MAGDA CRISTINA JUNQUEIRA GODINHO MONGELLI

UM ESTUDO SOBRE PROCEDIMENTOS E INVARIANTES OPERATÓRIOS UTILIZADOS POR ALUNOS DO IV CICLO DO ENSINO FUNDAMENTAL NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE SIMETRIA AXIAL

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS HUMANAS E SOCIAIS
CAMPO GRANDE/MS
2005

Mongelli, Magda Cristina Junqueira Godinho.
Um Estudo sobre Procedimentos e Invariantes Operatórios Utilizados por Alunos do IV Ciclo do Ensino Fundamental na Resolução de Problemas de Simetria Axial/ Magda Cristina Junqueira Godinho Mongelli – Campo Grande, MS: (312 f), 2005.

Orientador: José Luiz Magalhães de Freitas.
Dissertação (mestrado) –Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Centro de Ciências Humanas e Sociais.
Área de Concentração: Educação.

1. Educação 2. Didática da Matemática 3. Teoria dos Campos Conceituais 4. Transformações Geométricas

MAGDA CRISTINA JUNQUEIRA GODINHO MONGELLI

UM ESTUDO SOBRE PROCEDIMENTOS E INVARIANTES OPERATÓRIOS UTILIZADOS POR ALUNOS DO IV CICLO DO ENSINO FUNDAMENTAL NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE SIMETRIA AXIAL

Dissertação apresentada como exigência final para obtenção do grau de Mestre em Educação à Comissão Julgadora da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul sob a orientação do Professor Dr. José Luiz Magalhães de Freitas.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS HUMANAS E SOCIAIS
CAMPO GRANDE
2005

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr José Luiz Magalhães de Freitas

Prof. Drª. Marilena Bittar

Prof. Drª. Shirley Takeco Gobara

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. José Luiz Magalhães de Freitas, meu orientador e amigo, por sua orientação sem a qual este trabalho não seria possível.

Á Prof. Drª. Neri Terezinha Both Carvalho, pelas sugestões dadas na qualificação.

Á Prof. Drª. Shirley Takeco Gobara, pelas sugestões dadas na qualificação e por todos os comentários que contribuíram na realização deste trabalho.

Á Prof. Drª. Marilena Bittar, pelas sugestões dadas na qualificação e por todos os comentários que contribuíram na realização deste trabalho.

Ao meu esposo, Henrique, pelo companheirismo, pelo apoio em todas as horas e pela compreensão nos momentos difíceis.

Aos meus filhos, Letícia e João Pedro, pelo carinho e compreensão nos momentos de ausência.

Aos meus pais, Mercedes e Bento (em memória), por me ensinarem o valor da educação e pelo apoio prestado.

Aos meus sogros Alzira e Orlando, por todo o apoio e ajuda.

Aos meus irmãos, cunhados e cunhadas, por todo o incentivo prestado.

À minha amiga, Heloísa Laura Q. G. da Costa, pelo apoio, paciência e cujos incentivos foram muito importantes em todos os momentos do curso.

Às minhas amigas, Magda e Irene, pela amizade, apoio e companheirismo em todos os momentos do curso.

A todos que, indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho, o meu muito obrigado!

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo principal a identificação, análise e diagnóstico de procedimentos e invariantes operatórios utilizados por alunos do quarto Ciclo do Ensino Fundamental, quando colocados diante de situações-problema diversificadas envolvendo simetria axial. Esses procedimentos e invariantes operatórios foram identificados e analisados, através de situações didáticas vivenciadas por alunos de uma escola municipal da periferia da cidade de Campo Grande –MS. Essa pesquisa tem como referencial teórico-metodológico: a Engenharia Didática, a Teoria das Situações Didáticas e a Teoria dos Campos Conceituais. Esse referencial foi adotado por entendermos que a análise das situações didáticas, vivenciadas pelos alunos, possibilita investigarmos dificuldades, procedimentos e invariantes operatórios. A coleta de dados foi realizada através da análise das produções dos alunos nas atividades propostas na seqüência didática com a utilização de papel e lápis e computador. Centramos nossa atenção sobre os procedimentos e invariantes operatórios utilizados pelos alunos em problemas relativos a simetria axial. A utilização de dobradura e decalque, e as ferramentas *segmento* e *distância* do *Cabri* foram as preferidas dos alunos. Os procedimentos referência horizontal, vertical e diagonal, apareceram com maior freqüência, confirmando resultados apontados por pesquisas anteriores. Identificamos os invariantes associados a estes: “o simétrico de uma figura em relação a um eixo de simetria é uma figura deslocada horizontalmente (ou verticalmente, ou diagonalmente)”. Foram identificados outros invariantes como, por exemplo, “o eixo de simetria divide a figura em duas partes congruentes” e “o simétrico de uma figura é uma figura que mantém a forma e as dimensões da inicial”.

Palavras-chave: Transformações Geométricas; Teoria dos Campos Conceituais; Simetria Axial; Invariantes Operatórios.

ABSTRACT

The present work has as main objective the identification, analysis and diagnosis of procedures and operational invariants used by students of the penultimate year of fundamental teaching, when faced up to different problem-situations containing axial symmetry. These procedures and operational invariants had been identified and analyzed, through didactic situations experienced by students of a municipal school of the periphery of the city of Campo Grande - MS. This research has as theoretical and methodological referential: Didactic Engineering, the Theory of the Didactic Situations and the Theory of Conceptual Fields. This referential was adopted because the analysis of the didactic situations, experienced by the students, makes possible to investigate hardness, procedures and operational invariants. The data collect was carried through the analysis of the work done by the students in the activities proposed in the didactics sequence with the use of paper and pencil and computer. We concentrate our attention on the procedures and operational invariants used by the students in axial symmetry problems. The use of folding and decal, and the *segment* and *distance* tools of the *Cabri* had been the preferred ones of the students. The procedures horizontal, vertical and diagonal reference had turned up more often, confirming resulted indicated by previous researches. We identify the invariants associated to these procedures: "the symmetrical of a figure in respect to a symmetry axis is a horizontally (or vertically, or diagonally) dislocated figure". Other invariants had been identified as, for example, "the symmetry axis divides the figure in two congruent parts" and "the symmetrical of a figure is a figure that keeps the form and the dimensions of the original one".

Key words: geometrical transformations; Theory of Conceptual Fields; axial symmetry; operational invariants.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A presente pesquisa estuda o conceito de simetria axial, parte da geometria plana. Essa escolha se deve ao fato desse conceito possibilitar o aparecimento de procedimentos "corretos" e "incorretos" e pela existência de idéias contraditórias e duráveis, conforme pesquisas de Grenier (1985), Webber (2001) e outros. A escolha do tema, do objeto da pesquisa e de algumas ações necessárias para o seu desenvolvimento, originou-se das experiências da pesquisadora com questões referentes à área de educação, em particular, ao ensino de Matemática. Assim, delimitamos nosso objeto de estudo: "Um estudo sobre procedimentos e a identificação de invariantes operatórios suscetíveis de alunos do quarto ciclo do Ensino Fundamental utilizarem quando colocados em contato com situações-problema diversificadas, envolvendo simetria axial". Por invariantes operatórios (teoremas-em-ação e conceitos-em-ação)[1] estamos entendendo que é o que está subjacente à ação do aluno. São eles que conduzem o reconhecimento, por parte do aluno, dos elementos pertinentes à situação. Para que a identificação destes prováveis invariantes operatórios seja possível, precisamos identificar, analisar e diagnosticar procedimentos utilizados por eles, e somente a partir do estudo destes é que poderemos identificar os prováveis invariantes operatórios suscetíveis de serem utilizados na resolução de situações-problema de simetria axial. Para isso, elaboramos e aplicamos uma seqüência didática utilizando lápis e papel, e também o computador, a um grupo de alunos do quarto ciclo do Ensino Fundamental de uma escola estadual da periferia da cidade de Campo Grande – MS.

Esta pesquisa tem como referencial teórico-metodológico a Engenharia Didática, a Teoria das Situações e a Teoria dos Campos Conceituais. Utilizamos as quatro fases da Engenharia Didática: análises preliminares; análise a priori; experimentação e análise *a posteriori*. De maneira geral, a Teoria das Situações e a Teoria dos Campos Conceituais foram adotadas por entendermos que a análise das

---

[1] Um conceito-em-ação é um objeto, um predicado ou uma categoria de pensamento tida como relevante, e um teorema-em-ação é uma proposição que se supõe verdadeira (Vergnaud, 1995, p.178).

situações didáticas, vivenciadas pelos alunos, possibilita investigarmos dificuldades, procedimentos e conceitos mobilizados por eles. Na Teoria das Situações, no modelo de Brousseau (1986), são evidenciadas as diferentes fases de uma situação didática: contextualização (1ª fase), situação a-didática (2ª fase) e institucionalização (3ª fase), que são interligadas uma às outras. Nesta teoria, procuramos privilegiar a sua segunda fase (a situação a-didática). A situação a-didática se caracteriza principalmente por retratar determinados momentos do processo de aprendizagem nos quais o aluno trabalha independentemente, não sofrendo nenhum tipo de controle direto por parte do professor.

A Teoria dos Campos Conceituais permite modelizar conhecimentos de alunos a cerca de um conceito, no nosso caso, o conceito de simetria axial. Centramos nossa atenção, nessa teoria, sobre os invariantes operatórios (teoremas em ação e conceitos em ação) suscetíveis dos alunos utilizarem em problemas relativos à simetria axial. Essa teoria foi utilizada na análise de dados sobre procedimentos e conceitos mobilizados pelos alunos diante de situações diversificadas, envolvendo problemas de simetria axial. A coleta de dados foi realizada através dos registros feitos pela pesquisadora e pelo observador no desenrolar da aplicação e da análise das fichas de atividades, com a utilização de papel e lápis, ou dos disquetes, no caso da utilização do computador. Através da análise das produções dos alunos nessas situações, investigamos os invariantes operatórios que eles podem ter utilizado.

Nas respostas dos alunos, percebemos alguns invariantes operatórios comuns, como, por exemplo: “o reflexo fica do outro lado do eixo”; “o eixo de simetria divide a figura em duas partes”; “o resultado de uma reflexão é uma figura fechada”; “o reflexo é uma figura deslocada horizontalmente” e procedimentos utilizados por alguns alunos, como: utilização de dobradura e decalque na busca pela solução correta da situação-problema; utilização da contagem de quadradinhos da malha quadriculada; utilização da ferramenta simetria axial do *Cabri* e outros.

O trabalho apresenta-se organizado como se segue. No primeiro capítulo, na Seção 1.1, descrevemos a trajetória de construção da pesquisa, bem como as razões pelas quais o tema chamou a nossa atenção, delimitando-se assim o objeto de estudo neste trabalho. Analisamos algumas propostas curriculares como os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (PCN’s-1998), alguns livros didáticos de Matemática do Ensino Fundamental, algumas pesquisas desenvolvidas sobre o tema e relatos de experiências desenvolvidas com o uso do computador, envolvendo simetria axial, focando os objetivos, as variáveis didáticas consideradas e seus principais resultados.

No segundo capítulo, temos o referencial teórico e metodológico da pesquisa: Teoria dos Campos Conceituais, a Teoria das Situações e a Engenharia Didática. A definição de uma metodologia para a pesquisa constitui os fundamentos e as bases a partir das quais o objeto desta pesquisa será analisado e discutido.

No terceiro capítulo, descrevemos a construção da seqüência didática.

No quarto capítulo, para melhor organização do texto e pelo fato das experimentações terem ocorrido em momentos distintos, optamos por apresentar os resultados experimentais em quatro partes de acordo com o tipo de recurso utilizado, lápis e papel ou computador. Em cada uma destas partes, apresentamos a análise *a priori* das situações-problema da categoria correspondente; os detalhes do procedimento experimental; a análise *a posteriori* da referida categoria; e a síntese do momento coletivo.

Nos anexos, temos a seqüência-didática; quadros, contendo as respostas dos alunos em cada atividade sugerida neste trabalho e algumas produções dos alunos.

CAPÍTULO I

ESTUDOS PRELIMINARES

1.1 Introdução

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) de Matemática valorizam o ensino de geometria.

> Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no Ensino Fundamental, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive (Brasil, 1998, p. 51).

A geometria é uma área de conhecimento relevante que, além do conhecimento espacial, deve proporcionar ao aluno a possibilidade de raciocinar com hipóteses, de argumentar de maneira lógica, de estabelecer premissas, de tirar conclusões e de generalizar. Essa valorização do ensino de geometria culminou na incorporação dos avanços propostos pelos PCN's (1998) na maioria dos livros didáticos. Desta forma, a geometria passou a receber uma atenção especial nos livros didáticos e, conseqüentemente, está sendo cada vez mais trabalhada em sala de aula. Assim, a simetria vem ocupando maior espaço, tanto nos PCN's (1998), como nos livros didáticos.

No livro didático de Matemática, coleção Novo Caminho, de Imenes, Jakubovic e Lellis (1998), eles procuram justificar a importância do seu estudo:

> Noções de simetria propiciam o desenvolvimento do senso estético dos alunos, motivando a confecção de bonitos desenhos e recortes. É um tema que se integra à educação artística.
> Além disso, as noções de simetria levam a uma compreensão mais rica das figuras geométricas e suas propriedades.
> Simetria é um conceito usado por marceneiros, engenheiros aeronáuticos e outros profissionais. Um biólogo leva em conta a simetria para classificar plantas e animais (Imenes *et al*., 1998, p. 36).

Fica claro, nessa citação, a valorização do conceito de simetria na formação dos alunos e que seu estudo se tornou significativo para eles.

Em vários livros didáticos[1], a simetria no 3º e 4º ciclos (5ª a 8ª séries) é vista através dos conceitos de transformações de figuras no plano (reflexão, rotação e translação). De modo geral, estes conteúdos são propostos para serem trabalhados inicialmente de forma experimental, ampliando as dificuldades gradativamente e sendo retomados nos anos subseqüentes.

Milani também tenta justificar a importância do estudo da simetria.

> O estudo de simetria em Matemática justifica-se pela possibilidade de tratar as propriedades geométricas de figuras sob o ponto de vista do movimento com relação a um eixo ou ponto. As figuras simétricas mantêm entre si forma e medidas de comprimento e de ângulos, ou seja, são iguais ou, mais precisamente, são congruentes apesar de ocuparem diferentes posições no espaço (Milani, 2001, p. 186-187).

Nosso interesse pelo estudo da simetria está ligado ao fato dela estar incluída nos livros didáticos atuais sem que os professores tenham sido preparados para ministrarem-na. Muitas vezes, este conceito tem sido explorado pelos professores somente pelo seu aspecto belo, estético, como é o caso dos borrões de tintas[2] ou dobraduras. Estas atividades nem sempre são exploradas de forma bem mais abrangente, relacionando o resultado final da atividade com a simetria e com propriedades geométricas presentes.

Mabuchi (2000) trabalhou com um grupo de professores, que complementavam a sua formação em Matemática, com o propósito de mostrar a necessidade e a importância da incorporação do tema: Transformações geométricas em cursos de formação de professores, que, assim, poderiam encontrar alicerce teórico para as práticas escolares. "É necessário, portanto, que o futuro professor, durante seu processo de formação, tenha oportunidade de pôr em prática sua atitude, procedimentos metodológicos e organizações de trabalho, que depois lhes servirão de modelo didático" (Mabuchi, 2000, p.196).

À simetria se articulam vários conceitos importantes da geometria, tais como: ponto, reta, paralelismo e perpendicularismo entre retas, e está relacionada com movimentos de translação, rotação e reflexão. Estes movimentos, também

---

[1] Por exemplo, os livros didáticos citados nesta pesquisas (p. 25-39), tratam a simetria através do conceito de transformações geométricas.

[2] Borrão de tinta: ato de dobrar o papel em duas partes iguais, abrir, pingar tinta em uma das metades, fechar e abrir novamente para ver o resultado.

denominados transformações geométricas, podem ser estudados, utilizando-se simetria, como podemos observar em (Lima, 1995, p. 2-41). Os conceitos fundamentais de ponto, reta, perpendicularismo e paralelismo podem ser utilizados como ferramentas no desenvolvimento de atividades de simetria com papel e lápis, e também com *softwares,* como o *Cabri-Géomètre II*[3], um dos recursos desta pesquisa.

Com a introdução do computador nas escolas e o número crescente de programas educativos e de *softwares*, como meio motivador e facilitador da aprendizagem, parece que o uso dessas novas tecnologias em Educação Matemática vem dar à geometria euclidiana um sentido mais dinâmico na exploração desse universo e, em particular, no trabalho investigativo com as chamadas transformações geométricas. O *Cabri-Géomètre II* é um software adequado para a exploração da geometria dinâmica[4] no ensino e aprendizagem da geometria e da simetria. Em nossa pesquisa, analisamos e selecionamos o *software Cabri-Géomètre II*[5] para trabalharmos a seqüência didática com a utilização do computador, pois este permite a construção e exploração dos objetos da geometria elementar de forma interativa e muito próxima do que é feito, utilizando-se lápis e papel.

Em nossa seqüência didática, além do computador, utilizamos outros recursos didáticos[6], como: dobradura e decalque, papel transparente, papel quadriculado ou não. O uso destes tem sido sugerido no Ensino Fundamental, por terem um papel importante no processo de ensino e aprendizagem e podem ser de grande importância para os alunos na aquisição do conceito de simetria. “Contudo, eles precisam estar integrados a situações que levem ao exercício da análise e da reflexão, em última instância à base da atividade matemática” (Brasil, 1998, p.19).

---

[3] *Cabri-Géomètre II* é um software desenvolvido por J. M. Laborde e F. Bellemain, da Université Joseph Fourier-Grenoble-França. Maiores informações podem ser encontradas no site: http//www-cabri.imag.fr

[4] A geometria dinâmica “(...), baseia-se na idéia de movimentar elementos de figuras para ilustrar propriedades geométricas e demonstrar teoremas. (...) a vantagem dos programas de geometria dinâmica é a possibilidade de poder variar as posições dos objetos primitivos alterando-se, de um modo consistente, toda a construção”. Retirado do site (http://membros.aveio-digital.net/santosdossantos/PORTOMAT2003 -SP19/19_4.htm acesso em 10.04.05 às 13:01).

[5] As razões e justificativas para a escolha do computador e do *software* encontram-se no Capítulo III, p. 81-85.

[6] As razões e justificativas para a escolha dos recursos didáticos encontram-se no Capítulo III, p. 78-85.

Muitos pesquisadores trabalharam a simetria axial com materiais concretos e em diferentes contextos, entre eles podemos citar Denise Grenier (1985), que investigou as concepções dos alunos franceses sobre simetria axial e constatou dificuldades no trato com este conceito. Ela identificou variáveis que afetam as imagens conceituais dos alunos (concepções) e seu desempenho em tarefas sobre simetria axial; os alunos utilizam diferentes procedimentos, como, por exemplo, referência horizontal, referência vertical[7]. Segundo Grenier (1985) se admitirmos como hipótese que o aluno em situação de aprendizagem re-elabora suas concepções sobre conteúdos, então:

> Uma concepção pode funcionar para um tipo de problema e não para outro, ocasião em que o erro aparece. O erro é, então para nós, um indício das concepções do aluno que procuraremos explorar.
> Observando os alunos em situações de resolução de problemas, podemos deduzir seus procedimentos de resolução. Esses procedimentos nos permitem levantar hipóteses de suas concepções sobre noções Matemáticas em jogo e seus limites de validade quando estão errados (Grenier, 1985, p. 57).

Através das observações sobre as ações dos alunos em situações-problema, podemos levantar os procedimentos e identificar possíveis invariantes operatórios utilizados por eles nas atividades. “Muitos esquemas[8] são evocados sucessivamente e mesmo simultaneamente em uma situação nova para o sujeito” (Vergnaud, 1995, p. 176). Um esquema comporta invariantes operatórios, antecipações do objetivo a alcançar, regras de ação e inferências. Os invariantes operatórios são constituintes essenciais dos campos conceituais; as regras de ação do tipo “se ...então”, que permitem gerar a seqüência de ações do aluno e as inferências “que permitem calcular as regras e as antecipações a partir das informações e do sistema de invariantes operatórios de que dispõe o aluno” (Vergnaud, 1990, p.159).

Com base nessas considerações feitas é que foi delimitado o presente objeto para ser investigado: “Um estudo sobre procedimentos e a identificação de invariantes operatórios suscetíveis de alunos do quarto ciclo do Ensino Fundamental utilizarem quando colocados em contato com situações-problema

---

[7] Referência horizontal, Referência vertical, ver no capítulo II, página 59.

[8] “Esquema é a organização invariante da atividade do sujeito sobre uma classe de situações dadas” (Franchi, 2002 apud Machado, 2002, p. 166).

diversificadas, envolvendo simetria axial". Definimos também os objetivos da pesquisa:

- Identificar, analisar e diagnosticar procedimentos utilizados na resolução de problemas de simetria axial por alunos do quarto ciclo do Ensino Fundamental.

- Identificar os possíveis invariantes operatórios suscetíveis dos alunos se utilizarem nas situações–problema propostas sobre simetria axial.Observar, nas respostas apresentadas pelos alunos, o aparecimento dos procedimentos: referência horizontal, referência vertical e referência diagonal.

- Analisar procedimentos dos alunos, quando da utilização do material didático sugerido em determinadas atividades.

Situações-problema de simetria axial possibilitam o aparecimento de procedimentos "corretos" e "incorretos" e de possíveis invariantes operatórios "falsos" ou "verdadeiros" suscetíveis dos alunos utilizarem nessas situações. À medida que a complexidade e a variedade de problemas explorados aumentam, pode-se identificar classes de soluções apresentadas pelos alunos e que são mantidas pelas noções, "corretas" ou "incorretas", que eles possuem sobre simetria axial. Por esses motivos, escolhemos a simetria axial.

1.2 - O Ensino de Simetria no Brasil

O conceito de simetria axial, que estamos pesquisando, vem atrelado ao conceito de Transformações no Plano. As transformações do plano no plano que são bijetivas e preservam a distância entre os pontos são chamadas de "*Isometrias* do Plano". No esquema da Figura 1.1, temos representado as principais *isometrias.*

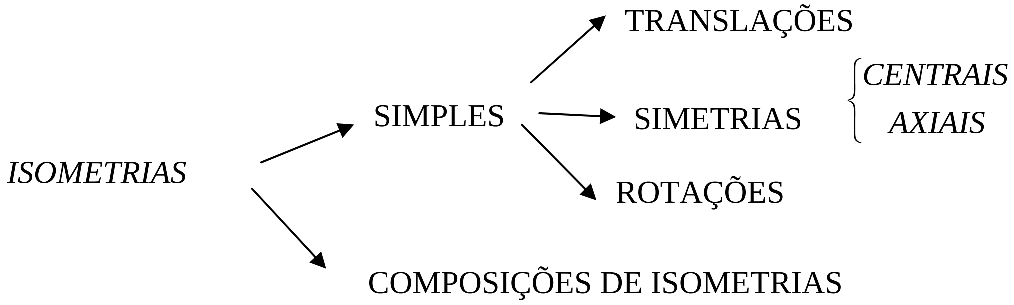


Figura 1.1. Principais isometrias.

As *isometrias*, como vemos na Figura 1.1, podem ser simples quando se tratar de: translação, simetria central, simetria axial e rotação ou podemos ter composições destas, como, por exemplo, translação com deslizamento, reflexão com deslizamento. A simetria central pode ser considerada um caso particular da simetria rotacional.

O conceito de simetria, atrelada às transformações geométricas, baseia-se principalmente nas idéias de Félix Klein (1849-1925). Em seu estudo “Introdução ao estudo da Geometria, baseado no conceito de transformações”, já levantava a importância de se trabalhar com os movimentos de reflexão, rotação e translação e dizia que este desempenha “um vasto papel coordenador e simplificador no estudo da Geometria” (Klein, 1849, apud Dantas, 1986, p. 27). O conceito de transformação geométrica surgiu, primeiramente, considerando os movimentos de corpos rígidos e sob o ponto de vista geométrico. Uma característica fundamental é que nesses movimentos (translação, rotação e reflexão) o corpo não muda nem de tamanho, nem de forma.

A partir do final da década de 1960, outros pesquisadores começam a se preocupar com o tema. Art Coxford e Zalman Usiskin (1971) escrevem: *Geometry - a Transformation Approach* (Geometria – uma abordagem por transformação), um texto dedicado à escola secundária, onde congruência e semelhança são trabalhadas em termos de transformações.

A partir de 1969, numerosos apelos têm sido feitos, em reuniões internacionais, por matemáticos de reconhecida competência tais como Carl Allendoerfer, Bruce Merseve, Michael F. Atiyah, Paul Rosenbloom e outros, para que a geometria seja abordada usando transformações e vetores. Ocorrem vários encontros como: o 1º Congresso Internacional de Educação Matemática em Lyon-

França, onde Rosenbloom, afirmava: “O problema natural que sugere a conexão com vetores é o da geometria com a álgebra” (Rosenbloom *apud* Catunda *et al.*,1988, p.13); e Allendoerfer, no seu artigo “O dilema em geometria”, colocou entre os objetivos, para o ensino da geometria, “compreensão de fatos básicos quanto às transformações, tais como reflexões, rotações e translações” para a escola primária e secundária (Allendoerfer *apud* Catunda *et al*, 1988, p.13); o 2º Congresso Internacional de Educação Matemática, realizado em 1973 na Exeter-Inglaterra, na apresentação de seu trabalho, Merseve, nos diz:

> Nós estamos interessados, numa abordagem intuitiva e informal da geometria e, por isso, pensamos em transformações e vetores.
> Nós gostaríamos que os nossos estudantes fossem capazes de explorar relações entre figuras geométricas usando continuidade e simetria.
> Nós gostaríamos, ainda, que os nossos estudantes fossem capazes de usar vetores e transformações que deixam invariantes os aspectos essenciais de um problema (Merseve *apud* Catunda *et al.*, 1988, p. 13-14).

O 3º Congresso Internacional de Educação Matemática, realizado em 1976, em Karlsruhe (Alemanha), Atiyah afirma: “O melhor aspecto da Matemática Moderna é a ênfase dada às idéias básicas, tais como simetria, continuidade e linearidade, que têm aplicações muito variadas. Isto deveria refletir no ensino, sempre que possível” (Atiyah *apud* Catunda *et al.,* 1988, p.14).

Para sabermos a respeito de como e quando foram introduzidas as transformações geométricas no ensino no Brasil, torna-se imprescindível olharmos para o Movimento da Matemática Moderna. Este ocorre nas décadas de 1960 e 1970, quando a ênfase maior é em relação aos aspectos algébricos, provocando quase a exclusão da geometria dos nossos programas escolares[9]. Os estudos para introduzir os novos programas da Matemática Moderna no ensino de Matemática, aqui no Brasil, surgem nos Congressos Brasileiros em Salvador (1955), Porto Alegre (1957), Rio de Janeiro (1959) e Belém (1962).

Nesses congressos, grandes nomes discutiam o tema: “Matemática Clássica ou Matemática Moderna”. Em São Paulo, o ensino da geometria, por meio das transformações geométricas, começou a ser proposto, tendo como apoio,

---

[9] “Existem fortes motivos para a inquietação dos professores com o abandono da geometria e sua insistência em melhorar seus conhecimentos com relação a ela. A ausência do ensino da geometria e a ênfase no da álgebra pode estar prejudicando a formação dos alunos por privá-los da possibilidade do desenvolvimento integral dos processos de pensamento necessários à resolução de problemas matemáticos” (Pavanelo, 1993, p. 22).

para sua implantação, publicações e orientações de matemáticos de vários países, como Georges Papy da Bélgica, Lucienne Félix da França e outros, e também os cursos desenvolvidos pelo Grupo de Estudos do Ensino da Matemática (GEEM)[10].

Georges Papy (1967), em seu livro "Mathématique Moderne 3", no prefácio do capítulo 3, sugere um estudo métrico do plano pela representação das simetrias ortogonais e da necessidade de postular a existência e a unicidade da bissetriz de todo par de semi-retas de mesma origem e, no próximo capítulo, as simetrias ortogonais engendram os grupos das *isometrias*.

Segundo Dantas (2002), começou na Bahia, em 1964, o movimento para introdução da Matemática Moderna, sendo Omar Catunda o principal mentor, trabalhando no CECIBA (Centro de Ensino das Ciências da Bahia), criado pelo MEC, Secretaria de Educação e a Universidade da Bahia, onde contava com uma equipe que cujos membros elaboraram o projeto intitulado: "Desenvolvimento de um currículo para o ensino atualizado da Matemática". Para torná-lo viável, começaram a produzir livros-texto onde dão "destaque ao estudo das transformações geométricas e por uma metodologia que despertasse no aluno o prazer pela descoberta" (Dantas, 2002, p.7), e perceberam que seria importante orientar também os professores para essas novas mudanças. Os textos produzidos foram aplicados no Colégio Aplicação da Universidade Federal da Bahia, UFBA, e em colégios da rede oficial de Salvador, com elogios e crítica lançados por professores.

Com a constatação da inadequação de alguns de seus princípios e das distorções ocorridas desde a sua implantação, livros didáticos surgiram, com esta nova roupagem, da noite para o dia, os professores não foram capacitados, alunos começaram a achá-la complicada, difícil e sem correlação com a realidade. O movimento da Matemática Moderna tem assim seu repúdio.

Em 1980, no *National Council of Teachers of Mathematics* – NCTM - dos Estados Unidos, elaboram um documento intitulado "Agenda para Ação", no qual

---

[10] "Em São Paulo, em 1961, foi criado o Grupo de Estudos do Ensino da Matemática, GEEM, logo após o término de um curso de aperfeiçoamento destinado a professores secundários de São Paulo, realizado, em convênio, pela Secretaria de Educação, Universidade de São Paulo, Universidade Mackenzie e National Science Foundation dos Estados Unidos, que enviou o ilustre lógico-matemático George Springer como orientador dos dois meses de curso. Esse grupo, colaborando com a Secretaria da Educação de São Paulo, coordenou e se responsabilizou pela introdução da matemática Moderna na escola secundária" (Geem apud Mabuchi, 2001, p. 66).

propõem sugestões para o ensino de Matemática, tendo como foco a Resolução de Problemas. Nas discussões curriculares, surgem preocupações em torno da aprendizagem da Matemática, principalmente em termos de aspectos sociais, antropológicos, lingüísticos. A etnomatemática tem lugar de destaque, "procura partir da realidade e chegar à ação pedagógica de maneira natural, mediante um enfoque cognitivo com forte fundamentação cultural" (Dantas, 2002, p. 21).

Essas novas tendências contagiaram equipes responsáveis pela elaboração de Diretrizes Curriculares de muitos países, iniciando uma nova fase de experimentação que contribuiu decisivamente para a elaboração dos PCN's - Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1997).

Atualmente, no Brasil, as transformações geométricas, em particular a simetria, fazem parte do currículo escolar através das sugestões contidas nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental, onde destaca:

> (...) a importância das Transformações Geométricas (*isometrias, homotetias*), de modo que permita o desenvolvimento de habilidades de percepção espacial e como recurso para introduzir de forma experimental a descoberta, por exemplo, das condições para que duas figuras sejam congruentes ou semelhantes (Brasil, 1997, p. 51).

Os PCN's destacam a importância que deve ser dada ao estudo das transformações geométricas como recurso para a construção e consolidação de conceitos e princípios. Nosso estudo centra-se no conceito de simetria axial, que pode ser estudada por meio de transformações geométricas e, particularmente, das isometrias. Esse conceito tem sido abordado nos livros didáticos, como os citados em nossa pesquisa, e, intuitivamente, o "conceito de simetria relaciona-se ao espelhamento, ou seja, pode-se dizer que uma figura é simétrica quando, colocando-se um espelho sobre 'metade' da figura, sua imagem coincide com a outra metade" (Vaz, 2004, p. 9).

A reflexão (simetria axial ou ortogonal) pode ser descrita como uma isometria em que cada ponto da figura original e o seu transformado é tal que o eixo de simetria é a mediatriz do segmento definido por esses dois pontos, ou seja, qualquer ponto do eixo é eqüidistante dos pontos correspondentes da figura original e da imagem transformada.

Observando a Figura 1.2, podemos extrair as propriedades da reflexão.

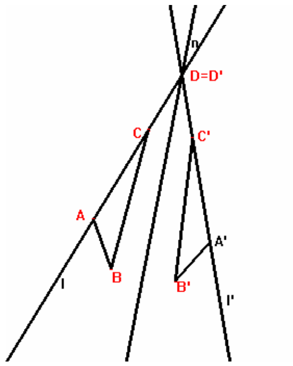


Figura 1.2 Exemplo de reflexão e suas propriedades.

> A imagem de um ponto (D) no eixo de simetria é o próprio ponto (D=D’). Os pontos do eixo podem ser considerados invariantes sob esta transformação.
>
> O eixo de reflexão bissecciona perpendicularmente o segmento que une um ponto qualquer a sua imagem (n é mediatriz de $\overline{AA'}$).
>
> A imagem de uma linha reta é outra linha reta, e o eixo de reflexão bissecciona o ângulo ADA’ no ponto em que a linha e sua imagem se encontram (n é bissetriz do ∠ADA’).
>
> Uma figura e sua imagem são congruentes ΔABC ≅ ΔA’B’C’.
>
> A reflexão inverte a orientação de pontos não-colineares (no ΔABC a orientação dos pontos ABC (nesta ordem) é horário, no ΔA’B’C’a respectiva imagem dos pontos A’B’C’ tem sentido anti-horário) (Healy, 2002, p. 28).

Sendo assim, as simetrias axiais não alteram as medidas das distâncias entre dois pontos quaisquer, nem alteram as amplitudes dos ângulos das figuras. No entanto, invertem o sentido dos ângulos orientados.

1.3 A Simetria nos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN’S - de Matemática

A seguir, analisamos a simetria axial nas propostas pedagógicas do Ministério da Educação e Cultura –MEC, ou seja, nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (Brasil –1997 e 1998) do Ensino Fundamental.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (PCNM) das séries iniciais do Ensino Fundamental, que analisamos, dão-nos indicativos da simetria no bloco “espaço e forma”, no que concerne às habilidades a desenvolver: “...

observar formas geométricas presentes em objetos naturais e criados pelo homem e de suas características: arredondadas ou não, simétricas ou não, etc." (Brasil, 1998, p. 56). Quando fala de conteúdos atitudinais no 2º ciclo, levanta a importância de se desenvolver a sensibilidade nos alunos para observar simetrias: na natureza, nas artes, nas edificações, bem como outras características das formas geométricas.

Na Revista Nova Escola (1998), que aborda os Parâmetros Curriculares Nacionais, é apresentada a proposta do Prof. Ernesto Rosa Neto, na qual, a partir de desenhos geométricos, usando régua, esquadro, escala da régua, compasso e transferidor, pode-se introduzir conceitos de simetria, bastando selecionar entre os triângulos produzidos pelas crianças "um que apresente um ângulo reto ou a simetria do triângulo isósceles (dois lados iguais). Quando a garotada copia o exemplo, segue regras de simetria e de congruência" (Nova Escola, 1998, p. 56). Ele nos sugere ainda o trabalho com materiais concretos como os sólidos geométricos e quebra-cabeça (tangram) no ensino de geometria, pois auxiliam na construção de conceitos geométricos. E enfatiza que explorar formas geométricas, com a utilização de material concreto facilita o entendimento dos conceitos de montagem, desmontagem (planificação do sólido), simetria, semelhança e congruência de medidas.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (Brasil, 1998), para os quatro últimos anos do Ensino Fundamental, colocam como objetivos do 3º e 4º ciclos, desenvolvimento do pensamento geométrico, através de situações de aprendizagem que levem o aluno a:

- resolver problemas que englobem figuras geométricas planas, fazendo uso de decomposição e composição, transformações (reflexão, translação e rotação), ampliação e redução de figuras;
- produzir e analisar transformações de figuras geométricas no plano, através dos movimentos de reflexão, rotação e translação, e identificação das medidas dos lados, ângulos que permanecem inalterados.

O documento em análise, quando se refere a orientações didáticas para o terceiro e quarto ciclos, sugere-nos que trabalhemos com os alunos:

- situações-problema que englobem reflexões, translações e rotações;
- *alguns softwares* no trabalho com reflexões, translações e rotações, pelo seu caráter dinâmico;
- atividades propondo comparações entre duas figuras, sendo uma delas a reflexão (ou translação ou rotação) da outra e buscando variantes ou invariantes;
- atividades que partam das transformações *isométricas* para a construção das noções de congruências.

Em “espaço e forma”, para o terceiro e quarto ciclos, segundo os PCN’s (1998):

> O ponto de partida é a análise das figuras geométricas por meio da observação, do manuseio e da construção. Atividades de transformações de figuras são fundamentais para adquirir percepção espacial. As transformações podem ser de vários modos, por reflexão, rotação, translação, ampliação e redução (Brasil, 1998, p. 55).

Na citação é valorizado o uso de diversos materiais didáticos no desenvolvimento da percepção espacial. Acreditamos que eles também podem ser úteis para a exploração do conceito de simetria e aplicá-los em diversas situações-problema, observando regularidades ou irregularidades e perceber que, pela composição de movimentos, é possível transformar uma figura em outra.

Em relação a conceitos e procedimentos para o 4º ciclo, temos:

> 1- classificação de figuras tridimensionais e bidimensionais, segundo critérios diversos, como: (...) eixos de simetria de um polígono; composição e decomposição de figuras planas;
>
> 2- transformação de uma figura no plano por meio de reflexões, translações e rotações e identificação de medidas que permanecem invariantes nessas transformações (medidas dos lados, dos ângulos, da superfície) (Brasil, 1998, p. 72-73).

No quarto ciclo do Ensino Fundamental, vemos o conceito de simetria inserido nas transformações de figuras. Os conteúdos do bloco “espaço e forma” devem iniciar com atividades que possibilitem ao aluno perceber que, através da composição de alguns movimentos, é possível transformar uma figura em outra; a partir da construção de figuras, aplicando os conceitos de reflexão, translação e rotação de uma figura, os alunos vão percebendo que as medidas dos lados e dos ângulos, da figura dada e da figura transformada, são conservadas. Essas atividades visam que o aluno desenvolva habilidades de percepção espacial e também a construção dos conceitos de congruências de figuras planas (*isometrias*) e, através de atividades, envolvendo ampliação e redução de figuras, permitam a aquisição do conceito de semelhança.

Em síntese, o conceito de simetria presente nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (PCN, 1988) de 1ª a 4ª série, é atrelado à observação, percepção e conceituação de figuras simétricas, quer seja na natureza ou em objetos, na arquitetura, entre outros. É proposto que, inicialmente, o conceito seja trabalhado de forma experimental, ampliando-o gradativamente nas séries subseqüentes, e que sejam utilizados diferentes materiais didáticos e propostas situações-problema diversificadas.

De 5ª à 8ª série, as simetrias são vistas basicamente como transformações de figuras no plano por meio de movimentos de reflexão, rotação e translação, focando conceitos de eixos de simetria; congruências e semelhanças; ampliação e redução de figuras geométricas. Os alunos devem perceber algumas propriedades de duas figuras simétricas, como, por exemplo, a de que os ângulos e as medidas dos lados de uma figura e da figura simétrica a ele não se alteram. O conceito deve ser trabalhado inicialmente de forma experimental, ampliando as dificuldades aos poucos, sendo retomada e aprofundada nos ciclos seguintes.

A análise dos Parâmetros Curriculares Nacionais PCN's de Matemática nos auxiliou a determinar como e quanto do conceito de simetria, os nossos alunos do IV Ciclo (7ª série) integrantes da pesquisa, poderiam trazer na sua bagagem de conhecimentos anteriores e veio a contribuir na elaboração das situações-problema que deveriam estar adequadas ao nível etário dos alunos, e também na escolha dos materiais concretos.

Na Seção 1.4, analisamos como este conceito está sendo apresentado em alguns livros didáticos de Matemática do Ensino Fundamental.

1.4 A Simetria em Alguns Livros Didáticos de Matemática

Essa análise se justifica, pois os livros didáticos norteiam o trabalho do professor e muitos destes se apóiam quase que exclusivamente neles. Esse fato é observado nos PCN's (1998):

> Não tendo oportunidade e condições para aprimorar sua formação e não dispondo de outros recursos para desenvolver as práticas da sala de aula, os professores apoiam-se quase exclusivamente nos livros didáticos, que, muitas vezes, são de qualidade insatisfatória (Brasil, 1998, p. 21-22).

O Guia de Livros Didáticos de 1ª a 4ª séries (1998), também menciona:

> O livro didático tem sido um instrumento valioso e fundamental para o professor – nele estão organizados e imediatamente disponíveis os conteúdos básicos dos programas de ensino; estão, também, atitudes e valores que se pretende preservar, procedimentos já testados, orientações para o estudo, aberturas para o mundo. Com a ajuda, professores e alunos desenvolvem a aprendizagem.
>
> Em muitos casos, porém, a ausência de materiais que orientem os professores sobre o quê e como ensinar, aliada à freqüente dificuldade de acesso do aluno a outras fontes de estudo e pesquisa, faz do livro didático o principal, quando não o único referencial para o trabalho em sala de aula. Num contexto como esse, torna-se fonte de informações e de capacitação do próprio professor. Por isso mesmo, selecioná-lo é, muitas vezes, escolher não só uma ferramenta de trabalho, mas também um companheiro de caminhada (Guia de Livros Didáticos, 1998, p. 9).

Pode-se observar a grande responsabilidade depositada no livro didático, que deve conter sempre inovações didáticas, novas metodologias e introdução de novos conteúdos no programa curricular do Ensino Fundamental. Assim, a análise torna-se importante, uma vez que do livro didático se origina um tipo de saber que formará uma cultura particular nos alunos de uma mesma época.

Embora a escolha de livros didáticos seja difícil, dado o grande número de títulos existentes no mercado editorial, adotamos os seguintes critérios para seleção dos livros analisados nesta pesquisa. Primeiramente, todos os livros selecionados deveriam abordar o tema simetria, propor vários materiais e tratá-lo em diversos contextos. Dentre estes, selecionamos as coleções C_2 e C_4 que fazem parte da relação dos livros analisados pelo Programa Nacional do Livro Didático - PNLD, desenvolvido pelo Ministério da Educação e Cultura (MEC) para o ano de 1998. Também selecionamos livros adotados pela escola onde realizamos nossa pesquisa, desta forma as coleções C_1 e C_3 foram escolhidas.

Para o primeiro e segundo ciclo (1ª a 4ª série), optamos por analisar as seguintes coleções: (C_1) Descobrindo a Vida, de Adilson Longen (2001) e (C_2) Coleção Novo Caminho, de Imenes, Jakubovic e Lellis (1998). Para o terceiro e quarto Ciclo (5ª à 8ª série), optamos por analisar as seguintes coleções: (C_3) Construindo Conhecimentos em Matemática (2000), de Bianchini e Miani e (C_4) Matemática na Medida Certa, de Centurión, Jabuco e Lellis (2003).

Para as coleções C_1 e C_2, analisamos os quatro volumes que as compõem, respectivamente, correspondentes às séries iniciais (1ª à 4ª série) do Ensino Fundamental. Da mesma forma, para as coleções C_3 e C_4, isto é, os volumes de I a IV correspondentes, respectivamente, às séries finais (5ª à 8ª série).

1.4.1 Análise da Simetria nos Livros Didáticos de Matemática do 1º e 2º Ciclo (1ª a 4ª série).

1.4.1.1 (C_1) Coleção Descobrindo a Vida de Adilson Longen (2001)

O conceito de simetria só aparece nos volumes II e III desta coleção. No volume II (2ªsérie), desta coleção, o conceito é introduzido através de gravuras de algumas figuras, como a borboleta, com o seguinte comentário: "A beleza da borboleta está na simetria de suas asas. O desenho que ela tem de um lado é igualzinho ao do outro" (Longen, 2001, p. 56). O círculo é utilizado para introduzir eixo de simetria: "O círculo pode ser dividido em duas partes iguais pelo eixo de simetria" (ibid, p.56). Na Figura 1.3 reproduzimos a ilustração do livro. Neste sugere-se que seja utilizada dobradura para encontrar este eixo.

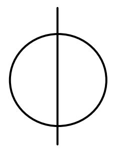


Figura 1.3. Reprodução da ilustração do livro Descobrindo a Vida.

A maneira como o conceito de simetria é introduzido, através de observações de figuras com simetrias ou não, presentes na natureza, em objetos, entre outros, procurando perceber a simetria como características de algumas figuras, está condizente com as propostas contidas nos PCN's de Matemática para este ciclo, quando diz: "uma das possibilidades mais fascinantes do ensino de geometria consiste em levar o aluno a perceber e valorizar sua presença em elementos da natureza e em criações do homem (...)" (Brasil, 1988, p.82-83).

Entretanto, a utilização do círculo para definir eixo de simetria não é adequada, pois o círculo possui mais de um eixo de simetria. Este tipo de exemplo pode levar o aluno a generalizar que uma figura tem um único eixo de simetria ou que, particularmente, o círculo tem um único eixo de simetria, ou que basta traçar um único eixo de simetria.

Ainda neste volume, são propostas atividades para observar simetria com o uso de espelhos; atividades envolvendo dois eixos de simetria, com a figura desenhada em papel quadriculado; atividades para descobrir qual figura tem mais de um eixo de simetria. As figuras envolvidas nestas atividades são: polígonos, letras e figuras quaisquer.

São importantes as atividades relatadas acima, mas cabe ressaltar aquelas nas quais procuram mostrar (ao aluno) que, além de figuras, as letras também podem apresentar simetria.

No volume III (3^a série), o conceito de simetria e de eixo de simetria é introduzido através da observação de uma figura, reproduzida na Figura 1.4, que apresenta um eixo de simetria.

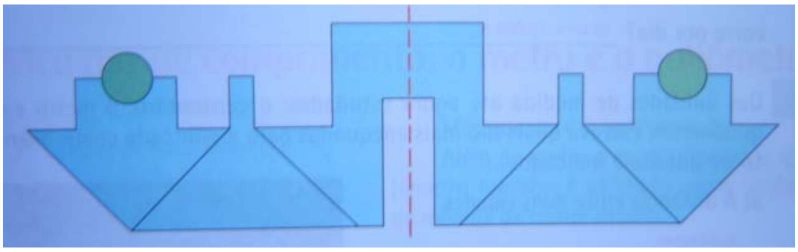


Figura 1.4. Figura do livro didático de Matemática (Longen, 2001, p.76).

Em seguida, são apresentados os seguintes comentários: "a linha tracejada está dividindo a figura em duas partes iguais: o que aparece em um lado também aparece no outro lado" e "a linha tracejada é um eixo de simetria. Quando uma figura tem um eixo de simetria, dizemos que é simétrica". Estas frases divulgadas neste volume podem se tornar invariantes operatórios para os alunos.

