expressões algebricas.
3. Addição e subtracção algebrica.
4. Multiplicação algebrica.
5. Divisão algebrica.
6. Potencia algebrica em geral, particularmente o quadrado.
7. Raiz algebrica em geral, particularmente a raiz quadrada.
8. Operações sobre fracções algebricas. Maximo commum divisor.
9. Da funcção e da equação.
10. Da resolução da equação do 1° grau a uma incognita. Problemas.
11. Discussão da equação do 1° grau a uma incognita.
12. Resolução de systema de equações do 1° grau a duas e mais incognitas.
13. Discussão dos systemas de equações do 1° grau a duas incognitas.
14. Desigualdades.

3° ANNO (2 horas)

1. Resolução, composição e discussão de equação do 2° grau a uma incógnita. Problemas.

2. Expressões imaginarias.
3. Equações reductiveis ao 2° grau.
4. Systemas de duas equações do 2° grau a duas incognitas.
5. Analyse indeterminada do 1° grau.
6. Noções sobre series. Convergência das series. O numero e.
7. Desenvolvimento em serie, methodo dos coefficientes indeterminados.
8. Equação exponencial.
9. Theoria algebrica dos logarithmos.
10. Juros compostos e annuidades.

4° ANNO

1. Arranjos, permutações, combinações.
2. Binomio de Newton: applicações e consequencias.
3. Calculo de radicaes. Expoentes fraccionarios e negativos.
4. Polynomios derivados.
5. Principios sobre equações algebricas; generalidades e definições.
6. Composição dos coefficientes.
7. Transformação das equações.
8. Limites das raizes.
9. Depressão do grau das equações. Equações reciprocas. Equações trinomias.
10. Theoria das raizes iguaes.
11. Theoremas relativos á existencia e numero de raizes reaes. Raizes nullas e infinitas.
12. Determinação das raizes reaes.
13. Equações binomias. Formula de Moivre.
14. Equação geral do 3° grau a uma incognita.
15. Equação geral do 4° grau a uma incognita.

ANEXO G – PROGRAMA DE ENSINO PARA O ANO DE 1912

(VECHIA; LORENZ, 2008, p. 191. TRANSCRITO APENAS O PROGRAMA DA 1ª SÉRIE; 2ª SÉRIE E 3ª SÉRIE).

COLLEGIO PEDRO II

MATHEMATICA

1ª SERIE (4 horas)

Numeração. Operações sobre numeros inteiros e decimaes.

Numeros primos. Divisibilidade. M.D.C. e M.M.C.

Fracções:

Systema métrico. Complexos.

Quadrado e raiz quadrada.

Cubo e raiz cubica.

2ª SERIE (4 horas)

Proporções e suas applicações.

Progressões. Logarithmos.

Operações algebricas.

Fracções algebricas.

Equações do 1º grau isoladas e simultaneas.

Problemas do 1º grau.

3 ª SERIE (4 horas)

Equações do 2º grau isoladas e simultaneas.

Problemas do 2º grau.

Experiencias. Logarithmos algebricos.

Angulos, linha recta e circumferencia.

Linhas proporcionaes. Similhança.

Area das figuras planas.

ANEXO H – PROGRAMA DE ENSINO PARA O ANO DE 1915

(VECHIA; LORENZ, 2008, p. 216 - 221. TRANSCRITO APENAS O PROGRAMA DE ARITHMETICA E ALGEBRA).

COLLEGIO PEDRO II

ARITHMETICA

2º ANNO (3 horas)

1ª lição

Numero. Unidade. Quantidade. Grandeza. Numeros inteiros. Formação dos numeros. Numeração fallada e numeração escripta.

2ª lição

Numeração fallada. Unidades das diversas ordens. Classes. Numeração decimal. Enunciar verbalmente um numero qualquer.

3ª lição

Numeração escripta. Algarismos. Convenção fundamental. Zero ou Cifra. Valor absoluto e valor relativo dos algarismos.

4ª lição

Regra para escrever um numero. Regra para lêr um numero. Zero a direita de um numero. Numeros abstractos. Numeros concretos. Numeros digitos. Systema decimal de numeração. Outros systemas de numeração. Base.

5ª lição

Representação das quantias de dinheiro. Algarismos romanos. Uso destes algarismos. Convenções fundamentaes. Regra para escrever um numero qualquer em algarismos romanos.