Atividades são propostas com o objetivo de observar e traçar eixos de simetria e completar a parte que falta de figuras inseridas no papel quadriculado. Através de recortes de jornais, é proposto que sejam encontradas figuras com dois ou mais de dois eixos de simetria, que sejam coladas no caderno e seus eixos de simetria sejam traçados com o auxílio da régua.

Estas sugestões de obter figuras que apresentem simetria, em recortes de jornais ou de revistas, permitem ao aluno identificar as que são simétricas e, dentre estas, as que possuem um ou mais de um eixo de simetria e, ainda, traçá-los. Ao professor, através de discussões com os alunos (que podem ser coletivas), permitirá verificar possíveis "falhas" nas figuras recortadas por estes, levá-los a perceber onde estão errando, para que o professor possa selecionar novas atividades, para sanar essas dificuldades.

Neste volume, encontramos três figuras: um triângulo isósceles, um trapézio e a letra E, não posicionadas convenientemente em relação à borda do papel, o que é muito interessante. Os alunos devem reconhecer um triângulo isósceles ou um trapézio independentemente da posição que ocupa no plano.

Nesta coleção analisada, a simetria aparece somente nos volumes II e III que a compõe, de forma isolada e em um único capítulo do livro.

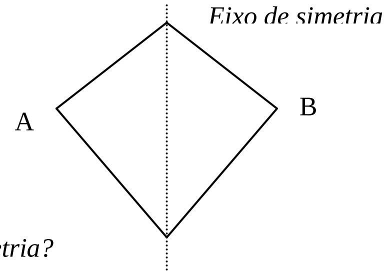
1.4.1.2 (C_2) Coleção Novo Caminho - Matemática de Imenes, Jakubovic e Lellis (1998)

A simetria é tratada apenas nos volumes II e III, como em C_1. No volume II, o conceito de simetria é introduzido através de duas figuras: uma borboleta e um broche e é sugerido que "olhe bem um dos lados, o outro é como num espelho" (Imenes *et. al*, 1998, p. 86). Nas figuras tem-se o eixo de simetria traçado, mas em nenhum momento ele é referenciado ou definido.

A simetria reaparece em vários momentos neste volume e são sugeridas atividades diversas como: utilizar o borrão simétrico; observar simetrias; traçar eixos de simetria; completar a parte que falta; continuar o desenho, tornando-o simétrico. A questão de que a cor tem que ser preservada é ressaltada, isto é, os autores consideram que para uma figura ser simétrica à outra, além de preservarem a forma e o tamanho, posição oposta, a cor na qual a figura foi pintada também deve ser considerada; caso contrário, as figuras serão consideradas aproximadamente simétricas. Esta questão de considerar ou não a cor da figura a ser analisada, para concluirmos se é ou não uma figura simétrica, não é relevante, mas vai depender se no enunciado do exercício ou da seqüência de exercícios, isto estava explícito.

No volume III, são propostas atividades envolvendo os logotipos de fábricas de carros e bandeiras, e é sugerida a construção de um jogo através de dobraduras simétricas. Os conceitos de simetria e de eixo de simetria estão representados como reproduzido a seguir.

SIMETRIA[11]



Observe esta figura.

Ela tem simetria.

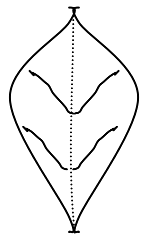
Por que dizemos que essa figura tem simetria?

Porque, se você dobrar a folha de papel na linha tracejada, que é o eixo de simetria, você vai fazer um lado da figura cair justinho sobre o outro. Por exemplo, o ponto A cai em cima do ponto B.

Diversos objetos construídos pelo homem têm simetria. Desde casas até aviões. A simetria também está presente na natureza:

A folha é aproximadamente simétrica.

A linha tracejada é seu eixo de simetria.



O autor utiliza uma única figura; no caso, um quadrilátero não regular, para a definição de simetria e de eixo de simetria. Esta figura é apropriada e a idéia passada por esta definição é a de superposição da figura. A dobradura foi escolhida pela facilidade de ser utilizada experimentalmente em sala de aula.

No texto reproduzido do livro da terceira série citado anteriormente, as frases “se a figura for dobrada no eixo de simetria, um lado superpõe-se ao outro” e “se você dobrar a folha de papel na linha tracejada, que é o eixo de simetria, você vai fazer um lado da figura cair justinho sobre o outro” norteiam todo o trabalho dos alunos em situações-problema relativas à simetria axial e podem tornar-se possíveis invariantes operatórios para os mesmos, desde que os alunos apropriem-se destas propriedades e passem a utilizá-las em situações-problema.

Um fato novo em relação à coleção anterior é que o conteúdo reaparece várias vezes: procura relacionar a simetria com construções e elementos da natureza; aborda simetria das letras, dos polígonos, de logotipos e de bandeiras. Os materiais didáticos sugeridos são papel quadriculado, tinta, espelho, dobradura e recortes.

---

[11] Texto do Livro de 3ª série, Coleção: Novo Caminho Imenes, JaKubovic e Lellis, 1998, p.229.

1.4.2 Análise da Simetria nos Livros Didáticos de Matemática do 3º e 4º Ciclo (5ª a 8ª série)

1.4.2.1 (C_3) Coleção Construindo Conhecimentos em Matemática de Bianchini e Miani (2000)

Nesta coleção, a simetria é tratada apenas nos volumes I e II. No volume I, inicia-se com uma atividade de borrão simétrico e a simetria é definida através da observação deste borrão. Assim temos a seguinte frase; "o borrão que apareceu no lado direito da folha tem a mesma forma e o mesmo tamanho do primeiro, porém, um e outro estão em posições opostas. Dizemos, nesse caso, que os dois borrões são simétricos em relação à dobra de papel" (Bianchini & Miani, 2000, p. 201). Na seqüência, são apresentadas diversas figuras procurando mostrar que na natureza, na arquitetura e em diversos objetos encontramos simetria, o que está de acordo com o sugerido nos PCN's.

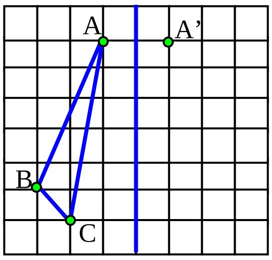
Os autores comentam que nem tudo é simétrico, que muitas figuras não têm eixo de simetria, e apresentam figuras (uma escultura, uma chave e um boneco) nas quais os alunos devem descobrir porque as figuras não são simétricas. Eles apresentam figuras com mais de um eixo de simetria. Com muita freqüência, sugerem atividades onde os alunos devem observar, desenhar e completar figuras com simetrias. Também são trabalhados letras do alfabeto, números, ambigramas[12] e polígonos. A simetria dos polígonos aparece em situações de observação e traçado. A assimetria de alguns polígonos também é abordada.

Atividades envolvendo o espelho e papel quadriculado são sugeridos. São apresentadas atividades de observação e marcação de pontos simétricos utilizando papel quadriculado e, através de um exemplo, explicam como os alunos devem proceder para construir o simétrico de uma figura em relação a uma reta, utilizando este recurso. O texto do livro didático de Matemática, volume I - 5ª série- (Bianchini & Miani, 2000, p. 206) está reproduzido a seguir.

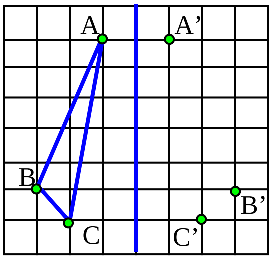
---

[12] "Eles são uma palavra ou palavras sutilmente distorcidas que podem ser lidas de mais de uma maneira, ou de mais de um ponto de vista. Parecidos com palíndromos e anagramas, os ambigramas são, na mais simples das definições, uma brincadeira com as palavras". http://ambigramas.vilabol.uol.com.br/, 26/05/2005, 13:30).

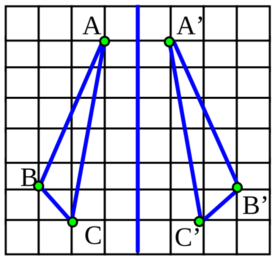
Marcamos um ponto A' em posição oposta ao vértice A do triângulo ABC. Observe que os pontos A e A' estão à mesma distância do eixo de simetria.



Nesse caso dizemos que os pontos A e A' são simétricos. Fazemos o mesmo com os pontos B' e C'. Os pontos B e B', assim, como os pontos C e C', também são simétricos.



Ligando os pontos A', B' e C', formamos um novo triângulo, que é simétrico ao triângulo inicial.



O exemplo, extraído do livro didático, é uma atividade extremamente importante e necessária, quando trabalhamos com o conceito de simetria axial nas séries finais do Ensino Fundamental e está condizente com o nível etário dos alunos de 5ª série. Os autores mostram que, se os pontos A e A' são simétricos, estão à mesma distância do eixo de simetria e em posições opostas. O mesmo vale para os pontos B e B', e C e C'.

A construção do simétrico do triângulo ABC em relação a uma reta dada utilizando papel quadriculado foi bem conduzida pelos autores. Exemplos como esses devem ser trabalhados no Ensino Fundamental. Os autores poderiam ter sugerido que os alunos analisassem o resultado final da atividade, e extraíssem algumas propriedades de uma figura simétrica à outra, como, por exemplo, a de que os ângulos e as medidas dos lados do triângulo ABC e do novo triângulo A'B'C' a ele não se alteram. O importante é que os alunos percebam as propriedades que estão presentes numa figura simétrica à outra em relação a um eixo de simetria. Se o grupo de alunos selecionados, em nossa pesquisa, tivesse anteriormente trabalhado a determinação do simétrico de pontos (segmentos ou figuras) conforme descrito, acreditamos que muitos "erros", como, referência horizontal ou reflexão transladada, talvez não surgissem com tanta freqüência em suas respostas.

No caso do espelho, ainda neste volume, é utilizado um exemplo de simetria axial no cotidiano, referindo-se à palavra BOMBEIROS escrita nos carros, de trás para frente, e é explicado que escrita dessa forma, a palavra pode ser lida corretamente, quando refletida no espelho retrovisor dos carros que estiverem à frente da viatura. Outras atividades com este recurso são sugeridas e numa delas comentam que algumas letras vistas no espelho aparecem inalteradas, enquanto outras não, e mostram que as que tiverem um eixo de simetria horizontal são as que aparecem inalteradas quando vistas num espelho colocado verticalmente, ao lado da letra, sobre uma mesa; depois disso, concluem que no alfabeto existem nove letras com essa propriedade e sugerem que os alunos digam quais são.

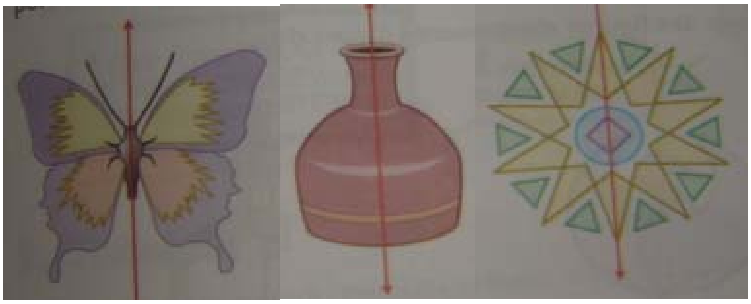
Como vimos, as atividades reservadas para a 5ª série são ricas e envolvem diferentes figuras e materiais. Os autores partem do estudo do resultado de uma atividade "borrão simétrico", e mostram aonde podemos observar simetria (na natureza, na arquitetura,...,) e passam a observar e identificar simetria nas letras, números, polígonos, mostrando uma utilidade para o estudo de simetria. O exemplo da palavra BOMBEIROS, escrita de forma invertida nos carros de bombeiros, ilustra o aparecimento de simetria em situações do dia-a-dia, servindo também de motivação para o estudo de simetria. Na segunda atividade, utilizando o espelho, os autores deveriam ter apresentado várias letras no espelho; algumas com simetria horizontal; outras, não, para que os próprios alunos pudessem chegar a uma conclusão.

No volume II, o capítulo Simetria e Translação apresenta a simetria axial, central e translações como um acréscimo ao conteúdo da série anterior. Neste volume, a simetria axial é abordada através de atividades: de observação de figuras, para verificar a imagem refletida no espelho; de determinação do simétrico de um ponto dado, abordando as letras do alfabeto. A seguir, descrevemos como este apresenta o conceito de simetria (p.165).

Simetria axial[13]

Como você pode observar, todas as figuras abaixo possuem eixo de simetria, ou seja, podemos desenhar nelas uma reta que divide a figura em duas partes, cada uma delas com a mesma forma e o mesmo tamanho, porém em posições opostas.

[13] Reprodução do Livro de 2ª série integrante da Coleção Construindo Conhecimentos em Matemática de Bianchini e Miani, 2000, p. 165.



Dizemos então que essas duas partes são simétricas em relação à reta desenhada.

Este tipo de simetria é chamado simetria axial e a reta que divide a figura em duas partes simétricas é o eixo de simetria.

Freqüentemente encontramos esse tipo de simetria em nosso dia-a-dia.

Um exemplo é a imagem de uma pessoa refletida em um espelho.

O espelho, nesse caso, funciona como um eixo de simetria, então podemos representar a situação do seguinte modo:

A menina e sua imagem são figuras simétricas.

No volume II, os autores, apresentam três figuras com um eixo de simetria traçado em cada uma delas. Eles misturam figuras planas com figuras espaciais. A borboleta e a terceira figura são desenhos planos, entretanto, o vaso, como podemos observar pelo bocal, é uma representação plana de uma figura espacial e, desta forma, os autores não poderiam falar em eixo de simetria, mas sim em plano de simetria do vaso. Através da observação das retas traçadas nestas figuras, é definido o eixo de simetria: “o eixo de simetria divide a figura em duas partes, cada uma com a mesma forma e o mesmo tamanho, porém, em posições opostas” (Bianchini & Miani, 2000, p.165). Percebemos três fatos nesta definição: a mesma forma, o mesmo tamanho, porém, em posições opostas. Observamos que muitos livros didáticos não deixam claro estas características de figura simétrica à outra. Ao não apresentarem de forma clara essas características aos alunos, talvez possam induzir em determinadas situações problema, aos procedimentos referência horizontal, vertical, diagonal e correlatos. Isto não significa que estes não ocorreriam, caso tivéssemos apresentado este conceito como neste livro, mas talvez o número de respostas "incorretas" fosse menor. Pesquisas (Mabuchi, 2000) têm indicado que, mesmo que o assunto seja trabalhado em várias retomadas e com extensão deste, esses erros ainda aparecem.

Como exemplo de simetria no cotidiano é apresentado o espelho, representado pela situação de se olhar nesse e ver nele sua imagem produzida. O exemplo escolhido pelo autor, da menina olhando-se no espelho (primeira figura), é infeliz, pois não se trata de simetria axial. Na segunda figura, o espelho é representado como uma linha, e na verdade deveríamos ter um plano de simetria. Isso só serve para confundir o aluno e para induzi-lo ao erro.

Ainda no livro da 6ª série, através do fato de que podemos obter imagens por meio de simetrias, de translações ou de rotações, procuram introduzir a congruência de figuras: se duas figuras possuem lados e ângulos correspondentes congruentes, então podemos concluir que são figuras congruentes, isto é, a figura inicial e sua imagem são congruentes.

Nesta coleção, o tema Simetria aparece num único capítulo com atividades variadas, com muitas ilustrações de figuras simétricas e assimétricas. Diversos materiais são sugeridos e envolvem atividades com o eixo de simetria proposto em várias posições.

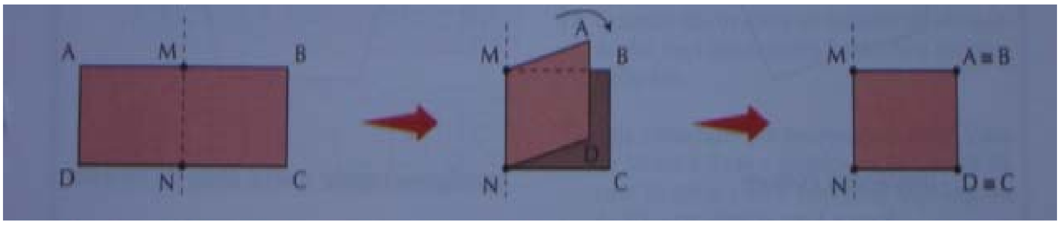
1.4.2.2 (C_4) Coleção Matemática na Medida Certa de Centurión, Jabuco e Lellis (2003)

Nesta coleção, o tema não é abordado nos volumes I e IV. No volume II, no capítulo Simetria Axial, são definidos os conceitos de eixo de simetria e de figura simétrica à outra, através de dobradura, partindo de uma folha retangular. São abordados conceitos de ponto médio de segmentos, sobreposição de partes e de igualdade das medidas de lados coincidentes. A partir da dobradura feita, mostra-se a existência de mais de um eixo de simetria para o retângulo e que a diagonal não é, necessariamente, eixo de simetria.

A seguir, reproduzimos como o livro aborda este conceito (p.225).

Simetria axial[14]*:*

Desenhando o retângulo ABCD no papel. Marcamos os pontos M e N e depois dobramos o papel na reta $\overleftrightarrow{MN}$*. Veja o que acontece:*

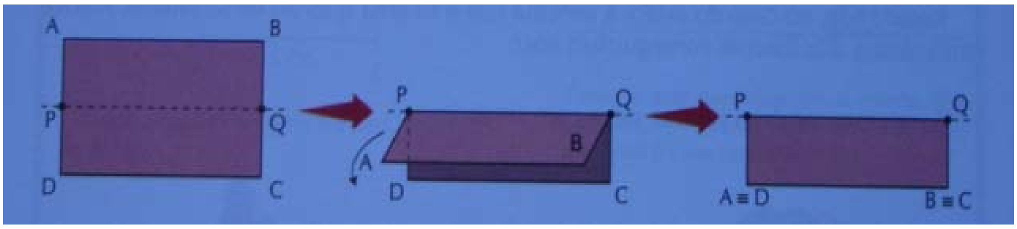


O lado $\overline{AD}$ *do retângulo cai justinho sobre o lado* $\overline{BC}$*. Além disso,* $\overline{AM}$ *e* $\overline{MB}$ *e também ficam superpostos, assim como* $\overline{DN}$ *e* $\overline{NC}$*. É claro que marcamos M no meio do lado* $\overline{AB}$*, isto é, dividindo o lado em dois segmentos de mesma medida. O mesmo foi feito com o ponto N.*

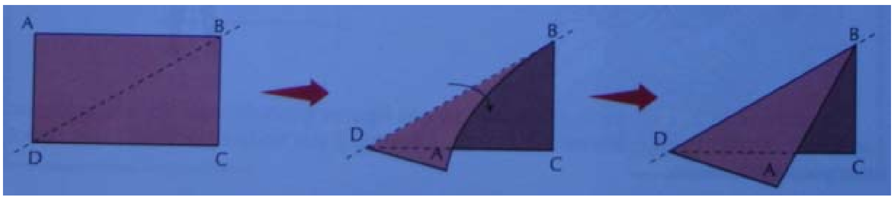
Na situação mostrada, dizemos que:

- *a reta* $\overleftrightarrow{MN}$ *é eixo de simetria do retângulo;*
- *os vértices A e B são simétricos, assim como os vértices D e C;*
- *o retângulo tem simetria axial.*

O retângulo ABCD tem outro eixo de simetria, determinado pelos pontos médios dos lados $\overline{AD}$ *e* $\overline{BC}$*.*



Se uma reta é eixo de simetria de uma figura, dobrando-se o desenho no eixo, as duas partes ficam perfeitamente superpostas. Por isso, pode-se notar que a reta $\overleftrightarrow{BD}$ *não é eixo de simetria do retângulo, apesar de dividi-lo em duas partes de mesmo tamanho:*



Como visto, a condução da atividade de dobradura é interessante, uma vez que além de explorar o próprio conceito, de que em uma figura pode existir mais

---

14 Reprodução do Livro de 2ª série integrante da Coleção: Matemática na Medida Certa de Centurión, Jabuco e Lellis, 2003, p.225.

de um eixo de simetria, também procura mostrar que nem sempre uma dobra efetivada é um eixo de simetria. Como na coleção anterior, percebemos uma preocupação em relação à preservação da forma e do tamanho da imagem da figura, mas não houve uma preocupação em mostrar que no retângulo BAPQ a orientação dos pontos BAP é horária e no retângulo CDPQ a orientação dos pontos CDP é anti-horária. Talvez o problema seja com a figura trabalhada (retângulo) que não "facilita" mostrar aos alunos a inversão da posição da outra "metade" da figura. Uma figura que proporcionaria isto poderia ser, por exemplo, a figura de um coração, entretanto, o ideal é trabalhar com figuras variadas.

Através da comparação de um pentágono comum e um pentágono regular, sugere-se que os alunos observem que as figuras que possuem eixos de simetria nos passam a impressão de serem mais organizadas, mais regulares.

A simetria é mostrada no que é produzido pelo homem e pela natureza, nas figuras geométricas e nos números. São propostas atividades para encontrar eixos de simetria e para construir figuras com régua, esquadro e compasso e depois encontrar os eixos de simetria através de dobradura.

O livro propõe que sejam observadas as relações entre ângulo e simetria axial: ângulos centrais permitem construir polígonos regulares; polígonos regulares são os que mais apresentam eixos de simetria.

No volume III, uma recordação do assunto trabalhado na série anterior é proposta, fazendo a mesma atividade descrita no volume II, mas partindo a dobradura de uma folha quadrada, antes era retangular; com uma folha retangular é mostrado novamente que a diagonal do retângulo não é seu eixo de simetria. Em seguida, é traçado o eixo de simetria de um ângulo, e é definido da seguinte forma "o eixo de simetria de um ângulo é a reta que contém sua bissetriz" (Centurión et al., 2003**,** p.161). No traçado do eixo de simetria de um segmento, define-se que o eixo de simetria de um segmento $\overline{AB}$ é uma reta perpendicular a $\overline{AB}$ e que contém o ponto médio de $\overline{AB}$. Essa reta é chamada de mediatriz do segmento.

Como visto, os autores relacionam eixo de simetria com bissetriz e mediatriz e no livro são sugeridas atividades para traçado do eixo de simetria de alguns ângulos e da mediatriz de um segmento.

Os autores procuram dar uma utilidade para o estudo de simetria, utilizando-o em outros capítulos do livro, como no capítulo: "Propriedades dos triângulos isósceles, eqüiláteros e as primeiras construções geométricas". No primeiro, é muito mais fácil observar as propriedades de triângulos isósceles e eqüiláteros, pensando em simetria em vez de congruência de triângulos. No segundo, é muito mais fácil justificar as construções geométricas, mesmo sem muito rigor, usando a idéia de simetria.

São propostas atividades no papel quadriculado, nas quais se solicitam as reflexões de: segmentos que se encontram encostados no eixo ou cortando o eixo; figuras geométricas posicionadas próximas do eixo, cortando o eixo ou encostadas no eixo. Os eixos podem ser horizontal, vertical ou inclinado. Algumas figuras não estão posicionadas convenientemente em relação à borda do papel.

1.4.3 Síntese da Simetria nos Livros Didáticos de Matemática

Nas coleções C_1 e C_2 (1º e 2º ciclos) analisadas, somente a coleção C_2**,** a partir da segunda série, aborda a simetria em vários momentos, dando um aspecto inovador no que se refere ao fato de que um mesmo tema é revisto e retomado com novos enfoques em diferentes níveis e momentos. A primeira coleção apresenta a simetria descontextualizada de outros conteúdos. A segunda procura relacioná-la com fatos do dia-a-dia e dá importância para a simetria das letras e polígonos e sugere atividades com diferentes materiais didáticos. Nenhuma das coleções aborda a questão da assimetria, fato importante, pois nem tudo é simétrico.

Nessas duas coleções, as definições para simetria e eixo de simetria são muito parecidas e destacamos algumas propriedades como, por exemplo:

- "A beleza da borboleta está na simetria de suas asas. O desenho que ela tem de um lado é igualzinho ao do outro" (C_1-Volume II);
- **"**a linha tracejada está dividindo a figura em duas partes iguais: o que aparece em um lado também aparece no outro lado" (C_1-Volume II);
- "a linha tracejada é um eixo de simetria. Quando uma figura tem um eixo de simetria, dizemos que é simétrica" (C_1-Volume III).

As coleções C_3 e C_4 (3º e 4º ciclos) abordam a questão da assimetria de algumas figuras. Diversos materiais são sugeridos e a segunda coleção propõe atividades com régua, esquadro e compasso, que são fundamentais no estudo de simetria, pois são materiais que garantem precisão nas respostas das atividades relacionadas com a simetria. Ambas trabalham os movimentos de reflexão, translação e rotação. Estes livros procuram mostrar a utilidade e a importância ao estudo da simetria. Nas atividades, o eixo de simetria é sugerido nas posições possíveis: horizontal, vertical ou inclinado.

Algumas propriedades destacadas em cada coleção são:

- "O borrão que apareceu no lado direito da folha tem a mesma forma e o mesmo tamanho do primeiro, porém um e outro estão em posições opostas. Dizemos, nesse caso, que os dois borrões são simétricos em relação à dobra de papel" (C_3- Volume I);
- "O eixo de simetria divide a figura em duas partes, cada uma com a mesma forma e o mesmo tamanho, porém em posições opostas" (C_3- Volume II);
- "O lado $\overline{AD}$ do retângulo cai justinho sobre o lado $\overline{BC}$. Além disso, $\overline{AM}$ e $\overline{MB}$ e também ficam superpostos, assim como $\overline{DN}$ e $\overline{NC}$. É claro que marcamos M no meio do lado $\overline{AB}$, isto é, dividindo o lado em dois segmentos de mesma medida. O mesmo foi feito com o ponto N. Na situação mostrada, dizemos que: a reta $\overleftrightarrow{MN}$ é eixo de simetria do retângulo; os vértices A e B são simétricos, assim como os vértices D e C;o retângulo tem simetria axial" (C_4-Volume. II);
- "O eixo de simetria de um ângulo é a reta que contém sua bissetriz" (C_4-Volume II).

Algumas propriedades que aparecem nessas coleções nestes ciclos procuram dar uma idéia do conceito de simetria e de eixo de simetria. A primeira mostra que numa reflexão, a figura tem a mesma forma, o mesmo tamanho, mas posições opostas. A segunda, numa atividade de dobradura, mostra que nem toda dobra efetivada numa figura é eixo de simetria. Estas duas idéias devem ser passadas aos alunos conjuntamente, ou seja, é necessário mostrar que nem tudo é simétrico e que nem sempre uma dobra feita é eixo de simetria.

Em todas as coleções analisadas, as propriedades evidenciadas anteriormente, podem vir a se tornar invariantes operatórios para os alunos e as figuras para a introdução de eixo de simetria e simetria não eram figuras afastadas do eixo de simetria e nem cortavam o eixo de simetria. Estes casos são apresentados aos alunos nos exercícios propostos. Normalmente, fica para o aluno abstrair como resolver estes casos. No caso da figura afastada do eixo de simetria, construir o seu simétrico talvez não seja tão complicado, mas no caso da figura interceptando o eixo de simetria esta construção não é tão óbvia. Acreditamos que poderiam ser tratadas no início do trabalho, ou pelo mesmo apresentar algumas figuras que se enquadram nestes casos.

O estudo das coleções C_1 e C_3 adotadas pela escola onde realizaremos nossa pesquisa são importantes para nossa análise *a priori* para a identificação de conhecimentos previstos.

1.5 A Simetria em algumas Pesquisas

Nos últimos anos, muitas pesquisas têm sido desenvolvidas em diferentes países e sistemas educacionais, com a finalidade de identificar, analisar e diagnosticar concepções, dificuldades e procedimentos mobilizados pelos alunos em situações-problema sobre simetria axial. Faremos uma breve abordagem de algumas pesquisas, procurando destacar o objetivo, as variáveis didáticas e os materiais concretos que foram propostos, bem como seus principais resultados.

1.5.1 Pesquisa Desenvolvida por Hart (1981)

Hart em 1981 desenvolveu uma pesquisa como parte do Projeto Inglês: Concepts in Secondary Mathematics and Science, CSMS, que tinha como foco principal investigar a compreensão de alunos (13-15 anos) sobre simetria axial. Suas análises feitas sobre os procedimentos e respostas dos alunos serviram como base para outras pesquisas.

O teste elaborado para essa pesquisa era composto de 6 questões com 27 itens sobre isometrias. Nas questões propostas, a reflexão consistia em determinar o simétrico de uma figura dada (ora à mão livre ora usando régua); em determinar o eixo de simetria de algumas figuras dadas (simétricas[15] ou não) e foram

[15] “Quando uma figura F se transforma em si mesma por uma simetria de eixo r, diz-se que F é uma figura simétrica em relação à reta r. A reta r chama-se de eixo de simetria de F.” (Catunda et al, 1988, p.104)

propostas atividades, na malha quadriculada, para obtenção do simétrico de um ponto dado.

Nas respostas, foram analisadas as influências de outras variáveis não consideradas em pesquisas anteriores, como: a complexidade das figuras (ponto, segmento ou triângulo), a presença ou não de quadriculados, a posição do eixo de simetria.

Nos resultados desta experiência, quase todos os alunos mostraram alguma compreensão do conceito de simetria axial, mas alguns procedimentos dependeram de fatores, como: inclinação do eixo, presença ou não da malha quadriculada, inclinação e complexidade da figura.

Inclinação do eixo. Nas atividades propostas, em que a posição do eixo de simetria era vertical ou horizontal, as respostas apresentadas tiveram um bom número de acertos. Entretanto, no caso do eixo inclinado, houve um erro comum nas respostas analisadas, os alunos ignoraram a inclinação do eixo de simetria e deslocaram horizontalmente a figura para obter o simétrico.

Presença ou não da malha quadriculada. Duas atividades foram propostas, numa, a malha era quadriculada; na outra, não, procurando analisar se a presença ou não da malha facilitaria ou dificultaria o êxito da atividade. Essas atividades tinham duas variáveis importantes, eixo de simetria inclinado e um ponto como objeto. Os resultados mostraram que os alunos apresentaram índices de 86% e 61% de acertos, respectivamente, indicando que a malha pode ajudar na distância e na posição, mas também indicaram que os índices dos que erraram, nesses mesmos itens, eram praticamente os mesmos, 6% e 7%, respectivamente, indicando que a malha não contribui (aos alunos) para superar tais erros.

Complexidade da figura. Procurando analisar a complexidade da figura, duas atividades foram propostas: numa, o objeto era um ponto; na outra, uma bandeira. Os índices de 86% e 50%, respectivamente, mostram a diferença no desempenho dos alunos. Portanto, a complexidade da figura pode dificultar o desempenho da atividade.

Inclinação da figura. Algumas atividades foram propostas em papel não quadriculado e o objeto proposto era uma bandeira. Procurou-se observar as seguintes tendências; deslocamento horizontal ou vertical da imagem, conforme a figura dada estivesse na posição horizontal ou vertical. Os autores observaram também que há a tendência de desenhar a imagem paralela[16] à figura dada.

Os mesmos testes foram aplicados em diferentes países, em outros sistemas educacionais, mas os resultados permaneceram coerentes com os originalmente obtidos, confirmando as mesmas interpretações e os resultados obtidos por Hart.

1.5.2 Pesquisa Desenvolvida por Denise Grenier (1985)

Denise Grenier, em 1985, trabalhou com alunos da 3ª e 4ª séries[17], com o objetivo de conhecer as concepções dos alunos sobre reflexão, antes e depois da aprendizagem em sala de aula. Os alunos foram divididos em seis duplas, três da 3ª, que tiveram contato com a reflexão no ano anterior e três da 4ª série, que não tiveram contato com a simetria.

As atividades consistiam na obtenção do simétrico de uma figura em relação a uma reta. O conceito de simetria ortogonal foi trabalhado como uma "dobra sobre uma reta", onde esta dobra era somente imaginada. A pesquisa pretendia observar como reagiriam os alunos que nunca tiveram contato com a simetria axial diante dessa nova noção. Aos alunos da terceira série, cabia verificar se levavam em consideração as idéias de reflexão como imagem no espelho ou obtida por dobraduras.

Nesta pesquisa, Grenier (1985) analisou as mesmas variáveis didáticas do

[16] A noção de paralelismo é muito difundida entre os alunos e aparece em problemas onde o professor pede ao aluno que desenhe o simétrico de um segmento e em seguida justifique a sua construção. "Alguns alunos justificam seu desenho dizendo que o novo segmento é simétrico ao primeiro porque eles são paralelos. Da mesma forma, ao se deparar com dois segmentos paralelos, este aluno poderá deduzir que eles são simétricos" (Webber e Lima, 2001, sp.). E neste caso, eles estão com toda razão.

Na Figura 1.5 abaixo, temos três situações onde os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ são paralelos e em duas delas (Figuras 1 e 3), eles são também simétricos com relação à reta d. A noção de paralelismo é estável e resiste porque ela funciona para alguns problemas.

Figura 1.5. Construções simétricas feitas por alunos com a noção de paralelismo.

[17] Na França, a 4ª e 3ª séries, correspondem no Brasil à 7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental, respectivamente.

projeto inglês CSMS, descrito na Seção 1.5.1, e acrescentou outras variáveis. As variáveis também consideradas foram: a natureza do objeto (pontos, segmentos e figuras simples); as relações entre os diferentes elementos do objeto (comprimento, extremidades do segmento); as relações objeto-eixo (objeto interceptando ou não o eixo).

Foram levados em consideração alguns aspectos externos, como por exemplo, a rigidez do material (dobradura foi proibida); posição em que a figura se encontra na folha de papel; tipo de papel utilizado (quadriculado ou não); instrumentos (régua e compasso não foram disponibilizados).

Aos alunos cabia determinar o simétrico de 8 figuras dadas (Anexo III) As Figuras 1, 4, 6 e 7 estão colocadas numa malha quadriculada; as outras, não.

Em todas as figuras, o objeto é um segmento, com exceção da Figura 2, no qual temos um ponto. Somente as Figuras 1, 2 e 8 possuem eixo vertical de simetria, as outras possuem eixo inclinado. Na Figura 8, o segmento cortava o eixo de simetria; na Figura 7, o segmento possuía uma extremidade sobre o eixo; nas outras figuras, os objetos se encontravam afastados do eixo.

Como os alunos da 3ª série já tinham tido contato com a simetria axial no ano anterior e os alunos da 4ª série não, Grenier investigou as concepções desses a respeito deste conceito. Segundo Grenier, os alunos da 4ª série apresentaram as seguintes concepções em relação à reflexão em torno de uma reta:

> - um ponto é transformado num ponto e um segmento é transformado num segmento de mesmo comprimento;
> - o eixo de simetria estabelece uma divisão da folha em dois semiplanos, e o simétrico de uma figura está no outro semiplano; a transformação reflexão faz a figura mudar de lado. Tal concepção explica por que é difícil obter o simétrico quando a figura intercepta o eixo. Essa dificuldade continuou presente nos alunos da 3ª série que já haviam estudado reflexão no ano anterior (na 4ª série);
> - pela reflexão a figura se conserva (ângulos e forma) (Grenier, 1985, p. 68).

Houve semelhanças no comportamento das duas séries, quanto aos procedimentos:

> - as direções vertical e horizontal são privilegiadas. Os procedimentos referência horizontal e referência vertical são duráveis. As direções vertical e horizontal influíram nas resoluções apresentadas. (...) A malha quadriculada parece reforçar esse procedimento, pois as linhas privilegiam as direções verticais e horizontais e estimulam a contagem

quando se considera a distância da figura ao eixo;

- o paralelismo da figura com seu simétrico foi um procedimento bastante utilizado e que predominou em casos de conflito nas soluções;

- os alunos não determinam com naturalidade a imagem de um segmento usando os simétricos das suas extremidades; em vez disso escolheram uma direção conveniente e tomaram a segunda extremidade de modo a obter um segmento de mesmo comprimento que o dado. A estratégia parece confirmar a hipótese de que não é suficiente para o aluno saber determinar o simétrico de um ponto para obter o simétrico de um segmento (Grenier, 1985, p.68).

No seu trabalho, Grenier valorizou, durante todas as atividades, o trabalho em grupo, estimulando a troca de idéias e exercícios de argumentações.

1.5.3 Pesquisa Desenvolvida por Gutiérrez e Jaime (1987)

Gutiérrez e Jaime (1987) trabalharam com a questão da reflexão tendo como base o já referido projeto inglês CSMS, onde os testes por eles elaborados tiveram um acréscimo na quantidade de itens e os objetos se tornaram mais específicos, aumentando, dessa forma, a confiabilidade e o detalhamento das conclusões.

Nos testes, foram envolvidos 280 alunos de magistério de Valência, através de um curso por meio de descobertas das isometrias de um plano, os alunos receberam noções de simetria, inicialmente; posteriormente, à aplicação deste.

Gutiérrez e Jaime (1987) centraram seus estudos:

- na compreensão do conceito de reflexão pelos alunos de magistério;

- na observação da influência das variáveis didáticas como complexidade da figura, presença de quadriculado, posição do eixo de simetria e posição da figura em relação ao eixo;

- na influência que o ensino pode exercer para corrigir e modificar as concepções imperfeitas dos alunos (Gutiérrez e Jaime, 1987 apud Mabuchi, 2000, p. 55).

Os pesquisadores consideraram a importância da análise dos erros dos alunos, sendo para o professor um rico instrumento que o ajudará a conhecer as dificuldades de apreensão de uma noção, bem como a reação dos alunos e sobre as várias interpretações que faz sobre um determinado conceito matemático. Os erros foram classificados em:

- cuja fonte vem de uma interpretação mais “visual” da reflexão: imagem paralela à figura em questão, deslocamentos verticais ou horizontais de extremidades de segmentos, imagem feita no prolongamento de um segmento dado;

- em relação a concepção que possuem de reflexão, não utilizam de forma adequada as propriedades que a caracterizam: “perpendicularidade ao eixo do segmento com extremidades no ponto e no seu simétrico; a eqüidistância ao eixo de pontos correspondentes (Mabuchi, 2000, p. 57)”.

É importante salientar que esta pesquisa, desenvolvida na Espanha, foi aplicada a um número expressivo de alunos com uma análise mais detalhada das atividades. Analisou-se, também, a influência de outras variáveis, até então não consideradas, como a complexidade das figuras e como o ensino pode desestabilizar concepções equivocadas dos alunos.

1.5.4 Pesquisas Desenvolvidas por Setsuko T. Mabuchi (2000)

Setsuko T. Mabuchi realizou duas experimentações: uma com alunos do Ensino Fundamental em 1988; outra com professores que complementavam a formação matemática na disciplina “Geometria das transformações” em 1999. Essas duas experimentações resultaram na sua dissertação de mestrado.

A primeira pesquisa foi realizada em São Paulo, 1998, em duas escolas. A escola I (particular), foi escolhida, uma vez que o desenvolvimento do conceito de simetria ocorre ao longo de várias séries, partindo da experimentação até construções do simétrico de uma figura em relação a uma reta, utilizando-se de régua e compasso, propostos na 7ª série. Nesta escola, foi aplicado um teste diagnóstico sobre reflexão em reta, em 72 alunos de 8ª séries, que tiveram um ensino sistematizado sobre simetria axial nas séries anteriores. A escola II, uma escola do ensino médio, com 41 alunos da 3ª série, em que estes não haviam estudado o assunto e usaram apenas as concepções espontâneas.

Os objetivos a que se propunha eram:

- verificar em que medida o uso de uma metodologia adequada, com o desenvolvimento de um conceito organizado em espiral durante a vida escolar, pode influir positivamente nos resultados obtidos pelos alunos, fazendo-os superar os obstáculos decorrentes da escolha de diversas variáveis didáticas;

- verificar se resultados similares aos apresentados em experiências feitas nos países estudados seriam observados nos alunos brasileiros (Mabuchi, 2000, p. 59).

Segundo Mabuchi (2000), os resultados obtidos nas duas escolas, foram:

> - cerca de 30% dos alunos erraram a imagem da figura dada no espelho, porém acertaram a imagem no quadriculado. Não levaram em consideração a eqüidistância ao eixo dos pontos correspondentes ou a "orientação contrária" dos elementos correspondentes, o que não ocorreu no quadriculado. Provavelmente, a malha facilitou a contagem dos quadrados para aplicar a eqüidistância ao eixo, pois o eixo era vertical e coincidia com uma das linhas da malha;
>
> - alunos que acertaram (ou erraram) a Questão 4b[18] também acertaram (ou erraram) a Questão 5a. As exceções foram 16% na Escola I e 12% na Escola II. Nos dois exercícios, o eixo de simetria era inclinado, o segmento interceptava o eixo e um deles estava numa malha quadriculada (4b) e o outro (5a);
>
> - desempenho semelhantes relacionaram as questões 5b e 6a; o aluno que não determina corretamente o simétrico de um segmento que intercepta o eixo (5b) não determina também o eixo de simetria de figuras formadas por elementos que interceptam o eixo (6a) (Mabuchi, 2000, p. 63-64).

Algumas constatações, baseadas no desempenho desses alunos, foram:

> A aprendizagem de um conceito é de fato efetiva quando a apresentação é feita em sucessivas etapas da vida escolar de um estudante, explorando-se inicialmente manipulação de materiais, até chegar à construção exata e aplicação em outros contextos;
> Procedimentos observados nos alunos de outros países foram detectados também nos dois grupos de alunos brasileiros, como, por exemplo: o paralelismo da imagem e da figura, a "referência horizontal", a imagem no prolongamento do segmento e a não observação da eqüidistância dos pontos correspondentes ao eixo (Mabuchi, 2000, p. 64).

Em sua segunda pesquisa, Mabuchi (2000) desenvolveu um trabalho com professores que complementavam a formação em Matemática na disciplina "Geometria das transformações" (36 horas/aula).

A aplicação de um teste se fez necessária para analisar os conhecimentos prévios dos professores sobre transformações geométricas e diagnosticar as deficiências, envolvendo: reflexões em reta, translações, rotações e informações gerais sobre os professores. O seu maior foco foi em reflexões em reta.

As questões propostas tinham como objetivos:

- Introduzir a noção de simétrico de uma figura e eixo de simetria, usando a imagem da "figura no espelho".

---

[18] As questões 4b, 5a e 6a encontram-se no Anexo IV.

- Identificar os eixos de simetria de figuras dadas (5 simétricas e 1 não simétrica) e estas poderiam apresentavam um eixo ou mais de um.
- Identificar os diversos tipos de transformações geométricas de figuras dadas: reflexão, rotação e translação. Até o momento, os alunos só tinham trabalhado com a reflexão. Movimentos de rotação e translação, até então, não tinham sido discutidos. Assim, pretendia-se detectar os conhecimentos espontâneos dessas noções.
- Construir a translação do vetor v, figura na malha quadriculada e o vetor numa das linhas horizontais da malha, justamente para facilitar a contagens das distâncias.
- Determinar a imagem de uma figura por uma rotação de 90°, onde esta se encontra numa malha quadriculada.

Considerações finais da pesquisa realizada por Mabuchi (2000) em1999:

- 74% nunca tinham estudado transformações geométricas e 70% desconheciam termos, como: vetores, translação, rotação e até mesmo a idéia de simetria. 22% haviam estudado reflexões em reta, superficialmente.
- Nas questões sobre reflexões em reta, foi observado que metade do grupo tinha noções de simetria, com o recurso da imagem no espelho, 12% não responderam sobre simetria ou não das figuras e os outros usam erroneamente essa noção.
- A identificação de eixos depende da figura considerada, onde 36% não assinalaram o eixo e 7% todos os eixos errados.

Depois da etapa de diagnóstico, Mabuchi, dando continuidade ao trabalho, passou para a próxima etapa, com a seguinte proposta de trabalho “apresentar uma seqüência didática que, além de pautar-se nos objetivos, atendesse às necessidades detectadas no diagnóstico” (Mabuchi, 2000, p.121). Tiveram como material de apoio uma apostila elaborada pelo professor Saddo Ag Almouloud, da Puc de São Paulo, contando com 19 atividades. Os conteúdos centrais de algumas dessas atividades eram:

- noção de figura simétrica à outra e eixo de simetria numa figura;

- figura simétrica à outra como imagem no espelho;
- definição de ponto simétrico a outro em relação a uma reta;
- construção de simétrico de um segmento em relação a uma reta, identificação do simétrico de segmentos em relação a uma reta, simétricos de figuras mais complexas, simétricos de figuras mais particulares;
- identificação e construção de eixos de simetria.

Nesta pesquisa, trabalhou-se com materiais concretos, como, por exemplo, dobraduras e recortes; papel quadriculado e espelho.

1.6 Algumas Considerações sobre Relatos de Experiências Envolvendo Simetria Axial com o Uso do Computador

Um dos objetivos de nossa pesquisa é analisar os procedimentos e invariantes operatórios provavelmente utilizados por alunos em situações-problema, utilizando-se o computador. Vários autores, entre eles: Gerônimo & Franco (s/d); Milani (2001); Silva & Souza (2003); Kenney (1994), trabalharam a simetria dentro de um contexto computacional. O aluno tem acesso à simetria através do computador, tendo a possibilidade de construir e criar padrões, utilizando as simetrias. Convém destacarmos alguns trabalhos, no caso de Gerônimo & Franco (s/d, p.110-111), no livro "Simetrias no plano – Uma abordagem geométrica, algébrica, pedagógica e computacional" com o tema "As simetrias no Computador" propõe a seguinte seqüência de atividades para serem desenvolvidas no computador: conhecendo o programa Simetria, trabalhando os conceitos, criando logotipos, criando frisos e criando mosaicos, com o objetivo de que os alunos adquiram o conceito de simetria axial, através da criação de logotipos, frisos e mosaicos, com a utilização do computador.

Eles destacam que as atividades seguiam uma certa ordem; inicialmente, trabalharam com os movimentos de reflexão, seguidas da de translação e de rotação. Num segundo momento, propuseram atividades que envolvessem as três simetrias estudadas, principalmente no Ensino Fundamental. Dentro da seqüência trabalhada, algumas das atividades estão diretamente relacionadas com os conteúdos de Ensino Médio.

Milani (2001) *apud* Smole & Diniz (2001), no livro “Ler, Escrever e Resolver Problemas” no seu artigo “A Informática e a Comunicação Matemática”, trata a importância da utilização da informática no ensino de Matemática, relatando algumas experiências em que o computador desempenhou papel relevante como instrumento de motivação, ferramenta na execução de tarefas e até recurso essencial. Milani cita várias atividades que foram desenvolvidas com alunos para a exploração do conceito de simetria. No desenvolvimento do trabalho, foram utilizados dois *softwares*, *o Paintbrush* e o *Storybook Weaver*[19].

Vamos focar como essas atividades foram desenvolvidas:

> No projeto, o conceito de simetria foi explorado, inicialmente, através de atividades com dobradura e, desenhos e jogos, enquanto os alunos familiarizavam-se com o livro e com a utilização dos *softwares* nas primeiras atividades a partir dos desenhos de DaCosta armazenados no banco de imagens. Depois disso, o professor solicitou que cada um escolhesse uma ilustração para identificar a simetria de reflexão e traçar seu eixo usando o *PaintBrush* para, a seguir, produzir um pequeno texto sobre o assunto. (...) para facilitar as reflexões dos alunos sobre o conceito de simetria, um especialista preparou, no *PaintBrush*, uma tela com malha quadriculada na qual era possível desenhar livremente, usando os recursos do *software*. O professor, utilizando essa tela, preparou várias atividades nas quais os alunos deveriam desenhar uma figura simétrica à figura dada a partir do eixo de simetria que foi propositadamente colocado fora da figura e em diversas posições. Depois, em uma atividade realizada em duplas, cada aluno deveria desafiar o seu colega a desenhar a figura simétrica à outra, que ele havia construído sobre a malha a partir do eixo de simetria já definido (Milani *apud* Smole & Diniz, 2001, p. 187-189).

A autora comenta como foi gratificante observar que, desafiados, muitos alunos esforçavam-se em propor aos colegas figuras complicadas e com eixo colocado em posições que dificultavam a obtenção de uma figura simétrica à outra.

Com o tema “Programas em Slogow para a Exploração de Simetrias”, artigo publicado na Revista de Educação Matemática, Eurípedes Alves da Silva e Davi de Souza (2003), sugerem o *software* LOGO no trabalho com alunos para exploração do conceito de simetria. O *LOGO* é “uma linguagem de programação de notória eficácia na exploração do universo da geometria e, em particular, no

---

[19] “O *Paintbrush* é um programa de desenho aberto e com o qual é possível criar figuras, recortar, colar, girar, apagar, pintar ampliar e produzir textos e o *Storybook Weaver* é conhecido como inventor ou contador de histórias, com versão original em inglês, é um programa com o qual se pode ler ou escrever uma história, incluir sons e ilustrá-la com imagens de um banco de imagens” (Milani *apud* Smole & Diniz, 2001, p. 184-185).

trabalho investigativo com as chamadas transformações geométricas do plano" (Silva & Souza, 2003, p. 20). Neste artigo, inicialmente, esses autores descrevem os comandos, procedimentos e alguns desenhos iniciais, utilizando-se do *LOGO*. Num segundo momento, citam programas para a exploração das simetrias axiais com um eixo, dois eixos perpendiculares entre si e, por último, com quatro eixos, tomando-se dois eixos perpendiculares entre si e as bissetrizes dos quadrantes. Ainda dão sugestões de atividades envolvendo rotações, translações e semelhanças e fazem algumas considerações finais:

> (...) os programas apresentados permitem a consecução de objetivos de natureza educacional e de natureza matemática, com amplas possibilidades de exploração de conceitos específicos da geometria elementar, como os de congruência e de semelhança, para citar dois dos mais importantes (Silva & Souza, 2003, p. 19).

Margaret J. Kenney (1997), no seu artigo "A linguagem *LOGO* e a nova dimensão dos programas de geometria no nível secundário", publicado no livro Aprendendo e Ensinando Geometria, defende o trabalho escolar com esse s*oftware.* Ela sugere o *LOGO* para a construção de mosaicos e comenta que na construção de mosaicos, é preciso tempo e paciência para se obter êxito na tarefa e é uma poderosa ferramenta.

> (...) Uma alternativa possível é fazer o aluno ensinar o computador a elaborar mosaicos e deixar a impressora fazer os desenhos. Essa atividade combina conceitos de geometria do movimento com estratégias de resolução de problemas numa aplicação interessante para o aluno. Durante o processo de elaboração de mosaicos, automaticamente se usa a espinha dorsal da geometria do movimento, constituída de rotações, reflexões e translações. O procedimento do *LOGO* se desenvolve de maneira a ajustar-se idealmente a esse problema. (...) Assim que se estabelece um plano global para o desenvolvimento de um determinado mosaico, outros desenhos interessantes podem ser gerados, com pequenas modificações no plano original (Kenney, 1997, p. 118).

Observa-se que o trabalho com simetria está inserido no estudo de transformações (movimento).

1.7 Síntese da Simetria nas Pesquisas

Em primeiro lugar, a pesquisa bibliográfica revelou a existência de muitos estudos sobre o tema, isto é, outros pesquisadores também sentiram necessidade de explorar e responder questões relativas ao conceito de simetria axial (concepções, dificuldades, procedimentos), através da aplicação de seqüências didáticas, utilizando-se de lápis e papel ou computador, ou os dois ao mesmo tempo, como é o nosso caso. Nas pesquisas analisadas não foram utilizadas ferramentas computacionais. Nos relatos de experiência analisados neste trabalho em que o computador foi utilizado, o software *Cabri Géomètre II* não foi trabalhado.

O estudo destas pesquisas, através da análise dos seus principais resultados, dos materiais didáticos sugeridos, bem como das variáveis didáticas consideradas foram importantes, pois iremos buscar, em seus resultados, respostas para os nossos problemas e procuraremos verificar se os procedimentos referência horizontal, vertical e diagonal como citados nessas pesquisas também aparecerão em nossa experimentação, tendo em vista que são duradouros e persistentes. Para saná-los, são necessários novos re-investimentos, isto é, novas seqüências didáticas elaboradas de tal forma que os alunos consigam transpor estas barreiras. Tendo a oportunidade de modificar e ampliar seus conhecimentos. Assim, acreditamos que o conceito de simetria pode ser trabalhado com diversos materiais (espelho, dobradura, papel transparente, papel quadriculado, computador); com vários objetos (polígonos, letras, figuras, números, segmentos, pontos) e em diversos contextos, para que passe a ter significado, importância e, principalmente, que a definição trabalhada dê uma idéia do todo e não apenas de parte dela.

CAPÍTULO II

REFERENCIAL TEÓRICO E METODOLÓGICO DA PESQUISA

2.1 Teoria dos Campos Conceituais

Os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN's (1987) – de Matemática recomendam a abordagem de conceitos, idéias e métodos sob a perspectiva de resolução de problemas, ou seja, de situações-problema, onde os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las. Neles, a resolução de problemas é colocada como a atividade básica na aprendizagem da Matemática. Consideramos que resolver situações-problema com a utilização de lápis e papel ou com a utilização do computador é estar diante de algum desafio, de alguma situação conflitante, de uma questão que interessa ao aluno e que o leve a traçar caminhos, achar meios e instrumentos para solucioná-los, avaliando suas tentativas, procedimentos e as supostas soluções. Resolver situações-problema não é, portanto, apenas buscar soluções para metas dadas, mas a possibilidade de reformular e criar novas metas.

G. Vergnaud (1990) afirma que:

> O saber se forma a partir de problemas para resolver, quer dizer de situações para dominar. (...) Por "problema" é preciso entender, no sentido amplo que lhe atribui o psicólogo, toda situação na qual é preciso descobrir relações, desenvolver atividades de exploração, de hipótese e de verificação, para produzir uma solução (Vergnaud, 1990, p. 52).

Considerando a importância de colocarmos os alunos diante de situações-problema diversificadas, relativas a simetria axial, que o conhecimento emerge de problemas a serem resolvidos, e de situações a serem dominadas, elaboramos e aplicamos uma seqüência didática, cujos objetivos estão centrados em identificar, analisar e diagnosticar procedimentos e possíveis invariantes operatórios utilizados por um grupo de alunos do quarto ciclo do Ensino Fundamental, quando colocados em contato com diferentes situações-problema sobre simetria axial envolvendo diversos materiais.

O estudo dos "erros" dos alunos, no decorrer da resolução de situações-problema, envolvendo o conceito de simetria axial, é importante e necessário. Depois de identificados os procedimentos "errôneos" e suas prováveis causas, torna-se importante oferecermos aos alunos condições que favoreçam o aparecimento destes, criando novas seqüências didáticas com a finalidade de desestabilizá-los, proporcionando a busca do equilíbrio do sistema didático[1].

Vergnaud (1982, p. 2) propõe, em sua teoria, que se selecione, analise e classifique o maior número de situações-problema, de forma que um conceito se torne funcional e significativo, possibilitando aos alunos buscarem soluções, relações e questões além das usuais. À medida que os alunos tomam contato com novos problemas, novas situações, isto é, a partir de uma ampla experiência, maturidade e aprendizagem, um conceito, um modelo e teorias vão se tornando sólidas e incorporadas pelo aluno. No trabalho em sala de aula, é importante que levemos em consideração:

> 1) que um conceito não se forma dentro de um só tipo de situação;
> 2) que uma situação não se analisa com um só conceito;
> 3) que a construção e apropriação de todas as propriedades de um conceito ou todos os aspectos de uma situação é um processo de muito fôlego que se estende ao longo dos anos, às vezes uma dezena de anos, com analogias e mal-entendidos entre situações, entre concepções, entre procedimentos, entre significantes (Moreira, 2002, p. 3).

Para Moreira (2002), os três argumentos acima são os que supostamente

---

[1] A relação aluno, professor e saber constituem o sistema didático, que pode ser representado pela Figura 2.1.

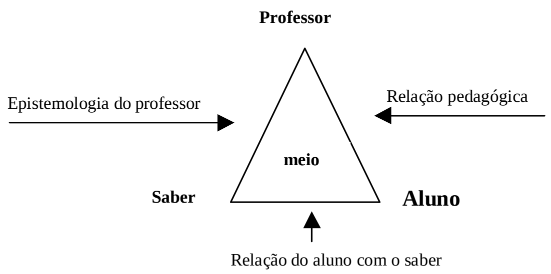


Figura 2.1. Sistema Didático (Bittar, 2000, p.79)

"A didática estuda as relações entre os três elementos, aluno, professor e saber, considerando ainda um quarto e essencial elemento ligado aos três primeiros que é o "meio" em que está inserido o aluno (ou professor). Por "meio" pode-se entender os conhecimentos anteriores do aluno, as condições materiais da sala de aula, (...). É através do meio que o professor age para provocar aprendizagem" (ibid., p. 79).

levaram Vergnaud ao conceito de campo conceitual. Um campo conceitual é um conjunto de situações, cuja apropriação requer o domínio de diversos conceitos de naturezas diferentes, procedimentos e representações simbólicas firmemente entrelaçadas (Vergnaud, 1982, p.12).

Os conceitos são constituídos por três subconjuntos: o conjunto das situações, o conjunto de invariantes e o conjunto de significantes. Vamos descrever brevemente cada um desses três subconjuntos, mas, para nossa pesquisa, vamos centrar nossos estudos principalmente nos invariantes operatórios, que conduzem o reconhecimento, por parte do aluno, dos elementos pertinentes à situação; formam a articulação essencial entre prática e teoria.

O primeiro subconjunto é o conjunto de situações que dão sentido ao conceito, isto é, a referência do conceito. “Os processos cognitivos e as respostas dos alunos são funções das situações aos quais eles se defrontam” (Vergnaud, 1993, p. 12).

O segundo subconjunto é o conjunto de invariantes operatórios “associados ao conceito, que permitem ao sujeito analisar e dominar as situações do primeiro subconjunto” (Moreira, 2002, p. 4), isto é, teoremas-em-ação e conceitos-em-ação, que compõem a parte conceitual dos esquemas. Segundo Vergnaud (1995) “um conceito-em-ação é um conceito (objeto ou predicado) implicitamente tido por pertinente, e teorema-em-ação é uma proposição tida por verdadeira” (Vergnaud, 1995, p. 178).

Esquema é uma palavra introduzida por Piaget (1973) para responder como os sujeitos organizam tanto as habilidades sensório-motoras como as habilidades intelectuais. Um esquema é uma estrutura cognitiva que se refere a uma classe de seqüências de ação semelhantes. “Um esquema é o conteúdo comportamental explícito e organizado que lhe dá nome, mas com conotações estruturais importantes, que não são inerentes ao conteúdo concreto em si” (Piaget, 1973, p. 53).

Em sua teoria, Vergnaud (1993), nos coloca que “o conhecimento racional é operatório ou não” (p.47) e para ele os esquemas se referem a situações ou classes de situações e que podemos distinguir duas classes de situações, onde o conceito de esquema interessa a essas duas, que são:

> 1) Classes de situações em que o sujeito dispõe, no seu repertório em dado momento de seu desenvolvimento e sob certas circunstâncias, das competências necessárias ao tratamento relativamente imediato da situação.

> 2) Classes de situações em que o sujeito não dispõe de todas as competências necessárias, o que o obriga a um tempo de reflexão e exploração, a hesitações, a tentativas frustadas, levando-o eventualmente ao sucesso ou ao fracasso (Vergnaud, 1993, p. 4).

Para a primeira classe de situações, o aluno já dispõe de conhecimentos anteriores e imediatos, para resolver a situação-problema a ele proposto e nesse processo, na mesma classe de situações-problema, ele vai mostrar comportamentos automatizados e constituídos por um único esquema. Para a segunda classe de situações, nota-se a utilização sucessiva de vários esquemas, que podem entrar em competição e que, para conseguir atingir a sua meta, esses esquemas precisam ser acomodados, descombinados e recombinados.

Para Vergnaud (1993), "um esquema gera ações e deve conter regras, mas não é um estereótipo, porque a seqüência de ações depende dos parâmetros da situação" (Vergnaud, 1993, p. 7). Dentro de um esquema, é possível identificar invariantes operatórios; antecipações do objetivo a alcançar; regras em ação e possibilidades de inferência (ou raciocínios).

Definições formais, com maior rigor do ponto de vista matemático, para o termo simetria, raramente são apresentadas nos livros didáticos; normalmente, tratam-no como pertencente ao senso comum. Na maioria das vezes, apresentam ilustrações de figuras simétricas, deixando que os alunos abstraiam o conceito e o identifiquem. Podemos enunciar uma propriedade explicitada nos livros didáticos de Matemática analisados, no estudo de simetria axial no Ensino Fundamental: "a linha de dobra é o eixo de simetria de uma figura simétrica e, se dobramos no eixo, as duas partes coincidem". Esta propriedade pode tornar-se um possível invariante operatório para os alunos.

A introdução de simetria e de eixo de simetria feita como na maioria dos livros didáticos, através de dobraduras, parece que não capacita os alunos a terem realmente o domínio de simetria, mas a partir desta introdução, para que os alunos resolvam as situações propostas, eles devem buscar conhecimentos anteriores, exigindo um tempo de reflexão sobre a situação em questão. Para nós, a análise dos procedimentos e de possíveis "falhas" nas respostas dadas às situações-problema, permite compreender os raciocínios, procedimentos e identificar possíveis invariantes operatórios utilizados pelos alunos e observar a utilização de esquemas, na tentativa de busca por uma solução. "Um esquema apóia-se sempre em uma conceitualização implícita" (Vergnaud, 1993, p. 5). Considerando os procedimentos "errôneos" dos alunos, nas atividades de construir o simétrico de uma figura em relação a uma reta, percebe-se que os mais freqüentes (referência horizontal, referência vertical), como citados nas pesquisas no capítulo I e por nós também observado nessa pesquisa, se prendem a uma conceitualização insuficiente do conceito de simetria axial.

Particularmente, com relação à simetria, encontramos uma situação-problema nesse campo desenvolvida por Vergnaud (1993, p. 11) no seu texto "A trama dos campos na construção dos conhecimentos", com crianças na faixa etária de 8 a 9 anos, utilizando-se do papel quadriculado. A situação apresentada aos alunos foi a seguinte: no papel quadriculado, foi desenhada a metade de uma fortaleza e solicitou-se que desenhassem a outra metade. Ele comentou que as medidas de comprimentos e distâncias eram facilitadas pelo papel quadriculado e, assim, a tarefa requeria um pequeno trabalho cognitivo por parte do aluno. O material concreto disponível era uma régua.,

No desenrolar da situação, os alunos encontraram formas de organização da atividade. Essas formas de organização da atividade podem ter vários tipos de registros. As ações e os gestos desenvolvidos pelos alunos são importantes, mas Vergnaud (1993) ressalta que as idéias matemáticas (conceito de simetria, a idéia de orientação no espaço: "um, dois passos à direita, um, dois passos à esquerda, ..."), que estão implícitas, também são importantes. Todos esses aspectos destacados são alguns esquemas que os alunos desenvolvem na hora de realizar uma dada tarefa, diferindo de aluno para aluno, dependendo de seus conhecimentos e do seu envolvimento com o problema.

Para Vergnaud (1993), o aluno pode utilizar um esquema ineficaz para uma certa situação, e isto o conduz a mudar o procedimento. Assim, vemos que "os esquemas estão no centro do processo de adaptação das estruturas cognitivas: assimilação e acomodação" (Vergnaud, 1993, p. 5).

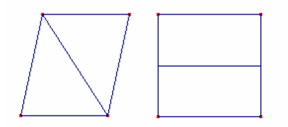
Os alunos nem sempre conseguem explicitar ou formular seus conceitos-em-ação e teoremas-em-ação, mas eles podem ser identificados a partir de suas produções, isto é, nos permitem levantar hipóteses do que estava implícito à sua ação. Para Vergnaud (1985):

> Conceitos e teoremas explícitos são apenas a ponta do iceberg da conceitualização: sem a parte oculta, formada pelos invariantes operatórios, essa parte visível nada seria. Reciprocamente, só se pode falar em invariantes operatórios integrados aos esquemas com o auxílio de categorias do conhecimento explícito: proposições, funções proposicionais, objeto-argumento (Vergnaud, 1985, p. 11).

São os conjuntos de significantes, desenhos, tabelas, rascunhos, bem como os algoritmos envolvidos na resolução de uma situação-problema, que vão permitir a identificação dos referidos invariantes. Em nossa pesquisa, analisamos atividades desenvolvidas com a utilização de lápis e papel e do computador, por alunos do quarto ciclo do Ensino Fundamental, procurando observar seus procedimentos através da forma de utilização e suas justificativas pela escolha do material concreto utilizado. Os desenhos produzidos pelos alunos nos serviram de base para investigar procedimentos "corretos" e "incorretos" e os motivos que os levaram a realizá-los, identificando, se possível, os invariantes operatórios que estão por trás desta sua ação.

(*) Para a categoria I[2], com lápis e papel ou computador, estamos considerando invariantes suscetíveis de serem construídos pelos alunos, quando a situação-problema se tratar da construção ou identificação de eixos de simetria de figuras, podem ser:

1. **"O eixo que divide a figura em duas partes congruentes é de simetria".**



a) b)

Figura 2.2. Invariante operatório 1 – CI

Este invariante é falso. Ele só será verdadeiro quando acontecerem, simultaneamente, dois fatos: o eixo dividir a figura em duas partes congruentes e elas coincidirem, exatamente, por sobreposição, ao se dobrar a figura inicial no eixo de simetria. Alguns alunos podem achar que toda reta traçada numa figura, desde que a divida em duas partes congruentes, é de simetria. Desta maneira, nos apresenta a reta traçada na Figura 2.2a como sendo eixo de simetria do paralelogramo. Entretanto,

---

[2] No capítulo III, p. 74- 77, definimos as categorias I e II.

este não é um eixo de simetria, pois apenas a primeira condição é válida. Na Figura 2.2b, a reta traçada é eixo de simetria do quadrado, uma vez que as duas considerações ocorrem simultaneamente.

Alguns alunos, no entanto, podem achar que as retas traçadas nas Figuras 2.2a e 2.2b são eixos de simetria por fixarem-se apenas na congruência das partes em que a figura ficou subdividida pelo eixo.

2. **“O eixo de simetria divide a figura em duas partes que coincidem exatamente por superposição”.**

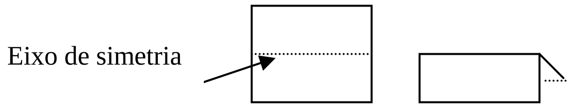
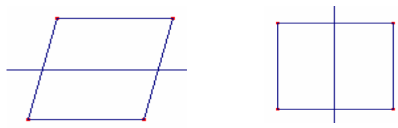


Figura 2.3. Invariante operatório 2 – CI

Este invariante é verdadeiro. Pode ser utilizado pelos alunos, quando perceberem que o eixo está dividindo a figura em duas partes congruentes e que estas coincidem exatamente por superposição ao se dobrar neste.

3. **“O eixo de simetria divide a figura aproximadamente no ‘meio’ ”.**



a) b)

Figura 2.4. Invariante operatório 3 – CI

Este invariante operatório é falso. Pode ser muito utilizado pelos alunos, uma vez que, para eles, é suficiente traçar o eixo de simetria passando aproximadamente pela metade – o “meio” – da figura. Algumas vezes, os alunos não consideram a não-sobreposição das partes da figura ao se dobrar no eixo de simetria. Na Figura 2.4a, temos um exemplo deste caso. Outras vezes, como no caso do quadrado representado na Figura 2.4b, os alunos traçam os eixos passando aproximadamente no meio (quase no ponto médio) dos lados opostos paralelos, mas utilizando-se unicamente da visualização, e podem considerar que as duas partes produzidas pelo eixo se sobrepõem ao se dobrar neste.

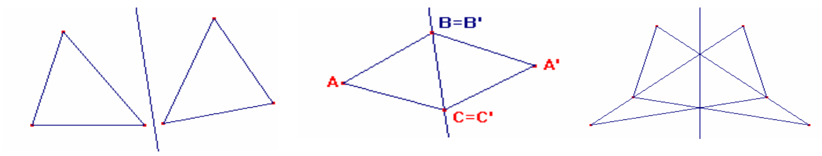
Antes de enunciarmos os invariantes da categoria II definiremos referência horizontal, referência vertical, referência diagonal e reflexão transladada.

A referência horizontal (ou vertical ou diagonal) é o ato do aluno construir a figura-imagem como sendo uma "cópia" da figura dada, deslocada (ou transladada), horizontalmente (ou verticalmente ou diagonalmente), independente da posição do eixo de simetria.

A reflexão transladada ou reflexão seguida de deslocamento da figura é o ato do aluno construir a figura-imagem refletida e deslocada horizontalmente (ou verticalmente ou diagonalmente), independente da posição do eixo de simetria.

(*) Para a categoria II, com lápis e papel ou computador, os invariantes suscetíveis de serem construídos, pelos alunos, quando tratar de atividades sobre o simétrico de uma figura em relação a um eixo de simetria, podem ser:

1. **"O simétrico de uma figura em relação a um eixo de simetria deve ficar sempre do outro lado deste".**



a)　　　　　　　　b)　　　　　　　　c)

Figura 2.5. Invariante operatório 1 – CII

Este invariante operatório é falso. Ele pode ser utilizado pelos alunos e parece ser uma conseqüência da atividade de dobradura, onde o eixo de simetria deixa a figura em dois semiplanos, onde uma das metades da figura fica de um lado deste e a outra do outro.

Este invariante é valido, se a figura não cortar o eixo de simetria, pois sua imagem fica sempre do outro lado deste, como representado na Figura 2.5a. Porém, se o eixo de simetria cortar a figura, parte desta fica do outro lado do eixo e a outra do mesmo lado da figura inicial, conforme podemos observar na Figura 2.5c. Se a figura possuir um lado, ou um ponto, coincidente com o eixo de simetria, parte da imagem desta fica do outro lado do eixo de simetria (a parte que não é comum) e na outra (parte comum) fica sobre o eixo de simetria, como representado na Figura 2.5b.

2. **"O segmento e seu simétrico são paralelos e possuem a mesma medida".**

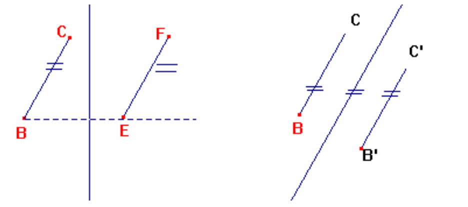


Figura 2.6. Invariante operatório 2 - CII.

Este invariante é falso. Na Figura 2.6.a, temos um procedimento que pode ser desenvolvido por alguns alunos na construção do simétrico de um segmento dado em relação ao eixo de simetria. Para estes alunos, o simétrico de um segmento em relação a um eixo é um segmento paralelo ao inicial. O segmento dado é apenas deslocado horizontalmente. Segundo Derbre e Mouffak (2004) "o paralelismo do objeto e seu simétrico é uma concepção forte entre os alunos (p. 7)". Só é verdadeiro se o eixo de simetria e o segmento dado forem paralelos e eqüidistantes do eixo de simetria, onde, conseqüentemente, a imagem será também paralela ao primeiro, como representado na Figura 2.6.b.

3. "**O simétrico de uma figura é uma figura que conserva a forma, as dimensões e inverte a orientação de pontos não-colineares".**

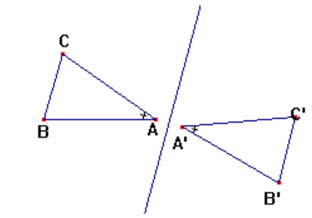


Figura 2.7. Invariante 3.

O invariante é verdadeiro, como podemos observar na representação da Figura 2.7. Os alunos podem pensar que não há a inversão da orientação de pontos não-colineares, como representado na Figura 2.8.

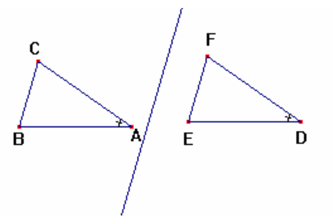
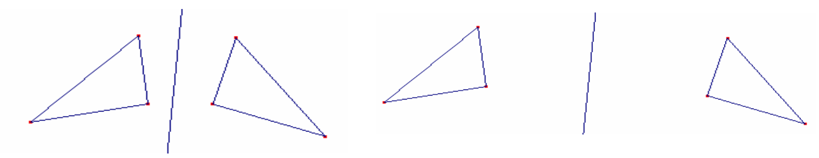


Figura 2.8. Provável procedimento.

Neste caso, eles deslocam a figura horizontalmente em relação ao eixo de simetria e preservam a orientação dos pontos, por exemplo, na Figura 2.8, no ΔBAC a orientação dos pontos BAC é horária, e no Δ EDF, a respectiva imagem dos pontos também deve ter sentido horário. Já na Figura 2.7, no ΔBAC, a orientação dos pontos BAC é horária e no Δ B'A'C', a respectiva imagem dos pontos B'A'C' tem orientação anti-horária.

4. **"O simétrico de uma figura em relação a um eixo de simetria deve ser posicionado aproximadamente à mesma distância desta ao eixo de simetria".**



a) b)

Figura 2.9. Invariante operatório 5 – C II.

Este invariante é falso. Como os alunos não se preocupam com a precisão na construção do simétrico da figura, procuram apenas posicionar a figura-imagem próxima ao eixo de simetria se esta se encontra desta maneira. Se ela se encontrar afastada do eixo de simetria, eles procuram posicioná-la também afastada, aproximadamente, tentando manter a figura-imagem à mesma distância, que possui a figura inicial, ao eixo de simetria. Na Figura 2.9 temos dois exemplos que "podem" ser verdadeiros deste invariante operatório.

5. "**O simétrico de um segmento é obtido por simetria axial".**

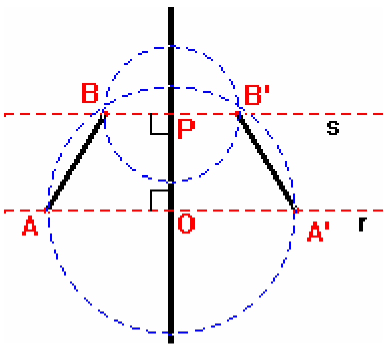


Figura 2.10. Invariante operatório 6 – C II

O invariante é verdadeiro. Os alunos podem construir o simétrico do segmento $\overline{AB}$ em relação ao eixo de simetria, traçando a reta (r) que passa pelo ponto A e é perpendicular ao eixo de simetria (o lugar geométrico[3] do ponto A', simétrico de A); do mesmo modo a reta (s), que passa pelo ponto B e é perpendicular ao eixo (o lugar geométrico do ponto B', simétrico de B). Para determinar A' e B', é necessário conservar as distâncias dos pontos A e B ao eixo de simetria. Assim, são traçadas as circunferências de raio $\overline{OA}$ e $\overline{PB}$. O ponto O é o ponto de interseção da reta r com o eixo de simetria. Na interseção da circunferência com a reta r temos o lugar de A'. Analogamente, o ponto P é o ponto de interseção da reta s com o eixo de simetria. Na interseção da circunferência com a reta s, temos o lugar de B'. Na Figura 2.9, temos o simétrico do segmento $\overline{AB}$ em relação ao eixo de simetria. Provavelmente, os alunos só se utilizarão deste invariante depois das correções das atividades da segunda categoria lápis e papel.

Esse é o que apresenta maior "rigor" do ponto de vista matemático. Para os próximos invariantes, os alunos, procuram preservar a forma e o tamanho da figura inicial e constroem as imagens sempre do lado oposto ao eixo de simetria, em relação à figura dada.

6. **"O simétrico de um ponto (segmento ou figura) em relação a um eixo de simetria é um ponto (segmento ou figura) deslocado (ou transladado) horizontalmente"**. Observe estas representações na Figura 2.10.

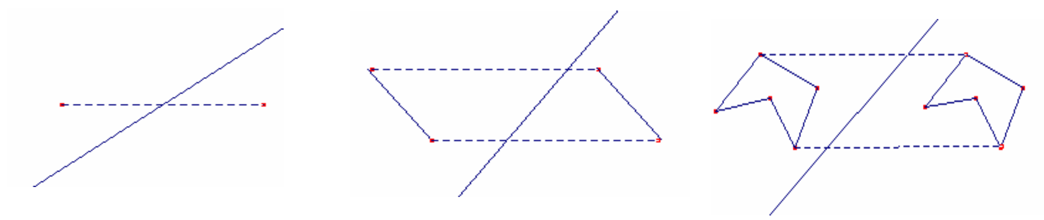


Figura 2.11: Referência Horizontal ou Translação Horizontal

Este invariante é falso. É possível que este invariante seja utilizado pelos alunos, pois, para eles, o simétrico da figura dada é uma figura que conserva a forma

[3] "Lugar geométrico é a linha cujos pontos possuem todos uma mesma propriedade e são os únicos a possuírem tal propriedade. Quando uma linha é considerada lugar geométrico, todos os pontos dessa linha têm, entre outras, uma propriedade comum, isto é, todos os pontos a têm, e somente eles a têm" (Fiorano, s/d, p. 8).

e as dimensões; e é desenhada do outro lado do eixo, uma vez que a figura inicial está afastada deste e refletida. Entretanto, a eqüidistância de pontos correspondentes da figura ao eixo não é preservada, como podemos observar na Figura 2.11.

O procedimento, dos alunos, associado a este invariante operatório pode ser a referência horizontal da figura. Acreditamos que a utilização deste invariante pelos alunos seja porque, para eles, a figura-imagem deve ser uma figura “igual” à original, no semiplano oposto e deslocada horizontalmente.

7. **“O simétrico de um ponto (segmento ou figura) em relação a um eixo de simetria é um ponto (segmento ou figura) deslocado (ou transladado) verticalmente”.** Observe estas representações na Figura 2.12.

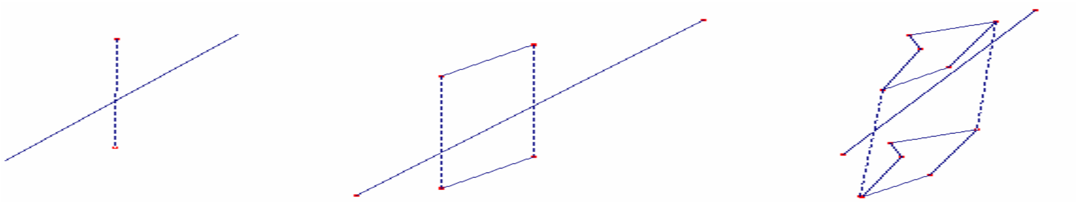


Figura 2.12: Referência Vertical ou Translação Vertical

Este invariante é falso. A provável utilização deste invariante operatório, pelos alunos, é justificado como no invariante 6. Podemos observá-lo na Figura 2.12.

O procedimento, dos alunos, associado a este invariante pode ser a referência vertical. Provavelmente, eles procedem desta forma, por desconsiderarem o eixo de simetria dado, substituindo-o por um eixo horizontal. Para eles, o eixo e a sua posição não têm a menor importância na obtenção do simétrico de um ponto (segmento ou figura) em relação a um eixo pré-definido. Acreditamos que a utilização deste invariante pelos alunos seja porque, para eles, a figura-imagem deve ser uma figura “igual” à original, no semiplano oposto e deslocada verticalmente.

8. **“O simétrico de um ponto (segmento ou figura) em relação a um eixo de simetria é um ponto (segmento ou figura) deslocado (ou transladado) diagonalmente”.** Observe estas representações na Figura 2.13.

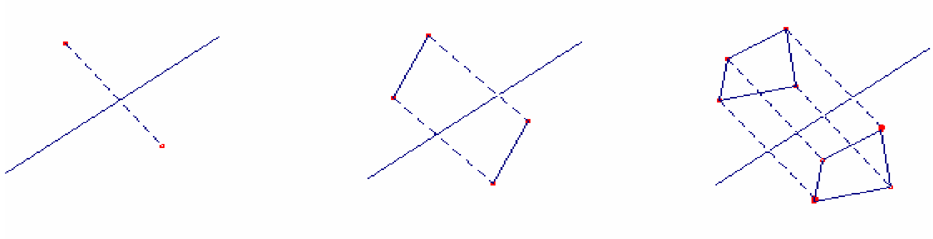
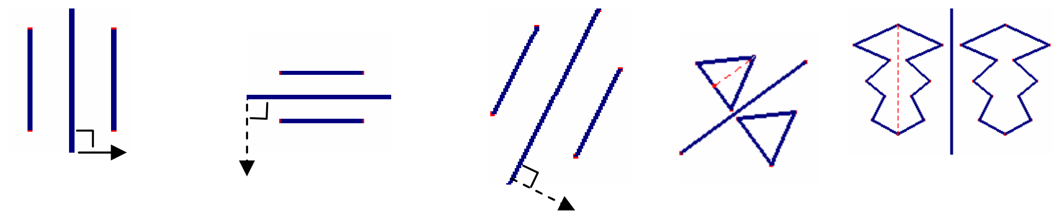


Figura 2.13. Referência Diagonal ou Translação Diagonal

Este invariante é falso. A provável utilização deste invariante operatório, pelos alunos, é justificado como no invariante 6. Podemos observá-lo na Figura 2.13.

O procedimento, dos alunos, associado a este invariante pode ser a referência diagonal. Este procedimento pode surgir, quando o eixo da atividade for inclinado. O eixo de simetria pode influenciar a resposta do aluno, uma vez que também associado a este, ele pode utilizar o invariante operatório: “Se o eixo de simetria da atividade a ser resolvida é inclinado então a figura-imagem também deverá ser inclinada em relação a este”, o que provavelmente ocasiona na resposta, os alunos, nos apresentarem uma figura-imagem transladada diagonalmente.

De forma geral, qualquer um dos deslocamentos (feitos nos procedimentos 6, 7 e 8) terá validade se o eixo de simetria dado e a direção de deslocamento forem perpendiculares e o segmento for paralelo ao eixo de simetria, como representado na Figura 2.14 a, b e c). No caso de uma figura, para que o procedimento tenha validade, ela tem que ser simétrica e possuir um eixo de simetria paralelo ao eixo de simetria dado. Além disso, o eixo de simetria dado e a direção de deslocamento devem ser perpendiculares, como representado na Figura 2.14 d e e).



a) b) c) d) e)

Figura 2.14. Validade dos procedimentos referência horizontal, vertical e diagonal.

Na Figura 2.14 a, temos o deslocamento horizontal do segmento, já na Figura 2.14 b, temos o deslocamento vertical do segmento e na Figura 2.14 c, temos o deslocamento diagonal. Na Figura 2.14 d, temos o deslocamento diagonal da figura e na Figura 2.14 e, temos o segmento horizontal da figura. Em ambos os casos, os procedimentos são corretos.

Ainda para os invariantes, 6, 7 e 8, os alunos podem estar assim procedendo: por não perceberem que o resultado do simétrico de uma figura em relação a um eixo de simetria é uma figura refletida, isto é, a reflexão inverte a orientação de pontos (da figura) não-colineares; por acreditarem que o simétrico de uma figura em relação a um eixo de simetria é uma figura "igual" a inicial. Esta igualdade, para os alunos, corresponde à preservação da forma e do tamanho da figura inicial, e que a orientação de pontos não-colineares deve ser mantida. Por esses motivos, eles nos dão como resposta a figura transladada horizontalmente, ou verticalmente ou diagonalmente, conforme lhes convier.

9. **"O simétrico de um ponto (segmento ou figura) em relação a um eixo de simetria é um ponto (segmento ou figura) refletido e deslocado (ou transladado) horizontalmente (verticalmente ou diagonalmente)".** Observe estas representações na Figura 2.15.

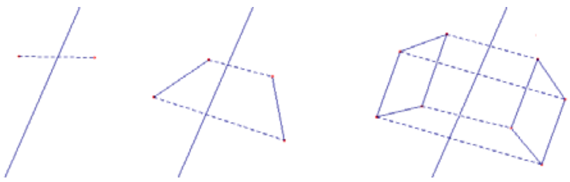


Figura 2.15: Reflexão transladada ou Reflexão seguida de deslocamento.

O invariante é falso. Os alunos percebem que a resposta é uma figura refletida, mas não se preocupam com as propriedades de perpendicularismo e eqüidistância em relação ao eixo de simetria. Assim, tal invariante só terá validade se a eqüidistância e o perpendicularismo forem considerados. Como podemos observar na figura 2.16.

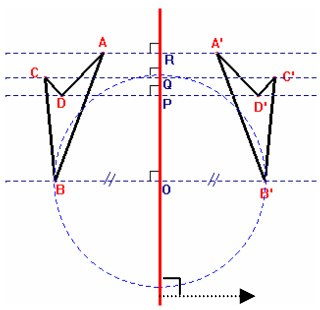


Figura 2.16: Reflexão transladada ou Reflexão seguida de deslocamento.

O procedimento provavelmente associado a este invariante é reflexão transladada da figura. Os alunos preservam a forma e o tamanho; constroem imagens espelhadas sempre do lado oposto do eixo, em relação ao objeto dado.

Vergnaud (1997) apud Fernandes (2004), coloca que, no estudo de simetria, algumas palavras e expressões mostram diferentes níveis conceituais, como: “a mesma forma”, “a mesma distância”, “a medida é conservada”, “o ângulo é o mesmo, mas invertido” e que significam características de teoremas como; “a figura é simétrica”, “a simetria conserva medidas e ângulos”, “a simetria é uma isometria”.

O primeiro teorema pode ser caracterizado pelos termos “a mesma forma”, “a mesma distância”, “a medida é conservada”, “pois centram-se nas propriedades internas das figuras e nas relações internas destas com o eixo de simetria” (Fernandes, 2004, p. 71-72). O segundo pode ser denotado pelo termo “o ângulo é o mesmo, mas invertido”, “pois a transformação associa a figura sua respectiva imagem, mas não é aplicada a outros pontos do plano” (Ibid, p. 71-72). O último teorema está relacionado com todos os termos citados anteriormente, uma vez que a transformação é vista como uma função, uma bijeção do plano no plano.

A identificação de invariantes operatórios é a parte fundamental do nosso trabalho e, portanto, será retomado nos capítulos seguintes.

Finalmente, o terceiro subconjunto é um conjunto de representações simbólicas como, por exemplo: linguagem natural, sentenças formais, gráficos, diagramas e desenhos de figuras, que compõem seus significantes. O conjunto de significantes, no nosso caso, linguagem natural e desenhos é que permitem representar, de forma explícita, os invariantes operatórios.

Os procedimentos mobilizados pelos alunos estão direcionados na realização de uma determinada meta (resolver a situação-problema proposta), envolvendo estratégias (verdadeiras ou falsas) como, por exemplo: obtenção do reflexo de uma figura, utilizando dobradura e decalque; obtenção do reflexo de uma figura, utilizando a ferramenta simetria axial do *Cabri*; obtenção do reflexo de uma figura através de uma referência horizontal, vertical ou diagonal e na utilização de conceitos e processos neles envolvidos.

Nessa abordagem teórica, a Teoria dos Campos Conceituais, desenvolvida por Vergnaud (1996), mostra-se adequada para a análise de procedimentos e invariantes operatórios possivelmente utilizados pelos alunos nas situações-problema, envolvendo a simetria axial. Nesse processo, os alunos agem, refletem, formulam, fornecendo assim dados para nossa pesquisa. Para a coleta de dados, torna-se necessário a teoria das situações, onde nosso foco central, nessa teoria, será nas situações a-didáticas que pretendemos que os nossos alunos selecionados vivenciem.

2.2 Teoria das Situações

Na década de 1980, a teoria das situações de Brousseau (1986) se estabelece como um modelo teórico do processo de aprendizagem, envolvendo três partes: professor, aluno e saber matemático[4]. Essas três partes são influenciadas pelo "meio". O "meio" pode ser entendido como sendo o universo em que alunos e professor estão inseridos, a bagagem de conhecimento do aluno, os conhecimentos do professor, as condições materiais da sala de aula, entre outros. "É através do 'meio' que o professor age para provocar aprendizagem" (Bittar, 2000, p. 79).

Brousseau (1986) define uma situação didática como sendo:

> (...) um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e ou implicitamente entre um aluno ou grupo de alunos, num certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o professor) com a finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou em vias de constituição (...) o trabalho do aluno deveria, pelo menos em parte, reproduzir características do trabalho científico propriamente dito, como garantia de uma construção efetiva de conhecimentos pertinentes (Brousseau, 1986, apud Freitas, 2002, p. 67).

Na situação de sala de aula, compete ao professor criar um ambiente propício e questionador, em que as situações didáticas, desenvolvidas por este, devem envolver vários elementos, e estar relacionadas com diversos contextos, de acordo com o planejamento feito por ele, visando à construção de um conhecimento e no nosso caso de simetria axial. Deve-se levar em consideração o grau de conhecimento que acompanha o aluno, conduzindo-o ao conhecimento mais amplo e determinado na passagem desse saber. "O envolvimento do aluno dependerá da estruturação das diferentes atividades de aprendizagem através de uma situação didática" (Freitas, 2002, p. 66). Em nossa pesquisa, vamos propor situações-problema e atividades em diferentes níveis de dificuldades, que favoreçam o aparecimento de diferentes

[4] Na página 53, na Seção 2.1, temos esquematizado a relação entre essas três partes.

situações a-didáticas e através da análise das produções dos alunos nessas situações, vamos investigar os procedimentos e possíveis invariante operatórios utilizados pelo grupo e destacar alguns deles. Segundo Freitas, "através da análise das situações didáticas, é possível investigar toda a problemática da aprendizagem matemática e desvelar aspectos que ocorrem durante a resolução de problemas e a elaboração de conceitos pelos alunos" (ibid., p. 67).

Um conhecimento se constrói (pelo aluno) a partir de interações entre os elementos propostos nas situações-problema e os conhecimentos anteriores de que já dispõe. Um aluno, diante de uma situação-problema a resolver, pode dispor de várias idéias sobre uma mesma noção e mobilizar uma ou outra em função da situação-problema proposta. Estas idéias "podem ser incompletas, errôneas, ou ainda, localmente ou globalmente verdadeiras, tendo em vista que cada uma tem um certo domínio de validade" (Lima & Chaachoua, 2003, p. 2).

No decorrer da situação didática, isto é, em uma "situação de sala de aula que envolve como atores professor e alunos e que tem como objeto de interesse um certo saber disciplinar" (Gravina, 2001, p. 47), são evidenciadas diferentes fases (contextualização, situação a-didática e institucionalização) deste processo, e se destacam os diferentes papéis dos atores envolvidos nessa situação de sala de aula. Gravina (2001) nos apresenta um modelo na Figura 2.11, que descreve muito bem o desenrolar da situação didática.

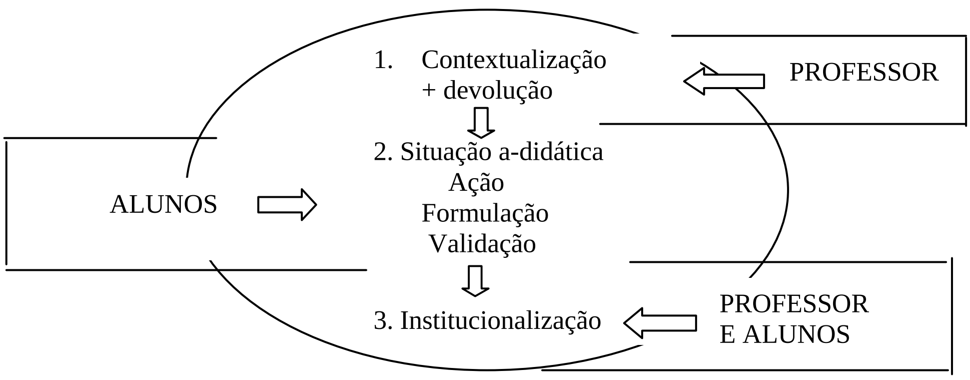


Figura 2.11. Modelo que descreve o desenrolar da situação didática. (Gravina, 2001, p. 48).

A primeira fase é a contextualização. No processo ensino aprendizagem que intenta a apropriação de um certo saber disciplinar, isto é, no início de uma situação problema, o saber (objeto de aprendizagem) ainda se encontra descontextualizado, mas cabe ao professor a tarefa de contextualização desse saber. "Trata-se da apresentação de um problema de forma a provocar nos alunos um processo de investigação similar ao que vive o matemático em seu processo de criação e que intenta a apropriação de saber matemático" (Gravina, 2001, p. 48). Faz parte desse processo a situação de devolução, de acordo com Freitas (2002):

> A devolução aqui tem o significado de transferência de responsabilidade, uma atividade na qual o professor, além de comunicar o enunciado, procura agir de tal forma que o aluno aceite o desafio de resolvê-lo como se o problema fosse seu, e não somente porque o professor quer. Se o aluno toma para si a convicção de sua necessidade de resolução do problema, ou seja, se ele aceita participar desse desafio intelectual e se ele consegue sucesso nesse seu empreendimento, então se inicia o processo da aprendizagem (Freitas, 2002, p. 68).

A situação de devolução ocorre quando o professor consegue fazer com que os alunos se apropriem ou se responsabilizem pela resolução de situações-problema, aceitando como seu. A partir da apropriação do problema proposto, começa a segunda fase do desenrolar da situação didática - a situação a-didática. A definição de Brousseau para situação a-didática é a seguinte:

> Quando o aluno se torna capaz de pôr em funcionamento e utilizar por si mesmo o saber que está construindo, em situação não prevista em qualquer contexto de ensino e também na ausência de qualquer professor, está ocorrendo então o que pode ser chamado de situação a-didática (Brousseau, 1986, p. 69).