6ª lição

As quatro operações. Addição. Definição. Addição de dois numeros de um só algarismo. Addição de dois numeros, sendo um de um só algarismo, e sendo o outro um numero inteiro qualquer. Caso geral. Addição de numeros inteiros quaisquer. Regra da adição dos numeros inteiros. Prova da adição. Signal da adição. Signal de igualdade.

7ª lição

Subtracção. Definição. Minuendo. Subtrahendo. Resto. Excesso. Differença. Subtracção quando o numero menor (subtrahendo) em um só algarismo. Subtracção no caso geral. Caso em que um algarismo do subtrahendo é maior que o algarismo correspondente do minuendo. Regra da subtração. Prova de subtração. Signal da subtracção.

8ª lição

Multiplicaçco. Definição. Multiplicando. Multiplicador. Producto. Factores. Multiplicação de dois numeros de um só algarismo. Taboada de Pythagoras. Multiplicação de um numero de mais de um algarismo por um numero de um só algarismo. Regra.

9ª lição

Multiplicação de um numero inteiro qualquer por 10, por 100, por 1000 ... Regra. Multiplicação de um numero inteiro qualquer por um numero formado de um algarismo significativo seguido de zeros. Regra. Caso geral. Multiplicação de dois numeros inteiros quaesquer. Regra. Productos parciaes. Signal da multiplicação.

10ª lição

Productos de factores. Inverter a ordem dos factores de um producto de muitos factores. Prova de multiplicação. Multiplicação de factores terminados por zeros. Potencias successivas de 10. Multiplicação de potencias de um mesmo numero.

11 lição

Divisão. Definição. Dividendo. Divisor. Quociente. Resto. Primeiro caso da divisão: o divisor tem um só algarismo, e o dividendo é menor que dez vezes o divisor. Segundo caso da divisão: o divisor tem mais de um algarismo, e o dividendo é menor que dez vezes o divisor. Regra.

12ª lição

Caso geral da divisão; o dividendo e o divisor são numeros inteiros quaesquer. Determinação do numero de algarismos ao quociente. Determinação do primeiro algarismo do quociente. Determinação dos algarismos successivos do quociente. Dividendos parciaes. Regra da divisão.

13ª lição

Observação geraes sobre a divisão. Prova da divisão. Signal da divisão.

14ª lição

Propriedades do numeros. Divisibilidade. Numero divisivel por outro. Numero multiplo de outro. Principios geraes sobre divisibilidade.

15ª lição

Principios geraes (continuação). Divisibilidade por 2. Divisibilidade por 5.

16ª lição

Divisibilidade por 4 e por 25. Divisibilidade por 9.

17ª lição

Divisibilidade por 9 (continuação). Tirar os nove fora. Divisibilidade por 9 pela regra dos noves fora. Divisibilidade por 3.

18ª lição

Divisibilidade por 11. Principios geraes donde se deduz a regra de divisibilidade por 11.

19ª lição

Divisibilidade por 11 (continuação).

20ª lição

Provas dos noves da multiplicação e da divisão.

21ª lição

Maximo divisor commum. Principios sobre quaes se basêa a procura do maximo divisor commum. Regra.

22ª lição

Numeros primos entre si. Theoremas diversos sobre maximo divisor commum.

23ª lição

Numeros primos. Definição. Theoremas e proposições fundamentaes. Formação de uma lista ou tabela dos numeros primos.

24ª lição

Decomposição de um numero em factores primos. Regra. Divisores de um numero. Composição do maximo divisor commum de divisores numeros. Theoremas diversos.

25ª lição

Menor multiplo commum. Procura do menor multiplo commum. Regra.

26ª lição

Fracções. Fracções ordinarias. Numerador. Denominador. Termos de uma fração. Nomenclatura (ou denominação) das fracções. Fracções proprias. Fracções improprias.

27ª lição

Estrahir os inteiros de uma fracção impropria. Quociente completo da divisão de um numero inteiro por outro; parte inteira do quociente; parte complementar. Numero mixto. Numeros mixtos e frações improprias. Transformar um numero mixto em fracção impropria. Transformar uma fracção impropria em um numero mixto. Regras. Observações diversas.

28ª lição

Medida das grandezas. Propriedades fundamentaes das fracções. Theoremas diversos

29 ª lição

Simplificação das fracções. Reduzir uma fracção á sua expressão mais simples. Fracção irreductivel. Fracção reductivel.

30ª lição

Comparação das fracções. Reducção das fracções ao mesmo denominador. Menor denominador commum.

31 ª lição

Operações sobre as fracções. Addição. Caso de fracções que têm o mesmo denominador. Caso de fracções que têm denominadores differentes. Addição de numeros mixtos.

32ª lição

Subtracção. Caso de fracções que têm o mesmo denominador. Caso de fracções que têm denominadores differentes. Caso de numeros mixtos.

33ª lição

Multiplicação. Multiplicação de uma fração por um numero inteiro. Multiplicação de um numero inteiro por uma fracção. Multiplicação de uma fracção. Regra.

34ª lição

Multiplicação de numeros mixtos. Multiplicação de qualquer numero de fracções. Fracção de fracção.

35ª lição

Divisão. Divisão de uma fracção por um numero inteiro. Divisão de uma fracção por uma fracção. Divisão de um numero inteiro por uma fracção. Regras.

36ª lição

Divisão de numeros mixtos. Observações sobre a multiplicação e a divisão das fracções. Fracções inversas. Exercicios e problemas sobre fracções.

37ª lição

Fracções decimaes. Numeros decimaes. Numeração de numeros decimaes.

38ª lição

Transposição de virgula num numero decimal. Zeros á direita ou á esquerda de um numero decimal. Dividir (ou multiplicar) um numero decimal por 10, por 100, por 1000... Dividir um numero inteiro por 10, por 100, por 1000...

39ª lição

Operações sobre os numeros decimaes. Addição. Subtracção. Multiplicação.

40ª lição

Divisão dos numeros decimaes. Primeiro caso: o divisor é inteiro. Segundo caso: o divisor é um numero decimal. Regras. Quocientes approximados.

41ª lição

Conversão das fracções ordinarias em fracções decimaes. Proposições e teoremas.

42ª lição

Dizimas periodicas. Periodo. Dizima periódica simples. Dizima periódica composta. Parte periódica. Parte não periodica. Fracção geratriz.

43ª lição

Systema metrico. Nomenclatura dos multiplos e submultiplos. O systema métrico é **decimal**. Medidas de comprimento. O metro. Definição. Multiplos e submultiplos do metro. Numeração dos numeros representando comprimentos. Mudança de unidade.

44ª lição

Medidas de superficie. O metro quadrado. Definição Multiplos. Submultiplos do metro quadrado. Valores dos multiplos relativamente aometro quadrado. Numeração dos numeros representando superficies. Mudança de unidade. Medidas agrarias. O are. O hectare. O centiare.

45ª lição

Medidas de volume. O metro cubico. Definição. Submultiplos do metro cubico. Valores dos submultiplos relativamente ao metro cubico. Numeração dos numeros representando volumes. Mudança de unidade.

46ª lição

Medidas de capacidade. O litro. Definição. Multiplos e submultiplos do litro. Numeração dos numeros representando capacidades. Equivalencia de certos volumes e de certas capacidades.

47ª lição

Medidas de peso. O gramma. Definição. Multiplos e submultiplos do gramma. Numeração dos numeros representando pesos. Correspondencia entre certos volumes e pesos de agua.

48ª lição

Unidade monetaria. A unidade monetaria do systema metrico e a unidade monetaria brasileira. Numeração dos systema mometario brasileiro. Systema antigo brasileiro de pesos e medidas. Medidas antigas de cumprimento, de superficie, de volume, de peso, de capacidade. Medidas para seccos. Medidas para liquidos. Medidas agrarias antigas.

49ª lição

Vantagens do systema metrico. Sua superioridade sobre os outros systemas. 1º Simplicidade. 2º Facilidade dos cálculos, pelo facto do systema metrico ser decimal. 3º O systema metrico tem uma base fixa. 4º Aos systemas antigos faltava a estabilidade e uniformidade.

50ª lição

Numeros complexos. Operações sobre os numeros complexos. Transformações diversas dos numeros complexos. Primeira transformação: reduzir um numero complexo a unidades do menor submultiplo. Segunda transformação: dos submultiplos (ou dos multiplos inteiros) de um numero complexo extrahir os multiplos superiores.