A noção de *situação a-didática* descrita realça o novo papel do professor, que antes era o centro de todas as atenções, e passa a ter uma atuação mais discreta. Neste momento, cabe ao aluno a maior responsabilidade na sua produção de conhecimento, no seu aprendizado. Almouloud (2000), quando escreve sobre a situação a-didática define-a como sendo uma situação na qual se oculta a intenção de ensinar, mas é específica do saber. Distingue-se pelos seguintes fatos:

> O problema matemático é escolhido de modo que possa fazer o aluno agir, falar, refletir, evoluir por sua própria iniciativa.
> O professor se recusa a intervir como aquele que propõe os conhecimentos que ele gostaria de provocar.
> O problema é escolhido para que o aluno adquira novos conhecimentos inteiramente justificados pela lógica interna da situação (Algmouloud, 2000, p. 99-100).

Quando elaboramos nossa seqüência didática, procuramos problemas que permitissem aos alunos envolverem-se em situações como as descritas acima, e nesse processo mobilizassem conceitos relacionados com figuras simétricas e de eixo de simetria. Brousseau (1986) identifica uma tipologia de situações para o desenrolar de situações a-didáticas em Matemática, que são conhecidas como situação a-didática de ação, de formulação e de validação e estas se entrelaçam umas em relação às outras.

As situações-problema propostas devem possibilitar ao aluno fazer determinadas escolhas de ações e tentativas de encontrar a solução, geralmente baseadas em um modelo implícito, nas quais o conhecimento a ser adquirido começa a ser utilizado. Uma situação deve permitir que o aluno analise o resultado de sua ação, deixe como está ou melhore alguns modelos para aceitar outros, mas sem a intervenção do professor, graças a sua avaliação. A situação a-didática de ação, no entanto, não exige que o aluno explicite ou valide suas ações.

Numa situação a-didática de formulação, "o aluno já utiliza, na solução do problema estudado, alguns modelos ou esquemas teóricos explícitos, além de mostrar um evidente trabalho com informações teóricas de uma forma bem mais elaborada, podendo ainda utilizar uma linguagem mais apropriada para viabilizar esse uso da teoria" (Freitas, 2002, p.79).

> Uma dialética de formulação consistiria em estabelecer progressivamente uma linguagem que todos pudessem compreender que levasse em conta os objetos e as relações relevantes da situação, num modo adequado (em outras palavras, de modo a permitir raciocínios e ações úteis). (...) A construção de tal linguagem ou de uma linguagem possibilita a explicação das ações e dos modelos de ação (Brousseau, 1997, p. 12).

Através da linguagem, que inclui os conhecimentos pretendidos, os alunos passam a explicitar os modelos ou esquemas por eles utilizados e isto pode ser feito em discussões conjuntas ou apresentando individualmente suas respostas ou suas justificativas. As situações de formulação caracterizam-se pelo fato de não haver exigência da explicitação dos porquês da validade das estratégias utilizadas e também por não haver uma cobrança em justificá-las. Entretanto, algumas justificativas podem ocorrer espontaneamente.

As situações a-didática de validação são aquelas em que:

> o aluno já utiliza mecanismo de prova e em que o saber é usado com esta finalidade. (...). O trabalho do aluno não se refere somente às informações em torno do conhecimento, mas sim a certas afirmações, elaborações, declarações a propósito deste conhecimento. Nestas situações é preciso elaborar algum tipo de prova daquilo que já se afirmou de outra forma pela a ação (Freitas, 2002, p. 80).

Numa situação a-didática de validação, o aluno deve dizer porque o modelo que criou é válido e produzir justificativas com a finalidade de provar a validade de suas afirmações que foram formuladas nas fases de ação e de formulação. O aluno "tem que justificar a exatidão e a relevância de seu modelo e tem que prover possíveis validações, tanto semânticas como sintática" (Brousseau, 1997, p.37); por outro lado, o opositor (que pode ser um colega, ou o professor) solicita explicações adicionais, recusa as que ele não entendeu ou as que não está de pleno acordo. Nesse processo, aparecem teorias inválidas ou incompletas. A partir dessas discussões, refletindo e revendo suas opiniões, o aluno pode querer trocar a teoria falsa por uma teoria que seja verdadeira.

Analisamos o que acontece, quando ao aluno é proposto a resolver alguns problemas envolvendo o conceito de simetria axial, utilizando-se, por exemplo, o papel quadriculado. São dadas as seguintes situações para que resolva: na primeira atividade proposta, ele deve refletir a figura dada em relação a um eixo horizontal de simetria; na segunda atividade, deve refleti-la em relação a um eixo vertical de simetria. A seguir, são propostas atividades onde deve refletir a figura em relação a um eixo oblíquo de simetria. Ao aluno é deixada a tarefa de resolver tais situações, criando condições e conhecimentos para a resolução das situações propostas.

Nas duas primeiras atividades (eixo paralelo às bordas superior e inferior da página), baseados na literatura, talvez não apareçam grandes problemas; mas, na terceira, o eixo oblíquo foge um pouco do tradicional, pode se constituir numa grande dificuldade para o aluno, desestabilizando-o num primeiro momento; mas, se ele se envolver, poderá evoluir a partir de suas ações e de seus conhecimentos, para a aprendizagem do saber escolar. No decorrer do trabalho do aluno, deverão ocorrer situações a-didáticas de ação, formulação e validação.

Na fase de institucionalização do saber, que deve ser guiada pelo professor, é importante auxiliá-los (os alunos) a fazer uma síntese da atividade, descrevendo os seus avanços e recuos, os objetivos que tinham em mente e as estratégias que seguiram. As situações de institucionalização são aquelas em que "o professor fixa convencionalmente o estatuto cognitivo do saber. Por esta razão, eles alteram este estatuto" (Brousseau, 1997, p.37). A necessidade dessas situações, segundo Freitas (2000), "se justifica diante da exigência de se fixar, por uma convenção, o estatuto cognitivo de um conhecimento. Além disso, é preciso também explicitar esse conhecimento para sua funcionalidade em situações posteriores" (Freitas, 2000, p.

83).

Uma vez construído e validado o conhecimento novo, passa a fazer parte da "herança" matemática do grupo e deve ser traduzido numa linguagem formal. As situações de institucionalização, quando propostas, visam a dar "acabamento" ao conhecimento construído pelo aluno ou "mesmo trabalhar no sentido de descartar possíveis aspectos não valorizados na perspectiva do saber socialmente formalizado" (Freitas, 1999, p.76). Mas proporcionar uma fase de institucionalização prematura pode provocar uma quebra na construção do conceito de simetria axial pelos alunos e uma fase de institucionalização atrasada pode reforçar interpretações inadequadas.

Na próxima seção (2.3), apresentamos a metodologia da pesquisa.

2.3 Engenharia Didática

Para o nosso trabalho experimental, elaboramos e aplicamos dois tipos de atividades: uma, com a utilização de lápis e papel; a outra, com a utilização do computador num universo de alunos do quarto ciclo (7ª série) do Ensino Fundamental.

Esse trabalho apóia-se nos princípios da Engenharia didática, que se caracteriza por "ser um esquema experimental baseado em realizações didáticas em classe, isto é, sobre a concepção, a realização, a observação e na análise de seqüências de ensino" (Artigue, 1988, p. 285).

Régine Douady (1993), empenhada nas relações ensino-aprendizagem em Matemática, entre professor e aluno, refere-se à engenharia didática como sendo:

> (...) uma seqüência de aula(s) concebida(s), organizada(s) e articuladas(s) no tempo, de forma coerente, por um professor-engenheiro para realizar um projeto de aprendizagem para uma certa população de alunos. No decurso das trocas entre professor e alunos, o projeto evolui sob reações dos alunos e em função das escolhas e decisões do professor (Douady, 1993, apud Machado, 2002, p. 198).

Distinguem-se, na engenharia didática, quatro etapas (distintas e complementares) desta metodologia de pesquisa, que são: análises preliminares; concepção da seqüência e análise *a priori* das situações didáticas da engenharia; aplicação da seqüência didática (experimentação) e análise *a posteriori e validação*. Em nossa experimentação, não realizaremos a Engenharia Didática como um todo, apenas uma micro-engenharia. As pesquisas de micro-engenharia "são aquelas que têm por objeto o estudo de um determinado assunto; elas são localizadas e levam em conta principalmente a complexidade dos fenômenos de sala de aula” (Machado, 2002, p. 197). Utilizaremos suas quatro etapas e, a seguir, descrevemos brevemente cada uma delas nas seções a seguir.

2.3.1 Análises Preliminares

A análise preliminar é a etapa de busca de aportes para o tratamento do problema sob investigação, os quais são fundamentais para esta pesquisa. Ainda nesta fase, são pesquisados os quadros teóricos que vão orientar todo o processo. Uma parte dessa etapa é apresentada neste capítulo e a outra no capítulo I.

2.3.2 Análise *a Priori*

Nessa fase, elaboramos os problemas que fizeram parte da seqüência de atividades com a utilização de lápis e papel e com o computador; foram determinadas as variáveis pertinentes ao problema e feitas algumas previsões sobre o desempenho do aluno. Levantamos as possíveis respostas a situações exploradas durante as atividades de experimentação e justificativas para tais respostas.

Para a realização da engenharia didática, consideramos que o meio é um ambiente que provoca desestabilidade de conceitos; mudança de ações, de regras e até mesmo abandono da situação proposta. A seqüência de atividades foi elaborada, contemplando os diferentes níveis de desenvolvimento dos alunos.

No capítulo I, apresentamos uma síntese de resultados de pesquisas desenvolvidas, envolvendo o nosso tema, por pesquisadores como Hart (1981), Grenier (1985), Mabuchi (2000) e outros. Estas pesquisas indicaram como influentes no desempenho dos alunos, as seguintes variáveis didáticas: complexidade da figura; posição do eixo de simetria: vertical, horizontal ou inclinado; posição relativa eixo-objeto; o tipo de papel (quadriculado ou não).

Pretendemos validar as seguintes hipóteses:

- Se os materiais didáticos sugeridos em algumas atividades contribuem na obtenção do êxito da atividade.
- Se os procedimentos: referência vertical, horizontal ou diagonal, como as pesquisas analisadas neste trabalho vêm indicando, ocorrem nas respostas dadas pelos alunos para as situações-problema relativas à simetria axial,

com a utilização de lápis e papel e computador.

- Se os invariantes 1 a 9, citados neste capítulo, p.57-65, foram identificados nas respostas dos alunos.
- Se o uso do computador é um facilitador na execução das atividades, comparando com as atividades, utilizando lápis e papel.

2.3.3 Experimentação

É nessa fase que é realizado o trabalho prático com os alunos escolhidos. Inicia-se logo que a pesquisadora faz o primeiro contato com o grupo-objeto de investigação, onde explicita os objetivos, estabelece o contrato pedagógico, faz a aplicação das seqüências de atividades e o registro de observações feitas durante esta fase, utilizando-se lápis e papel e computador, de acordo com os objetivos de pesquisa. Ocorrerá também a discussão em grupo das atividades, no final de cada categoria e fechamento pela pesquisadora das atividades que foram trabalhadas. Maiores detalhes da experimentação, bem como alunos selecionados, número de sessões, conhecimentos do grupo encontram-se no Capítulo IV, páginas, 85-88.

2.3.4 Análise *a Posteriori*

A análise *a posteriori* se apóia sobre o conjunto de dados coletados na etapa anterior: fichas de atividades, disquetes, observações feitas pela pesquisadora e pelo observador, conversas individuais ou coletivas realizadas em diversos momentos do trabalho experimental e teórico.

Confrontação dos resultados obtidos com aqueles levantados na análise *a priori*. É aqui que as hipóteses feitas se confirmam ou não. Como se trata de uma micro-engenharia, não haverá validação externa; desta forma, a validação da pesquisa foi feita internamente, pois "se baseia na confrontação entre a análise *a priori*, que por sua vez se apóia no quadro teórico, e a análise *a posteriori* (Machado, 2002, p.200).

No próximo Capítulo, descrevemos a construção da seqüência didática utilizada na pesquisa.

CAPÍTULO III

A SEQÜÊNCIA DIDÁTICA

3.1 Introdução

A seqüência que desenvolvemos foi idealizada a partir dos pressupostos teóricos descritos no capítulo anterior. Para tanto, foi estabelecido que a seqüência didática deveria contemplar situações-problema relativas ao conceito de simetria axial, por proporcionar o aparecimento de diversos procedimentos “corretos” e “incorretos”. Decidimos incluir, em nossa seqüência didática, atividades para serem desenvolvidas com a utilização de lápis e papel e com o computador, através do software *Cabri-Géomètre II*. Escolhemos as situações-problema de modo que permitissem ao aluno agir, expressar-se, refletir, evoluir por iniciativa própria, mobilizando conhecimentos antigos e novos, e com a mínima intervenção do pesquisador.

3.2 Composição da Seqüência Didática: Lápis e Papel e Computador

Na seqüência didática de nossa pesquisa, as atividades foram divididas em duas categorias de situações–problema relativas à simetria axial, que denominaremos de Categoria I e de Categoria II. Na Categoria I tanto utilizando lápis e papel quanto computador, as atividades visavam à construção, ou identificação do eixo de simetria de figuras dadas, com a finalidade de verificar conhecimentos prévios e analisar procedimentos e teoremas-em-ação dos alunos sobre o que eles entendiam por eixos de simetria de figuras. Essas atividades foram elaboradas com o intuito de amenizar as expectativas dos alunos em relação à aplicação da pesquisa; para que façam as perguntas ao pesquisador e não ao professor responsável pela turma; para que busquem as soluções dos problemas, inicialmente, sem muita interferência do pesquisador; para que justifiquem seus procedimentos; para verificarmos conhecimentos que possuem sobre o conceito de simetria e de eixo de simetria.

Somente para a Categoria I, lápis e papel, não se esperava que os alunos aceitassem as situações-problema como se fossem suas, pois eram poucas as informações que haviam recebido. Muitas destas (ortogonalidade, eqüidistância) somente foram vistas durante o momento de síntese desta categoria, de forma que, para a próxima categoria, era esperado dos alunos um maior envolvimento nas situações-problema.

Para as atividades 1 e 2, dessa Categoria, a simetria tratada deve ser vista como a simetria de uma única figura, cujo eixo a divide exatamente ao meio, originando duas partes congruentes. Para as atividades 3 e 4, enfocamos a simetria como característica de duas figuras distintas, cujos pontos correspondentes distam igualmente do eixo de simetria.

As atividades da Categoria II tinham a finalidade de verificar conhecimentos e analisar procedimentos e invariantes operatórios, utilizados pelos alunos diante da construção do simétrico de uma figura (ponto ou segmento) em relação a um eixo pré-definido. Nas atividades desta categoria, para determinar o simétrico de um segmento (ou figura) em relação a um eixo de simetria, os alunos podem construir os seguintes conceitos:

- Reconhecer que um segmento é um conjunto de pontos e que seu simétrico é o segmento determinado pelos simétricos dos pontos do segmento dado;
- Destacar que o simétrico de um segmento em relação a um eixo é outro segmento congruente ao segmento dado.

Portanto, basta determinar o simétrico das extremidades do segmento em relação ao eixo e traçar um segmento, passando por estes dois.

Acreditamos que para as situações-problema que fazem parte desta categoria, os alunos devem perceber que o simétrico de uma figura, ponto ou segmento, em relação a um eixo, é uma figura, ponto ou segmento; situado do lado oposto ao da figura inicial em relação ao eixo de simetria e podem traçar o simétrico de uma figura, ponto ou segmento, em relação ao eixo de simetria utilizando apenas a visualização e o traçado será feito à mão-livre. Estes conceitos são suficientes para os alunos e bastam para a execução da tarefa.

Essas categorias foram trabalhadas em dois momentos distintos. No primeiro momento, os alunos trabalharam com atividades, utilizando lápis e papel; no segundo, com atividades utilizando o computador. As atividades foram trabalhadas, tanto individuais quanto coletivamente. Primeiro, em situações de ação, formulação e alguma validação, e depois, em situações de validação e institucionalização. O objetivo das discussões em grupo foi de favorecer a identificação de procedimentos e invariantes operatórios, e o aparecimento de situações de validação, culminando no trabalho institucionalizado, realizado no final da aplicação das atividades de cada Categoria.

Quatro atividades fazem parte da Categoria I e oito atividades fazem parte da Categoria II da seqüência didática com a utilização de lápis e papel. Para a seqüência didática com a utilização do computador, duas atividades fazem parte da Categoria I e cinco atividades fazem parte da Categoria II. As atividades da seqüência didática encontram-se nos Anexos.

Na elaboração das atividades, consideramos: a posição do eixo de simetria, o tipo de papel, a natureza do objeto e as ferramentas concretas. A posição do eixo de simetria, que pode ser horizontal, vertical ou inclinado, ou inexistente (somente para a Categoria I). A importância de trabalharmos com os alunos o simétrico de uma figura (ponto, ou segmento), em relação a um eixo de simetria, que pode estar nas posições indicadas, é para que percebam o que ocorre com a imagem em cada um dos três casos citados. Pesquisas como as de Grenier (1985) e de Mabuchi (2000), indicam que a posição do eixo de simetria na figura interfere nos resultados das situações-problema, principalmente nas atividades onde o eixo de simetria é inclinado. Em nossa seqüência, essas posições do eixo na figura são propostas para analisarmos se a posição deste ajudará ou dificultará a execução da tarefa proposta.

Outra consideração foi o tipo de papel: quadriculado (ou não) e transparente. Quando a atividade é proposta no papel quadriculado, pode ser que as linhas da malha contribuam na execução desta, pois a contagem de quadradinhos facilita a preservação do tamanho, forma e distância da figura ao eixo de simetria. O papel transparente foi proposto pela facilidade e rapidez, utilizando decalque, na obtenção do simétrico de uma figura em relação a um eixo de simetria, principalmente quando o eixo não for paralelo a uma das bordas do papel ou quando a figura dada interceptar o eixo de simetria.

Consideramos, ainda, a natureza do objeto: ponto, segmento ou uma figura qualquer, não necessariamente nesta ordem. Na seqüência didática, exploramos estes três objetos, pois segundo Grenier (1989), não é suficiente, para o aluno saber determinar o simétrico de um ponto em relação a um eixo, para que ele saiba determinar o simétrico de um segmento em relação a este.

Os materiais disponíveis para os alunos, nas Categorias I e II, com a utilização de lápis e papel, foram os seguintes: lápis, régua graduada, esquadro, compasso, dobradura, papel transparente, papel quadriculado e com a utilização do computador, as ferramentas do *software Cabri-géomètre II*.

Para ambas as categorias, consideramos que os invariantes, suscetíveis de serem construídos pelos alunos, podem ser os citados e comentados no Capítulo II, Seção 2.1, p.57-64.

Para as duas Categorias com lápis e papel ou computador, consideramos que podem ocorrer os seguintes procedimentos de resolução das situações-problema: referência horizontal, referência vertical, referência diagonal, bem como seus correlatos, sendo o objeto uma figura, um ponto ou um segmento, independentemente da posição do eixo de simetria. Estes procedimentos surgiram em outras pesquisas por pesquisadores como Hart (1981), Grenier (1985), Gutiérrez & Jaime (1987), Webber (2000), Mabuchi (2001), e outros. Os invariantes operatórios possivelmente associados a estes procedimentos também foram identificados na pesquisa de Derbre e Mouffak (2004).

No Capítulo II, Seção 2.1, p. 62-64, discutimos esses procedimentos e os invariantes associados a estes.

3.3 Considerações sobre os Materiais Didáticos que são Propostos em nossa Seqüência Didática

Em algumas das atividades de nossa seqüência, propusemos a utilização de diversos materiais didáticos. Entre tantos materiais que poderiam ser utilizados, tivemos que optar por alguns deles e procuramos adequar o objeto (ponto, segmento, figura) à atividade e ao material. Optamos, assim, pelos seguintes materiais: dobradura; papel quadriculado; papel transparente; régua, esquadro e compasso;

computador. Não é nosso objetivo ensinar aos alunos como utilizá-los, mas ver como eles procedem e que estratégias criam para utilizá-los.

Os diversos recursos didáticos, devido à grande potencialidade que oferecem à exploração de conceitos geométricos, devem ser considerados e, dependendo dos conhecimentos prévios dos alunos, podem auxiliá-los na previsão de soluções sem a necessidade de manipular o material didático, pois essas soluções têm como referências suas experiências anteriores.

Faremos algumas considerações sobre a escolha destes materiais:

Dobraduras, recortes e decalque: O conceito de simetria pode ser trabalhado com dobraduras e recortes ou dobraduras e decalque. Ripplinger (1998), no seu artigo Simetria: “O homem na busca da ordem e da regularidade” publicado na Revista Pró-Mat Paraná, considera a importância de trabalhar com dobraduras e recortes em sala de aulas:

> Através de atividades simples como dobraduras e recortes, realizadas de modo prazeroso pela criança, esta pode experimentar e compreender os movimentos realizados com um certo padrão, o que irá contribuir para que, mais tarde ela possa identificar os padrões ou regularidades em uma figura ou uma seqüência delas que lhe for apresentada (Ripplinger, 1998, p. 21-22).

Também podemos encontrar, neste artigo, resultados do trabalho desenvolvido em sala de aula:

> Quanto ao nosso trabalho, com ele pudemos obter resultados positivos e motivação para a aprendizagem, pois nele as crianças puderam colocar em prática sua criatividade, inovando, criando e inventando. Pudemos assim constatar com satisfação, não a realização de cópias, mas resultados efetivos produzidos através do trabalho pessoal. Desse modo, conseguimos realizar o ensino de Matemática que tem sido um desafio para todos os educadores e consiste em muito mais do que exercício, repetição e memorização (Ripplinger, 1998, p. 22).

Atividades geométricas desenvolvidas com dobraduras e recortes podem ser bem sucedidas, desde que se propiciem condições para que os alunos pensem, reflitam, resolvam problemas e manipulem diversos recursos disponíveis, fugindo da maneira antiga de transmitir uma série de informações prontas e acabadas, numa atitude passiva e submissa.

O recurso de dobrar o papel e fazer o decalque de figuras é um procedimento conhecido dos alunos e esperado em suas respostas, nas atividades, sugerindo esse tipo de material.

Papel quadriculado: O papel quadriculado, além de ser material de baixo custo, possui várias utilidades, como construção de faixas decorativas e mosaicos, ladrilhamento formado por motivos geométricos, construção de figuras simétricas, permitindo operações de rotação, translação e reflexão.

É um material que pode auxiliar o professor no desenvolvimento de habilidades essenciais ao aprendizado da geometria, favorecendo o desenvolvimento de atividades diversificadas. O papel quadriculado facilita a visualização da figura, fornecendo facilmente informações sobre perímetro e área. Especificamente em relação à simetria, este recurso nos permite visualizar como será a imagem da figura final e sua distância em relação ao eixo de simetria.

O papel quadriculado pode passar por diversas variações e deformações que chamaremos de malhas, que podem ser: malha quadriculada, triangular, retangular, pontilhada e outros. Em nosso trabalho, optamos pela malha quadriculada, uma vez que ela parece ser familiar a muitos alunos e os auxilia na observação das formas geométricas e da extração das propriedades das figuras consideradas. No desenvolvimento do conceito de simetria, o papel quadriculado permite-nos desenvolver atividades de observação, desenho e completamento das partes que faltam de uma figura; translação, reflexão e rotação de figuras; construção de mosaicos.

As pesquisas citadas neste estudo relatam a influência da variação do tipo de papel (quadriculado ou não) nas respostas dos alunos. Na pesquisa de Denys e Grenier (1986), "Um estudo comparativo entre França e Japão", na análise a *priori* é comentado que "o tipo de papel, quadriculado ou não, particularmente o primeiro, poderia trazer dificuldades no caso de eixos oblíquos, pois as direções verticais e horizontais seriam deduzidas pelas linhas da malha" (Denys & Grenier, 1986 apud Mabuchi, 2001, p. 48).

Papel transparente: Esse material didático pode ser usado nas atividades que envolvem o simétrico de figuras em relação a um eixo de simetria. Por exemplo, onde é solicitado que se construa a parte que falta de uma figura dada, o aluno poderá utilizá-lo para reproduzir a outra parte, completando-a. O papel transparente se sobressai pelo fato de que: se considerarmos uma figura, juntamente com seu eixo, desenhada de um lado do papel transparente; virarmos esta figura, espacialmente, em 180°, preservando a posição da base da figura e sobrepondo os eixos de simetria; e decalcarmos a figura sobre o papel de resposta, teremos sua imagem impressa no semiplano oposto.

Régua, esquadro e compasso: A régua é um instrumento muito comum entre os alunos, um instrumento básico da sala de aula e útil para o traçado de retas. O esquadro é um instrumento empregado para o traçado de perpendiculares e paralelas, principalmente, quando utilizado com o auxílio da régua; o compasso serve para descrever circunferências, arcos de circunferências e outras construções, e é um ótimo auxiliar no transporte de medidas.

Segundo os PCN's (1987), um aspecto que merece atenção no 3º Ciclo é: "o ensino de procedimentos de construção com régua e compasso e o uso de outros instrumentos (esquadro, transferidor), estabelecendo-se a relação entre tais procedimentos e as propriedades geométricas que neles estão presentes" (Brasil, 1987, p.68-69). Ainda, quando conceitos e procedimentos são mencionados, sugerem que sejam propostas, aos alunos, a resolução de situações-problema que envolvam a obtenção da mediatriz de um segmento, da bissetriz de um ângulo, de retas paralelas e perpendiculares e de alguns ângulos notáveis, fazendo uso de instrumentos, como régua, compasso, esquadro e transferidor. Esses conceitos e a utilização destes materiais são essenciais e fundamentais no estudo da simetria.

Em algumas situações-problema, sugerimos o uso destes materiais, pois normalmente atividades geométricas baseiam-se em procedimentos de observação, representação e construção de figuras com instrumentos de medida principalmente pela precisão nas respostas das situações problemas. O manuseio destes instrumentos permite aos alunos fazer conjecturas sobre algumas propriedades dessas figuras.

C**omputador:** O computador é visto "como mais um instrumento de auxílio a um ensino onde o próprio aluno constrói o seu conhecimento" (Bittar, 2000, p. 93), isto é, como mais um instrumento didático a ser utilizado em nossa pesquisa, e que constitui mais um recurso de acesso do aluno à apropriação dos conhecimentos de forma compreensiva, construtiva e dinâmica.

Muitos *softwares*, como por exemplo, o *Cabri Géomètre II*, vêm sendo desenvolvidos com o intuito de motivar o ensino e aprendizagem como forma dos alunos produzirem conhecimento pelas suas possibilidades de experimentar, de criar, de conjecturar e de comprovar. Com o auxílio deste *software,* são inúmeras as situações didáticas que podemos elaborar, para a construção do conceito de simetria, tendo em vista que essas representações dinâmicas possuem ferramentas para rotacionar, refletir ou mesmo transladar, porém, não podem sofrer qualquer alteração em suas características essenciais.

Por todos os motivos citados acima, acrescentamos o computador como material concreto e atrelado a este o *software Cabri-Géomètre II.*

O *software Cabri-Géomètre II* é um programa que:

> (...) foi desenvolvido para permitir a exploração do universo da geometria elementar...Coloca a disposição do usuário um mundo que o geômetra grego imaginou sem jamais pensar que ele poderia estar um dia disponível para uma manipulação efetiva, uma manipulação direta (Laborde & Caponi, 1994, p. 9).

Neste *software,* temos a possibilidade de efetuar desenhos, como a construção de figuras, onde o processo de comunicação com o computador se baseia na descrição explícita das figuras (Baldin & Villagra, 2002). Esta explicitação é feita através da utilização de ferramentas disponibilizadas pelo aplicativo, entre elas, encontramos a simetria axial, ferramenta principal para o nosso estudo. Cabe ressaltar que o processo de construção no *Cabri* está intimamente ligado com a geometria euclidiana plana.

Entre algumas das possibilidades que o programa *Cabri-Géomètre II* pode oferecer, destacam-se: experimentação gráfica; conjunto de construções elementares disponíveis no seu menu; a manipulação direta do desenho-*Cabri*[1]. Dentre as justificativas pela escolha deste software, o destacamos por:

- apresentar tela interativa que permite construções geométricas manipuláveis, principalmente na elaboração do traçado de uma figura geométrica, através de simples toques no mouse, permite, por exemplo, traçar retas, retas paralelas,

---

[1] *Desenho-Cabri* é uma designação dada por Laborde para um desenho solução de um problema de construção realizado com o *Cabri* (Laborde & Caponi, 1994, p. 9).

retas perpendiculares, segmentos, traçar a bissetriz e a mediatriz, medir segmentos e ângulos, etc.;

- possuir, numa das janelas, a função *simetria axial*, que realiza automaticamente a operação de associar a cada objeto construído seu reflexo relativo a uma reta dada;
- apresentar comandos fáceis e linguagem apropriada para estimular o desenvolvimento de raciocínio matemático;
- possibilitar a supressão de algumas opções, em função dos objetivos definidos e do nível etário dos alunos;
- possibilitar a revisão de construções feitas pelos alunos, servindo como meio complementar das observações e dos registos feitos no desenrolar das atividades.

Como trabalhamos com diversos materiais concretos e com o computador, isso nos permite uma "comparação" na elaboração de uma figura simétrica pelo aluno no programa *Cabri Géomètre II* e em uma folha de papel e determinado material didático. É possível perceber as facilidades e a rapidez na construção de uma figura com a simplicidade do manuseio de comandos oferecidos pelo *software*. Encontrar o simétrico de uma figura em relação a uma reta tradicionalmente numa folha de papel, leva muito tempo e, às vezes, torna muito mais complexo por causa das limitações existentes, tais como, do material de desenho: régua, esquadro e compasso; papel transparente; papel quadriculado; espaço e tempo. Não podemos nos esquecer que, durante sua vida escolar, o aluno nem sempre teve contato com estes materiais e usá-los, às vezes se torna um grande problema.

Algumas considerações sobre as ferramentas do *software Cabri Géomètre II*.

No *Cabri Géomètre II*, só é possível utilizar uma ferramenta de construção a cada vez. Seus comandos de criação (retas, pontos, polígonos, entre outros) e de construção (retas, paralelas, perpendiculares, ponto médio, bissetrizes, entre outros), permanecem disponíveis na barra de ferramentas de sua tela.

As ferramentas são exibidas como grupos de botões na barra de ferramentas do *Cabri* no topo da tela. Os botões denominados de *caixas de ferramentas* são referenciados da esquerda para a direita. Em nosso texto, muitas vezes estaremos chamando de caixa n.° 1 (ponteiro), caixa n.º 2 (pontos), sucessivamente, até a última caixa de n.° 11 (desenhar), como podemos observar na Figura 3.5. Comentaremos sobre algumas dessas caixas de ferramentas que serão úteis na experimentação. Na

Figura 3.5, destacaremos a barra de ferramentas do *Cabri*, sobre a qual os alunos poderão selecioná-las, no decorrer das atividades.

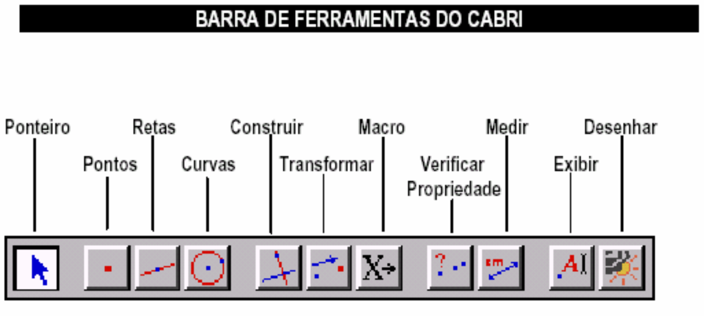


Figura 3.5. Barra de Ferramentas do *Cabri*.

A caixa *transformar* contém as ferramentas associadas aos recursos de transformação do *Cabri Géomètre II*. "Estes recursos permitem transladar, refletir, rotacionar e dilatar objetos de acordo com fatores e valores angulares especificados" (Texas, 1999, p. 8). As transformações aparecem no *Cabri* como ferramentas de construção, permitindo a obtenção das imagens de qualquer objeto geométrico (ponto, segmento, reta, figura, entre outros). Esta caixa oferece as seguintes construções: *simetria axial*, *simetria central*, *translação*, *rotação*, *homotetia e inversão*. A caixa *retas* contém as ferramentas associadas aos recursos de criação de retas, onde, por exemplo: a ferramenta r*eta* cria uma reta, através de um ponto, com uma inclinação especificada. A inclinação pode ser especificada em um espaço livre, utilizando o movimento do *mouse*, ou definida por um segundo ponto. Na caixa *curvas* encontramos a ferramenta c*ircunferência,* que cria uma circunferência definida por um centro e um raio. Na caixa *construi*r, a ferramenta *ponto médio* cria o ponto médio de um segmento ou vetor, em um lado de um polígono ou entre dois pontos. A m*ediatriz* cria uma reta mediatriz de um segmento, vetor, lado de um polígono ou entre dois pontos. Na caixa *medir,* a ferramenta d*istância e comprimento* calcula e exibe distância, comprimento, perímetro, circunferência e raio, conforme o objeto selecionado. Na caixa *exibir*, a ferramenta c*omentários* permite criar uma caixa de edição para digitar um texto de comentário.

Na barra de *menu*, encontramos o botão do *arquivo,* que é composto de sub-caixas: n*ovo, abrir, fechar, salvar, salvar como, mostrar página, configurar página, imprimir e sair*. A caixa *arquivo* será extremamente importante em nossa experimentação, uma vez que os alunos devem utilizá-la em vários momentos.

Discutiremos as ferramentas desta caixa na terceira parte da experimentação (Capítulo VI, p. 166-167). Depois de resolvidas, as atividades devem ser armazenadas, utilizando a opção *salvar* e, por segurança, os alunos devem também salvá-las em disquete e, para isto, devem utilizar a opção *salvar como*.

Através da leitura dos disquetes, do recurso de revisar construções e das folhas de atividades entregues, será possível analisar os procedimentos e identificar teoremas-em-ação utilizados pelos alunos.

A análise de "erros" auxiliará o trabalho de análise das produções dos alunos. Em nossas atividades, estaremos procurando analisar esses "erros", através de questionamentos feitos aos alunos; da análise das respostas; da descrição dos procedimentos; do recurso de revisar construções. Programas desse tipo constituem ferramentas poderosas na identificação de dificuldades e fontes de erros, inerentes ao aprendizado.

CAPÍTULO IV

EXPERIMENTAÇÃO DAS CATEGORIAS I E II
– LÁPIS E PAPEL E COMPUTADOR -

4.1 Introdução

Este capítulo trata da parte experimental da pesquisa. Nossa seqüência didática utiliza tanto lápis e papel quanto o computador. Para melhor apresentação, dividiremos este capítulo em quatro partes. As partes I e II contêm, respectivamente, a experimentação das Categorias I e II com lápis e papel e, as Partes III e IV contêm, respectivamente, a experimentação das Categorias I e II com o computador. Cada uma dessas partes, com lápis e papel ou computador, apresentaremos a análise *a priori*, a experimentação e análise *a posteriori* das atividades que fazem parte da respectiva categoria. Apresentamos ainda as sínteses dos momentos coletivos e das categorias. Optamos, em nosso trabalho, em usar o tempo presente para a análise *a priori* e o tempo pretérito para a análise *a posteriori*.

4.2 Informações sobre o Local e sobre o Grupo de Alunos Selecionados

a) Caracterização do local e sujeitos colaboradores da pesquisa

A escola municipal onde realizamos a parte experimental situa-se na periferia da Cidade de Campo Grande – MS. Possui salas de aula amplas, arejadas e sala de laboratório de informática equipada com 12 microcomputadores. A pesquisa teve a participação de alunos da 7ª série do Ensino Fundamental. Este nível escolar foi escolhido, pois se pressupõe que eles já tenham conhecimentos básicos de geometria plana.

Cada categoria foi aplicada em duas sessões: uma para lápis e papel; outra, para o computador, que foram desenvolvidas no horário de aula dos alunos, mas com a disponibilidade de três horas-aula. Cada ficha teve aproximadamente dez minutos para ser executada. Houve uma fase de familiarização do software, que foi desenvolvida em uma hora-aula, num dia anterior ao da aplicação da seqüência didática com a utilização do computador.

As atividades de lápis e papel foram trabalhadas com os vinte e sete alunos da sala de aula escolhida. No computador, optamos por trabalhar com apenas 10 alunos sorteados do grupo, para que cada um ocupasse uma máquina. Com número reduzido de alunos, tornou-se mais fácil analisar procedimentos, escolhas e formas de uso das ferramentas do *Cabri* e algumas vezes questioná-los sobre seus procedimentos nas situações-problema sugeridas, para assim identificarmos os prováveis invariantes operatórios por eles utilizados.

Os nomes dos sujeitos colaboradores desta pesquisa serão identificados por Aluno x, com x variando de 1 a 27. Os alunos sorteados para trabalharem as situações-problema no computador foram os alunos: 1, 6, 7, 9, 12, 14, 15, 18, 21 e 26.

b) Conhecimentos do grupo de alunos selecionados.

Segundo o professor da sala de aula, os alunos não tiveram contato com o conceito de simetria no ano de realização da pesquisa e nem no ano anterior, uma vez que também foi o professor deles na 6ª série. Isto não quer dizer que os alunos não trouxeram o conceito de anos anteriores ou que não tenham estudado fora do contexto escolar. Por outro lado, o conceito de simetria é sugerido no livro didático adotado pela escola, mas não vem sendo trabalhado pelo professor desta turma.

O grupo selecionado já trabalhou com: dobraduras, por exemplo, na construção de um quadrado, utilizando dobraduras e recortes; papel quadriculado no cálculo de áreas de figuras planas; régua, esquadro e compasso em atividades que envolviam a construção de retas paralelas, perpendiculares, cópias de medidas, mediatriz de um segmento; papel transparente na cópia de mapas, e cópia e decalque de figuras. Eles, freqüentemente, têm aulas no laboratório de informática da escola, estando, portanto, familiarizados com o computador, mas não com o *software Cabri Géomètre II*, utilizado nesta pesquisa.

4.3 Informações Gerais Apresentadas aos Alunos sobre o Desenrolar das Atividades

Antes da aplicação da seqüência didática, algumas informações gerais sobre a forma de condução das atividades e da pesquisa foram fornecidas pela pesquisadora para o grupo de alunos selecionados.

A pesquisa de campo ocorreu com a presença em sala do professor responsável pela turma, como observador, e não interferiu nas atividades. Os alunos foram informados a respeito da realização da pesquisa, com bastante antecedência e que as atividades seriam conduzidas pela pesquisadora e que trabalhariam com situações-problema com vários materiais concretos; entre eles, o computador.

A pesquisadora apresentou-se à classe e explicou os objetivos da pesquisa (analisar os procedimentos e teoremas-em-ação, dos alunos, diante de situações-problema com diversos materiais) e a metodologia a ser utilizada. Esclareceu também que eles trabalhariam com situações-problema em forma de fichas de atividades, fazendo uso de diversos materiais didáticos, sem o intuito de lhes atribuir um conceito (nota), mas que a participação de todos os alunos seria de grande importância para o seu desenvolvimento.

Os alunos trabalharam respeitando e aceitando as regras citadas a seguir.

- as atividades serão distribuídas em fichas, onde colocar o seu nome torna-se desnecessário, garantindo assim o anonimato;
- as atividades só poderão ter início após a leitura do enunciado pela pesquisadora;
- as atividades no computador serão gravadas em disquete, e não lhes serão devolvidos;
- os arquivos das atividades no computador só poderão ser abertos após a autorização da pesquisadora;
- as atividades com lápis e papel não lhes serão devolvidas;
- na execução das atividades, terão permissão para se comunicar somente com a pesquisadora;
- as perguntas serão feitas, particularmente, para a pesquisadora. Não poderão fazer perguntas em voz-alta;
- é proibido olhar e copiar o trabalho do colega;

- não será permitido o uso de borracha ou corretivo durante as atividades, a menos que sejam autorizados pela pesquisadora;
- as fichas, depois de entregues à pesquisadora, não lhes serão devolvidas;
- no término da aplicação de cada categoria, ocorrerão momentos de discussões coletivas das atividades sugeridas (todos os alunos e a pesquisadora), que serão gravadas e correção das atividades pela pesquisadora.

Os alunos podem trazer este o conceito de simetria e eixo de simetria na sua bagagem de conhecimentos anteriores. Optamos por não falar nada com eles sobre este tema, antes da aplicação da categoria I com a utilização de lápis e papel, pois pretendíamos ver qual o conceito de simetria que trazem e como agem diante das situações propostas. Para a primeira categoria, usando lápis e papel, os alunos trabalharão com idéias espontâneas e também as advindas da atividade de dobradura feita no início da experimentação, que comentaremos na Seção 4.5 (p.101-102). Na categoria II, eles trabalharam com os conceitos anteriores à aplicação da seqüência e com aqueles que virão das correções das atividades da categoria I e, assim sucessivamente, para as categorias subseqüentes, sempre acrescentando as idéias das categorias anteriormente desenvolvidas.

PARTE I

CATEGORIA I COM LÁPIS E PAPEL

4.4 Análise a *Priori* das Atividades

a) ATIVIDADE 1

A tarefa a ser executada é traçar o(s) eixo(s) de simetria (de algumas figuras), caso existam, sem dobrá-las ou recortá-las. Essa atividade é composta de seis figuras (ver Anexo I), sendo permitido o uso da régua graduada como ferramenta concreta e as figuras são apresentadas em papel não quadriculado. Estas figuras podem apresentar eixos de simetria nas posições: horizontal, vertical, inclinado ou inexistente. Nesse caso, variamos apenas a posição do eixo de simetria, fixando o tipo de papel (não quadriculado).

Análise a p*riori* da atividade 1

O desafio da atividade 1 consiste em traçar o(s) eixo(s) de simetria (se existirem), sem cortar, vincar ou dobrar o papel. Os alunos devem riscar os eixos de simetria, quando existirem, utilizando-se de caneta e de régua graduada. Acreditamos que os alunos busquem a solução de forma intuitiva, analisando a figura e imaginando possíveis dobras (eixos de simetria).

Prevê-se que os alunos, quando usarem a régua graduada, somente o façam como auxiliar no traçado de retas que, aproximadamente, dividem a figura em duas partes congruentes. Possivelmente, eles podem utilizar o invariante operatório “o eixo de simetria divide a figura em duas partes ‘iguais’”. Talvez a preocupação em usar a graduação da régua ainda não apareça.

Em situações cujo objetivo é encontrar o eixo de simetria, a posição inclinada do eixo de algumas figuras, freqüentemente não é percebida pelos alunos. Apoiando-nos nas pesquisas analisadas, supomos que a posição do(s) eixo(s) de simetria de algumas figuras, bem como sua complexidade (por exemplo, uma figura com muitos lados), constituem-se em dificuldades aos alunos, na obtenção do eixo de simetria.

Os alunos podem mobilizar procedimentos “corretos” ou “incorretos” ao resolverem a atividade 1. Para cada figura que a compõe, é possível que em suas respostas para a situação-problema proposta, os alunos:

- (a) Não tracem eixo de simetria para a figura;
- (b) Tracem um único eixo de simetria para a figura;
- (c) Tracem mais de um eixo de simetria para a figura;
- (d) Tracem um eixo horizontal de simetria para a figura;
- (e) Tracem um eixo vertical de simetria para a figura;
- (f) Tracem dois eixos de simetria para a figura: um horizontal e um vertical;
- (g) Tracem eixos diagonais (um ou mais de um) de simetria para a figura;
- (h) Tracem todos (ou não) os eixos de simetria da figura;

- (i) Tracem eixos de simetria procurando dividir a figura em duas partes “iguais”;
- (j) Tracem eixos de simetria procurando dividir a figura ao “meio”.

Alguns ou todos os procedimentos citados podem aparecer em todas as figuras que fazem parte desta atividade. Analisaremos cada uma das seis figuras que fazem parte desta atividade.

De modo geral, é provável que, para figuras que possuam mais de um eixo de simetria, nas respostas dos alunos, seja representado apenas um eixo de simetria. O aluno, quando encontra uma solução para um problema, se dá por satisfeito e não se preocupa em verificar se existem outros eixos de simetria ou não. Isto pode ser atribuído ao fato dos problemas, geralmente, terem e serem apresentados aos alunos, com uma única resposta. Problemas com mais de uma resposta, ou problemas sem solução, dificilmente são trabalhados em sala de aula (Smole & Diniz, 2001).

Os alunos podem utilizar invariantes operatórios “corretos” ou “incorretos” ao resolverem a atividade 1, tal como os invariantes 1, 2, e 3 (p. 57-58), e os que vamos citar na análise *a priori* de cada figura que faz parte desta. Acreditamos que é possível que os alunos utilizem alguns destes invariantes por fixarem-se na congruência das partes da figura dividida pelo eixo; ou na sobreposição destas ao se dobrar no eixo; ou nas duas ao mesmo tempo.

<u>Quadrado:</u>

O quadrado possui 4 eixos de simetria: 1 horizontal (e_h), 1 vertical (e_v) e as duas diagonais (d_1 e d_2). Para facilitar a descrição, nomearemos as diagonais de diagonal 1 e diagonal 2, quando nos referirmos especificamente a cada uma delas, como visto na Figura 4.2.

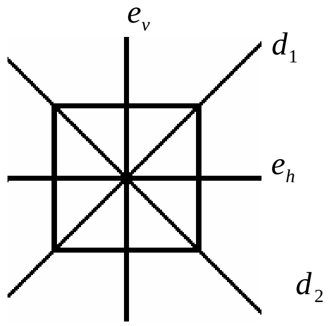


Figura 4.2. Eixos de simetria do quadrado.

Os alunos podem resolver esta atividade, traçando o ponto médio dos lados horizontais do quadrado, utilizando a régua graduada ou o compasso e em seguida, traçando o eixo e_v, passando por esses dois pontos. Do mesmo modo, traçando o eixo e_h passando pelos pontos médios dos lados verticais do quadrado. Para traçarem os eixos inclinados, basta que tracem as diagonais (d_1 e d_2) da figura.

É provável que poucos alunos representem os quatro eixos de simetria do quadrado, como justificado neste texto; assim, a grande maioria dos alunos pode traçar apenas um eixo de simetria. Embora os eixos diagonais não sejam tão evidentes quanto o vertical ou o horizontal, esses podem aparecer comumente entre as respostas dos alunos, pois eles podem estar familiarizados com a figura e com atividades de dobradura desenvolvidas no ambiente escolar. Supomos então, que os eixos horizontais e verticais, bem como os eixos diagonais (d_1 e d_2) surjam em suas respostas, pelo fato da figura ficar subdividida, respectivamente, em dois retângulos, como na Figura 4.3 ou em dois triângulos, como na Figura 4.4.