51ª lição

Addição de numeros complexos. Subtracção de numeros complexos.

52ª lição

Multiplicação de numeros complexos.

53ª lição

Divisão de numeros complexos. Os numeros complexos e o systema metrico. Exercicios e problemas sobre numeros complexos.

54ª lição

Raiz quadrada. Definição. Formação do quadrado da somma de dois numeros inteiros. Quadrado perfeito.

55ª lição

Extracção da raiz quadrada dos numeros inteiros. Primeiro caso: numero inteiro menor que 100. Segundo caso: numero inteiro maior que 100 e menor que 1000.

56ª lição

Caso geral: extracção da raiz quadrada de um numero inteiro qualquer. Regra. Observações diversas.

57ª lição

Differença dos quadrados de dois numeros inteiros consecutivos. Valor maximo do resto da operação de extracção da raiz quadrada. Consequencia. Quadrado de uma fracção ordinária. Raiz quadrada de uma fracção ordinária.

58ª lição

Raiz quadrada do numeros decimaes. Raiz quadrada com approximação de uma unidade de qualquer ordem decimal.

59ª lição

Proposições e theoremas diversos relativos a quadrados e a raizes quadradas.

60ª lição

Raiz cubica. Cubo de um numero. Cubo perfeito. Extracção da raiz cubica dos numeros inteiros.

61ª lição

Extracção da raiz cubica dos numeros decimaes. Extracção da raiz cubica com aproximação de uma unidade de qualquer ordem decimal. Extracção da raiz cubica de uma fração ordinaria.

62ª lição

Razões e proporções. Razão. Definição. Razões inversas. Proporções. Definição. Propriedades das proporções. Propriedade fundamental. Transformações de uma proporção.

63ª lição

Theoremas e proposições sobre proporções. Achar um termo desconhecido de uma proporção, sendo conhecidos os outros tres termos.

64ª lição

Regra de tres. Grandezas e quantidades proporcionaes. Problemas de regra de tres. Regra de tres simples. Resolução pelas proporções.

65ª lição

Problemas de regra de tres simples. Resolução pelo methodode redução á unidade. Regra de tres simples directa: regra de tres simples inversa.

66ª lição

Regra de tres composta. Resolução pelas proporções. Resolução pelo methodo de redução á unidade.

67ª lição

Regra de juros. Juros simples. Capital. Juro. Taxa. Fórmula para a resolução dos problemas de juros.

68ª lição

Calculo dos juros para mezes. Calculo dos juros para dias. Calculo dos juros para anos, mezes e dias.

69ª lição

Descontos. Letra. Vencimento. Valor nominal. Valor actual. Taxa do desconto. Desconto por fora. Desconto por dentro. Calculo do desconto por fóra de uma letra.

70ª lição

Desconto por dentro (ou racional). Fórmulas para o desconto por dentro de uma letra. Calculo do desconto por dentro de uma letra.

71ª lição

Divisão proporcional. Dividir um numero em partes proporcionaes a numeros dados. Regra de companhia ou de sociedade.

72ª lição

Misturas e ligas. Resolução de problemas sobre misturas e ligas. Methodo dos numeros dispostos **em cruz** (ou **em diagonal**), para a resolução de certos problemas sobre misturas.

73ª lição

Cambio. O que é **cambio**. Transformação (por troca ou permuta) do dinheiro brazileiro em dinheiro extrangeiro e vice-versa. Cambio sobre a Inglaterra. Taxa do cambio. Variabilidade da taxa do cambio. Cambio alto. Cambio baixo. Calculos de cambio entre o Brazil e a Inglaterra.

74ª lição

Calcular o valor da libra esterlina que corresponde a qualquer taxa de cambio. Moeda-papel. Moeda-ouro. Valor de um mil réis-papel. Valor de um mil réis-ouro. O par do cambio.

75ª lição

Cambio sobre a França. O cambio sobre os cinco paizes da **União Latina**: França, Belgica, Suissa, Italia e Grecia. Cambio sobre a Allemanha. Cambio sobre os Estados-Unidos. Cambio sobre Portugal.

76ª, 77ª, 78ª, 79ª e 80ª lições

Revisão e recordação do curso. Exercicios e problemas.

Arthur Thiré.

ALGEBRA E GEOMETRIA PLANA[14]

3º ANNO (3 horas)

ALGEBRA

1ª lição

Objecto da Algebra. Definições preliminares. Signaes empregados na Algebra. Uso das letras. Coefficiente. Igualdade. Equação. Membros. Termos. Incognita. Resolução de uma equação.

2ª lição

Resolução de problemas muito simples pelo processo algebrico. Exemplos faceis. Expressões algebricas. Potencia. Gráo. Expoente. Raiz.

3ª lição

Valor numerico de uma expressão algebrica. Exemplos. Uso dos parenthesis. Expressões racionaes e expressões irracionaes. Expressões inteiras e expressões fraccionarias.

4ª lição

[14] Foram transcritas somente as quarenta primeiras lições, pois as outras quarenta pertenciam a Geometria Plana.

Monomios. Polynomios. Gráo de um polynomio. Termos semelhantes. Sua redução. Exemplos.

5ª lição

Calculo algebrico. Operações algebricas. Addição algebrica. Addição de polynomios. Subtracção algebrica. Regra da subtração algebrica (troca dos signaes dos termos do polynomio subtrahendo). Exemplos.

6ª lição

Multiplicação algebrica. Multiplicação de duas potencias de um mesmo numero. Multiplicação dos monomios. Multiplicação de um polynomio por um monomio. Multiplicação de um monomio. Multiplicação de um monomio por um polynomio.

7ª lição

Multiplicação de dois polynomios. Regra dos signaes. Polynomios ordenados. Multiplicações ordenadas.

8ª lição

Applicações da multiplicação algebrica. Quadrado da somma de dois termos. Quadrado da differença de dois termos. Exemplos. Producto da somma de dois termos por sua differença. Cubo da somma de dois termos. Cubo da differença de dois termos. Pôr em evidencia um factor commum. Exemplos.

9ª lição

Divisão algebrica. Divisão de duas potencias de uma mesma letra. Expoente zero. Expoente negativo. Divisão de um monomio por um monomio. Divisão de um polynomio por um monomio.

10ª lição

Divisão dos polynomios. Regra da divisão algebrica. Regra dos signaes. Dividendo parciaes. Divisões que não fazem exactamente. Resto da divisão. Exemplos.

11ª lição

Divisão de polynomios ordenados em relação ás potencias crescentes de uma letra. Divisibilidade de um polynomio por $x-a$. Caso da divisão de $x^m - a^m$ por $x-a$. Caso da divisão de $x^m + a^m$ por $x-a$.

12ª lição

Fracções algebricas. Proposições e theoremas sobre fracções algebricas. Simplificação das fracções algebricas. Reducção de fracções algebricas ao mesmo denominador. Operações sobre fracções algebricas. Addição, subtracção de fracções algebricas.

13ª lição

Multiplicação, divisão de fracções algebricas. Exercicios de calculo algebrico. Simplificar expressões algebricas. Reduzir expressões. Verificar fórmulas e igualdades.

14ª lição

Equações do 1º gráo. Igualdade. Identidade. Equação. Incognita. Equações equivalentes. Equações de uma, ou de varias incognitas. Resolução das equações. Principios geraes sobre resolução de equações. Exemplos e exercicios.

15ª lição

Resolução da equação do 1º gráo a uma incognita. Regra geral. Exemplos. Equações litteraes. Equações que se reduzem ao 1º gráo. Exemplos.

16ª lição

Problemas que se resolvem por uma equação do 1º gráo a uma incognita. Exemplos. Methodo de resolução dos problemas. 1º Pôr o problema em equação. 2º Resolver a equação. Exemplos.

17ª lição

Discussão da equação do 1º gráo a uma incognita. Casos de impossibilidade. Casos de indeterminação. Discussão dos problemas do 1º gráo a uma incognita. Interpretação das soluções negativas.

18ª lição

Problema dos correios. Discussão completa.

19ª lição

Systema de equações. Principios geraes. Resolução de um systema de duas equações do 1º gráo a duas incognitas. Methodo por substituição. Exemplos.

20ª lição

Systema de tres equações do 1º gráo a tres incognitas. Exemplos. Systema formado por qualquer numero de equações do 1º gráo com o mesmo numero de incognitas. Exemplos.

21ª lição

Methodo por comparação. Exemplos. Methodo de reducção ao mesmo coefficiente (ou methodo por addição e subtracção). Exemplos.