Os possíveis invariantes suscetíveis de serem utilizados pelos alunos, no caso de termos os procedimentos representados na Figura 4.3, pelos motivos já citados, podem ser: “o eixo horizontal (ou vertical) divide o quadrado em duas partes ‘iguais’”; “o eixo horizontal (ou vertical) divide o quadrado em dois retângulos”; “o eixo de simetria passa pelo ‘meio’ do quadrado”; “o eixo horizontal (ou vertical) divide o quadrado em duas partes iguais que coincidem por sobreposição”.

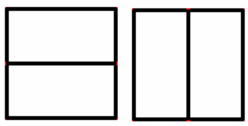


Figura 4.3. Eixo horizontal e eixo vertical do quadrado.

Os invariantes suscetíveis dos alunos utilizarem, no caso de termos os procedimentos representados na Figura 4.4, podem ser: “as diagonais do quadrado são eixos de simetria desta figura”; “a diagonal do quadrado o divide em dois triângulos”; “as diagonais do quadrado dividem-no em duas partes”; “as diagonais do quadrado dividem-no em duas partes iguais que coincidem por sobreposição”.

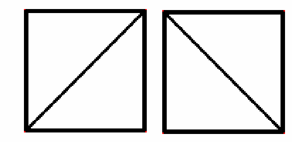


Figura 4.4. Eixo diagonal 1 e eixo diagonal 2 do quadrado.

Símbolo de proibido:

O símbolo de proibido possui 2 eixos de simetria, que denominamos eixo e_1 (o eixo que separa os dois semicírculos internos ou eixo entre as faixas) e eixo e_2 (o eixo que divide os semicírculos internos no ponto médio do diâmetro destes), como representado na Figura 4.5a.

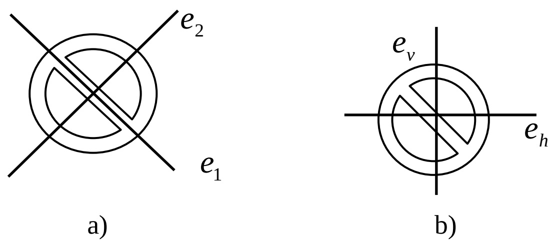


Figura 4.5. Item a: Eixos de simetria da figura. Item b: Reta horizontal e vertical.

Os alunos podem resolver esta atividade, traçando o ponto médio do diâmetro, com régua ou compasso, de cada semicircunferência e traçando o eixo de simetria por esses dois pontos, no caso o eixo e_2. No traçado do outro eixo de simetria desta figura, podem encontrar a mediatriz do diâmetro contido no eixo e_2.

Esta figura pode ser considerada assimétrica pelos alunos, pois apesar de poderem usar o recurso de girar o papel, dificilmente encontram os 2 eixos de simetria, por serem inclinados ou pelas suas posições em relação à figura. O eixo mais evidenciado pelos alunos pode ser o eixo e_1. O eixo e_2 também pode aparecer.

Além desses, é possível que nos representem, em suas repostas, as retas vertical (e_v) ou horizontal (e_h), que não são eixos de simetria, como na Figura 4.5b. Talvez isto ocorra se ele não estiver considerando os desenhos internos (as duas semi-circunferências); mas, mesmo assim não estará visualizando que possui infinitos eixos.

Desta forma, os possíveis invariantes que podem ser utilizados pelos alunos, são: "as diagonais do símbolo de proibido são eixos de simetria"; "o eixo e_1 (ou e_2) do símbolo de proibido é de simetria"; "o eixo que separa os dois semicírculos internos ou eixo entre as faixas do símbolo de proibido é de simetria"; "o eixo que divide os semicírculos internos no ponto médio do diâmetro destes do símbolo de proibido é de simetria".

Seta:

A seta é considerada uma figura simples e familiar dos alunos e possui apenas um eixo (inclinado em relação à borda do papel), observado na Figura 4.6a.

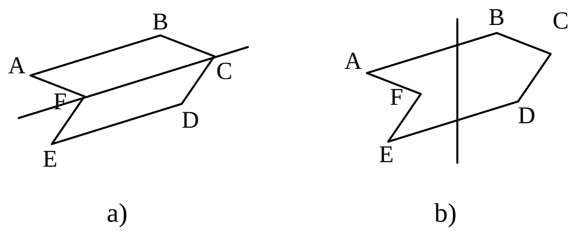


Figura 4.6. Item a - Eixo de simetria da seta e item b -Possível eixo inclinado para a seta.

Procedimentos "corretos" ou "incorretos" que os alunos podem utilizar na solução desta atividade:

- a) Traçar a reta que passa pelos vértices C e F, com (ou sem) o auxílio da régua. Neste caso, a reta traçada é o eixo de simetria da seta (Figura 4.6a);

- b) Traçar a reta que passa pelos vértices E e B (ou A e D), com (ou sem) o auxílio da régua. Neste caso, a reta traçada não é eixo de simetria da seta;

- c) Traçar uma reta inclinada passando "aproximadamente" pelo ponto médio dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{ED}$, com (ou sem) o auxílio da régua, como ilustrado na Figura 4.6b. Neste caso, a reta traçada não é eixo de simetria da seta.

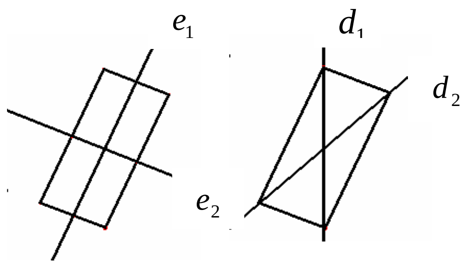
Por ser uma figura familiar ao aluno, é provável que surja um número expressivo de respostas corretas. Muitos podem utilizar os seguintes invariantes operatórios: o possível invariante associado ao procedimento a acima, pode ser: "o eixo que divide a figura (seta) em duas partes congruentes é de simetria"; o possível invariante associado ao procedimento b acima, pode ser: "o eixo de simetria da seta é a reta que passa pelos vértices $\overline{EB}$, $\overline{AD}$ e $\overline{FC}$, por suporem que se a figura possui vértices, então deve-se ter eixos de simetria, passando por cada dois vértices não consecutivos.

É provável que não surjam os procedimentos (d), (e) e (f) em suas respostas, por ser fácil de perceber a não divisão em duas partes congruentes da figura e também a não sobreposição destas ao se dobrar no eixo de simetria.

Retângulo:

O retângulo (com lados não paralelos em relação às bordas do papel), nessa posição, como em qualquer outra, possui dois eixos de simetria. O eixo e_1 é o eixo que passa pelos pontos médios dos lados menores do retângulo e o eixo e_2 é o que passa pelo pontos médios dos lados maiores do retângulo, conforme Figura 4.7a.

É provável que os procedimentos (d) e (f) não apareçam em suas respostas, pois se tais procedimentos forem utilizados, a não congruência das partes em que a figura foi subdividida é evidente.



a) b)

Figura 4.7. Item a - Eixo de simetria do retângulo e item b - Diagonal 1 e diagonal 2.

Os alunos podem resolver esta atividade, traçando o ponto médio dos lados menores do retângulo, utilizando a régua graduada ou o compasso, e traçando o eixo e_1, passando por esses dois pontos médios. De modo análogo, o eixo e_2, passando pelo ponto médio dos lados maiores deste, é traçado.

Para esta figura, é provável que os alunos forneçam como resposta as suas diagonais. Chamaremos de diagonal 1 (d_1) a diagonal vertical e de diagonal 2 (d_2) a outra diagonal, conforme representado na Figura 4.7b.

Quando os alunos nos apresentam os eixos diagonais do retângulo como resposta, acreditamos que não estão considerando que algumas “figuras podem ser decompostas em duas partes ‘iguais’ mas que não apresentam simetria ortogonal” (Grenier, 1989, p.10), por exemplo, para qualquer figura, a diagonal vertical pode aparecer com freqüência nas respostas dos alunos, talvez pela sua posição facilitada e de fácil visualização, e por esta resposta ter sido observada em outras experimentações.

Apesar de ter apenas dois eixos de simetria e de ser uma figura conhecida, é possível que, dentre as respostas dadas, apareçam cinco possíveis eixos de simetria: as duas diagonais, os dois eixos de simetria desta figura e a reta horizontal (que não é eixo de simetria da figura). Alguns alunos podem considerá-la assimétrica, pois, como já comentado anteriormente, sua posição inclinada foge das figuras tradicionalmente trabalhadas em sala de aula e de muitos livros didáticos.

Pelos motivos anteriores, os possíveis invariantes utilizados pelos alunos podem ser: “as diagonais do retângulo são eixos de simetria”; “as diagonais do retângulo dividem-no em dois triângulos”; “a reta que passa pelo ponto médio dos lados maiores do retângulo é eixo de simetria da figura”; “a reta que passa pelo ponto médio dos lados menores do retângulo é eixo de simetria da figura”. Neste caso, os alunos podem estar fixando-se na congruência das partes da figura dividida pelo eixo.

<u>Raio:</u>

O raio é uma figura assimétrica, como se pode observar na Figura 4.8a. É provável que muitos alunos tenham êxito nesta atividade. Possivelmente, podem aparecer algumas respostas dizendo que “a figura possui um eixo inclinado de simetria: aquele que a divide em duas partes” (invariante operatório), como na Figura 4.8b, pois alguns alunos podem ter dificuldade em perceber a não sobreposição das partes pela dobra no eixo de simetria, por eles traçado.

a) b)

Figura 4.8. Raio e possível eixo inclinado de simetria dividindo o raio em duas partes.

É possível que os procedimentos (e) e (f) não surjam em suas respostas, pois as retas em questão não são eixos de simetria e o aluno ainda fixa-se no invariante operatório 1 (p. 57) .

Estrela:

A estrela de cinco pontas tem cinco eixos de simetria, conforme representado na Figura 4.9.

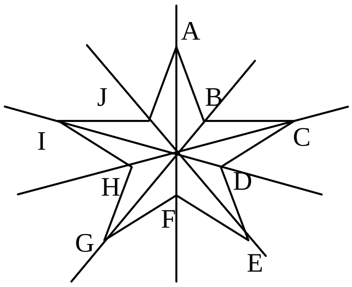
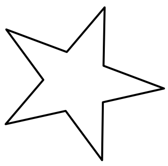


Figura 4.9. Eixos de simetria da estrela.

Os alunos podem resolver corretamente esta atividade, traçando os eixos de simetria que passam pelos segmentos $\overline{AF}$, $\overline{BG}$, $\overline{CH}$, $\overline{DI}$ e $\overline{EJ}$.

A estrela de cinco pontas é uma figura familiar dos alunos e apesar de ter vários eixos de simetria, é provável que apenas um eixo de simetria – o vertical – seja representado. Neste caso, o invariante verdadeiro suscetível dos alunos utilizarem, pode ser "a reta vertical é eixo de simetria da estrela". Esta preferência pelo eixo vertical foi observada em experimentações anteriores a este trabalho, provavelmente por causa da posição do eixo na figura e também pela posição da figura no plano: a reta que passa por $\overline{GE}$ (Figura 4.9) é paralela à borda inferior do papel. Se a figura recebe uma pequena rotação (giro), conforme podemos ver na Figura 4.10, ela passa a não ter o eixo vertical de simetria e talvez possa ser considerada assimétrica pelos alunos.



Figur*a* 4.10. Estrela inclinada.

Podem surgir respostas considerado-a uma figura assimétrica, por causa de sua complexidade e é provável que não apareçam respostas mostrando todos os eixos da figura, pelo fato desses outros eixos não estarem nas posições convencionais, ou por causa da satisfação dos alunos em apenas determinar uma resposta e não mais investigar outras possíveis soluções, como argumentamos anteriormente para o caso do quadrado.

b) ATIVIDADE 2

A tarefa dos alunos consiste em observar e decidir, para duas figuras dadas, se a reta dada é ou não um eixo de simetria. No item a, a reta é um eixo de simetria da figura; no item b, a reta não é um eixo de simetria. Não foi definida a ferramenta a ser utilizada nesta atividade e o tipo de papel é não quadriculado. Além da decisão, os alunos devem justificar a resposta dada. A posição do eixo de simetria do item (a) é vertical e do item (b) é inclinado.

Análise *a priori* da atividade 2

A figura do item (a) é um trapézio isósceles, os alunos têm que perceber que "o eixo nele traçado é perpendicular aos lados paralelos desta figura e passa pelos pontos médios destes lados e, portanto, é o seu eixo de simetria". É provável que muitos alunos percebam a congruência das partes em que a figura foi subdividida e, por isso, podem estar utilizando os invariantes operatórios 1, 2, ou 3 (p. 57-58). A dobradura pode ser utilizada. No início da aplicação da seqüência, trabalhou-se um exemplo de dobradura e tal idéia já pode fazer parte do aluno. Em caso de negação, isto é, de que a reta não é um eixo de simetria, consideramos esta resposta como falta de atenção e de informações, de forma que nem a congruência das partes subdivididas e nem a sobreposição estão sendo percebidas.

A figura do item (b) é um retângulo, e "a reta nele traçada é uma de suas diagonais, o que não é um eixo de simetria do retângulo" (invariante operatório), conforme página 36. Acreditamos que muitos alunos podem afirmar que a reta é um eixo de simetria por não perceberem a não sobreposição das partes; ou por, possivelmente, estarem utilizando o invariante operatório 1 (p. 57). Para alguns, isto basta para que a reta seja considerada eixo de simetria. Supõe-se que alguns alunos digam que a reta dada não é um eixo de simetria. Os que disserem que não é um eixo de simetria podem ter percebido a não sobreposição das partes ao se dobrar no referido eixo.

A dobradura pode ser utilizada, e também o recurso de medir os segmentos para a verificação de que possuem a mesma medida, mas é provável que isto não aconteça. Os alunos não têm o costume de verificar tamanhos de segmentos, pois confiam muito na visualização, e não foi dito (no enunciado) que poderiam usar.

Assim, é suposto que os alunos utilizem apenas a visualização em suas decisões.

Alguns alunos podem considerar que as duas retas em análise, a do trapézio e a do retângulo sejam eixos de simetria, pelo mesmo motivo comentado no invariante operatório 1 (p. 57).

c) ATIVIDADE 3

A tarefa a ser executada é decidir qual de duas figuras (vermelha e azul) é o simétrico, em relação a uma reta inclinada (eixo de simetria), de uma figura preta. A figura preta está afastada do eixo de simetria e os alunos devem justificar a escolha da figura representando o simétrico. A figura vermelha foi apresentada em uma referência horizontal, pois este é um procedimento comum como indicado em pesquisas anteriores. A figura azul é a resposta correta da atividade. A ferramenta a ser utilizada não foi definida, o tipo de papel é não quadriculado, a posição do eixo de simetria é inclinado e as figuras estão afastadas deste.

Análise a *priori* da atividade 3

Em relação às questões anteriores, esta atividade é muito mais difícil, pois nas atividades 1 e 2, a propriedade de eixo de simetria colocada em evidência é aquela da divisão da figura em partes iguais, cada uma em um semiplano em relação à reta de dobradura. Até o momento, o “eixo cortava a figura em duas partes ‘no meio’”, agora o eixo de simetria não está mais cortando a figura e ela está afastada do eixo. Os alunos têm que buscar meios de resolver o problema e assim desejamos verificar como eles reagem diante desta nova posição da figura em relação ao eixo. É possível que ocorra uma resistência em aceitar esta nova situação e em buscar a solução, uma vez que nada foi falado aos alunos acerca desta questão. A melhor saída para o aluno, nesta atividade, é dobrar no eixo de simetria e verificar que a resposta correta é a figura azul.

A régua graduada e o esquadro podem ser utilizados para a verificação das propriedades de eqüidistância e perpendicularismo, presentes no conceito de simetria, como podemos observar na Figura 4.11. Isto é, os alunos podem traçar retas auxiliares, unindo o vértice da figura dada (preta) ao vértice correspondente da outra figura (azul ou vermelha); verificar se a eqüidistância dos pontos correspondentes ao eixo de simetria é preservada, utilizando a régua graduada ou o compasso; e verificar se estas retas são perpendiculares ao eixo, chegando à resposta desta atividade (figura azul). Os alunos não devem proceder desta forma, uma vez que as informações que receberam são insuficientes, mas essas propriedades estarão disponíveis na categoria II, uma vez que a pesquisadora fará a discussão e correção desta atividade.

Aos alunos é permitida a utilização da dobradura e pretendemos analisar se esta ferramenta será utilizada. Pela dificuldade da tarefa a ser desenvolvida, acreditamos que alguns alunos a utilizem.

Na Figura 4.11, todas as retas auxiliares, em cor-de-rosa, são perpendiculares ao eixo *e* e todos os vértices da figura dada, em preto, estão à mesma distância dos vértices da figura azul em relação ao eixo *e*. Pode-se verificar também que a figura azul tem a mesma forma, o mesmo tamanho e é a imagem da figura preta em relação ao eixo de simetria *e*. Já as retas auxiliares, em marrom, não são perpendiculares ao eixo e os vértices da figura preta não estão à mesma distância dos vértices correspondentes da figura vermelha, em relação ao eixo *e*.

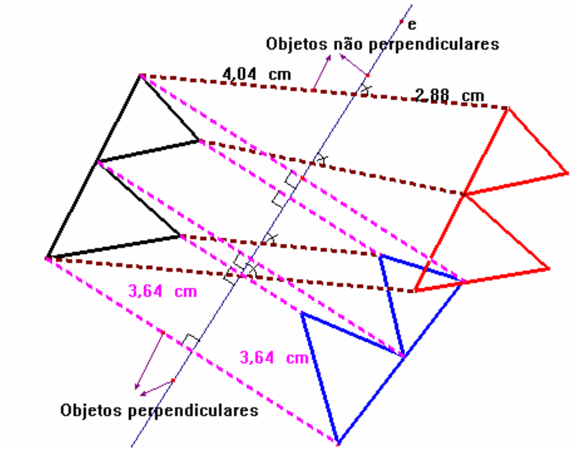


Figura 4.11. Atividade 3, propriedade de eqüidistância e perpendicularismo.

Em suas respostas é possível surgir a figura transladada horizontalmente, no caso, a figura vermelha. Os alunos apegam-se na preservação da forma, do tamanho e principalmente no deslocamento da figura; por isso, é provável que estejam utilizando o invariante operatório 6, (p. 62). A figura azul, que é a resposta correta da atividade, aparece quando o aluno utiliza a dobradura na obtenção do resultado; neste caso, pode ser que eles estejam utilizando os invariantes operatórios 3 e 5 (p. 60-61).

d) ATIVIDADE 4

A tarefa a ser executada é traçar o(s) eixo(s) de simetria, caso existam. É composta por 6 itens: a) sem eixo de simetria; b) com eixo vertical de simetria; c) com eixo inclinado de simetria; d) com eixo vertical de simetria; item e) com eixo horizontal de simetria; e item f) com eixos vertical e horizontal de simetria. O tipo de papel no qual a atividade está inserida é não quadriculado e a ferramenta concreta não foi definida, mas o aluno deve justificar a escolha da ferramenta utilizada.

Análise *a priori* da atividade 4

Na atividade 3, o aluno teve contato com o simétrico de uma figura em relação a um eixo de simetria, onde este não interceptava a figura. Como na atividade anterior, os eixos de simetria desta atividade podem estar fora da figura.

É provável que os alunos não considerem as figuras como o original e seu reflexo, mas cada uma independente da outra e buscando em cada uma, isoladamente, seu eixo de simetria, pois acreditamos que a posição figura/eixo é um fator dificultador desta atividade, apesar do primeiro contato na atividade anterior com o eixo de simetria não interceptando a figura, os alunos ainda não incorporaram a possibilidade da ocorrência deste caso em outras atividades e, para eles “o eixo de simetria deve cortar a figura no ‘meio’”, que é o invariante operatório disponível até o momento, fato que pode ser atribuído à atividade de dobradura.

Os alunos podem perceber que no item a uma figura não é o simétrico da outra, tentando dobrar em possíveis eixos e verificar que para nenhum deles as figuras se sobrepõem.

No item b, os alunos podem proceder da seguinte forma: traçar M o ponto médio de $\overline{AA'}$ e, por este ponto, traçar a reta r perpendicular a $\overline{AA'}$; da mesma forma para o segmento $\overline{CC'}$, obtendo assim o ponto N médio de $\overline{CC'}$ e a reta s perpendicular a $\overline{CC'}$ passando por N. O mesmo deve ser feito com $\overline{BB'}$. Como podemos observar na Figura 4.12.

Eles podem concluir que uma figura é simétrica à outra, em relação ao eixo de simetria r (r≡s≡t), uma vez que, se dobrada neste eixo, as duas figuras vão coincidir por sobreposição. Logo a reta r é seu eixo de simetria, como observado na Figura 4.12. O mesmo vale para os itens c, d e f.

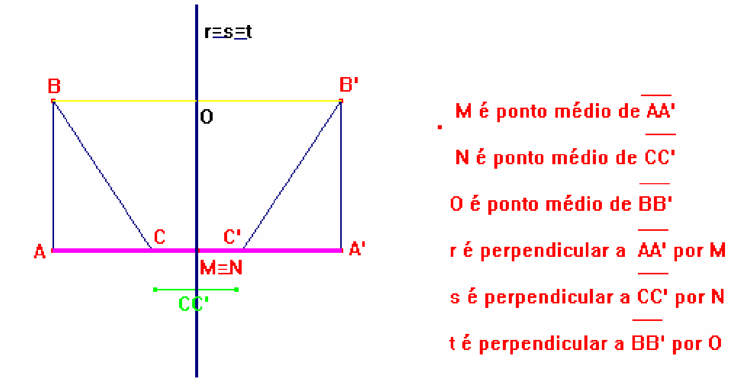


Figura 4.12. Atividade 3

Para os itens a, b e c, podem surgir respostas que não sejam corretas como: “a reta que divide cada triângulo no meio”; “a reta que passa por um dos lados do triângulo”. Para o item (d), podem aparecer as seguintes respostas: eixos de simetria, vertical, horizontal e eixo horizontal traçado em cada um dos segmentos inclinado. No item (e), o eixo horizontal pode ser o mais representado, provavelmente por que os alunos utilizam o invariante 3 (p. 58) e a própria figura parece induzir a este eixo. No item f, podemos ter o eixo vertical e o horizontal, e em alguns casos podemos ter como resposta os dois juntos, pelo mesmo motivo justificado anteriormente. É provável que nos itens *e* e f, sejam considerados sem eixo de simetria.

4.5 Desenvolvimento e Análise a *Posteriori* das Atividades

a) ATIVIDADE 1

Desenvolvimento da atividade 1

Depois de feita a leitura das informações, a pesquisadora esperou que os alunos trabalhassem na primeira atividade da categoria I, com lápis e papel. Passados alguns minutos, nenhum aluno começou a desenvolver a atividade, como previsto que pudesse ocorrer, pois palavras como eixo de simetria, simetria e simétrico de uma figura em relação a um eixo poderiam ainda não fazer parte dos conhecimentos disponíveis deste grupo.

Os alunos começaram a fazer perguntas e essas foram feitas ao professor da sala e não à pesquisadora, apesar dos combinados feitos anteriormente. Ocorreram perguntas como: “O que é para fazer?”; “Eu não sei o que é para fazer, professor”;

"O que é eixo de simetria?". A pesquisadora orientou para que relessem o enunciado e tentassem resolvê-la. Mesmo assim, eles não começaram a execução da atividade. Isto era perfeitamente esperado, uma vez que a nossa intenção era verificar se alguns dos alunos haviam estudado este conteúdo anteriormente, uma vez que este conteúdo era sugerido nos livros didáticos adotados pela escola.

Diante desta situação, optamos por dar uma idéia de figura simétrica à outra em relação a um eixo através de uma atividade, envolvendo dobradura e recorte e, conjuntamente com o grupo, chegarmos a uma definição local[1] de figura simétrica e eixo de simetria. Esta opção foi pertinente, tendo em vista que neste tipo de atividade a idéia a ser transmitida é a de que: uma figura é dita simétrica à outra em relação a uma reta, quando as duas partes da figura se sobrepõem ao se dobrar na reta e esta é chamada de eixo de simetria. Grenier (1989), na escolha de uma definição local de uma figura, contendo um eixo de simetria, também fez a opção em trabalhar com atividades de dobradura, o que ela chamou de "simetria-dobradura" de uma figura e a justifica:

> A dobradura não apresenta mecanismos complexos para os alunos, pois a operação material é simples. Mas, a interdição de dobrar obriga o aluno a antecipar o resultado da dobradura.
> (...) em tal abordagem, a propriedade da reta simétrica colocada em evidência é aquela da divisão da figura em partes iguais, cada uma em um meio-plano em relação à reta de dobradura. (Grenier, 1989, p. 10).

Conjuntamente (pesquisadora e alunos), através da pergunta feita pela pesquisadora: "O que é preciso fazer para construirmos uma borboleta, utilizando-nos de dobradura e recorte ?". Uma borboleta foi construída através das sugestões do grupo, como podemos observar na Figura 4.13.

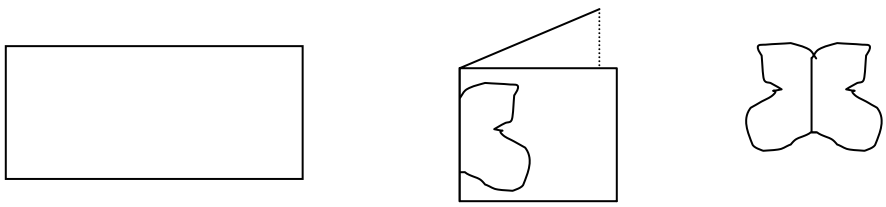


Figura 4.13. Construção de uma borboleta com dobradura e recorte.

Através da observação do resultado final, o grupo chegou na definição (local) de figura simétrica e eixo de simetria, onde "a dobra é o eixo de simetria e as duas

---

[1] Estamos considerando como definição local quando ela não abrange toda a generalidade do conceito.

asas da borboleta são iguais, tendo então uma figura simétrica”. Essa informação pode se tornar um invariante operatório para esse grupo, e temos a simetria como característica de uma única figura cujo eixo a divide exatamente ao ‘meio’, originando duas partes congruentes. Esta mesma idéia, também é passada pela maioria dos livros didáticos do Ensino Fundamental.

Depois desta atividade de dobradura, os alunos iniciaram a execução da situação-problema proposta.

Análise a *posteriori* da atividade 1

Nesta atividade, o eixo de simetria inclinado não se constituiu um problema para o aluno, pois os eixos inclinados das seguintes figuras: quadrado, símbolo de proibido, seta e retângulo foram representados na grande maioria das repostas.

A idéia de “meio” é a que mais sobressaiu, isto é, o invariante de que “a reta de simetria deve ser traçada, dividindo a figura ao ‘meio’”, utilizando-se unicamente da visão, inferindo um possível lugar, mais ou menos, passando na metade da figura. Alguns exemplos estão ilustrados na Figura 4.14.

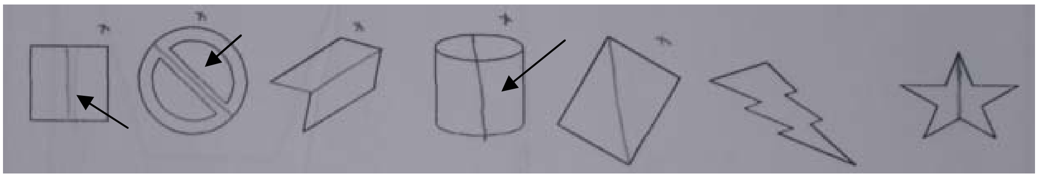


Figura 4.14. Segmentos traçados à mão-livre e passando no “meio” da figura.

Nessa atividade, percebemos que não houve nenhuma preocupação em usar o graduado da régua para auxílio do traçado do eixo de simetria. Esta afirmação está sendo baseada apenas na análise das respostas dadas, com exceção de uma única aluna que está claro ter usado da graduação da régua, como podemos observar na Figura 4.15.

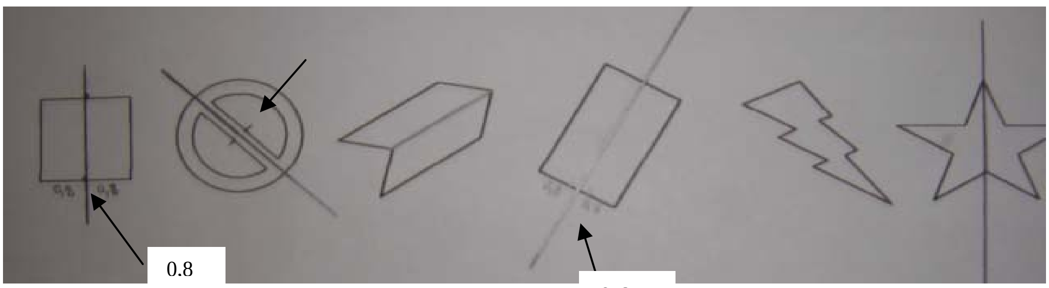


Figura 4.15. Foto da atividade 1 do aluno, mostrando o uso da graduação da régua.

Podemos dizer que o conjunto, complexidade da figura e a sua posição no papel, dificultaram a visualização de eixos de simetria, por exemplo, para a figura da estrela somente o eixo vertical foi representado por este grupo; talvez, se tivessem girado o papel, outros eixos apareceriam em suas soluções. Houve figuras em que foram apresentadas mais de uma resposta, como para o quadrado e para o símbolo de proibido.

As respostas dadas pelos alunos, para cada figura que compõe esta atividade, encontram-se no Quadro de Respostas da Atividade 1, no Anexo II, p.263.

Quadrado:

Os possíveis eixos de simetria do quadrado representados pelo grupo foram:

- eixo diagonal 1 foi representado por 11 alunos;
- eixo diagonal 2 foi representado por 4 alunos;
- eixo diagonal 1 e eixo diagonal 2 foi representado por 1 aluno;
- eixo vertical foi representado por 6 alunos;
- eixo horizontal e eixo diagonal foi representado por 1 aluno;
- quatro eixos de simetria foi representado por 4 alunos;
- nenhum aluno o considerou assimétrico.

O eixo diagonal 1 foi representado por 15 alunos; o eixo vertical foi representado por 10 alunos e o eixo horizontal foi representado por 5 alunos, se incluirmos os alunos que traçaram os quatros eixos de simetria para o quadrado. Como podemos observar, a diagonal 1 do quadrado foi a mais representada pelo grupo estudado. A posição do eixo horizontal de simetria do quadrado não foi tão considerado quanto o eixo vertical; esperava-se que os eixos de simetria vertical ou horizontal fossem os mais representativos. O eixo diagonal pode ter sido representado com tanta freqüência pelo fato da professora regente da sala ter trabalhado há pouco tempo com atividades de dobraduras. Muitas dessas dobraduras começavam traçando a diagonal do quadrado. Era esperado que alguns alunos representassem os quatro eixos de simetria do quadrado e isto aconteceu: quatro alunos visualizaram os quatro eixos de simetria desta figura.

Pudemos identificar, nas respostas dos alunos, os seguintes teoremas-em-ação, de eixo de simetria do quadrado:

- As diagonais do quadrado são eixos de simetria.
- O eixo de simetria do quadrado é a reta que o divide em dois triângulos (ou retângulos).
- “O eixo de simetria do quadrado é a reta que passa no “meio” dele ou o divide em duas partes e coincidem”[2].

A última frase é de um aluno. Ele traçou o eixo vertical de simetria para o quadrado, percebe que este eixo o divide em duas partes congruentes e que são coincidentes ao se dobrar neste. Mas não visualiza que existem outros eixos com estas mesmas propriedades para esta figura.

<u>Símbolo de proibido:</u>

Os possíveis eixos de simetria do símbolo de proibido representado pelos alunos foram:

- sem eixo foi apresentado por 13 alunos;
- eixo entre as faixas foi traçado por 11 alunos;
- somente a reta horizontal[3] foi traçada por 1 aluno;
- retas horizontal e vertical foram traçadas por 1 aluno;
- dois eixos de simetria do símbolo de proibido foram traçados por 1 aluno.

Era suposto que a posição não convencional dos eixos de simetria do símbolo de proibido se constituísse em uma dificuldade para a visualização desses eixos. O símbolo de proibido é considerado uma figura assimétrica por 13 alunos. O eixo mais visualizado pelos alunos foi o localizado entre as faixas, parece que a própria figura induz o aluno a traçar este eixo. As retas vertical ou horizontal apareceram em suas soluções. Um aluno nos apresentou as duas soluções.

Pudemos identificar, nas respostas dos alunos, os seguintes teoremas-em-ação, de eixo de simetria do símbolo de proibido:

- O eixo de simetria do símbolo de proibido é aquele que está entre a faixa;
- O eixo de simetria do símbolo de proibido é aquele que divide os semicírculos internos em duas partes iguais;

---

[2] Resposta apresentada pelo aluno quando questionado.

[3] Como os alunos traçaram eixos que não são eixos de simetria do símbolo de proibido, estaremos chamando de reta vertical ou reta horizontal, conforme o caso.

- Os eixos de simetria do símbolo de proibido são: aquele que está entre a faixa e aquele que divide os semicírculos internos em duas partes iguais;
- Um dos eixos de simetria do símbolo de proibido é aquele que é perpendicular à borda inferior do papel (eixo vertical).
- Um dos eixos de simetria do símbolo de proibido é aquele que é perpendicular à borda inferior do papel e o divide em duas figuras que se superpõe através de uma rotação de 180°;
- Um dos eixos de simetria do símbolo de proibido é aquele que é paralelo à borda inferior do papel (eixo horizontal).
- Um dos eixos de simetria do símbolo de proibido é aquele que é paralelo à borda inferior do papel e o divide em duas figuras que se superpõem através de uma rotação de 180°.

Seta:

Podemos dizer que os alunos visualizaram o eixo de simetria da seta, uma vez que 25 alunos o traçaram corretamente. Apenas 2 alunos a consideraram uma figura assimétrica. Nenhum outro tipo de resposta surgiu.

Em suas respostas, pudemos identificar o seguinte teorema-em-ação de eixo de simetria da seta: “a seta tem um eixo de simetria que a divide em duas partes iguais que coincidem por sobreposição das partes pela dobra no eixo de simetria”. Este esta comentado no invariante operatório 2, CI (p. 58).

Retângulo:

Os eixos mais representados pelos alunos para o retângulo (com lados não paralelos em relação às bordas do papel) foram:

- eixo paralelo ao lado maior (e_1) foi traçado por 7 alunos;
- eixo paralelo ao lado menor (e_2) foi traçado por 4 alunos;
- eixo paralelo ao lado maior e eixo paralelo ao lado menor foram traçados por 3 alunos;
- eixo diagonal 1 foi traçado por 6 alunos;
- eixo diagonal 2 traçado por 3 alunos;
- sem eixo que foi traçado por 4 alunos.

O eixo e_1 foi representado por sete alunos, talvez por ser uma figura familiar ao aluno ou talvez por ser trabalhado em atividades de dobradura, onde devem dividir o retângulo em duas partes iguais. Podemos justificar o aparecimento da resposta do eixo paralelo ao lado menor do retângulo analogamente ao caso anterior. O eixo e_2, paralelo ao lado menor, foi representado em mesma quantidade comparado à assimetria da figura. Outro eixo também bem representado pelos alunos foi o diagonal 1. Esta resposta surge quando o aluno se fixa em apenas um dos detalhes, no caso, "a reta de simetria divide a figura em dois triângulos congruentes e se esquece de que os triângulos devem se sobrepor ao dobrar".

As diagonais podem ser consideradas respostas precipitadas e errôneas. Nesse polígono, o eixo ocupa a posição da mediatriz de um dos seus lados. Como o tamanho do desenho da figura não é muito grande, pode dificultar, ao aluno, imaginar o que aconteceria se dobrássemos no eixo diagonal. "O eixo diagonal divide a figura em dois triângulos congruentes, mas não se sobrepõem ao dobrar" (invariante operatório). Como comentado no Capítulo II (invariante operatório 1 – CI, p. 57).

Pudemos identificar, nas respostas dos alunos, os seguintes teoremas-em-ação, de eixo de simetria do retângulo inclinado, através da análise de suas respostas:

- O eixo de simetria do retângulo inclinado é a reta que o divide em duas metades (ou a que passa pelo seu "meio");
- O eixo de simetria do retângulo inclinado é a reta que o divide em duas partes iguais que se coincidem ao dobrar nesta;
- O eixo de simetria do retângulo inclinado é a reta que passa pelos pontos médios dos lados menores do retângulo (ou a que passa pelos pontos médios dos lados maiores do retângulo);
- A diagonal (vertical) divide a figura em dois triângulos congruentes;
- Os eixos de simetria do retângulo inclinado são retas paralelas em relação aos lados da figura, passando aproximadamente pelo ponto médio dos lados opostos paralelos, como mostrado na Figura 4.8a.

Raio:

Vinte e dois (22) alunos reconhecem a assimetria do raio, e apenas cinco (5) alunos traçaram um eixo inclinado de simetria para o raio, como podemos observar na Seção 4.4, Figura 4.8b, p.95.

Os alunos que traçaram para o raio eixo inclinado de simetria, podemos dizer que a resposta dada foi precipitada, atribuída à falta de atenção, não havendo preocupação em verificar se as duas "partes" em que a figura foi subdividida coincidiam ao dobrar. Esses alunos podem estar utilizando o seguinte teorema-em-ação de eixo de simetria do raio: "o raio tem um eixo inclinado de simetria que o divide em duas partes", "o raio tem um eixo inclinado de simetria que passa pelo seu 'meio'".

Estrela:

As respostas mais representadas pelos alunos para a estrela de cinco pontas foram: sem eixo de simetria foi representado por 8 alunos e eixo vertical foi traçado por 19 alunos.

A estrela foi considerada uma figura que possui somente um ou nenhum eixo de simetria. Os alunos consideram somente o eixo vertical de simetria para a estrela, como era esperado. A pesquisadora e o observador não notaram os alunos girando a folha em busca de outros eixos de simetria para esta figura. Oito alunos acreditam que a estrela é assimétrica e isto, provavelmente, pode ser atribuída à complexidade da figura, ou pela própria figura que parece induzir a essa resposta.

O mesmo tipo de comportamento dos alunos pode ser observado em Mabuchi (2000): "Na figura 'estrela' quase todos os grupos assimilaram só um eixo (vertical), apenas um assinalou todos os eixos" (p.142). Em nossa pesquisa, nenhum aluno assinalou todos os eixos.

Em suas respostas, pudemos identificar o seguinte teorema-em-ação de eixo de simetria da estrela: a estrela de cinco pontas possui um único eixo de simetria: o vertical.

b) ATIVIDADE 2

Desenvolvimento da atividade 2

Os alunos receberam a atividade 2 e imediatamente depois da leitura desta, partiram em busca da solução. Não foi feita nenhuma pergunta à pesquisadora durante a execução da atividade. Os alunos observavam as figuras dadas e responderam as questões solicitadas.

Análise a *posteriori* da atividade 2

Um único aluno não considera a reta traçada no item a, como sendo eixo de simetria do trapézio isósceles. Dezoito alunos consideraram a reta traçada no item b como sendo eixo de simetria do retângulo. Estas respostas encontram-se no Quadro de Respostas da Atividade 2 no Anexo II, p. 264.

O papel era não quadriculado e os instrumentos de medida (régua graduada e compasso) estavam disponíveis e poderiam ser utilizados. Estes instrumentos não foram utilizados, fato que foi observado pela pesquisadora e pelo observador e, além disso, nenhum dos alunos mencionou em suas respostas a utilização destes instrumentos. A visualização foi o recurso escolhido para a tomada de decisões: se as retas eram ou não eixos de simetria. A dobradura não foi utilizada, fato que foi observado pela pesquisadora e pelas folhas que não apresentaram vinco.

Acreditamos que, pela posição das figuras e pela familiaridade dos alunos com elas, a atividade foi realizada com êxito.

Em suas respostas, pudemos identificar os seguintes teoremas-em-ação:

1) **“O eixo de simetria divide a figura em duas partes iguais”.** Este teorema-em-ação foi utilizado pelos alunos nos dois itens que compõem esta atividade. Como pode ser observado em algumas respostas dos alunos:

    - “Eu acho que sim porque os eixos de simetria estão dividindo a figura em duas partes iguais”, (Aluno 5);

    - “São eixos de simetria porque a figura está sendo dividida em duas partes iguais”, (Aluno 16);

    - “Sim porque as duas figuras são eixos de simetria e dá para dividi-las em duas partes iguais”, (Aluno 9);

- “Sim porque se dobrá-las ou recortá-las, elas estarão em partes iguais”, (Aluno 22);

- “Estas retas são eixos de simetria porque as duas figuras, ou seja, as duas partes da figura são totalmente igual. Esta reta divide no meio da figura”, (Aluno 23).

Nessas respostas, os alunos centraram sua atenção somente na divisão da figura em duas partes iguais, isto é, perceberam somente a congruência das partes, mas não perceberam a sobreposição (item a) destas partes ao se dobrar no eixo de simetria, e no (item b) não perceberam a não sobreposição das partes. Podemos observar nessas frases que os alunos não comentam sobre a sobreposição das partes.

2) “**As retas traçadas para o trapézio isósceles e para o retângulo são eixos de simetria porque os lados são iguais”.** Este teorema-em-ação foi utilizado pelos alunos nos dois itens que compõem esta atividade. Como podemos ver nas seguintes respostas:

- “(a) Sim, porque estão dividindo as figuras em dois lados iguais. (b) Tem eixos de simetria porque os lados são iguais”, (Aluno 18).

- “Sim são. Porque estão dividindo a figura, tem dois lados iguais”, (Aluno 24).

- “Sim, as retas são eixos de simetria, pois nas figuras acima os dois lados são iguais”, (Aluno 21).

Esses alunos podem estar se referindo a lados iguais, no sentido de que as medidas dos lados das figuras formadas têm a mesma medida ou estão observando a congruência das figuras formada pela subdivisão da figura pela reta traçada.

Nestas três frases, podemos observar que os alunos notam apenas a congruência das figuras formadas, não considerando a sobreposição das partes como também necessária para caracterizar o eixo de simetria.

3) Em algumas respostas identificamos, ao mesmo tempo, dois teoremas-em-ação. Um para o item (a): **“Será um eixo de simetria, se dobrarmos no eixo de simetria e os lados forem iguais”** e outro para o item (b): **“Não é eixo de simetria, porque, se dobrarmos no eixo, as partes não se sobrepõem”.**

Vejamos algumas dessas respostas apresentadas pelos alunos:

- "(A) sim, (B) não. Porque a A se você dobrá-la ao meio para desenhar ou para recortar depois você perceberá que os lados são iguais. E a letra (b) se dobrarmos ao meio e depois cortá-la não sairá esta figura", (aluno 6);

- "A letra (a) é um eixo de simetria porque os lados são iguais e se dobrar as duas partes ficam iguais. A letra (b) não é um eixo de simetria porque os lados são iguais mas se dobrar não vai dar para ser igual porque a maneira que repartiu não dá certo", (aluno 1).

Nessas duas frases, percebe-se que: a definição passada através da atividade de dobradura está sendo usada corretamente; o aluno visualizou que a diagonal do retângulo não é eixo de simetria, porque a dobra no eixo dado não leva a uma sobreposição das duas partes. Na segunda frase, no item (a), ele percebeu que o eixo de simetria está dividindo o trapézio em dois quadriláteros congruentes e como estes se sobrepõem ao dobrar, então a reta é considerada um eixo de simetria da figura. No item (b), "A letra (b) não é um eixo de simetria porque os lados são iguais mas se...", vê-se que o aluno consegue observar que os dois triângulos são congruentes, mas que só isto não é garantia da simetria da figura em relação ao eixo dado.

Nas atividades propostas, não proporcionamos a estes alunos atividades de dobradura nas quais as figuras pudessem ser decompostas em duas partes iguais, mas que não apresentassem simetria ortogonal.

4) **"O eixo de simetria divide a figura em duas partes no 'meio'"**. Este teorema-em-ação foi utilizado pelos alunos nos dois itens que compõem esta atividade. Veja algumas respostas.

- "A figura a é um eixo de simetria porque se dobrá-las ao meio ficará igual. A figura b não é porque se dobrar ao meio as pontas não ficariam igualadas" (Aluno 14);

- "As duas retas são eixos de simetria. Eu errei. A a) é eixo de simetria porque quando dobra são as mesmas, e a b não é eixo de simetria porque quando dobra fica em lugar diferente" (aluno 4);

- "Letra a) simétrica ela é simétrica porque passa uma marca pelo meio. B também é simétrica porque passa uma risca diagonal" (Aluno 19);

- "Sim, porque estão dividindo a figura em duas partes no meio" (Aluno 8);

- "Na figura a) o eixo de simetria está certo e na figura b) está errado porque não está dividindo o retângulo em duas partes iguais no meio" (aluno 2).

Nas primeira e segunda frases, a definição de simetria construída através da atividade de dobradura foi usada e os alunos perceberam que, quando o retângulo é dobrado no eixo de simetria dado, a superposição das partes não ocorre. Nas frases, vemos a importância de dobrar no ponto médio do lado da figura – o "meio" – é ressaltado, embora esse "meio" não necessariamente divida a figura em duas figuras iguais.

c) ATIVIDADE 3

Desenvolvimento da atividade 3

Os alunos receberam a atividade 3 e a pesquisadora fez a leitura do respectivo enunciado. Alguns problemas, como comentado a seguir, ocorreram.

Esta atividade foi considerada muito difícil pelos alunos. Houve uma demora em aceitar a atividade a ser desenvolvida e na sua conclusão. Foi necessário um tempo de adaptação, de re-leituras do enunciado, de análise da situação proposta, de questionamentos à pesquisadora e ao observador.

Surgiram alguns questionamentos, tais como: "O que é para fazer?", "Não entendi esta atividade", "Não sei o que é para ser feito, é para traçar o eixo?". As principais dificuldades dos alunos podem ser sintetizadas em:

a) <u>Compreensão da atividade:</u> ao lerem o enunciado, os alunos não conseguiram entender o que deveria ser feito, apesar do pesquisador sugerir que eles deveriam ler com calma o enunciado e responder o que eles achavam que era para ser feito. Nenhum aluno questionou se a atividade poderia ter outra resposta, ou não ter solução.

b) <u>Afastamento da figura do eixo</u>: na atividade de dobradura que utilizamos para introduzir o conceito de simetria, o eixo dividia a figura em duas partes congruentes "no meio". Nas duas primeiras atividades, o eixo cortava as figuras e, nesta, o eixo dado encontra-se afastado da figura.

Depois dos alunos terem lido o enunciado com mais cuidado, houve a compreensão do problema e os alunos iniciaram a busca de solução.

A situação relatada anteriormente pode ser justificada pelo fato daqueles alunos (segundo eles) não terem tido contato com este conteúdo em anos anteriores. O conceito de simetria e de eixo de simetria foi introduzido através de uma atividade de dobradura, na qual o eixo dividia a figura em duas partes iguais que coincidiam ao dobrar.

O uso da dobradura pode dificultar a ampliação do conceito para atividades onde o eixo de simetria não passa pelo meio de uma figura. Para Grenier (1989), o conceito de simetria usando dobradura é de uso limitado, mas pode contribuir para que o aluno busque uma definição mais adequada e com instrumentos mais eficazes.

Nas atividades 1 e 2, o conceito de simetria advindo da atividade de dobradura era suficiente, mas para a atividade 3, não. Na atividade 1, os alunos tinham como tarefa traçar o eixo de simetria de algumas figuras, isto é, deveriam encontrar em que lugar uma reta poderia ser traçada na figura de tal forma que a dividisse em duas partes que coincidissem por sobreposição ao se dobrar nesta. Na atividade 2, a tarefa consistia em observar duas figuras e dizer se o eixo nelas traçado era eixo de simetria desta. Agora, na atividade 3, a figura se encontra afastada do eixo de simetria e devem decidir entre duas figuras qual é a simétrica da figura dada. Houve uma ruptura no esquema antigo e ao aluno coube buscar meios na tentativa de solucioná-lo e se adaptar a esta nova situação.

Mesmo com o relato destes problemas, os alunos procuraram a melhor forma de resolver a atividade e responderam a questão solicitada e, muitas vezes, se embasando nas idéias da atividade de dobradura feita no início.

Análise a *posteriori* da atividade 3

As respostas apresentadas pelos alunos encontra-se no Quadro de Respostas da Atividade 3, no Anexo II, p.265, no qual podemos verificar que quatorze alunos consideram a figura vermelha como o reflexo da figura preta, isto é, eles podiam estar utilizando o invariante "o reflexo da figura tem que ser 'exatamente igual' à figura inicial" e, por isso, a resposta dada foi a figura deslocada horizontalmente. Treze alunos responderam corretamente que a figura azul é o reflexo da figura preta. Neste caso, eles devem ter observado que se dobrarmos no eixo de simetria as duas figuras coincidem. Isto fica evidente na fala de um dos alunos: "Eu escolhi a azul. Porque (se) se dobrarmos a folha em cima do eixo de simetria as duas figuras se combinariam" (Aluno 21).

A posição das figuras e a inclinação do eixo aumentaram o nível de dificuldade. Alguns alunos, com dúvidas na sua resposta, utilizaram a dobradura, que era o único instrumento de validação que possuíam.

Através da observação do uso de material concreto pelos alunos, no desenrolar da atividade, podemos dizer que alguns alunos simularam uma dobra na reta de simetria, em busca do simétrico da figura preta, fato que foi observado pela pesquisadora, mas esta dobra não foi efetivamente feita, pois não há nenhuma folha com vinco.

Podemos destacar os seguintes teoremas-em-ação manifestados pelos alunos em relação a esta atividade:

1. Os alunos que responderam corretamente que o simétrico da figura preta é a figura azul. Os teoremas-em-ação que podem ter sido utilizados foram:

a) "**O simétrico de uma figura fica do outro lado do semiplano**" e "**uma figura simétrica é formada de duas partes"**. Citemos algumas dessas falas:

- "Porque eu acho que ela é o outro lado da figura preta" (Aluno 17);
- "Porque eu acho que ela é a outra parte da figura" (Aluno 7);
- "Ela azul. Porque eu acho que ela tem parte igual" (Aluno 18).

Nas afirmações acima, parece que estes alunos estão considerando que numa reflexão em relação a um eixo, a figura e sua imagem são formadas por duas partes: uma fica num semiplano e a outra no outro semiplano.

b) "A imagem de uma figura, em relação a um eixo, está à mesma distância da figura em relação ao eixo de simetria".

- "Porque elas estão igualmente em relação ao eixo de simetria" (Aluno 9).

Nesta resposta, parece que o aluno percebeu uma das propriedades da simetria; no caso, a eqüidistância das figuras em relação ao eixo de simetria.

c) "Uma figura é o simétrico da outra, quando, dobrando-se no eixo de simetria, as figuras coincidem-se".

- "Eu escolhi a azul. Porque (se) se dobrarmos a folha em cima do eixo de simetria as duas figuras se combinariam" (Aluno 21).
- "Porque em relação ao eixo simétrico a figura azul si *encacha*" (Aluno 3).

Nesta atividade, o eixo de simetria encontra-se afastado da figura. Nas duas respostas, observamos que esses alunos perceberam que mesmo que o eixo de simetria não passe pelo meio da figura, idéia que vinha sendo passada pela atividade de dobradura feita no início e pelas atividades anteriores, é possível encontrarmos o simétrico através do ato de dobrar no eixo de simetria e ao se dobrar neste, as duas figuras devem coincidir perfeitamente.

2. Os alunos que responderam que o simétrico da figura preta é a figura vermelha, seus teoremas-em-ação a respeito desta atividade foram:

a) **"A reflexão não inverte a posição da figura"** ou "**A reflexão translada a figura horizontalmente"** ou **"Numa reflexão a posição da figura deve ser mantida".** Vejam algumas respostas:

- "Porque se uma figura cortada ao meio ela não iria ficar com o outro lado torto e sim reto" (Aluno 23);
- "Porque a vermelha é a mesma medida da preta" (Aluno 22);
- "Porque é igual à figura preta. Tem os mesmos lados" (Aluno);
- "Eu escolhi a vermelha porque ela parece ser igual a preta" (Aluno 27);
- "Porque a vermelha tem as mesmas medidas da figura preta" (Aluno 25).

Nas frases acima, percebemos que estes alunos não perceberam que a figura fica refletida, preservando sua forma e seu tamanho. Todas as três figuras da atividade 3 são congruentes. A figura azul é uma reflexão da figura preta em relação ao eixo dado e a figura vermelha está deslocada horizontalmente em relação à figura preta. Apesar dos alunos estarem se referindo à "mesma medida da figura preta", parece que não estão considerando somente a medida dos segmentos, mas principalmente, estão considerando que numa reflexão a figura apenas se desloca horizontalmente. Essa afirmação fica evidente nas seguintes falas:

- “Porque é igual à figura preta. Tem os mesmos bicos” (Aluno 24).
- “Eu escolhi a vermelha porque estão na mesma ponta” (Aluno 13).

Acreditamos que, para eles, o resultado da atividade não pode ser uma figura refletida. Seria interessante propormos atividades que envolvessem o espelho, talvez como uma possível forma de desestabilizar esse teorema-em-ação.

- “Eu escolhi a figura vermelha porque ela se encaixa com a preta” (Aluno 10).
- “Porque ela se *encaichou*” (Aluno 2).

Claramente, temos a simetria vista como um deslocamento horizontal da figura, podendo ser “empurrada” até se encaixar perfeitamente, na outra.

d) ATIVIDADE 4

Desenvolvimento da atividade 4

Nesta atividade surgiram as mesmas dificuldades da atividade anterior. Os alunos precisaram se adaptar a esta nova situação.

Enquanto a atividade era desenvolvida, questionamos, individualmente, alguns alunos, sobre a sua resposta, com o intuito de melhor compreender os raciocínios e procedimentos utilizados por eles. A resposta oral dada por alguns destes alunos está reproduzida na análise de cada item**.** A pergunta dirigida ao aluno foi sempre a mesma: “Por que você fez assim?”.

Análise *a posteriori* da atividade 4

Nesta atividade, como previmos, em cada item, os alunos não consideraram as figuras como o original e seu reflexo, e o eixo de simetria foi traçado, isto é, na maioria dos casos, os alunos consideraram, em cada item, duas figuras distintas e traçaram possíveis eixos de simetria para cada uma isoladamente.

A posição da figura em relação ao eixo ainda não havia sido aceita pelos alunos, confirmando nossas previsões da análise *a priori*.

Através da análise do uso de material concreto produzido pelos alunos no desenrolar da atividade:

- Podemos dizer que nenhum aluno dobrou a folha em busca de soluções, fato que foi observado pelo pesquisador e também por não haver vinco nas folhas.
- A pesquisadora e o observador não registraram a utilização de nenhum instrumento de medida pelos alunos.

Na descrição da análise *a posteriori* desta atividade, detalharemos as respostas para o item a. Os demais itens têm basicamente as mesmas justificativas e, dessa forma, apresentaremos apenas os detalhes específicos de cada item.

As respostas de cada item que compõe esta atividade encontram-se no Quadro de Respostas da Atividade 4, no Anexo II, p. 266.

Para o item a, os alunos representaram diversos eixos de simetria, como se pode observar na Figura 4.16.

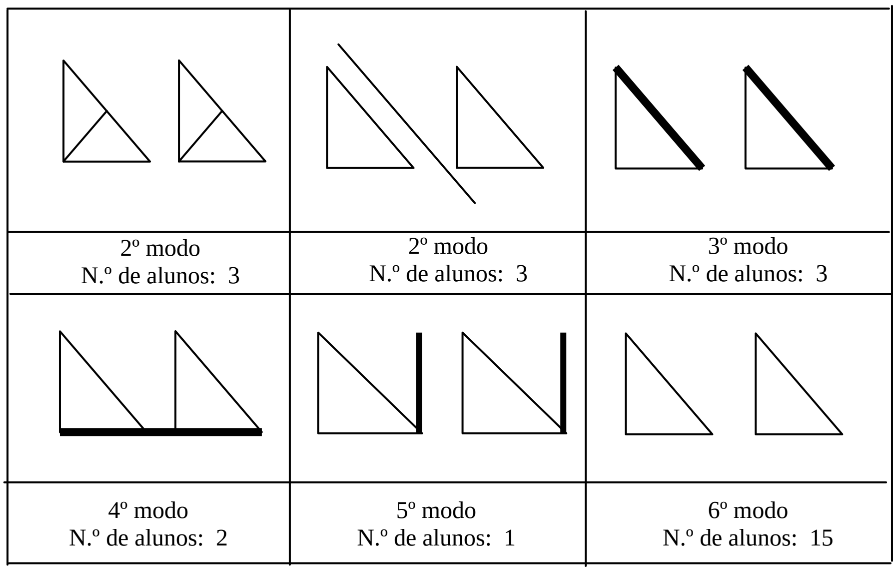


Figura 4.16. Modos de traçar o eixo de simetria da atividade 4a.

No primeiro modo, os alunos trabalhavam com a idéia de que são duas figuras distintas e independentes. Para eles, o eixo deve dividir cada figura em duas partes “iguais” (teorema-em-ação), idéia provavelmente gerada pela atividade de dobradura de figuras que não são compostas de sub-figuras conhecidas. Não perceberam a não congruência das figuras geradas pelos eixos de simetria traçados. Também não perceberam que os eixos traçados em cada uma das figuras não são eixos de simetria.

Neste segundo modo, os alunos consideram a figura e o seu reflexo. Traçaram um possível eixo inclinado de simetria. Para esses alunos, o eixo de simetria é paralelo a um dos lados do triângulo, no caso, a hipotenusa (teorema-em-ação). A justificativa dada por um aluno para o fato do eixo de simetria ter sido feito paralelo à hipotenusa é que “o eixo deve ser parecido com esses lados (referindo-se às duas hipotenusas)”.

Para o terceiro modo, para estes alunos, existe um eixo de simetria para cada figura que coincide com a hipotenusa do triângulo (teorema-em-ação). Estes alunos estão considerando que, se dobrarmos na hipotenusa, formaremos a outra parte da figura, ou seja, o quadrilátero mostrado na Figura 4.17.

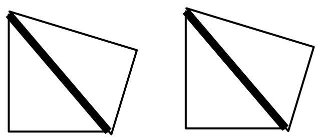


Figura 4.17. Eixo de simetria, para cada figura, e sua reflexão em torno deste eixo.

Um dos alunos foi questionado a respeito dessa sua solução, e nos relatou oralmente: “Se eu dobrar aqui (referindo-se ao eixo que traçou), dá a figura simétrica. Um retângulo”. Não considerou o par de figuras como a original e seu reflexo e não percebeu que o reflexo do triângulo, em relação ao eixo traçado, não é um retângulo, mas o quadrilátero representado na Figura 4.17. E uma provável justificativa para ter procedido desta forma é que este aluno, talvez, não tenha entendido o enunciado da atividade.

No quarto modo, para esses alunos, o eixo de simetria é uma reta horizontal que passa pela base dos triângulos (teorema-em-ação). Nesta solução, os alunos julgam que os dois triângulos devem ficar de um mesmo lado em relação ao eixo de simetria, e que, se dobrarmos neste eixo teremos a figura toda, como pode ser observado na Figura 4.18.

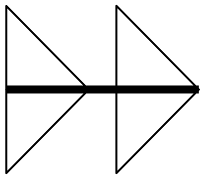


Figura 4.18. Modo de reflexionar no eixo de simetria da atividade 4a – 4º modo.

No quinto modo, para este aluno, “O eixo de simetria é perpendicular à base e paralelo ao outro cateto do triângulo dado” (teorema-em-ação). O aluno fez o seguinte relato oral: “O eixo de dobra é aqui (se referindo à reta feita), não é? E forma uma figura”. Pela resposta, entende-se que se for feita uma dobra, no eixo por ele traçado, obter-se-á a resposta mostrada na Figura 4.19.

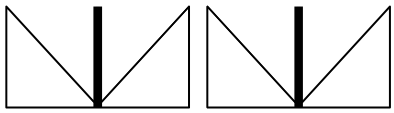


Figura 4.19. Modo de reflexionar no eixo de simetria da atividade 4a – 5º modo.

Observando os três modos anteriores, parece que esses alunos entenderam que era para ser traçada uma reta em torno da qual, depois, se faria a reflexão da figura. Pensando desta maneira, para qualquer figura dada é possível traçar o eixo de simetria.

Para o sexto modo, estes alunos não traçaram nenhum eixo de simetria, podemos inferir que realmente visualizaram que não temos a figura e seu simétrico, por isso não traçaram nenhum eixo de simetria.

No item b, como na anterior, surgiram diversos eixos de simetria, como podemos observar na Figura 4.20.

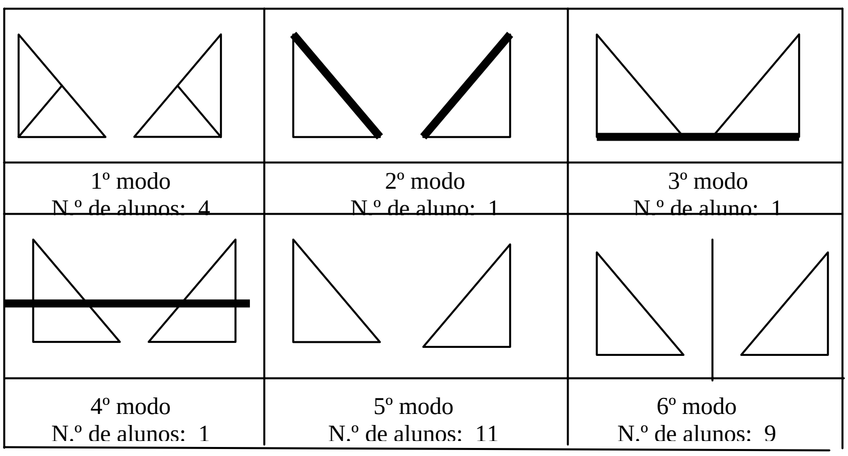


Figura 4.20. Modos de traçar o eixo de simetria da atividade 4b.

Para os modos 1, 2 e 3, as justificativas são semelhantes, respectivamente às justificativas dos modos 1, 3 e 4 da atividade 4, item a. No quarto modo, o eixo de simetria é uma reta horizontal que intercepta dois lados de cada triângulo (teorema-em-ação). Este aluno ainda não percebeu que nem sempre o eixo de simetria deve interceptar a figura. No quinto modo, a figura é considerada assimétrica por um número expressivo de alunos. No sexto modo, o eixo de simetria foi representado corretamente somente por nove alunos e as retas foram traçadas, passando entre as figuras, procurando em parte preservar a eqüidistância do eixo em relação às figuras. Não foram utilizados instrumentos de medida.

Diversas respostas foram dadas pelos alunos para a atividade 4c, como podemos observar no quadro da Figura 4.21.

O primeiro modo poderia ser justificado de forma análoga ao que foi discutido nos dois itens anteriores. No segundo modo, seis alunos traçaram um eixo inclinado de simetria, entre os dois triângulos, onde podem estar percebendo a sobreposição destas.

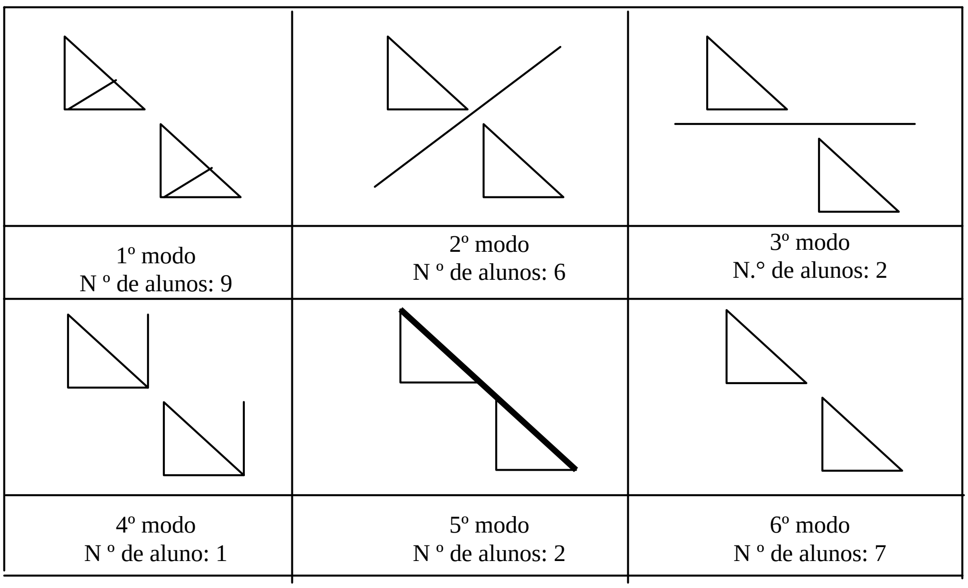


Figura 4.21. Modos de traçar o eixo de simetria da atividade 4c.

No terceiro modo, o eixo de simetria traçado é uma reta horizontal, separando as figuras em dois semiplanos (teorema-em-ação). Neste caso, os alunos não observaram que a dobra no eixo de simetria não sobreporia às figuras. O próximo modo tem justificativa análoga ao quinto modo, da análise *a posteriori* da atividade 4a. No quinto modo, a justificativa é a mesma do quarto modo da análise *a posteriori* específica da atividade 4a. No último modo, os alunos não traçaram eixo algum para a figura ou talvez alguns a considerem assimétrica.

Para atividade 4d, os alunos encontraram três modos distintos de traçar o eixo de simetria, como podemos observar na Figura 4.22.

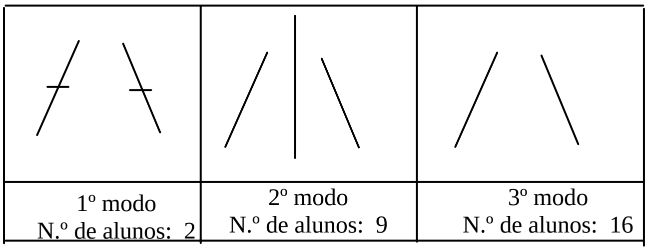


Figura 4.22. Modos de traçar o eixo de simetria da atividade 4d.

No primeiro modo, os alunos dividiram cada segmento em duas partes iguais e, no ponto médio, traçaram um segmento horizontal (não perpendicular a cada segmento). Os alunos não perceberam que, se dobrassem no segmento traçado as duas partes, não se sobreporiam e observamos a idéia de que o eixo deve passar no "meio" do segmento. No segundo modo, o eixo de simetria é uma reta vertical entre os segmentos (teorema-em-ação), inferindo ser o possível eixo de simetria. Apesar dos alunos traçarem o eixo de simetria à mão-livre, sem nenhuma precisão, esta é a resposta que estamos considerando como correta. No terceiro modo, vemos que os segmentos foram considerados assimétricos, por dezesseis alunos. Não perceberam que é possível sobrepor os dois segmentos se dobrarmos na reta vertical, que é a mediatriz do segmento, que une os extremos (superiores ou inferiores). Nesse caso, pode ter havido efeito do uso de dobraduras e de figuras simples.

No item 4e, diversos eixos de simetria foram traçados pelos alunos, como se pode observar na Figura 4.23.

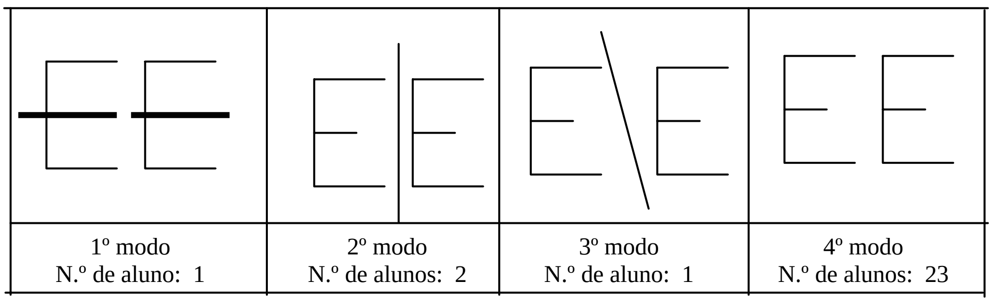
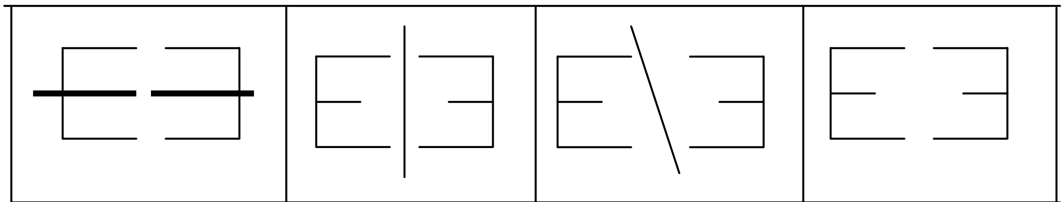


Figura 4.23. Modos de traçar o eixo de simetria da atividade 4e.

No primeiro modo, os alunos consideraram cada figura como um ente independente e traçaram o eixo. Neste modo, parece que o eixo de simetria deve passar pelo “meio” da figura E. Para o segundo modo, o eixo de simetria traçado para a figura E é vertical (teorema-em-ação) e o conceito de reflexão destes alunos é de que a figura e seu reflexo devem ser “iguais”, preservando forma e tamanho, e o simétrico é uma figura apenas deslocada horizontalmente. Já para o terceiro modo, um eixo inclinado em relação à borda do papel é traçado, a reflexão também é vista como um deslocamento horizontal da figura, como no segundo modo. Mas, nesse caso, desprezaram o “espelhamento” da figura depois da reflexão em reta. Para o último modo, vinte e três alunos a consideram assimétrica ou simplesmente a deixaram em branco. A resposta correta seria um eixo horizontal (como no primeiro modo) cortando ambas as figuras.

Observa-se, nesse tipo de problema, que, ou os alunos têm facilidade em perceber que não temos a figura e seu reflexo, ou simplesmente não traçaram nenhum eixo de simetria para este item.

Para a atividade 4f, na Figura 4.24, temos as respostas dadas pelos alunos. As justificativas são basicamente as mesmas da atividade anterior.



1º modo N.º de aluno: 1	2º modo N.º de alunos: 14	3º modo N.º de alunos 1	4º modo N.º de alunos: 11

Figura 4.24. Modos de traçar o eixo de simetria da atividade 4f.

No quarto modo, onze alunos consideraram-na assimétrica, ou deixaram a atividade em branco. Quatorze alunos consideram-na, tendo eixo vertical de simetria, que é resposta da figura. Podem estar percebendo a sobreposição das partes ao se dobrar neste. Nenhum aluno marcou dois eixos de simetria: horizontal e vertical para esta atividade. Para este item, ambos são eixos de simetria para a figura. Pode ser que se contentem com uma única resposta para o problema, ou não visualizaram outro eixo de simetria.

Observa-se, nesse tipo de problema, que os alunos têm maior facilidade para identificar o eixo de simetria vertical. E um teorema-em-ação para atividade 4f pode ser: “o eixo de simetria é uma reta vertical entre as duas figuras”.

4.6 Síntese do Primeiro Momento Coletivo

No final da aplicação da categoria I com a utilização de lápis e papel, promovemos o primeiro momento de discussão dos resultados apresentados pelos alunos em cada uma das atividades que faziam parte desta seqüência didática.

Neste momento da pesquisa, os alunos se empenharam em observar, traçar e decidir por eixos de simetria; deu-se início ao primeiro momento coletivo, fase de validação que envolveu todos os alunos selecionados e a institucionalização que envolveu pesquisadora e alunos.

Sabendo que esta situação é muito diferente do que normalmente ocorre em sala de aula, estávamos certos de que muitos alunos, de início, não entrariam na discussão. Mas tentaríamos introduzi-los nesta, procurando mostrar-lhes que aprenderiam muito tentando justificar seus procedimentos aos colegas. Assim, os alunos foram convidados a comunicar seus resultados para os colegas e que procurassem justificar por que assim fizeram.

Não descrevemos todos as respostas apresentadas, apenas apresentamos algumas dessas falas. Queremos dizer que esses momentos aconteceram e foram importantes e necessários. Algumas das justificativas também se encontram no decorrer da análise *a posteriori* de cada atividade.

A pesquisadora, dando início à discussão da atividade 1, comunicou ao grupo que partiríamos da primeira figura (quadrado) e passaríamos para a próxima (símbolo de proibido) até que discutíssemos os procedimentos de todas as figuras que a compõem. Houve uma pequena demora até que o primeiro aluno se pronunciasse, mas depois, os outros, se sentindo seguros, foram entrando na discussão, um a um, mas nem sempre justificaram seus procedimentos, vejam alguns exemplos: “eu fiz este eixo no quadrado (eixo horizontal), porque eu achei que é ele” (Aluno 17); continuou dizendo: “e depois eu fiz o outro (eixo diagonal 1)”. Outro aluno disse: “eu tracei um eixo na ponta do quadrado (eixo diagonal 2), porque achei que as partes são iguais”(Aluno 25).

Na discussão da penúltima figura, o aluno 4 ficou incomodado quando o aluno 7 disse que o raio não tem eixo de simetria, mas se conformou. O mesmo não aconteceu na atividade 2b, quando o aluno 14 disse que a diagonal não é eixo de simetria do retângulo. Não aceitando (Aluno 4) pediu (a pesquisadora) se poderia dobrar a figura, e só então se deu por vencido.’ tros também só concordaram depois da dobra no eixo de simetria.

Através dessas discussões, fomos traçando os eixos de simetria de cada figura, caso existissem, e ocorreu o fechamento pela pesquisadora da atividade, isto é, situações de institucionalização onde visavam “estabelecer o caráter de objetividade e universalidade do conhecimento” (Freitas, 2002, p. 82). Procedemos desta maneira para todas as outras situações-problema que faziam parte desta categoria I.

Nas atividades 2 e 3, como na anterior, os alunos dobraram no eixo e olharam contra-a-luz, antes de nos apresentar suas justificativas. Este procedimento tornou-se um meio de prova e verificação da resposta por esses alunos.

Na atividade 4, os alunos vinham até a mesa e numa transparência traçavam o eixo de simetria da figura envolvida, se no caso um dos alunos tivesse uma resposta igual às que já tivessem sido representadas apenas deveriam justificá-la; se sua solução ainda não tivesse sido representada, então deveria vir até à mesa, fazê-la e justificá-la. Alguns alunos, antes de virem até a mesa, dobravam no eixo de simetria por eles traçado, para concluírem se a reposta estava certa ou não.

Os alunos, neste momento (final desta categoria), constam com a idéia de simetria e de eixo de simetria advinda da atividade de dobradura feita no início da experimentação e com as idéias resultantes das correções das atividades (pela pesquisadora) desta categoria, isto é, os alunos devem saber que: <u>da atividade 1</u>, que uma figura pode ter um ou mais de um eixo de simetria; para traçar o eixo de simetria do quadrado e do retângulo (com lados não paralelos em relação às bordas do papel), uma maneira é traçar os pontos médios dos lados destas figuras e, em seguida, traçar o eixo de simetria, aquele passando pelos pontos médios dos lados paralelos. No caso do quadrado, as suas diagonais também são eixos de simetria, então devemos traçá-los, mas no caso do retângulo não são; <u>da atividade 2</u>, item a) o eixo de simetria está a igual distância dos vértices da figura e que as duas partes desta coincidem por superposição; <u>da atividade 3</u>, na reflexão de uma figura em relação a uma reta, a sua imagem mantém a mesma forma, o mesmo tamanho, porém, em posições opostas; <u>da atividade 4</u>, através da resolução desta (pela pesquisadora) utilizando-se de régua, esquadro e compasso, apresentamos o conceito de simetria e suas propriedades, como na Seção1.2 (p. 21-22).

Desta forma, os alunos ampliaram seus conhecimentos a respeito do conceito de simetria; na verdade, nesta etapa do processo, o grupo escolhido já tem o conceito de simetria e de suas propriedades. Mas é importante ressaltar que os alunos apenas observaram a pesquisadora fazendo os exercícios, não refizeram as atividades, isso implica que a simples observação do desenvolvimento de uma atividade nem sempre os capacitam, a saber fazê-los.

4.7 Síntese sobre a Categoria I com Lápis e Papel

Nas atividades da categoria I, observamos que os alunos, de modo geral, não utilizaram instrumentos de medida, recorrendo somente à visualização na tomada de decisões. Verificamos também, que a maioria dos alunos não conseguiu identificar todos os eixos de simetria de uma figura, e que a posição da figura em relação ao eixo dificultou a realização da atividade.

Percebemos, ainda, que alguns alunos consideram “a reflexão como sendo apenas uma translação da figura”. Para obtenção da resposta correta, os alunos utilizaram dobradura para verificar ou confirmar este fato, mas esta dobra não foi de fato efetivada. Esses alunos utilizaram o recurso de puxar uma das bordas do papel, como se fossem dobrar no eixo de simetria dado e analisar mentalmente como deveria ser o resultado desta atividade.

Os alunos não consideraram as figuras da atividade 4 como compostas de sub-figuras; analisaram cada sub-figura independente da outra e buscaram, isoladamente, o eixo de simetria. A origem dessa postura poderia estar relacionada ao fato de que normalmente as figuras, exploradas em atividades de simetria, não são compostas de sub-figuras. Nenhum dos livros didáticos analisados, nesta pesquisa, na introdução do conceito de simetria e de eixo de simetria apresentam figuras compostas de sub-figuras.

Nessa categoria, inicialmente, os alunos utilizaram inadequadamente invariantes concernentes ao eixo de simetria das figuras dadas, pois se fixaram apenas em algumas propriedades de simetria e ignoraram outras, como a sobreposição das partes. Por outro lado, num segundo momento, os alunos centraram suas atenções na idéia de dobradura que lhes foi apresentada e a aplicaram corretamente.

Agrupamos os prováveis invariantes utilizados pelos alunos, nessa categoria, em dois blocos: um que considera que o eixo de simetria deve passar pelo “meio” da figura e um outro para o qual o eixo divide a figura em duas partes “iguais”.

A idéia de que o eixo de simetria deve passar pelo “meio” da figura, também foi evidenciada por Grenier (1989):

> As expressões utilizadas pelos alunos para designá-la, como, por exemplo, «reta do meio» ou «reta que divide a figura em duas partes», são geralmente entendidas pelos alunos. Mas elas podem também provocar erros em razão da sua ambigüidade (por exemplo, as retas dividindo um retângulo em duas partes iguais não são todas retas simétricas), ou ainda obter de forma errônea o reconhecimento de retas simétricas em uma figura onde elas não existem (como por exemplo, em um paralelogramo) (Grenier, 1989, p. 16).

Em nossa experimentação, verificamos que, para muitos alunos, o eixo de simetria deve ser traçado, procurando dividir a figura ao “meio”, inferindo um possível lugar, mais ou menos, passando na “metade” da figura e utilizando-se basicamente da visão, o que também ocasionou alguns erros citados por Grenier (1989). Esta situação é entendida e compreendida uma vez, que os alunos tinham poucas informações sobre simetria.

PARTE II

CATEGORIA II COM LÁPIS E PAPEL

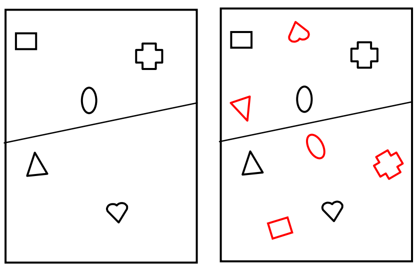
4.8 Análise a *Priori* das Atividades

a) ATIVIDADE 1

A tarefa a ser executada é encontrar o simétrico de figuras em relação ao eixo inclinado de simetria. Os alunos devem observar o resultado da atividade e descrever propriedades de simetria. As figuras encontram-se em papel não quadriculado, e a ferramenta a ser utilizada é dobradura e decalque.

Análise a *priori* da atividade 1

Na Figura 4.25a, temos a atividade proposta e na Figura 4.25b, temos a resolução da atividade. Destacamos em vermelho o simétrico das figuras dadas em relação ao eixo inclinado de simetria.



a) b)

Figura 4.25. Atividade proposta (tem a) e solução da atividade (item b).

Com esta atividade, pretendemos que os alunos ampliem o conceito de simetria, bem como de suas propriedades: perpendicularismo ao eixo de simetria e a eqüidistância ao eixo de pontos correspondentes. Eles receberam essas informações nas correções das atividades da categoria I. Nesta atividade, os alunos têm duas tarefas. A primeira é fazer a reflexão das figuras dadas em relação ao eixo inclinado de simetria e a segunda é enunciar algumas propriedades a partir da análise do resultado da primeira.

Para a execução da primeira atividade, comunica-se aos alunos que eles podem dobrar no eixo de simetria. Entretanto, não foi dito o que era para ser feito, nem de como fazê-lo, pois queremos observar como agem diante desta situação. É provável que alguns alunos percebam que a dobradura foi proposta por facilitar a determinação do simétrico das figuras em relação ao eixo de simetria dado. Nesta atividade, podem surgir os seguintes procedimentos em relação ao uso de dobradura e decalque:

- alunos que sabem exatamente o que fazer, isto é, dobram no eixo de simetria, reforçam as figuras dadas com lápis, fazendo assim uma marca/cópia da figura; depois, desenham a reflexão da figura para gerar os resultados;

- alunos que podem dobrar a folha no eixo de simetria, mas não sabem o que fazer, deixando a atividade em branco; ou não utilizam o decalque, simplesmente olham a folha de atividade contra a luz, para ver onde e como o reflexo da figura cai e fazem um esboço da resposta; ou fazem o decalque de todas as figuras, mas só representam o reflexo das figuras localizadas na parte superior (ou inferior) do eixo de simetria.

A resposta feita através do procedimento de olhar contra-a-luz, na busca do simétrico das figuras em relação a este eixo, é mais imprecisa do que a feita com a dobradura e decalque, uma vez que têm que passar o lápis sobre a figura sem apoio. O recurso de dobradura e decalque, neste caso, garante uma maior precisão na construção do simétrico das figuras em relação ao eixo de simetria dado.

Prevê-se que a posição do eixo de simetria (inclinado em relação à borda da folha retangular de papel) é um meio dificultador da atividade e pode não contribuir para a obtenção de bons resultados, uma vez que imaginar o reflexo de figuras em relação a um eixo inclinado é menos evidente quanto quando o eixo é horizontal.

Pretendemos, nesta atividade, observar como os alunos constroem o simétrico das figuras propostas em relação ao eixo inclinado de simetria e se, em suas respostas, aparecem reflexões segundo uma referência horizontal, uma referência vertical ou uma referência diagonal. E por isso é provável que os alunos utilizem os invariantes 6, 7, 8 (p. 62-64).

Na segunda tarefa, é possível que poucos alunos tentem enunciar propriedades, pois, normalmente as recebem prontas e as utilizam em situações-problema. Eles dificilmente foram acostumados a analisar e a escrever sobre uma tarefa realizada. Assim, há uma mudança de postura e, por isso, podem abandonar a questão. Pretendemos ver o que mais chama a atenção dos alunos depois da resolução desta atividade utilizando dobradura. As propriedades (invariantes) que eventualmente são enunciadas podem ser superficiais ou extremamente gerais, como as que vamos registrar: "algumas figuras estão com a posição invertida"; "as figuras estão à mesma distância do eixo de simetria"; "em relação ao eixo de simetria o triângulo e o coração estão invertidos".

b) ATIVIDADE 2

A tarefa a ser executada é: "Sabendo-se que as figuras são simétricas em relação à reta dada, desenhar a outra parte da figura".

Esta tarefa é composta de três itens: a, b e c. Em todos os itens, preservamos a mesma figura, só alteramos suas posições. No item a, o eixo de simetria é vertical; no item b, o eixo de simetria é horizontal; e no item c, o eixo de simetria é inclinado em relação à borda do papel. O papel é quadriculado e a ferramenta a ser utilizada é o quadriculado do papel. A figura está encostada no eixo de simetria, o que pode facilitar a obtenção do simétrico da figura dada.

Análise a *priori* da atividade 2

Nesta atividade, espera-se que os alunos busquem a solução, baseando-se apenas na visualização ou na contagem de quadradinhos da malha para reproduzir o simétrico da figura dada, completando, assim, a parte que falta da figura. Na Figura 4.26, representamos a resposta correta da atividade através da contagem dos quadradinhos da malha.

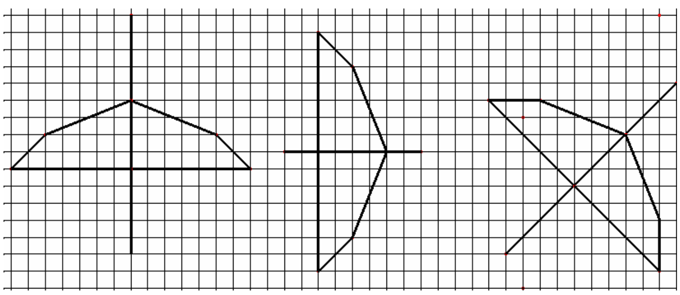


Figura 4.26. Resolução da atividade 2.

Apesar dos alunos terem uma noção do todo, a variação das posições do eixo de simetria pode trazer dificuldades, impedindo o sucesso na atividade. Os eixos horizontal e vertical devem ser menos problemáticos do que o eixo inclinado, justamente pela posição da figura e do eixo. Assim, para os itens a e b, espera-se um número significativo de acertos. No caso do eixo vertical, é possível que alguns alunos virem a folha, recaindo no caso do eixo horizontal. Apesar do papel ser quadriculado, não é esperado que ele facilite a tarefa no item c, mesmo considerando o fato da figura estar encostada no eixo de simetria.

Para os três itens que compõem esta atividade, é possível que alguns alunos desconsiderem o eixo de simetria dado e façam a reflexão da figura em relação ao lado da figura que é perpendicular ao eixo de simetria dado, como mostrado na Figura 4.27, para o item (b).

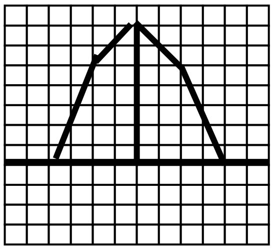


Figura 4.27. Desconsideração do eixo de simetria.

Aparentemente, o fato de a figura ter este lado perpendicular ao eixo de simetria é que proporciona este tipo de confusão nos alunos, apesar de serem alertados sobre qual é o eixo de simetria da atividade. Se este procedimento aparecer nas respostas dos alunos, é provável que eles estejam utilizando o invariante operatório: “se a figura tem um lado perpendicular a um eixo horizontal de simetria, a imagem deve ser construída em relação a este lado”.

Pretendemos verificar se surgem em suas respostas os procedimentos: referência horizontal, referência vertical e referência diagonal, como as pesquisas indicam suscetíveis de surgirem e a atividade proporciona esses tipos de procedimentos. Por isso, é provável que os alunos utilizem os invariantes 6, 7, 8 (p.62-64).

c) ATIVIDADE 3

A tarefa a ser executada é fazer a reflexão da figura dada em relação a uma reta vertical (eixo de simetria). A figura dada é uma linha poligonal aberta e simples, cortando o eixo de simetria, de forma que as duas extremidades da linha encontram-se em um mesmo semiplano em relação ao eixo. O papel é quadriculado e a complexidade da figura é bem maior em relação à atividade anterior.

Análise a *priori* da atividade 3

Na categoria I, os alunos se depararam com a atividade 3, onde o eixo se encontrava fora da figura e agora apresentamos um novo desafio a ser vencido: estão diante de uma atividade onde o eixo de simetria corta a figura. Como a figura que faz parte desta atividade é uma linha poligonal aberta simples, pode ocorrer uma resistência por parte dos alunos em aceitarem e em entenderem esta nova tarefa. É possível que o aluno passe por uma fase de adaptação, levando um tempo para se engajar, mas depois começa a agir e a refletir como esta deve ser feita, criando uma estratégia e colocando-a em prática. Mas, a validação de sua resposta nem sempre ocorre, pois, em sala de aula, nem sempre o aluno é levado a verificar ou questionar sua resposta e, normalmente, se dá por satisfeito com sua primeira e única solução. São poucos, ou raríssimos, os alunos que buscam por outra solução.

Os problemas que podem ocorrer nesta atividade são: a resistência dos alunos em aceitar a tarefa, o não entendimento da atividade e a complexidade da figura.

Os procedimentos referência vertical, referência horizontal e referência diagonal podem surgir em suas respostas. Assim, é provável que alguns alunos utilizem os invariantes 6, 7 e 8 (p. 62-64).

Os alunos podem escolher o material a ser utilizado, mas acreditamos que se utilizem apenas de dobradura, por já fazer parte de suas experiências. A atividade está inserida em papel quadriculado. É possível que esta característica do papel não contribua para o êxito desta por causa do tipo de figura dada e porque pode ocorrer contagem errada dos quadradinhos. A solução correta ocorre se os alunos utilizam dobradura e decalque ou régua e fizerem a contagem correta de quadradinhos. Este último procedimento está descrito a seguir.

Inicialmente, os vértices da figura dada serão nomeados. Para marcar o simétrico do ponto A em relação ao eixo dado, deve-se contar dois quadradinhos a partir do eixo e marcá-lo no semiplano oposto ao de A e na mesma reta horizontal que contém A, obtendo A'. Todos os demais pontos são obtidos de forma análoga, considerando-se as respectivas distâncias ao eixo de simetria. Pode-se proceder de duas formas: construir todos os pontos-imagem e traçar os segmentos-imagem correspondentes ou à medida que os pontos-imagem são construídos os respectivos segmentos-imagem são obtidos. A Figura 4.28 ilustra a solução desta atividade.

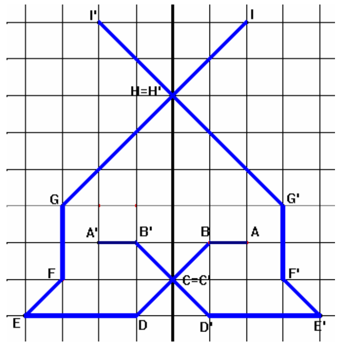


Figura 4.28. Resolução da atividade 3.

Podem surgir procedimentos "certos" e "errados". Entre eles, estamos supondo que alguns alunos: desconsiderem (ou considerem) o eixo de simetria dado; simplesmente arrumem uma maneira de fechar a figura; façam uma translação da figura; façam uma reflexão transladada da figura; não contem corretamente os quadradinhos, na tentativa de preservar o tamanho dos segmentos que compõem a figura; reflitam corretamente a figura por se utilizarem dobradura e decalque; façam a reflexão apenas da parte da figura que se encontra à esquerda do eixo de simetria.

Se alguns dos procedimentos anteriores forem evidenciados nas respostas dos alunos, os possíveis invariantes associados a estes podem ser: "o simétrico da figura deve ser uma figura contínua"; "o simétrico da figura em relação a um eixo deve ser uma figura deslocada horizontalmente"; "o simétrico da figura em relação a um eixo deve ser uma figura refletida e deslocada"; "a forma e as dimensões da figura devem ser preservadas depois da reflexão"; "se o eixo intercepta a figura então só devemos refletir a parte da figura que se encontra à esquerda do eixo de simetria".

d) ATIVIDADE 4

A tarefa a ser executada é: fazer a reflexão do triângulo dado, em relação a uma reta inclinada (eixo de simetria). O eixo de simetria corta o triângulo. Os alunos têm liberdade para usar qualquer ferramenta. O tipo de papel é não quadriculado.

Análise a *priori* da atividade 4

O uso do papel quadriculado, nesta atividade, não contribui para o seu êxito, pois a figura tem duas características importantes: é inclinada em relação às bordas superior e inferior do papel, e possui eixo de simetria inclinado, que a tornam complexa. Entretanto, a falta da malha dificulta a aferição das distâncias em relação ao eixo, para a determinação da simetria de pontos ou segmentos e preservação de medidas.

A solução correta ocorre se os alunos utilizam dobradura e decalque ou régua, compasso e esquadro e aplicam as propriedades de simetria. O eixo inclinado e cortando a figura pode ser um fator dificultador se o aluno não utilizar dobradura e este recurso é mais fácil de ser utilizado e pode ser o material escolhido. Em suas respostas, os alunos podem não perceber ou esquecer da parte menor no semiplano oposto. Neste caso, um possível invariante suscetível de ser utilizado pode ser: “se o eixo intercepta o triângulo, então só devemos refletir a parte do triângulo que se encontra à esquerda (ou à direita) do eixo de simetria”.

Outros alunos, mesmo utilizando dobradura, podem fazer ou não a reflexão correta da figura. Se a dobradura não for utilizada, a figura pode ser refletida em relação a um novo eixo de simetria mais adequado para o aluno; outros podem considerar o eixo dado, mas deslocam o triângulo sobre a reta que contém a hipotenusa. Neste caso, os alunos podem estar utilizando o invariante: “o simétrico de um triângulo em relação a um eixo de simetria é um triângulo deslocado sobre a reta que contém a hipotenusa”.

Não se espera que os alunos utilizem esquadro ou compasso por não acharem necessário, apesar da pesquisadora, na síntese da atividade 3 (categoria I, lápis e papel), ter utilizado régua, esquadro e compasso e discutido as propriedades de simetria, ou ainda por não terem segurança em utilizá-los.