22 ª lição

Methodo de Bezout. Exemplos. Problemas que se resolvem por systemas de equações e varias incognitas.

23ª lição

Discussão dos systemas de equações do 1º gráo a duas incognitas. Casos de impossibilidade. Casos de indeterminação. Desigualdades. Principios geraes. Theoremas. Resolver uma desigualdade. Exemplos.

24ª lição

Equações do 2º gráo a uma incognita. Raiz quadrada arithmetica. Raiz quadrada algebrica. Resolução da equação $X^2 = A$. Discussão. Fórma geral da equação do 2º gráo. Fórmula geral de resolução da equação.

25ª lição

Deducção da fórmula geral de resolução. Exemplos de applicação e exercicios. Raizes reaes. Raizes imaginarias. Raizes desiguaes. Raizes iguaes.

26ª lição

Caso em que o coefficiente de X^2 é igual á unidade. Somma das raizes da equação do 2º gráo. Producto das raizes. Formar uma equação do 2º gráo, sendo suppostos conhecidos (ou dados) os valores das suas raizes. Achar dois numeros, conhecendo-se a sua somma e o seu producto.

27ª lição

Decomposição do primeiro membro da equação do 2º gráo em factores do 1º gráo. Decomposição de um trinomio ao 2º gráo em factores do 1º gráo.

28ª lição

Discussão da equação do 2º gráo. Signaes das raizes. Exemplos e exercicios.

29ª lição

Equação incompleta do 2º gráo. Equações litteraes. Problemas do 2º gráo.

30ª lição

Equações reductiveis ao 2º gráo. Equações biquadradas. Equações irracionaes.

31ª lição

Systemas de duas equações do 2º gráo a duas incognitas. Estudo de alguns casos particulares, em que a resolução é simples e fácil.

32ª lição

Progressões. Progressões por differença e progressões por quociente. Progressão por differença, ou progressão arithmetica. Razão. Progressão crescente. Progressão decrescente. Fórmula para calcular o valor do termo accupando o lugar de ordem **n**, na progressão por differença. Exemplos e exercicios.

33ª lição

Fórmula para calcular a somma dos **n** primeiros termos. Exemplos e exercicios. Utilidade e uso destas fórmulas. Inserção de termos entre os termos successivos de uma progressão por differença. Exemplos.

34ª lição

Progressão por quociente, ou progressão geometrica. Razão. Progressão crescente. Progressão decrescente. Fórmula para calcular o valor do termo accupando o lugar de ordem **n**. Fórmula para calcular a somma dos **n** primeiros termos. Exemplos e exercicios. Utilidade e uso destas fórmulas.

35ª lição

Inserção de termos entre os termos successivos de uma progressão por quociente. Exemplos. Limite de somma dos termos de uma progressão por quociente, decrescente, quando o numero dos termos augmente indefinidamente. Exemplos.

36ª lição

Logarithmos. Definição dos logarithmos por meio de duas progressões. Extensão da definição. Propriedade fundamental dos logarithmos. Logarithmo de um producto. Logarithmo de um quociente. Logarithmo de uma potencia. Logarithmo de uma raiz.

37ª lição

Diversos systemas de logarithmos. Logarithmos vulgares (ou decimaes). Taboas de logarithmos. Disposição das taboas de logarithmos de Callet. Uso das taboas de Callet. Caracteristicas negativas. Cologarithmos. Exercicios de calculo por logarithmos, por meio das taboas de Callet.

38ª lição

Taboas com cinco casas decimaes. Exercicios de calculo por logarithmos, por meio de taboas com cinco casas decimaes.

39ª lição

Juros compostos. Fórmula geral para juros compostos. Uso dos logarithmos para os calculos relativos a juros compostos. Exemplos e exercicios.

40ª lição

Annuidades. Formação de um capital pelo pagamento de prestações annuaes (anuidades) durante um certo numero de annos. Exemplos. Amortisação de uma divida pelo pagamento de prestações annuaes durante um certo numero de annos. Exemplos e exercicios.

ANEXO I – PROGRAMA DE ENSINO PARA O ANO DE 1926

(VECHIA; LORENZ, 2008, p. 250 - 252. TRANSCRITO APENAS O PROGRAMA DE ARITHMETICA E ALGEBRA).