Para resolverem a atividade corretamente com instrumentos de precisão, os alunos podem proceder como descrito a seguir. Traçar, com o auxílio da régua e do esquadro, retas perpendiculares ao eixo de simetria, passando pelos vértices do triângulo ABC dado. Depois, com o auxílio do compasso, traçar uma circunferência de raio igual à distância do ponto A ao eixo de simetria, com centro na projeção de A sobre o eixo. Na interseção desta circunferência com a reta perpendicular, no semiplano oposto ao do ponto A, marca-se o ponto A’, simétrico de A em relação ao eixo dado. Procede-se analogamente para os pontos B e C, como podemos observar na Figura 4.29. Depois os segmentos $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$ e $\overline{C'A'}$ são traçados.

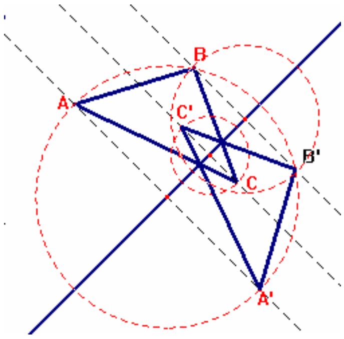


Figura 4.29. Resolução da atividade utilizando-se de régua, esquadro e compasso.

Outros invariantes suscetíveis de serem utilizados pelos alunos, nesta atividade, podem ser: “o simétrico de uma figura fica do outro lado do semiplano”, pode ser associado ao procedimento referência diagonal; “o simétrico de um triângulo é um triângulo, que preserva forma e dimensões da figura original”; “se o eixo intercepta o triângulo, então o eixo também intercepta o triângulo-imagem” este invariante pode ser associado ao procedimento de deslocar o triângulo no prolongamento do lado maior do triângulo dado, mas deixando um “pedacinho” do outro lado do eixo de simetria.

e) ATIVIDADE 5

A tarefa a ser executada é fazer a reflexão de figuras em relação a uma reta que pode ser vertical ou inclinada (eixo de simetria). No item a, a figura é aberta e simples, com ambas as extremidades contidas no eixo de simetria, que é vertical. No item b, o eixo dado é inclinado e a figura é uma linha aberta e simples, com uma extremidade pertencente ao eixo de simetria e o outro contido no semiplano, em relação ao eixo de simetria, oposto ao restante da figura. No item c, a figura é mais complexa do que as outras duas, e o eixo dado corta a figura. O eixo é vertical. A ferramenta a ser utilizada é o papel transparente e o tipo de papel é não quadriculado.

Análise a *priori* da atividade 5

Apesar do enunciado explicitar que o papel transparente pode ser utilizado para copiar a figura e traçar o reflexo desta, pode ser que este se torne uma dificuldade para alguns alunos, por não saberem como utilizar este instrumento. Como as figuras (a) e (b) da atividade nos fornecem uma idéia intuitiva de seu outro lado (reflexo), os alunos podem abandonar o material sugerido e utilizar o recurso de desenho à mão-livre por ser muito mais rápido e cômodo.

Consideramos como figura o desenho todo, que inclui o eixo de simetria, isto é, figura+eixo. Para usá-lo corretamente, os alunos devem proceder como comentado na descrição do recurso papel transparente (Seção 3.3, p. 80).

Com relação ao uso do papel transparente, nesta atividade, é provável que alguns alunos:

- copiem as figuras, juntamente com seu eixo no papel transparente e, depois, não farão mais nada, ficando a folha de atividade em branco;
- no item a, copiem a figura de ponta cabeça, por não terem virado o papel transparente corretamente, ou transladem a figura; no item b, não reflitam a parte à direita do eixo de simetria; no item c, não saibam o que fazer; ou simplesmente copiem a figura no papel transparente; ou copiem apenas parte da figura que lhes convier.

No item a, por ser uma figura familiar e o eixo ser vertical, pode ocorrer um grande número de acertos. Os "erros", que porventura surgirem, são decorrentes da rotação do papel, da translação da figura e por não registrarem a resposta na folha da atividade, deixando somente o decalque no papel transparente.

Na atividade do item b, pelo fato da figura cortar o eixo de simetria, provavelmente alguns alunos não devem considerar a parte que ultrapassa o eixo. Alguns alunos podem considerar um novo eixo de simetria passando pelas extremidades da figura. Em ambos os casos, a parte refletida será encaixada (ponta com ponta).

No item c, os alunos podem encontrar mais dificuldades, pois a figura dada corta o eixo de simetria, impedindo a visualização do resultado da reflexão, e é provável que alguns alunos: façam a reflexão correta; deixem esta atividade em branco; procurem uma forma de fechar a figura; façam a reflexão, somente da linha vermelha da figura (reflexão parcial); façam a reflexão da figura e a transladem.

Alguns invariantes possivelmente utilizados pelos alunos, nos três itens desta atividade, podem ser: “o simétrico de uma figura fica do outro lado do semiplano”; “se o eixo intercepta a figura então só devemos refletir a parte da figura que se encontra à esquerda (ou à direita) do eixo de simetria”; “o simétrico da figura é uma figura que preserva forma e dimensões da figura original”; “o simétrico da figura é uma figura transladada horizontalmente (ou verticalmente ou diagonalmente)”; “o simétrico da figura é uma figura refletida e transladada (horizontalmente, ou verticalmente ou diagonalmente)”.

f) ATIVIDADE 6

A tarefa a ser executada é encontrar o simétrico de alguns pontos em relação a uma reta inclinada (eixo de simetria). A ferramenta a ser utilizada não foi definida e o tipo de papel é quadriculado. A figura contém 5 pontos, dois no semi-plano superior, dois no semi-plano inferior e um no eixo de simetria. Nessa figura, os pontos dados são referenciados apenas por uma letra e os pontos resposta pela letra correspondente e um apóstrofo. A posição dos pontos em relação ao eixo pode estar: próximo, no eixo e afastado. A posição dos pontos em relação à grade pode estar: nos pontos de interseção (pertencentes à grade), nas linhas ou fora das linhas.

Análise *a priori* da atividade 6

É possível que os alunos percebam o invariante “o simétrico de um ponto é outro ponto”, mas ainda não devem se preocupar com o perpendicularismo e eqüidistância, embora, na síntese da atividade 3 (categoria I), tenhamos discutido estas propriedades para objetos figuras. Figuras e pontos são objetos distintos, mas as propriedades se aplicam a qualquer um deles.

A atividade pode ser realizada com êxito se os alunos utilizarem dobradura e decalque ou instrumentos de medida, régua, esquadro e compasso. Na Figura 4.30, temos a resolução da atividade, utilizando instrumentos de medida. Esta solução é análoga à solução da atividade 4, executando os passos 1 e 2, para todos os pontos dados.

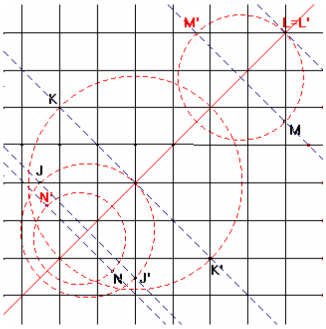


Figura 4.30. Resolução da atividade 6, utilizando-se de instrumentos de medida.

Os alunos podem utilizar retas auxiliares, não necessariamente perpendiculares ao eixo de simetria, que servem para marcar o simétrico de cada ponto, tentando preservar a distância da figura ao eixo. Provavelmente, os alunos utilizem a contagem de quadradinhos. Eles podem utilizar a régua, como instrumento auxiliar de traçado de uma possível reta (imaginária) do lugar do simétrico do ponto e não utilizem o esquadro e nem o compasso.

É provável que alguns alunos marquem o simétrico dos pontos, utilizando-se somente da visualização e procurando preservar a distância aproximada do ponto ao eixo; que a posição dos pontos: afastado, fora da grade e no eixo de simetria dificulte a resolução desta atividade. Eles podem utilizar dobradura e decalque, pela facilidade na obtenção dos simétricos dos pontos dados.

É previsto que alguns alunos unam os pontos dados na atividade, formando uma figura, como se fosse necessário ter uma figura fechada como solução. Isto ocorre por não terem entendido a atividade, ou por pensarem que, pela disposição dos pontos e pela idéia dada pela dobradura, tenham que ter uma figura onde o eixo tem que dividir a figura em duas partes.

Alguns alunos não devem determinar o simétrico de alguns pontos: por esquecimento; por falta de atenção; ou por não os considerarem importantes. Outros devem encontrar corretamente o simétrico de todos os pontos ao utilizarem dobradura e decalque. Entretanto, mesmo encontrando a resposta correta, alguns podem ligar os pontos encontrados, por pensar que só é possível achar o simétrico de outras figuras.

A presença da malha parece facilitar a determinação do simétrico dos pontos, uma vez que os alunos não têm interesse, ou não sentem necessidade em usar instrumentos de medidas, ela facilita a aferição das distâncias em relação ao eixo, para a determinação do simétrico de pontos e preservação de medidas.

Nas respostas de alguns alunos, podem aparecer os procedimentos: referência vertical, referência horizontal e referência diagonal. Por isso, é provável que os alunos estejam utilizando os invariantes 6, 7 e 8 (p. 62-64).

Outros invariantes que podem ser utilizados pelos alunos são: "o simétrico de um ponto é um ponto"; "os simétricos de alguns pontos em relação a um eixo inclinado de simetria são pontos deslocados horizontalmente (verticalmente ou diagonalmente)"; "os simétricos de alguns pontos em relação a um eixo inclinado de simetria são pontos, que devem ser unidos por segmentos de reta, formando uma figura contínua".

g) ATIVIDADE 7

A tarefa a ser executada é fazer a reflexão de alguns segmentos em relação a uma reta inclinada (eixo de simetria). A ferramenta a ser utilizada não foi definida, ficando à livre escolha dos alunos. O tipo de papel é o quadriculado.

Análise a *priori* da atividade 7

Segundo Grenier (1985, p.69), não é suficiente saber determinar o simétrico de um ponto para saber determinar o simétrico de um segmento. Os alunos têm, como ponto de partida para a resolução desta situação-problema, a situação anteriormente trabalhada. Eles devem ampliar os conhecimentos adquiridos e estender estas noções para a atividade com segmentos. Eles devem observar o invariante "o simétrico de uma figura em relação a uma reta conserva a colinearidade dos pontos", ou seja, "a imagem de um segmento é um segmento".

Provavelmente, a variação das posições dos segmentos: horizontal, vertical e inclinado pode dificultar a atividade. Entre as respostas, podem surgir: a referência horizontal ou vertical dos segmentos dados; segmentos paralelos aos dados; o reflexo do segmento aparecendo na reta suporte deste.

Os alunos devem utilizar dobradura e decalque, de forma a obter êxito na atividade. Como na atividade anterior, é provável que alguns alunos encontrem uma forma de unir os segmentos dados, com o intuito de construir uma figura contínua, mantendo a noção apenas de simétrico de uma figura. Outros ainda podem utilizar ambas as estratégias. Alguns não devem saber o que fazer nesta atividade e outros podem simplesmente construir um segmento, do lado oposto ao da figura em relação ao eixo de simetria, utilizando basicamente a visualização e traçado à mão-livre.

Nesse caso, parece que o papel quadriculado apresenta-se como um fator complicador e não facilitador da atividade, por causa da inclinação do eixo e a posição em que se encontram os segmentos. Segundo Grenier (1985), o papel, sendo quadriculado, parece reforçar os procedimentos (referência vertical ou referência horizontal), pois as linhas da malha quadriculada privilegiam as direções vertical e horizontal e estimulam a contagem dos quadradinhos, quando se considera a distância da figura ao eixo.

A atividade pode ser realizada com êxito se os alunos utilizarem dobradura e decalque ou régua, esquadro e compasso. No caso de utilizarem instrumentos de medida, os alunos precisam perceber que, para determinar a imagem de um segmento dado, basta determinar a imagem das extremidades inicial e final deste, unir as duas imagens produzidas com um segmento de reta. Assim, devem perceber que o segmento traçado é a reflexão de todos os pontos compreendidos entre a extremidade inicial e final do segmento dado. Segundo Grenier (1985), os alunos não determinam com naturalidade a imagem de um segmento, usando os simétricos das suas extremidades.

Alguns invariantes suscetíveis de serem utilizados, pelos alunos, nesta atividade, podem ser: “o simétrico de um segmento é um segmento”; “os simétricos de alguns segmentos em relação a um eixo inclinado de simetria são segmentos deslocados horizontalmente (verticalmente ou diagonalmente)”; “os simétricos de alguns segmentos em relação a um eixo inclinado de simetria são segmentos, que devem ser unidos por segmentos de reta, formando uma figura contínua”.

h) ATIVIDADE 8

A tarefa a ser executada é fazer a reflexão de um triângulo em relação a uma reta inclinada (eixo de simetria), utilizando régua, esquadro e compasso. Os alunos devem descrever como procederam. O tipo de papel é não quadriculado.

Análise a *priori* da atividade 8

Em suas respostas, é possível aparecerem os procedimentos: referência vertical, ou referência horizontal, ou referência diagonal. E, por isso, é provável que os alunos utilizem os invariantes 6, 7 e 8 (p. 62-64).

A solução da atividade só deve ocorrer com a utilização de dobradura, mesmo esta não sendo autorizada, alguns alunos podem desrespeitar o combinado. Outros podem refletir o triângulo, preservando suas medidas, mas posicionando-o próximo ou afastado do eixo de simetria, sem se preocuparem com a eqüidistância dos pontos em relação ao eixo de simetria.

Alguns alunos podem desconsiderar os materiais sugeridos e fazer a atividade à mão-livre. Os alunos devem utilizar apenas alguns dos materiais solicitados, como, por exemplo, régua. O conjunto régua, esquadro e compasso dificilmente será utilizado pelos alunos, pois muitos não se sentem seguros em utilizá-lo, mas a resposta correta e precisa só será obtida com a utilização destes e procedendo como na atividade 4, passos 1, 2 e 3. Na Figura 4.32, está apresentada sua solução.

Aos alunos é solicitado que descrevam seus procedimentos. Ao descrevê-los, podem perceber possíveis "falhas" e corrigi-las.

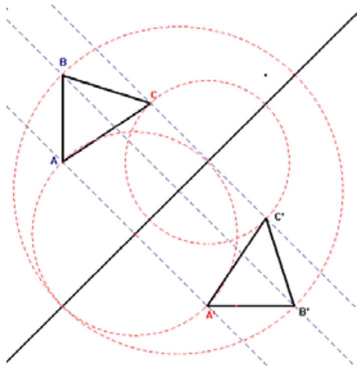


Figura 4.32. Resolução da atividade 8.

Alguns dos invariantes que podem ser utilizados pelos alunos, nesta atividade, são: "o simétrico de um triângulo fica do outro lado do semiplano"; "se a figura se encontra afastada do eixo, então a figura-imagem também ficará, depois da reflexão, afastada do eixo de simetria"; "o simétrico de um triângulo é um triângulo, que preserva forma e dimensões da figura original"; "o triângulo dado está posicionado próximo ou afastado do eixo de simetria, então, o triângulo-imagem mantém sua posição em relação ao eixo de simetria".

4.9 Desenvolvimento e Análise a *Posteriori* das Atividades

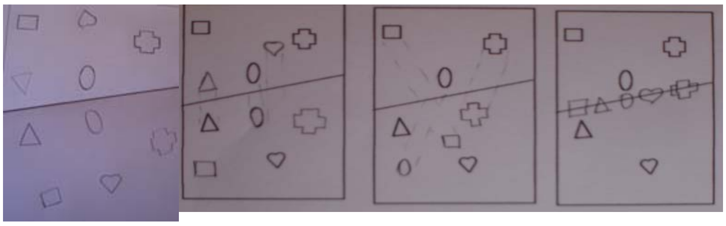
a) ATIVIDADE 1

Desenvolvimento da atividade 1

Os alunos receberam a atividade 1. Como na categoria anterior, a pesquisadora fez a leitura do enunciado desta e reforçou que poderiam dobrar no eixo de simetria se achassem necessário. Percebemos alguns alunos lendo e relendo o enunciado da atividade; outros, imediatamente, dobraram no eixo de simetria e ficaram analisando o porquê da dobradura ter sido permitida. Alguns já sabiam o que fazer e partiram para o decalque ou em olhar contra-a-luz, em busca da resposta. Os alunos somente questionaram se realmente era necessário escrever o que estavam percebendo no resultado da atividade.

Análise *a posteriori* da atividade 1

Na análise das respostas[1], pôde-se observar que todos os alunos dobraram no eixo de simetria, pois todas as folhas de respostas entregues apresentavam vinco no eixo de simetria. Entretanto, nem todos souberam o que fazer: dez alunos dobraram no eixo de simetria, fizeram decalques das figuras atrás da folha de atividade e forneceram a resposta correta (Figura 4.33a); seis alunos dobraram no eixo de simetria e nada fizeram; um aluno só refletiu as figuras que se encontravam no semiplano acima do eixo de simetria (Figura 4.33b); sete alunos só refletiram as figuras que se encontravam no semiplano abaixo do eixo de simetria; dois alunos refletiram algumas das figuras que se encontravam no semiplano acima do eixo e algumas do semiplano abaixo do eixo de simetria; um aluno colocou todas as figuras sobre o eixo de simetria, na tentativa de dividi-las em duas partes (Figura 4.33d).



a) b) c) d)

Figura 4.33. Procedimentos dos alunos na atividade 1. Categoria II- Lápis e papel.

[1] Estas respostas encontram-se no Quadro de Respostas da Atividade 1, no Anexo II, p.268.

Para o aluno, que no deu como resposta a Figura 4.33d, é possível que ele tenha se utilizado dos seguintes invariantes: “o eixo de simetria tem que dividir a figura ao ‘meio’”; “o eixo de simetria corta as figuras em duas partes”, no caso, essas partes não são necessariamente congruentes e nem mesmo se superpõem-se ao se dobrar no eixo de simetria..

A posição do eixo de simetria parece ter dificultado a atividade, sendo justificada pelos relatos na análise *a priori* e reforçada por Gutiérrez & Jaime (1987) com relação à posição do eixo de simetria. Segundo eles, os exercícios mais fáceis eram aqueles que apresentavam eixos horizontais seguidos dos eixos verticais e, os mais complicados, os que apresentavam eixos em outras posições.

Dos procedimentos que estávamos procurando observar, surgiram a referência vertical e a diagonal. Não houve a preocupação desses alunos em usar a régua graduada no traçado das figuras onde os lados são segmentos de reta.

Na Figura 4.34, pode-se observar o procedimento de alunos, de dobrar a folha no eixo de simetria e olhar contra a luz para ver onde e como o reflexo da figura cairá.

Figura 4.34. Procedimentos dos alunos, em olhar contra a luz.

Poucos alunos, como previmos e apesar da insistência do pesquisador, enunciaram propriedades de simetria. Quando o fizeram, estas foram vagas e os alunos somente fixaram-se em algumas figuras como o coração e o triângulo. A percepção da inversão destas, foi o fato mais expressivo para esse grupo de alunos. As propriedades foram enunciadas por onze alunos e seguem abaixo.

- “Uma está de um lado e a outra do outro” (Aluno 7).
- “O coração inverteu” (Aluno 17).
- “Tá espelhando” (Aluno 2).
- “O coração e o triângulo tá de ponta cabeça” (Alunos 1, 6, 10, 20 e 27).
- “Um coração está certo o outro não” (Alunos 8, e 25).

- “O retângulo girou um pouquinho. O coração e triângulo giraram mais” (Aluno11).

Todas as figuras, com exceção do triângulo e do coração possuem eixos horizontal e vertical de simetria. Por causa do eixo horizontal, estas figuras, quando refletidas em um espelho colocado no eixo dado, não sofrem grandes mudanças, apenas uma pequena inclinação. O mesmo não ocorre com o triângulo e o coração que, por terem somente o eixo vertical de simetria, têm sua imagem, em um espelho colocado sobre o eixo dado e rotacionar 180°.

O aluno 2, que respondeu que “tá espelhando”, pode ter realmente percebido o espelhamento de todas as figuras, ou não; pode ter se lembrado de situações do dia-a-dia, como se olhar no espelho e perceber que se mostrarmos a mão direita, vemos a mão esquerda refletida.

Esperávamos que um número maior de alunos respondesse a questão solicitada. Podemos justificar o abandono desta parte da atividade: por não estarem acostumados a fazer análises de situações-problema; por não terem entendido a questão, como alguns relataram; por estarem acostumados com o professor sempre enunciando as propriedades para eles.

Em suas respostas, pudemos identificar os seguintes teoremas-em-ação, sobre o simétrico de algumas figuras em relação a um eixo inclinado:

- Só existe o simétrico das figuras que se encontram acima (ou abaixo) do eixo;
- O simétrico de figuras em relação a um eixo inclinado deve ser desenhado sobre o eixo de simetria, dividindo-as em duas partes;
- As imagens de figuras, em relação a um eixo inclinado, são figuras deslocadas verticalmente (ou diagonalmente).

b) ATIVIDADE 2

Desenvolvimento da atividade 2

Nesta atividade não houve questionamentos, pois, aparentemente, os alunos sabiam o que fazer. A atividade parece proporcionar este tipo de atitude.

Análise *a posteriori* da atividade 2

No primeiro item desta atividade, dezenove alunos fizeram a atividade corretamente, onde quatro destes somente a acertaram na segunda tentativa, como observado nas marcas deixadas no papel. Oito alunos não obtiveram êxito neste item: por não terem contado os quadrinhos corretamente e/ou por não terem usado a régua. Na Figura 4.35, temos representado algumas dessas respostas. Todas as respostas apresentadas pelos alunos, encontram-se agrupadas no Quadro de Respostas da Atividade 2, no Anexo II, p. 269.

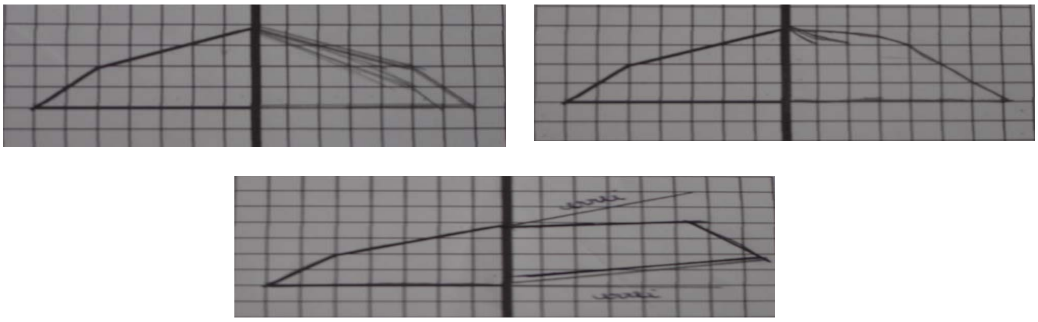
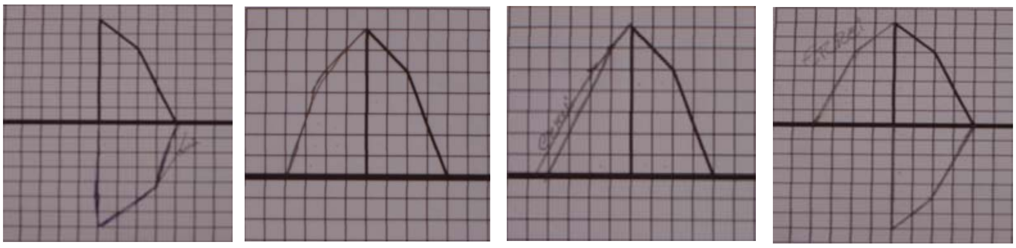


Figura 4.35. Exemplos de respostas dadas, pelos alunos, para a atividade 2a.

No segundo item, dezenove alunos fizeram a atividade corretamente, onde um destes somente a acertou na segunda tentativa. Quatro alunos fizeram a atividade sem êxito e quatro a refletiram em relação ao lado da figura que é perpendicular ao eixo de simetria.

O eixo é horizontal e facilitou a realização da atividade, fato observado pelo grande número de respostas correta. Os erros cometidos foram: quatro alunos fizeram a contagem errada dos quadradinhos (Figura 4.36a); quatro alunos fizeram a reflexão da figura em relação a um novo eixo de simetria, no caso, em relação ao lado da figura, que é perpendicular ao eixo de simetria dado (apesar de terem sido alertados sobre qual era o eixo) (Figuras 4.36b e 4.36c); um aluno fez o procedimento anterior, desconsiderou-o e fez novo procedimento (Figura 4.36d).



(a) (b) (c) (d)

Figura 4.36. “Erros” cometidos, pelos alunos.

Este último aluno age sobre o problema e apresenta sua primeira solução. Refletindo sobre esta, não satisfeito, apresenta sua próxima resposta, a correta, da atividade.

O número de alunos que acertou o item a é igual ao que acertou o item b. Podemos dizer que as posições dos eixos de simetria, horizontal e vertical, têm o mesmo grau de dificuldade, como as pesquisas citadas indicaram.

No terceiro item, quinze alunos fizeram a atividade corretamente; onze alunos a erraram e um aluno errou e depois a corrigiu. O eixo inclinado e a complexidade da figura dificultaram a realização da atividade.

Apesar de poderem utilizar a dobradura (única ferramenta disponível), vinte e quatro alunos não a utilizaram ou mesmo utilizando-a não responderam corretamente. Após a primeira atividade desta categoria, a dobradura tornou-se uma ferramenta de prova e parte das decisões e ações dos alunos. O uso da borracha não foi permitido, mas três alunos a usaram nesta tarefa, apagando o erro cometido, dobrando-se no eixo de simetria e desenhando o correto. Entretanto, seus erros permaneceram visíveis como pode ser observado na Figura 4.37a. Quatro alunos respeitaram o combinado de não usar a borracha e riscaram a resposta que estavam considerando "errada" e passaram a buscar outra solução, conforme podemos observar na. Figura 4.37b e c.

Nesta situação, percebemos que houve uma apropriação do problema por muitos alunos, engajaram-se em busca de procedimentos de investigação, estando numa situação de ação, segundo Brousseau (1986), em que o aluno realiza determinadas ações mais imediatas, resultando um conhecimento de natureza mais operacional e parte para uma situação de formulação onde produz uma resposta, e segue para uma situação de prova e validação, sendo retratada. Quando não satisfeito com sua resposta, utilizou-se de dobradura para verificação e prova desta. Como percebeu que sua resposta estava "errada", apagou e corrigiu-a, dando-se então por satisfeito com sua resposta.

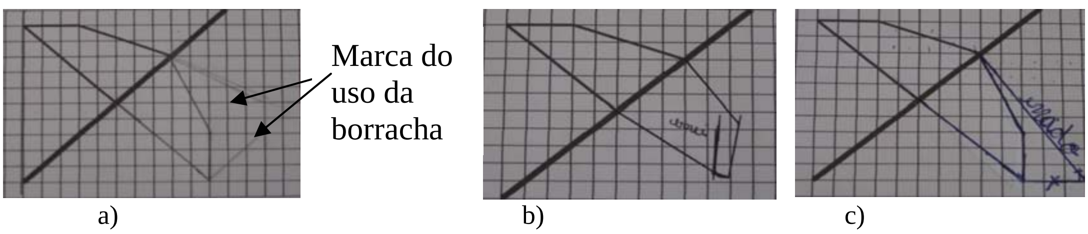


Figura 4.37. Uso da borracha e desconsideração de algumas respostas.

Cinco alunos simularam uma dobra na reta de simetria para o item c em busca do simétrico da figura dada, fato observado pela pesquisadora. Apesar de que este procedimento nem sempre os ajudou. Pôde-se observar que a grande maioria dos alunos contou os quadradinhos, para a construção do simétrico dos vértices da figura dada. De um modo geral, não houve a preocupação com o uso da régua e os exercícios foram feitos à mão-livre.

Apenas seis alunos fizeram corretamente os três itens que compõem esta atividade, onde dois destes só acertaram o item a na segunda tentativa, como podemos observar no Quadro de Repostas (Anexo II, p. 269).

Os procedimentos referência horizontal, referência vertical e referência diagonal não foram utilizados pelos alunos.

Em suas respostas, pudemos identificar os seguintes teoremas-em-ação, sobre o simétrico de uma figura em relação a um eixo vertical (horizontal ou inclinado) de simetria:

- A imagem de uma figura encostada no eixo de simetria, e inserida numa malha quadriculada, em relação a um eixo vertical (horizontal ou inclinado) de simetria é uma figura também encostada neste;
- A imagem de uma figura encostada no eixo de simetria, e inserida numa malha quadriculada, em relação a um eixo vertical (horizontal ou inclinado) de simetria é uma figura que preserva as medidas da figura dada;
- Quando a figura, encostada no eixo de simetria, tem um lado perpendicular ao eixo de simetria, a imagem deste em relação a um eixo vertical (horizontal ou inclinado) de simetria é também perpendicular ao eixo e encostado neste.

Um teorema-em-ação específico da atividade 2b é: Se a figura tem um lado perpendicular a um eixo horizontal de simetria, a imagem será construída em relação a este lado.

c) ATIVIDADE 3

Desenvolvimento da atividade 3

A atividade foi entregue aos alunos e depois da leitura de seu enunciado, houve uma resistência deles em aceitar a tarefa. Eles não conseguiam entender a atividade, talvez pela complexidade da figura (linha poligonal aberta simples) e porque o eixo de simetria a cortava, isto provavelmente tornou a atividade difícil. Apesar dessas dificuldades, os alunos partiram em busca de solução.

Análise *a posteriori* da atividade 3

Três alunos fizeram a atividade corretamente, onde dois destes dobraram no eixo de simetria, para traçar a resposta. O terceiro (aluno 6) respondeu esta atividade corretamente, sem utilizar dobradura. Estas respostas encontram-se no Quadro de Respostas da Atividade 3, no Anexo II, p. 270.

Houve preocupação em contar os quadradinhos, mas alguns erraram na contagem. Ocorreu a desconsideração do eixo de simetria dado. Neste caso, doze alunos criaram imaginariamente um outro eixo de simetria (vertical) para a figura, passando pelos pontos inicial e final da figura. Esses alunos, então, refletiram a figura em torno deste eixo e preservaram o tamanho dos segmentos. Produziram uma reflexão transladada, como mostra a Figura 4.38. Portanto, provável utilização do invariante operatório 10 (p. 64-65).

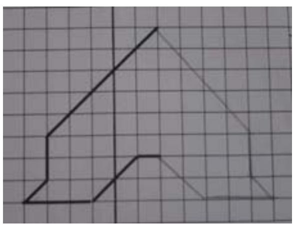
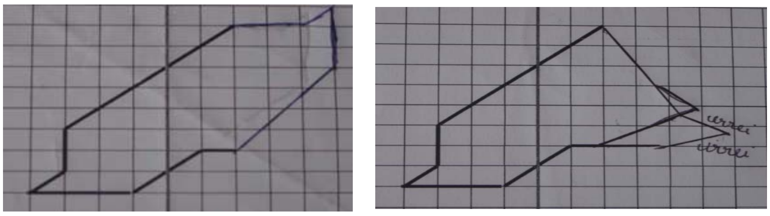


Figura 4.38. Reflexão seguida de translação da figura da atividade 3.

Nove alunos simplesmente arrumaram uma maneira de fechar a figura, buscando construir uma nova figura que fosse simétrica, não necessariamente em relação ao eixo dado. Apresentamos, abaixo, dois exemplos deste procedimento na Figura 4.39. Os alunos provavelmente utilizaram dois invariantes: “Se o eixo de simetria intercepta a figura, devemos começar o traçado da imagem na extremidade inferior da figura”; e “depois da reflexão a figura-imagem é uma figura contínua”.

Pois, segundo o aluno da Figura 4.39 a; “temos que ter uma figura no final, ela é aberta. Então eu tenho que fechá-la, e eu comecei aqui ó (referindo-se à extremidade inferior)”.



(a) (b)

Figura 4.39. Reflexão é uma figura fechada. Atividade 3.

Três não se preocuparam em fechar a figura. Traçaram segmentos paralelos aos segmentos dados, inverteram partes da figura, procurando preservar suas medidas, iniciando o traçado na extremidade inferior da figura. Podemos observar este caso na Figura 4.40.

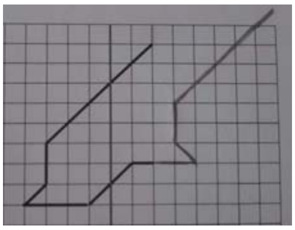


Figura 4.40. Figura aberta. Preocupação com medidas. Segmentos paralelos ao da figura inicial.

Em algumas atividades, observamos abandono de alguns procedimentos que consideraram “errados” e substituição por outro, como na (Figura 4.39b). Neste exemplo, os alunos agiram, analisaram seus resultados, não satisfeitos, abandonam-no, fazem novas tentativas, mas todas foram em vão.

Nas respostas dos alunos não surgiram as referências horizontais, verticais e diagonais.

Em suas respostas, pudemos identificar os seguintes teoremas-em-ação, sobre o simétrico de uma figura (linha poligonal aberta, simples e interceptando o eixo) em relação a um eixo vertical de simetria:

- Se o eixo de simetria intercepta a figura, devemos apenas refletir a parte que se encontra à esquerda do eixo de simetria, a parte que se encontra à direita do eixo pode ser desconsiderada;

- Se o eixo de simetria intercepta a figura, deve-se deslocá-lo e posicioná-lo convenientemente para que assim possamos encontrar o simétrico desta figura em relação ao novo eixo de simetria;
- Se o eixo de simetria intercepta a figura, devemos começar o traçado da imagem na extremidade inferior da figura.

d) ATIVIDADE 4

Desenvolvimento da atividade 4

Nesta atividade, os alunos não fizeram nenhuma pergunta. A atividade ocorreu como previsto.

Análise *a posteriori* da atividade 4

Para esta figura surgiu uma variedade de respostas, como podemos observar na Figura 4.41. Estas respostas encontram-se agrupadas no Quadro de Respostas da Atividade 4, no Anexo II, p. 271. E podemos constatar neste, que sete alunos deixaram a atividade em branco.

No primeiro e segundo modos, as respostas foram consideradas como sendo deslocamentos no prolongamento da base do triângulo dado. O quarto modo foi considerado como sendo um deslocamento da figura juntamente com seu eixo de simetria, no prolongamento da base do triângulo.

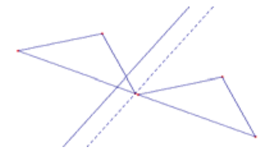
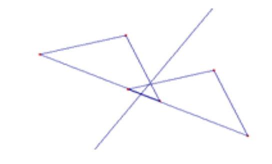
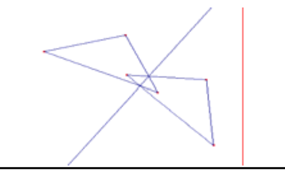
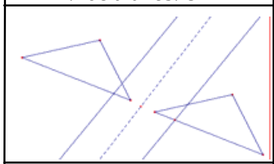
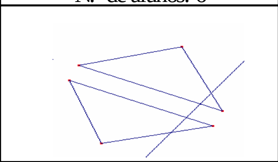
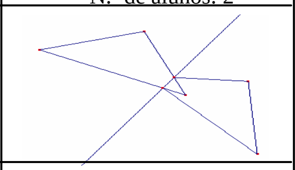
		
1º modo N.º de alunos: 8	2º modo N.º de alunos: 6	3º modo N.º de alunos: 2
		
4º modo N.º de alunos: 1	5º modo N.º de alunos: 1	6º modo N.º de alunos: 2

Figura 4.41. Diversos procedimentos para a atividade 4.

No primeiro, quarto e quinto modos, observados na Figura 4.41, parece haver uma desconsideração, pelos alunos, do eixo de simetria.No caso, por dez alunos. Para esses alunos “o eixo de simetria pode ser desconsiderado e posicionado convenientemente de acordo com a atividade a ser resolvida”.

Nos primeiro, segundo e quarto modos, ilustrados na Figura 4.41, percebemos um procedimento comum: deslocamento do triângulo na reta suporte do lado maior. Esses alunos podem estar utilizando o invariante “a reflexão nada mais é do que um deslocamento do triângulo na reta suporte do lado maior dele”. No primeiro modo, o triângulo deve ser deslocado, considerando o “novo” eixo de simetria. No segundo modo, há uma percepção do aluno, que o triângulo está cortado pelo eixo de simetria e parte da resposta está em um semiplano e a outra parte no semiplano oposto. Pode estar se utilizando do invarinte operatório “se o eixo corta o triângulo o triângulo-imagem também será cortada por ele”. Observamos, no quarto modo, que para esse aluno o triângulo e o eixo são uma única figura, por isso o triângulo é deslocado, de forma que se mantenha à distância do vértice ao eixo de simetria por ele criado (reta pontilhada) e uma reta é traçada cortando este triângulo deslocado, como se fosse a reflexão do eixo de simetria original.

No terceiro modo, apenas dois alunos fizeram a reflexão correta, utilizando-se de dobradura e decalque. No quinto modo, o aluno imaginou um eixo de simetria paralelo ao lado maior do triângulo dado, de forma que o triângulo resposta também fosse cortado pelo eixo dado. No sexto modo, os alunos dobraram no eixo de simetria e refletiram parte do triângulo. Eles desconsideraram a parte menor que estava à direita do eixo dado. Para esses alunos: ou não sentiram necessidade de refletirem o pedacinho que se encontrava no semiplano à direita; ou apenas a parte à esquerda ficou visível ao fazerem a dobra no eixo de simetria, e eles não viraram o papel para ver a parte menor, à direita do eixo e repetir o processo de decalque.

As referências horizontais, diagonais e a reflexão transladada da figura não foram representadas pelo grupo.

Constatou-se que cinco alunos dobraram no eixo de simetria, na obtenção da resposta desta atividade. Mesmo assim, três destas respostas não foram corretas.

Pudemos identificar, nas repostas dos alunos, os seguintes teoremas-em-ação, sobre o simétrico de um triângulo (interceptando o eixo) em relação a um eixo inclinado de simetria:

- A imagem de um triângulo em relação a um eixo inclinado de simetria é um triângulo deslocado no prolongamento do lado maior deste;

- Se o eixo de simetria intercepta o triângulo, devemos apenas refletir a parte que se encontra a esquerda do eixo de simetria;
- Se o eixo de simetria intercepta o triângulo, a parte que se encontra a direita do eixo pode ser desconsiderada;
- O triângulo e a reta que o corta são uma única figura;
- O triângulo e a reta que o corta são uma única figura, então devemos deslocar esta figura, de forma que se mantenha a distância do vértice ao eixo de simetria.

Nesta atividade, percebemos um teorema-em-ação enraizado nos alunos: para eles, “numa reflexão, o simétrico sempre fica do outro lado do eixo de simetria”.

c) ATIVIDADE 5

Desenvolvimento da atividade 5

A atividade foi considerada muito difícil por alguns alunos, por não saberem usar o papel transparente. Outros, parecendo saber o que fazer, começaram a copiar a metade da figura dada no papel transparente. Apenas um aluno perguntou à pesquisadora se era para unir todos os pontos.

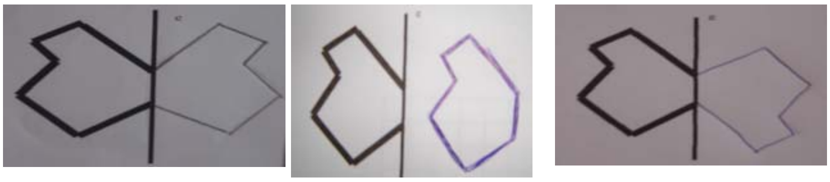
Análise *a posteriori* da atividade 5

As respostas desta atividade encontram-se no Quadro de Respostas da Atividade 5, no Anexo II, p.272.

Todos os alunos copiaram a figura dada no papel transparente, mas muitos não souberam o que fazer com a cópia feita neste. As previsões feitas em relação ao uso deste material se confirmaram.

Para os três itens, dois alunos deixaram a atividade em branco, mas copiaram a figura dada no papel transparente.

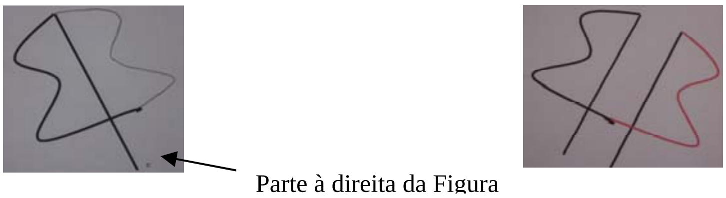
Para o item a, quatro refletiram corretamente a figura no papel transparente, mas deixaram a folha de atividade em branco. Dezenove fizeram a reflexão correta (Figura 5.18a), um fez uma translação horizontal da figura (Figura 4.42b) e o aluno 18 fez uma rotação desta (Figura 4.42c).



(a) (b) c)

Figura 4.42. Procedimentos (dos alunos) na atividade 5a.

Para o item b, quatros alunos responderam corretamente; treze refletiram apenas a parte à esquerda do eixo de simetria (Figura 4.43a); quatro refletiram a figura (figura+eixo) e a transladaram (Figura 4.43b); quatro refletiram corretamente a figura no papel transparente, mas deixaram a folha de atividade em branco.

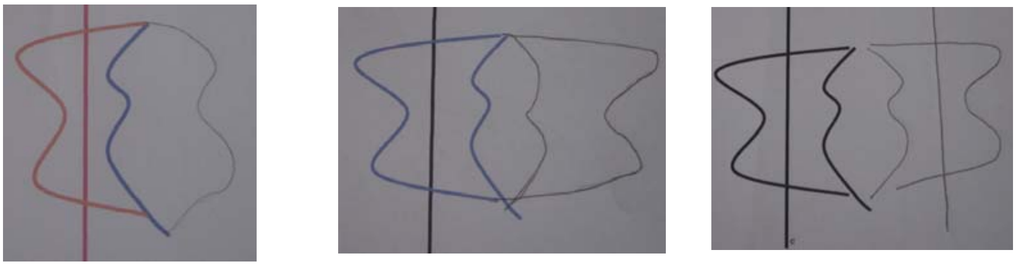


(a) (b)

Figura 4.43. Procedimentos (dos alunos) na atividade 5b.

Na figura 5.19a, quatro alunos não levaram em consideração a parte à direita da figura. Para esses alunos, esta parte que ultrapassa o eixo de simetria não tem a mínima importância e por isso a desprezam, talvez influenciados pela atividade de dobradura. Outro motivo é a idéia que os alunos têm de que a figura deve ser fechada. Na resposta representada pela Figura 4.43b, esses alunos estão considerando a figura e o eixo como sendo uma só figura. Refletem-na e depois a transladam. Parece que estão percebendo que, numa reflexão, a figura inverte sua posição.

No item c, sete alunos não resolveram a atividade; dos que resolveram, sete fizeram uma reflexão parcial (consideraram somente a parte da figura à esquerda do eixo), desses sete, seis fizeram uma reflexão transladada da parte vermelha (Figura 4.44a) e um fez uma reflexão transladada da parte azul da figura. Cinco alunos fizeram a reflexão correta da figura; dois fizeram a referência horizontal da figura (Figura 4.44b) e outros dois fizeram a referência horizontal da figura (figura+eixo) (Figura 4.44c).



(a) (b) (c)

Figura 4.44. Procedimentos (dos alunos) na atividade 5c.

Obtivemos um número pequeno de respostas corretas em relação aos itens anteriores. O número de alunos que não resolveram a atividade é igual aos que fizeram uma reflexão parcial da figura. Da mesma foram, a quantidade de alunos que fizeram uma referência horizontal da figura é igual ao número dos que fizeram a referência horizontal da figura (figura+eixo).

Na Figura 4.45 temos representado a resolução de um aluno através de uma referência horizontal, a desconsideração do eixo de simetria dado (aluno cria um novo eixo). A representação da desconsideração do papel transparente e o desenho feito à mão livre.

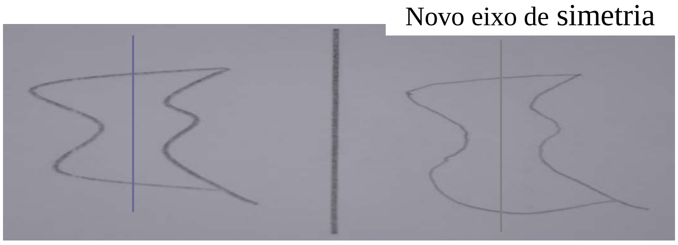


Figura 4.45. Ref. horizontal, traçado à mão-livre e a desconsideração do material concreto.

Como podemos observar no Quadro de Respostas da Atividade 5 (Anexo II, CII, p. 272), os alunos têm maior facilidade em acertar a reflexão da figura que possui eixo vertical de simetria e onde este não corta a figura, como na figura do item a. O número de alunos que acertou as figuras dos itens b e c foi igual, mas não são os mesmos alunos em todos os casos. Apenas três alunos acertaram os três itens desta atividade.

Nas respostas dos alunos, pudemos identificar os seguintes teoremas-em-ação, referentes à atividade 5:

- A imagem de uma figura, encostada no eixo ou interceptando-o, em relação a um eixo vertical (ou inclinado) de simetria é uma figura deslocada horizontalmente;

- A figura, encostada no eixo ou interceptando-o, e o eixo são uma única figura. A imagem desta, figura+eixo, é um deslocamento horizontal (ou inclinada) desta;
- Se o eixo intercepta a figura, então deve-se desconsiderar o eixo de simetria dado e criar outro, paralelo ao dado e colocado convenientemente de forma que obtenha a imagem da figura em relação a este novo eixo.

d) ATIVIDADE 6

Desenvolvimento da atividade 6.

Procedemos como nas atividades anteriores. As dificuldades que surgiram foram: na compreensão da atividade; na aceitação da existência do simétrico de pontos disposto numa malha quadriculada.

Análise a *posteriori* da atividade 6

Conforme análise, as respostas das situações-problema desenvolvidas pelos alunos puderam ser assim agrupadas:

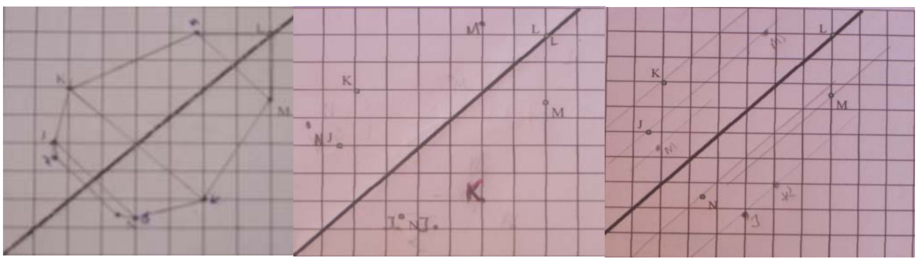
- onze alunos dobraram e refletiram todos os pontos;
- oito alunos refletiram alguns pontos e os uniram;
- três alunos dobraram e refletiram somente alguns pontos;
- nenhum aluno deixou de realizar a atividade;
- dois alunos apenas transladaram os pontos dados horizontalmente (referência horizontal);
- um aluno apenas transladou os pontos dados diagonalmente (referência diagonal) e os uniram, como podemos observar na figura (Figura 4.46a);
- um destes traçou uma reta auxiliar (não perpendicular), passando por um dos pontos e cortando o eixo de simetria, marcando o simétrico deste ponto, tentando preservar a distância da figura ao eixo, como ilustrado na figura (Figura 4.46b);
- um destes traçou retas auxiliares paralelas ao eixo de simetria passando em cada um dos pontos. Para cada reta traçada, construiu uma reta paralela a esta, no semiplano oposto, procurando preservar a mesma distância entre as retas e o eixo de simetria, para marcar o simétrico de cada ponto na reta construída, como podemos observar na figura (Figura 4.46c).