COLLEGIO PEDRO II

ARITHMETICA

PRIMEIRO ANNO

O ensino terá, no primeiro anno, um caracter accentuadamente pratico.

Noções preliminares

Numeração. Numeração falada; numeração escripta. Numeração romana. As quatro operações fundamentaes. Provas. Exercicios de calculo mental. Problemas.

Caracteres da divisibilidade por 10 e suas potencias; por 2 e suas potencias; por 5 e suas potencias; por 9, por 3, por 4 e por 6. Prova dos restos. Exercicios.

Maximo divisor commum. Processo das divisões successivas; simplificações. Exercicios.

Numeros primos; crivo. Reconhecer si um numero é primo. Decomposição em factores primos. Divisores de um numero. Decomposição mental em factores primos, em casos faceis. Composição do maximo divisor commum. Exercicios. Minimo multiplo commum. Exercicios.

Composição mental, em casos faceis, m.m.c. e do m.d.c. Fracções ordinarias e numeros mixtos; transformação e operações. Exercicios.

Fracções decimaes; operações . Conversão de fracções ordinarias em decimaes e vice-versa. Dizimas periodicas. Determinação da geratriz. Exercicios.

Quadrado e raiz quadrada. Extracção da raiz quadrada dos numeros inteiros a menos de uma unidade. Exercicios. Cubo e raiz cubica. Extracção da raiz cubica dos numeros inteiros a menos de uma unidade. Exercicios.

Systema metrico. Exercicios.

Numeros complexos; redução de complexo a incomplexo e vice-versa. As quatro operações. Exercicios somente com as unidades de tempo, de angulo e com as unidades inglesas. Conversão destas em unidade metricas e vice-versa.

Razões e proporções. Definição. Propriedade fundamental. Exercicios.

As grandezas proporcionais. Regra de tres simples e composta. Exercicios.

Regra de juros simples. Resolução pela regra de tres. Exercicios.

LIVROS ADOPTADOS:
Lições de Arithmetica por **Euclides Roxo**.
Questões de Arithmetica por **Cecil Thiré**.
Exercicios de Arithmeitca por **H. Costa, E. Roxo e O. Castro**.

SEGUNDO ANNO

A unidade: a primeira noção de numero; os numeros inteiros, sua formação. A serie ilimitada dos numeros inteiros. Numeração falada. Numeração escripta.

A addição e a subtractão. Theoremas. Theoria dessas operações. Provas.

Multiplicação. Produto de dois factores. Definição. Theoremas. Producto de varios factores. Theoremas. Potencias. Theoria da multiplicação. Provas.

Divisão. Definição. Theoremas. Theoria da divisão. Prova.

Divisibilidade. Definições. Theoremas geraes. Caracteres de divisibilidade por 10^m, 2^m, 5^m, por 9, por 3 e por 11. Provas pelos restos.

Maximo divisor commum. Definições. Pesquiza do m.d.c. de dois numeros. Theoremas. M.d.c. de varios numeros. Pesquizas e propriedades.

Numeros primos. Definições. Theoremas. Serie limitada; crivo. Reconhecer si um numero é primo. Decomposição em factores primos. Applicações. Divisores de um numero; algorithmo. Numero de divisores. Composição do m.d.c. Minimo multiplo comum. Definições. Composição pelos factores primos.

Fracções ordinarias: as diversas definições. Propriedades geraes. Simplificação. Redução ao mesmo denominador. As operações: sua theoria. Fracções compostas ou generalizadas.

Fracções decimaes. Definição e notação. Igualdade, desigualdade. Operações. Conversão de uma fracção ordinaria em decimal. Dizimas periodicas. Definição. Determinação da geratriz. Caracteres de convertibilidade.

Quadrado e raiz quadrada. Definições. Theoremas. Condição para que um numero seja quadrado. Construcção de uma taboa de quadrados. Extracção da raiz quadrada, a menos de uma unidade e com uma aproximação dada, de um inteiro ou fraccionario.

Cubo e raiz cubica. Definições. Theoremas. Condição para um numero ser cubo. Construcção de uma taboa de cubos. Extracção da raiz cubica, a menos de uma unidade e com uma approximação, dada de um numero inteiro ou fraccionario.

Razões. Definição. Propriedades das razões e fracções compostas. Numeros proporcionaes. Proporções. Média arithmetica; media geometrica.

As grandezas proporcionaes. Regras de tres simples e compostas. Processo de reducção á unidade e das proporções.

Regra de juros simples. Resolução pelas regras de tres e pelas formulas. Methodo dos divisores.

Desconto racional e commercial. Vencimento medio.

Divisão proporcional e suas applicações. Regra de sociedade.

Regra de mistura e liga.

Cambio interno e externo. Titulos de renda, apolices.

Calculo arithmetico dos radicaes. Multiplicação e divisão. Reducção ao mesmo indice.

LIVROS ADOPTADOS:
Lições de Arithmetica por **Euclides Roxo.**

Questões de Arithmetica por **Cecil Thiré.**
Exercicios de Arithmetica por **H. Costa, E. Roxo e O. Castro.**

ALGEBRA

TERCEIRO ANNO

Noções preliminares. Signaes algebricos.

Forma ou expressão algebrica. Termos semelhantes e sua reducção. Definição da Algebra.

Os numeros negativos e sua interpretação.

Valor numerico das expressões algebricas.

Addição e subtracção.

Multiplicação. Applicações.

Divisão. Divisão por x + a e por x – a. Applicações.

As fracções algebricas. Operações. Denomonadores irracionaes.

As equações. Definições. Theoremas. Transformações que não alteram as raizes.

As equações do primeiro gráo a uma incognita. Resolução. Discussão. Problemas. Systemas do primeiro gráo. Methodo de reducção ao mesmo coefficiente, de substituição e de comparação. Methodo de Bezout. Regra pratica de Cramer. Discussão das formulas.

Desegualdades do primeiro gráo.

Problemas do primeiro gráo. Discussão. Problemas dos correios. Exercicios.

As equações do segundo gráo. Resolução. Discussão. Raizes imaginarias. Propriedades das raizes.

Problemas do segundo gráo. Discussão do problema das luzes. Equações biquadradas. Expressões da forma.

$\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$

Progressões arithmeticas. Progressões geometricas. Logarithmos.

Equações exponenciaes. Resolução pelos logarithmos. Juros compostos.

LIVROS ADOPTADOS:

Algebra por **A. Serrasqueiro**.

Lições de Algebra por **Joaquim Lisboa**.

Exercicios de Algebra por **H. Costa**, **E. Roxo** e **O. Castro**.

ANEXO J – DEMONSTRAÇÃO DO PRIMEIRO RESULTADO DA RELAÇÃO ENTRE FRAÇÃO CONTÍNUA PERIÓDICA E SUA GRANDEZA

(SERRASQUEIRO, 1906, p. p. 298 - 299).

$$x = a, b, c, \ldots n, a, b, c, \ldots n, \ldots,$$

Seja $\frac{r}{r'}$ o valor de uma reduzida composta de um certo numero de periodos, e sejam $\frac{p}{p'}$ e $\frac{q}{q'}$ as duas reduzidas antecedentes: será

$$\frac{r}{r'} = \frac{nq + p}{nq' + p'}.$$

Além d'isto, seja $\frac{v}{v'}$ a reduzida que tem um periodo a mais: designando por k o valor de um periodo, o valor de $\frac{v}{v'}$ deduz-se do valor de $\frac{r}{r'}$, mudando neste n em $n + \frac{1}{k}$; e vem

$$\frac{v}{v'} = \frac{q\left(n + \frac{1}{k}\right) + p}{q'\left(n + \frac{1}{k}\right) + p'} = \frac{nqk + q + pk}{nq'k + q' + p'k} = \frac{(nq + p)k + q}{(nq' + p')k + q'} = \frac{rk + q}{r'k + q'},$$

e tomando a differença das duas reduzidas,

$$\frac{v}{v'} - \frac{r}{r'} = \frac{rk + q}{r'k + q'} - \frac{r}{r'} = \frac{qr' - rq'}{r'(r'k + q')} = \frac{\pm 1}{r'(r'k + q')}.$$

Suppondo a reduzida $\frac{r}{r'}$ composta de um numero de periodos sufficientemente grande, o seu denominador r', pela lei da formação das reduzidas, excede toda e qualquer grandeza; e por consequencia a differença $\frac{v}{v'} - \frac{r}{r'}$ tende para zero.