Estas respostas encontram-se no Quadro de Respostas da Atividade 6 no Anexo II, p. 273.

Dos alunos que erraram a atividade, seis não dobraram no eixo de simetria e um destes acertou a atividade (Aluno 19).

Os alunos, provavelmente, por utilizar dobradura, puderam perceber que "o simétrico de um ponto em relação a uma reta é também um ponto". Os que possivelmente não perceberam isso foram os que ligaram os pontos dados.

Houve freqüência: em ligar os pontos dados (nove alunos); em ligar os pontos dados e pontos da resposta, formando figuras (Figura 4.46a e Figura 4.47); na utilização de dobradura na obtenção do simétrico dos pontos dados. Esta última ocorreu, pois os alunos, ao não saberem o que fazer, recorreram à dobradura e ao decalque, uma vez que este método já fazia parte de seus procedimentos e executaram a tarefa com bons resultados.



a) (b) c)

Figura 4.46. Procedimentos dos alunos na atividade 6.

O aluno 15, quando questionado à respeito de sua resposta, (Figura 4.47), disse-nos que: "liguei os pontos J, K e L e fiz o simétrico (de sua figura) na parte de baixo. Verifiquei se a figura ficou simétrica. Ela ficou, não ficou?". Para este aluno, só existe o simétrico se tivermos uma figura contínua (provável invariante operatório). Não aceita a idéia de que o simétrico de um ponto é simplesmente um ponto. Parece que tem a preocupação em manter a medida dos segmentos feitos.

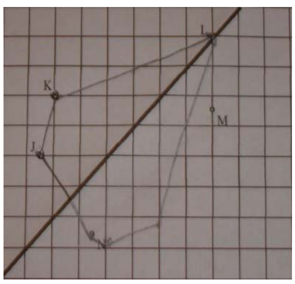


Figura 4.47. Procedimento de união dos pontos dados da atividade 6.

O recurso mais utilizado foi a visualização para a obtenção dos simétricos dos pontos e procuraram preservar (mais ou menos) a distância do ponto ao eixo. Alguns alunos contaram os elementos da grade, procurando preservar a medida e utilizando a régua como instrumento auxiliar na marcação de uma reta (imaginária) do lugar do simétrico do ponto. O esquadro e o compasso não foram utilizados.

Para os alunos que utilizaram dobradura e decalque, a posição dos pontos (afastado, fora da grade e no eixo de simetria) não dificultou a resolução desta atividade. A não utilização destas ferramentas, por alguns alunos, pode ter proporcionado o esquecimento da reflexão de alguns pontos e isto é observado em pontos que não foram refletidos como, por exemplo: o ponto (L), o ponto (J), o ponto (N).

Nas respostas dos alunos, pudemos identificar os seguintes teoremas-em-ação, sobre o simétrico de alguns pontos em relação a um eixo inclinado de simetria:

- O simétrico de alguns pontos em relação a um eixo inclinado de simetria deve ser obtido por dobradura e decalque;
- O simétrico de um ponto em relação a um eixo inclinado de simetria é um ponto;
- As imagens de alguns pontos em relação a um eixo inclinado de simetria são pontos deslocados horizontalmente (ou diagonalmente);
- As imagens de alguns pontos em relação a um eixo inclinado de simetria são pontos, que devem ser unidos por segmentos de reta, formando uma figura contínua;
- As imagens de pontos ficarão em retas auxiliares e paralelas ao eixo no semiplano oposto ao do ponto considerado.

e) ATIVIDADE 7

Desenvolvimento da atividade 7

Um aluno perguntou individualmente à pesquisadora se poderia dobrar no eixo de simetria, e foi lhe dito que ele deveria decidir como fazer a atividade.

Análise a *posteriori* da atividade 7

Nesta atividade, os procedimentos dos alunos resumiram-se a:

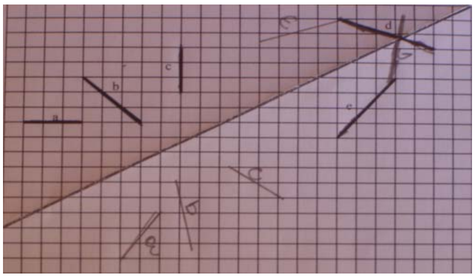
- Dezoito alunos acertaram a atividade por utilizar dobradura e decalque e quatro destas respostas apresentavam os segmentos unidos por segmentos de reta;
- Nove alunos não fizeram corretamente a atividade. Cinco alunos uniram os pontos de qualquer maneira, um fez a reflexão na reta suporte do segmento; outro fez a referência vertical, um outro fez uma referência horizontal e um desconsiderou o eixo de simetria.

Estas respostas encontram-se no Quadro de Respostas da Atividade 7, no Anexo II, p. 274.

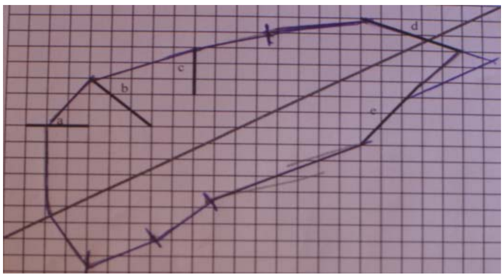
Vinte alunos dobraram no eixo de simetria e destes, dezoito utilizaram a dobradura e decalque na obtenção do simétrico dos segmentos dados. Na Figura 4.48, o aluno é mostrado utilizando-se do procedimento de dobrar no eixo de simetria.

Figura 4.48. Aluno, dobrando no eixo de simetria para a obtenção do simétrico das figuras.

Este instrumento foi útil no acerto da atividade. Um aluno usou esta ferramenta, mas não refletiu corretamente os segmentos. Sete não fizeram uma dobra no eixo de simetria. Na Figura 4.49a, temos representado a utilização do recurso de dobrar no eixo de simetria e acerto da questão e na Figura 4.49b, temos o procedimento de união dos segmentos dados, procurando formar uma figura.



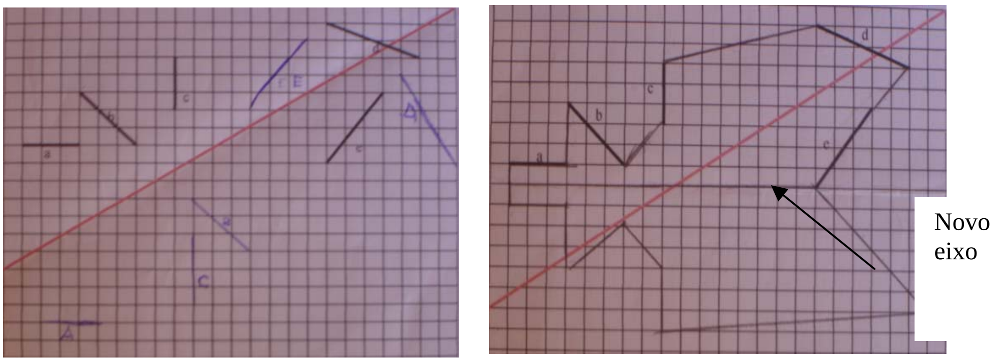
(a)



(b)

Figura 4.49. Uso de dobradura e união dos segmentos dados.

Os alunos que não acertaram a atividade procederam de modo distinto para cada segmento. Na Figura 4.50a, mostramos a resposta do aluno que construiu a imagem do segmento e no semiplano oposto em relação ao eixo de simetria e é paralelo ao segmento dado. Este procedimento seria correto se o eixo e o segmento dado fossem paralelos. O simétrico do segmento d foi construído no semiplano inferior. Neste caso, para obter a resposta correta, o simétrico da parte superior (inferior) deveria ser construída no semiplano inferior (superior), uma vez que o eixo corta o segmento. Um aluno criou um novo eixo de simetria horizontal e através de dobradura e decalque, obtive os simétricos dos segmentos em relação a este eixo criado, como podemos observar na ilustração Figura 4.50b.



a) b)

Figura 4.50. Procedimento do aluno, na atividade 7.

Percebemos nas Figuras 4.50a e 4.50b, que os alunos procuraram manter a medidas das imagens dos segmentos dados.

Nas respostas dos alunos, pudemos identificar os seguintes teoremas-em-ação, sobre o simétrico de segmentos em relação a um eixo inclinado de simetria:

- O simétrico de um segmento em relação a um eixo inclinado de simetria é um segmento;
- O simétrico de segmentos em relação a um eixo inclinado de simetria é um segmento deslocado verticalmente (ou diagonalmente);
- Se o eixo de simetria corta o segmento então se deve refletir apenas a parte contida no semiplano superior;
- Dados alguns segmentos, deve-se passar uma linha contínua, unindo-os e formando uma nova figura e assim refletir esta em relação ao eixo de simetria dado (ou outro por ele criado).

f) ATIVIDADE 8

Desenvolvimento da atividade 8.

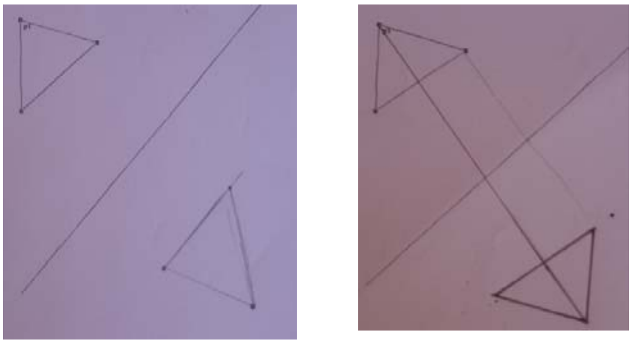
Os alunos não fizeram nenhum questionamento.

Análise a *posteriori* da atividade 8

Na atividade 8, as respostas dos alunos puderam ser agrupadas da seguinte maneira: um aluno encontrou a resposta correta, embora utilizando dobradura, que não havia sido autorizada. Estas respostas encontram-se no Quadro de Respostas da Atividade 8, no Anexo II, p. 275.

Os 26 alunos restantes não obtiveram êxito e isto pode ser justificado pelo fato do uso da dobradura não ter sido permitida. Desses alunos, dezessete refletiram o triângulo, procurando preservar suas medidas, mas não consideraram a eqüidistância dos pontos em relação ao eixo de simetria. Podem estar utilizando o invariante operatório "o simétrico de um triângulo em relação a um eixo de simetria é um triângulo que preserva as medidas do original". Na Figura 4.51, apresentamos este procedimento. Dois alunos transladaram o triângulo horizontalmente; cinco diagonalmente e dois verticalmente, mas, em todos os procedimentos, eles preocuparam-se em conservar as medidas. Podem estar utilizando os invariantes operatórios 6, 7 e 8 (p. 62-64). Na Figura 4.51b, está ilustrado o procedimento do uso de retas auxiliares, mas não efetivamente perpendiculares ao eixo de simetria, no auxílio à construção do simétrico do triângulo. Podemos dizer que já começam a se preocupar com a propriedade perpendicularismo, mesmo que discretamente.

Os materiais disponíveis foram utilizados separadamente, mas não contribuíram na solução correta da atividade.



a) b)

Figura 4.51. Procedimento, do aluno, na atividade 8.

Procedimentos descritos por alguns alunos:

- “Eu medi os lados do triângulo com régua” (Aluno 12).
- “Eu usei a régua porque é mais fácil, porque eu meço os centímetros e faço o desenho” (Aluno 11).
- “1º medi a distância entre as duas partes da folha. 2º Desenhei com a régua o desenho” (Aluno 24).
- “Peguei todas as medidas do triângulo e medi o outro lado do eixo simétrico e fui fazendo os pontos. Depois liguei eles” (Aluno 25).
- “Com o compasso eu marquei os pontos e com a régua eu fiz as retas” (Aluno 6).
- “Eu olhei o tamanho e tentei desenhar igual” (Aluno 27).
- “Com o compasso, eu furei em cima do eixo simétrico com a ponta seca. Com a outra ponta eu marquei os pontos e suas distâncias. O esquadro eu usei para corrigir a direção da ponta seca” (Aluno 21).

Como se pôde constatar pelas frases acima, houve a preocupação em preservar a medida dos lados do triângulo. Na última fala, pôde-se observar a preocupação com a preservação de medidas e com a manutenção da distância.

Por estar explícito no enunciado que é a situação-problema proposta deve ser resolvida com a utilização de régua, esquadro e compasso, a maioria dos alunos utilizou esses recursos, embora nem sempre com êxito. Este material pôde ser usado em qualquer outra atividade anterior, mas só o fizeram quando o material foi claramente sugerido para ser utilizado. Alguns não acharam necessários usá-los, uma vez que a execução da tarefa à mão-livre é mais cômoda e rápida, mostrando que a precisão na obtenção do simétrico da figura em relação ao eixo de simetria não importa. Muitos se contentaram com a resposta “aproximadamente” correta.

Na última resposta, o aluno deixa claro que tinha condições de fazer o mesmo em outras atividades e parece seguro ao descrever o modo como procedeu. Ele nos relata que colocou a ponta seca em um ponto qualquer no eixo de simetria (este lugar não poderia ser qualquer e sim exatamente no ponto de interseção da reta perpendicular ao eixo de simetria passando pelo ponto A). E em seu relato, continua: “o esquadro eu usei para corrigir a direção da ponta seca”, dando a impressão de ter utilizado este para tentar encontrar o lugar correto da ponta seca do compasso.

Percebemos que para alguns alunos, a imagem de um triângulo em relação a um eixo inclinado de simetria deve ser obtida por dobradura e decalque e não com a utilização de régua, esquadro e compasso.

Nas respostas dos alunos, pudemos identificar os seguintes teoremas-em-ação, sobre o simétrico de um triângulo em relação a um eixo inclinado de simetria:

- "A imagem de um triângulo em relação a um eixo inclinado de simetria é um triângulo";
- "O triângulo-imagem procura manter a foram e as dimensões da figura inicial";
- "A imagem de um triângulo em relação a um eixo inclinado de simetria é um triângulo igual ao dado e deslocado diagonalmente (horizontalmente ou verticalmente)".

4.10 Síntese do Segundo Momento Coletivo

Os alunos já estavam familiarizados com este momento coletivo da parte experimental da pesquisa, uma vez que já tiveram o primeiro. Agora eles se sentem mais seguros e passaram a se posicionar com mais freqüência e procuraram justificar e defender sua solução. Nesse processo de validação de suas respostas, "os alunos devem provar porque o modelo que criou é válido" (Henry, 1991, p.38), mas com argumentações ainda empíricas. Esse processo de defesa de suas respostas e de justificativas proporcionaram a fase de institucionalização do saber, pela pesquisadora.

Deu-se início ao segundo momento coletivo de nossa pesquisa. Uma vez que resolveram a situação-problema proposta, os alunos, foram convidados a dizer como procederam e porque assim o fizeram, produzindo material para análise e facilitando a identificação de possíveis invariantes operatórios utilizados por eles.

Os alunos, no início da aplicação da categoria II, utilizando lápis e papel, dispunham dos conhecimentos citados no primeiro momento coletivo (p.123-125).

Não temos aqui a pretensão de descrever minuciosamente o momento coletivo realizado para situação-problema. Queremos clarear alguns procedimentos e identificar invariantes operatórios utilizados pelos alunos e ainda relatar quais são os conhecimentos que podem ter adquirido no final desta categoria. Vamos comentar o desenrolar da primeira atividade.

Na discussão da primeira atividade, o aluno que se pronunciou disse: “Dobra-se na linha preta e copia todas as figuras, isto é, passa-se o lápis em cima, nas três de cima e nas duas de baixo e depois passe o lápis sobre a marca feita no papel” (Aluno 12), como este aluno foi um dos que resolveu a atividade corretamente, os outros que se esqueceram de decalcar algumas figuras se pronunciaram “Xiii, esqueci” (Aluno 16). Como a sala concordou com sua resposta, não houve mais discussões uma vez que a situação foi resolvida logo no início, tolhendo novas discussões.

Na segunda parte desta atividade, quando questionados sobre as propriedades (ou características) de figuras simétricas, dos vinte e sete alunos, apenas onze alunos tentaram enunciar propriedades, como as citadas na Seção 4.9 (p.143). Observamos que 16 alunos não aceitaram o jogo proposto pela pesquisadora, isto é, não houve a devolução do problema, talvez por fugir da maneira tradicional de ensino onde recebem as propriedades prontas, não precisam pensar. Esses alunos tinham condições de enunciar algumas delas, mesmo que fossem bem empíricas. A pesquisadora fechou a discussão, executando a correção da atividade, dobrando-se no eixo e fazendo o decalque de todas as figuras. Foram discutidas as propriedades de simetria: eqüidistância da figura ao eixo e perpendicularismo.

As atividades 2, 3, 6, 7 e 8 se encontram em papel quadriculado; a atividade 5 sugere a utilização de papel transparente e a atividade 4, contém uma figura cortando o eixo de simetria, com essas particularidades nas atividades, imprimimo-las em transparências e projetamos para facilitar o trabalho de discussão, onde os alunos vinham até a mesa e desenhavam sua solução e assim discutíamos com seus colegas. Estas atividades foram corrigidas.

Os alunos, que não souberam como utilizar o papel transparente, relataram que ele é mais prático do que dobradura. Alguns disseram “com a dobradura podemos esquecer de algumas partes (Aluno 1)” e um outro argumentou “com o papel transparente também podemos ter problema, se virarmos o papel errado, perdemos o exercício (Aluno 26)”. Entretanto, a sala chegou num consenso, que para as atividades onde o eixo corta as figuras, o papel transparente é o melhor.

Agora, no final desta categoria além dos conhecimentos anteriores (do primeiro momento coletivo), os alunos já devem saber: o que fazer e como utilizar dobradura e decalque, papel transparente, papel quadriculado, régua, esquadro e compasso, uma vez que todas as atividades foram corrigidas pelo professor; e como proceder quando a figura se encontra afastada ou cortando o eixo de simetria.

4.11 Síntese sobre a Categoria II com Lápis e Papel

A maioria das respostas dos alunos foi feita à mão-livre e utilizando unicamente a visualização. Talvez pela complexidade das atividades, a resposta correta só ocorreu com a utilização efetiva de dobradura, mesmo quando não autorizada. Percebemos uma preocupação implícita em preservar a eqüidistância da figura em relação ao eixo de simetria. Os alunos mostraram o conhecimento de algumas propriedades de simetria e possivelmente utilizaram os seguintes invariantes: "a figura-imagem é uma figura que mantém a forma e as dimensões da figura inicial" e "o simétrico de uma figura (ponto ou segmento) é uma figura (ponto ou segmento) de mesmo tamanho, mas refletido em relação ao anterior".

Alguns alunos desconsideraram o eixo de simetria e criaram outros eixos estratégicos, de acordo com a situação, na tentativa de produzir alguma resposta. Com um novo eixo, os alunos perceberam que a atividade tornava-se mais fácil, pois recaía-se em problemas que já haviam sido resolvidos.

O procedimento de refletir a figura conjuntamente com seu eixo de simetria (figura+eixo) em relação a um novo eixo imaginário, que surgiu em algumas atividades de nossa pesquisa, também foi encontrado no trabalho de Fernandes (2004). Segundo ela: "o sujeito 'imaginou' um eixo de simetria posicionado na linha pontilhada e fez a reflexão não só da figura como do eixo de simetria (...), pois para ele figura, o eixo de simetria e os pontos do plano foram vistos como um único conjunto – uma só figura" (Fernandes, 2004, p.84).

O papel transparente não foi uma ferramenta utilizada ou requisitada com freqüência pelos alunos, mesmo sendo eficaz e fácil de utilizar. Provavelmente, isto ocorreu, pois este recurso não foi utilizado corretamente quando solicitado.

O recurso de contar os quadradinhos não foi utilizado com êxito por alguns alunos. Os eixos vertical e inclinado, e a complexidade da figura dificultaram a realização de algumas atividades, resultado também encontrado em outras pesquisas. Segundo Fernandes (2004), em relação à posição do eixo de simetria:

> (...) os resultados obtidos podem ser entendidos pela associação que os aprendizes fazem com espelhos e outras superfícies refletoras nas posições vertical ou horizontal que, normalmente, são experiências vivenciadas no dia-a-dia. A associação feita com as imagens produzidas por essas superfícies pode ser fonte de dificuldades para os aprendizes quando a figura cruza o eixo de simetria, já que em situações empíricas esse resultado não pode ser verificado, por exemplo, usando um espelho (Fernandes, 2004, p. 70).

É possível que alguns alunos tenham utilizado os invariantes 6, 7 e 8 (p. 62-64), associados aos procedimentos: referência horizontal, vertical e diagonal. Estes surgiram em muitas atividades desta Categoria.

Alguns dos invariantes identificados foram específicos, de acordo com a atividade resolvida. A seguir, apresentamos alguns invariantes mais gerais, a respeito do simétrico de figuras em relação a um eixo de simetria.

"O simétrico de uma figura em relação a um eixo de simetria sempre fica do outro lado do eixo de simetria". Nas atividades observamos esta tendência, dos alunos, em desenhar o reflexo sempre do outro lado do eixo de simetria. Mesmo utilizando as referências horizontal, vertical ou diagonal, eles sempre se preocuparam em desenhar a figura resposta no semiplano oposto ao que continha a figura dada. Este invariante foi um complicador, quando o eixo cortava a figura.

"O simétrico de uma figura em relação a um eixo de simetria é uma figura apenas deslocada verticalmente (horizontalmente, ou diagonalmente)". Este invariante pode ser associado ao procedimento referência horizontal (vertical, ou diagonal). Estes procedimentos foram bastante freqüentes, surgindo em muitas atividades desta Categoria.

"O simétrico de uma figura em relação a um eixo de simetria é uma figura refletida e depois deslocada horizontalmente (verticalmente ou diagonalmente)". Este invariante, apesar de falso, está bastante próximo de ser verdadeiro. O procedimento reflexão transladada, associado a esse invariante, não foi tão utilizado se comparado aos de referência horizontal, vertical ou diagonal. Os alunos, em suas respostas, utilizando uma das referências, centram-se na questão da pertinência da imagem ao semiplano oposto e não refletem a figura.

Para muitos alunos, só existe o simétrico de uma figura em relação a um eixo de simetria, se a figura for contínua. Esse fato foi observado em atividades cujos objetos eram pontos e segmentos. Os alunos realizaram procedimentos do tipo: ligar todos os pontos (ou segmentos) dados; ou ligar todos os pontos (ou segmentos) dados e os pontos (ou segmentos) da resposta, formando uma figura contínua; ou ligar todos os pontos dados, para depois refletir os segmentos de reta formados. Os possíveis invariantes utilizados, pelos alunos, na execução desta atividade podem ter sido: "só existe o simétrico de figuras contínuas"; "não existe o simétrico de pontos discretos"; "depois de refletir os pontos em relação a um eixo inclinado de simetria, deve-se uni-los por segmentos de reta para confirmar a simetria da figura".

PARTE III

CATEGORIA I COM O COMPUTADOR

4.12 Análise *a Priori* Geral das Ferramentas do *Cabri*

As figuras agora estão inseridas na tela do computador, não podendo ser manipuladas ou dobradas. Os recursos utilizados anteriormente, papel transparente, dobradura e decalque são ferramentas que não têm correspondente no computador e não funcionam mais. Estes recursos que alguns alunos vinham utilizando na seqüência didática de lápis e papel, na obtenção da resposta da situação-problema apresentada, na validação/checagem de suas repostas, não estarão disponíveis no computador. Ao aluno cabe adaptar-se a esta nova situação e a este novo meio.

Algumas considerações sobre as ferramentas do *Cabri* que podem ser utilizadas, pelos alunos, nas situações-problema propostas.

A ferramenta *simetria axial* pode ser utilizada pelos alunos. Para a utilizarem devem inicialmente, clicar no objeto geométrico dado e em seguida nos elementos necessários para a construção, obtendo-se, imediatamente, a imagem da figura dada por esta transformação. No caso, da simetria axial, os elementos da transformação seriam a figura, ou seus vértices e o eixo de simetria. Esta ferramenta não foi apresentada aos alunos na fase de familiarização do *software*. Se esta tivesse sido apresentada aos alunos, nesta fase inicial, acreditamos que todas as atividades seriam resolvidas com sua utilização, principalmente pela facilidade na obtenção do simétrico de um objeto em relação a um eixo, como comentado acima, e os procedimentos e teoremas-em-ação, que pesquisamos, poderiam reduzir-se a pesquisarmos se o aluno utilizou corretamente a ferramenta ou não.

A ferramenta *ponto* pode ser utilizada pela maioria dos alunos na atividade de construção do simétrico de um ponto em relação a uma reta, e a ferramenta r*eta* pode ser utilizada nas atividades envolvendo o traçado de eixos de simetria em figuras. A ferramenta *segmento* constrói um segmento, definido por dois pontos de extremidade, que pode ser criado ou definido em um espaço livre ou sobre um objeto definido. A ferramenta c*ircunferência* não foi disponibilizada, para os alunos, na fase de familiarização, mas podem descobri-la, uma vez que fica exposta na barra de ferramentas do *Cabri* e a utilizarem na primeira atividade da categoria II. Acreditamos que a ferramenta *ponto médio* pode ser utilizada por alguns alunos, uma vez que nas correções das atividades da categoria anterior foi utilizada. Seria muito importante que os alunos utilizassem a ferramenta *mediatriz*, uma vez que preserva a eqüidistância e o perpendicularismo, mas é provável que os alunos não a utilizem.

Para a ferramenta *distância e comprimento*, acreditamos que pela facilidade de medir um segmento do que com régua, é provável que muitos alunos a utilizem em suas atividades. Os conceitos de eqüidistância, perpendicularismo, ponto médio e mediatriz já são conhecidos pelos alunos e podem aparecer representados em suas respostas. É provável que ocorram os seguintes procedimentos: que alguns alunos descubram a ferramenta *simetria axial* e a utilizem em suas atividades; que alguns alunos utilizem o recurso de medir segmentos (ferramenta *distância*); que alguns alunos utilizem retas auxiliares em algumas das atividades.

Em muitas situações-problema propostas, os alunos devem justificar seus procedimentos e isto é feito com a ajuda da ferramenta *comentários*, uma vez que permite criar uma caixa de edição para digitar um texto de comentário. A necessidade de justificar a resposta leva o aluno a usar algum mecanismo de prova, característico da situação de validação. Para Brousseau (1986), nessas situações, as afirmativas obtidas nas fases de ação e de formulação devem ser comprovadas por alguma explicação teórica. É provável que os alunos justifiquem seus procedimentos, uma vez que lhes são solicitados.

4.13 Análise *a Priori* das Atividades

a) ATIVIDADE 1

A tarefa a ser executada consiste em traçar o(s) eixo(s) de simetria(s) de algumas figuras, caso existam. Esta atividade é composta de quatro figuras, como podemos ver no Anexo I - Categoria II. A área de trabalho não apresenta pontos de grade (não quadriculada). Estas figuras podem não ter eixos ou ter eixos de simetria nas posições: horizontal, vertical ou inclinado. As figuras foram construídas com a ferramenta *polígono* do *Cabri*, com exceção da primeira figura (trapézio isósceles) que foi construída usando princípios da geometria euclidiana.

Análise a *priori* da atividade 1

Nas atividades da categoria I, usando lápis e papel, os alunos não se preocupavam em traçar mais de um eixo de simetria para as figuras, mas nesta atividade é provável que eles tracem mais de um eixo, quando existirem, uma vez que já foi feita a correção das situações–problema da categoria I.

O objetivo da tarefa é traçar o(s) eixo(s) de simetria de quatro figuras, caso existam. No caso, somente duas figuras possuem eixos de simetria: o trapézio isósceles e o quadrado. O primeiro tem um e o segundo quatro eixos de simetria. Para estas figuras, os alunos podem utilizar basicamente as ferramentas disponíveis no *Cabri*, indispensáveis e necessárias, como, por exemplo: ponto médio; segmento; reta; reta perpendicular e mediatriz.

Analisaremos cada uma das figuras que compõem esta atividade.

Trapézio isósceles (item a):

Na Figura 4.52 temos a figura que compõe a atividade 1 e seu eixo de simetria.

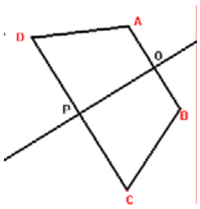


Figura 4.52. Eixo de simetria do trapézio isósceles.

Para encontrar corretamente o eixo de simetria desta figura, os alunos, podem proceder de pelo menos três modos distintos:

(Modo a)

1. Selecionar *ponto médio* na caixa nº 5, clicar no ponto A da figura dada e depois no ponto B desta. Imediatamente, aparecerá o ponto médio do lado $\overline{AB}$ na tela, que, no caso, é o ponto O, nomeado usando *rótulo* (caixa nº 10).
2. Selecionar *reta perpendicular* na caixa nº 5, e clicar no ponto O e depois no segmento $\overline{DC}$, aparecerá a reta $\overleftrightarrow{OP}$ (perpendicular a $\overline{DC}$ passando por O), e como os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$ são paralelos (este fato pode ser verificado utilizando a ferramenta *paralelos?*, na caixa nº. 8), assim a reta $\overleftrightarrow{OP}$ é o eixo de simetria desta figura.

(Modo b)

1) Repetir, inicialmente, o passo 1 do modo (a), obtendo o ponto médio O do lado $\overline{AB}$, e também para a obtenção do ponto médio do lado $\overline{CD}$, o qual denominamos de ponto P, usando *rótulo* (caixa nº 10), como representado na Figura 4.52.

2) Selecionar *reta* na caixa nº 2, clicar no ponto médio O do segmento $\overline{AB}$, e depois no ponto médio P do segmento $\overline{CD}$, obtendo a reta $\overleftrightarrow{OP}$, que é o eixo de simetria desta figura. Como o trapézio é isósceles, então, os lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são paralelos, e $\overleftrightarrow{OP}$, passando pelos dois pontos médios dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. A reta $\overleftrightarrow{OP}$ é perpendicular a $\overline{CD}$, logo também é perpendicular a $\overline{AB}$.

(Modo c)

1. Selecionar *mediatriz* na caixa nº 5 e clicar sobre o lado $\overline{AB}$. Aparecerá a mediatriz do lado $\overline{AB}$ do trapézio isósceles. Esta reta mediatriz é o eixo de simetria desta figura.

Os alunos ainda podem simplesmente traçar o eixo de simetria, selecionando reta na caixa nº 2 e marcando dois pontos para traçar esta reta. O primeiro ponto a ser marcado pode ser aquele passando, aproximadamente, pelo "meio" do lado $\overline{AB}$ da figura e o segundo, aquele passando também, aproximadamente, pelo "meio" do lado $\overline{CD}$ do trapézio. Imediatamente, aparece a reta $\overleftrightarrow{OP}$. Este, apesar de não ser exatamente o eixo de simetria da figura, uma vez que esta reta foi feita sem a preocupação em aplicar as propriedades do conceito de simetria e sem nenhuma precisão, é considerado como resposta correta dos alunos. Este tipo de construção ocorre, pois nem sempre, os alunos, em situações de sala de aula, são cobrados pelo professor a desenvolverem uma tarefa de geometria com rigor e precisão, ou por não sentirem necessidade de assim procederem.

Como a figura 1 é simétrica e seu eixo de simetria é inclinado, é possível que apareçam respostas considerando a figura assimétrica; que apareçam respostas apresentando um eixo de simetria – aquele que passa aproximadamente pelos pontos médios dos lados paralelos (e_1); que apareçam os eixos diagonais em suas respostas ($\overline{AC}$ e $\overline{BD}$), bem como o eixo de simetria do trapézio, traçado corretamente com instrumentos de precisão disponíveis no *Cabri*. Os alunos que nos apresentem os eixos diagonais em suas respostas, possivelmente estejam presumindo que o fato destes eixos subdividirem a figura em dois triângulos (ABD e BAC) congruentes os caracterizam como eixos de simetria. Provavelmente, os possíveis invariantes suscetíveis de serem utilizados, pelos alunos, associados a estes procedimentos podem ser: “o eixo que passa aproximadamente pelos pontos médios dos lados paralelos do trapézio isósceles é de simetria”; “as diagonais do trapézio isósceles são eixos de simetria”; “o trapézio isósceles possui um eixo inclinado de simetria”. Representamos alguns desses prováveis eixos na Figura 4.53.

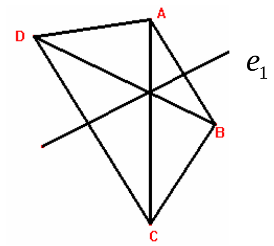


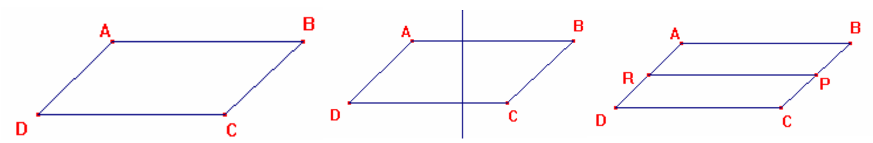
Figura 4.53. Possíveis eixos de simetria da atividade 1a – Computador.

Os alunos que considerarem o trapézio como uma figura assimétrica, talvez não estejam percebendo o eixo, por causa da posição inclinada do eixo e da figura.

Paralelogramo (item b)

Neste item, a figura é um paralelogramo e não possui eixo de simetria. Veja sua representação na Figura 4.54a.

É provável que alguns alunos percebam a assimetria do paralelogramo, bem como não tracem um eixo vertical ou horizontal para esta figura, pois conforme podemos observar na Figura 4.54b e 4.54c, parece evidente a não sobreposição das partes da figura ao se dobrar no referido eixo e a não divisão da figura em duas partes iguais.



a) b) c)

Figura 4.54. Possível eixo de simetria vertical e horizontal.

É provável que alguns alunos o considerem como uma figura simétrica e podem representar: mais de um eixo em suas respostas, eixos diagonais, eixos passando pelos pontos médios dos lados opostos, por não estarem percebendo a não sobreposição das partes da figura ao dobrar no eixo. Como pode ser observado na Figura 4.55. Os possíveis invariantes que podem ser utilizados, pelos alunos, nesta atividade são: “as diagonais do paralelogramo são eixos de simetria” e “o eixo que passa pelo passa pelos pontos médios dos lados opostos do paralelogramo é de simetria”.

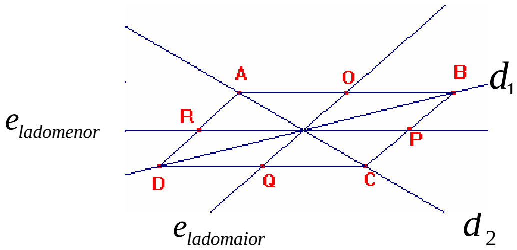


Figura 4.55. Eixos de simetria da atividade 1(b)- CI- Computador.

Para traçarem esses eixos representados na Figura 4.55, que não são eixos de simetria do paralelogramo, os alunos podem proceder de uma das seguintes formas:

(Modo a):

1) Repetir o passo 1 do modo (a), da atividade anterior (p. 168), encontrando o ponto médio dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$, denominando-os, respectivamente, O, P, Q e R.

2) Selecionar *reta* na caixa nº 2, e clicar no ponto médio O do lado $\overline{AB}$ e depois no ponto médio Q do lado $\overline{CD}$, obtendo a reta $\overleftrightarrow{OQ}$, que pode ser considerado eixo de simetria desta figura pelo aluno. Deve proceder do mesmo modo para encontrar as retas $\overleftrightarrow{PR}$, $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BD}$.

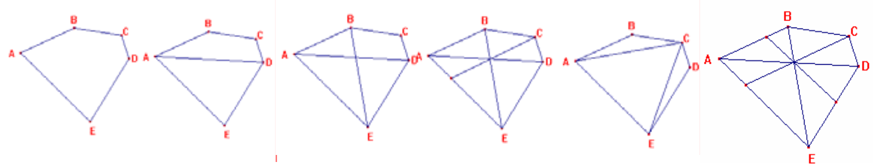
Teremos, assim, os quatros eixos incorretos do paralelogramo que podem ser representados pelos alunos. Alguns alunos podem traçar menos do que quatro dessas retas.

Alguns invariantes operatórios suscetíveis de serem utilizados pelos alunos, podem ser: “o eixo de simetria do trapézio isósceles é inclinado”; “as diagonais do trapézio isósceles são eixos de simetria”; “o eixo que passa pelo ponto médio dos lados paralelos do trapézio isósceles é de simetria”.

Polígono irregular de cinco lados (item c)

A figura dada é um polígono irregular de cinco lados, assimétrico. Observe sua representação na Figura 4.56.

É possível que muitos alunos percebam a assimetria da figura; que alguns alunos tracem eixos de simetria para esta figura e podem aparecer vários eixos. Os possíveis eixos de simetria, que podem surgir nas respostas dos alunos, foram agrupados na Figura 4.56. Esses, provavelmente, surgem por acharem que os eixos, por eles traçados, dividem a figura aproximadamente no "meio"; por não perceberem a não sobreposição das partes da figura ao dobrar no eixo; por ainda acharem que toda figura deve ter eixo de simetria; por acreditarem que, quando a figura possui vértice, algum eixo deve passar por ele. Os eixos representados na Figura 4.56(e) podem surgir, uma vez que, para os alunos, os triângulos ABC e EDC parecem congruentes e, portanto, os eixos ($\overline{AC}$ e $\overline{EC}$) podem ser considerados, pelos alunos, eixos de simetria da figura.



a) b) c) d) e) f)

Figura 4.56. Mostrando possíveis eixos de simetria, nas respostas dos alunos.

Para traçar esses eixos citados anteriormente, que não são eixos de simetria desta figura, os alunos podem utilizar as ferramentas *reta* ou *segmento* do *Cabri* e devem proceder como descrito a seguir.

Figura 4.56b: selecionar *segmento*, clicar no ponto A e depois no D, obtendo o segmento $\overline{AD}$, eixo de simetria que pode ser representado pelos alunos.

Figura 4.56c: devem proceder da mesma maneira anterior, construindo o segmento $\overline{AD}$ e o segmento $\overline{BE}$, eixos de simetria que podem ser representados pelos alunos.

Figura 4.56d: construindo os eixos da Figura 4.56c e depois selecionando segmento, clicando no ponto C e depois no ponto de encontro dos dois eixos anteriores, construindo os eixos de simetria que podem ser representados pelos alunos.

Figura 4.56e: selecionar *segmento*, clicar no ponto C e depois no A, obtendo o segmento $\overline{CA}$, da mesma forma, obtendo o segmento $\overline{CE}$. Eixos de simetria que podem ser representados pelos alunos.

Figura 4.56f: repetir os eixos da Figura 4.56d e acrescentando o quarto eixo. Aquele que passa aproximadamente pelo ponto médio dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{ED}$, tendo assim os quatro eixos de simetria que podem ser representados pelos alunos.

Alguns invariantes operatórios, possivelmente utilizados pelos alunos, podem ser: "os eixos diagonais do polígono irregular de cinco lados é de simetria"; "as diagonais do trapézio isósceles são eixos de simetria"; "a reta que passa por dois vértices não consecutivos é de simetria".

Quadrado (item d)

A figura é um quadrado com uma das diagonais na posição vertical, representada na Figura 4.57.

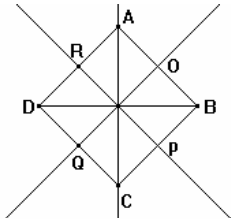


Figura 4.57. Eixos de simetria da figura da atividade 1(d)- C I- Computador.

É provável que muitos alunos tracem os quatros eixos de simetria desta figura, uma vez que esta figura já foi trabalhada na categoria I, com a utilização de lápis e papel. A representação das diagonais em suas resposta é provável acontecer pela sua posição na figura, mas os eixos $\overleftrightarrow{OQ}$ e $\overleftrightarrow{PR}$, por passarem pelos pontos médios dos lados do quadrado, podem ser esquecidos ou não serem representados, pois estes não estão posicionados convenientemente em relação à borda inferior e superior do papel. Não devem aparecer respostas, considerando a figura assimétrica, ou outros eixos de simetrias.

Para encontrar, corretamente, o eixo de simetria do quadrado, os alunos podem proceder de forma análoga ao que foi feito para o paralelogramo (p. 171).

Alguns invariantes operatórios que podem ser utilizados pelos alunos são: "as diagonais do quadrado são eixos de simetria"; "o eixo de simetria divide o quadrado em duas partes"; "o eixo de simetria divide o quadrado em dois retângulos".

b) ATIVIDADE 2

A tarefa a ser executada é traçar o(s) eixo(s) de simetria(s) – caso existam – de algumas figuras. Os alunos devem justificar sua resposta. Esta atividade é composta de quatro itens, a, b, c e d. No item (a), a figura não apresenta eixo de simetria; no item (b), a figura possui eixo inclinado de simetria; no item (c), a figura possui eixo horizontal de simetria se os dois objetos forem considerados como uma só figura; se os objetos forem considerados como a figura e seu (possível) reflexo, não haverá eixo de simetria; no item (d), a figura possui eixo de simetria horizontal se os dois objetos forem considerados como uma só figura, ou vertical, se os objetos forem considerados como a figura e seu (possível) reflexo.

Não foi fixado o recurso a ser utilizado e o tipo de papel é o não quadriculado.

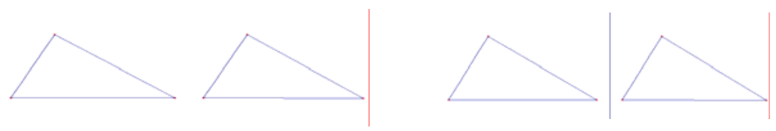
Análise *a priori* da atividade 2

Para as figuras do item c e d, já foram feitas as discussões e as correções das atividades, quando estas figuras foram apresentadas na categoria I, utilizando lápis e papel. Assim, é possível que eixos “incorretos” não voltem a ocorrer nesta atividade. Apesar da área de trabalho não apresentar pontos de grade, é possível torná-la quadriculada e os alunos sabem como utilizar este recurso. Alguns alunos podem se utilizar deste recurso.

Acreditamos que, para todos os itens, os alunos apenas selecionem a ferramenta (*reta* ou *segmento*) e a tracem, procedendo da seguinte forma: clicando em dois pontos da figura ou da área de trabalho, de forma que a reta, ou segmento, fique entre as duas figuras dadas. Para eles, esse procedimento basta e é o mais provável de ser executado em todos os itens desta atividade.

Atividade 2 – (item a)

A figura que compõe esta atividade está representada na Figura 4.58a.



a) b)

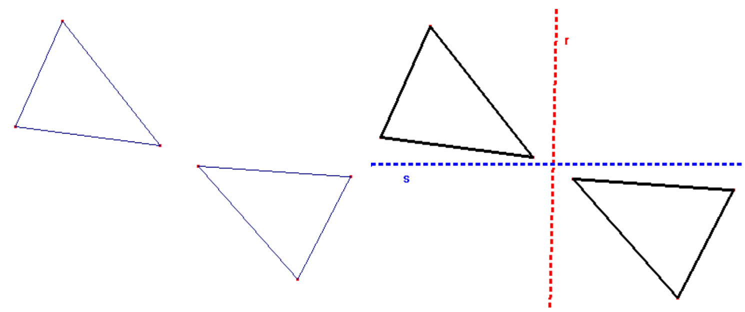
Figura 4.58. Item a -Figura da atividade 2a. Item b - possível eixo de simetria vertical.

Nas respostas, ainda é possível que alguns alunos tracem uma reta vertical, que não é eixo de simetria da atividade, por estarem percebendo que as figuras são as mesmas e, se transladadas, se encaixam. Neste caso, alguns invariantes operatórios que podem ser utilizados pelos alunos são: “a figura tem um eixo vertical de simetria”; “o eixo de simetria deve ser desenhado entre os dois triângulos da figura dada”. Os alunos ainda não percebem a reflexão (inversão) da figura. Podem proceder, selecionando reta na caixa nº 2 e simplesmente traçando esta entre os dois triângulos. Como representado na Figura 4.68b.

A grande maioria dos alunos deve observar que não temos a figura e seu reflexo (figura assimétrica). Eles, provavelmente, estão percebendo que as figuras se encaixam, se empurradas, e que não estão refletidas (invertidas), uma vez que esta mesma atividade foi discutida na categoria II desenvolvida com lápis e papel.

Atividade 2 – (item b)

A figura que compõe esta atividade está representada na Figura 4.59a.



a) b)

Figura 4.59. Item a - Figura da atividade 2b. Item b - Possível eixo vertical ou horizontal.

Alguns alunos podem perceber o eixo inclinado de simetria. Outros podem considerá-la assimétrica, mas esta resposta não deve surgir, pois figura e reflexo já fazem parte do conceito de simetria deste grupo de alunos. O eixo vertical (r) pode ocorrer em suas respostas, mas o horizontal (s) não, como representados na Figura 4.59b. O primeiro por desconsiderarem a posição inclinada da figura ou do eixo. O segundo por parecer óbvio que se dobrarem neste, a figura e sua imagem, não coincidem. Os alunos podem usar as ferramentas *reta, segmento* ou *ponto médio* do *Cabri.* Numa resposta imprecisa, eles simplesmente traçam um eixo inclinado de simetria entre as duas figuras, procurando visualmente preservar a distância dos vértices da figura ao eixo de simetria. Esta é a resposta mais provável de acontecer. Outros eixos não devem surgir, como comentado no início da análise *a priori* da atividade 2, p.174.

Alguns invariantes operatórios, provavelmente utilizados pelos alunos, podem ser: “a figura dada tem um eixo horizontal (ou vertical) de simetria”; “a figura dada tem dois eixos, horizontal e vertical de simetria”; “a figura dada tem um eixo inclinado de simetria”; “se a figura é inclinada, então o eixo de simetria também é inclinado”; “o eixo de simetria da figura da atividade 2b, passa pelos dois vértices mais próximos da figura dada”.

Para traçar o eixo de simetria desta atividade, corretamente, os alunos podem proceder de várias maneiras. Destacaremos duas delas a seguir:

(Modo a).

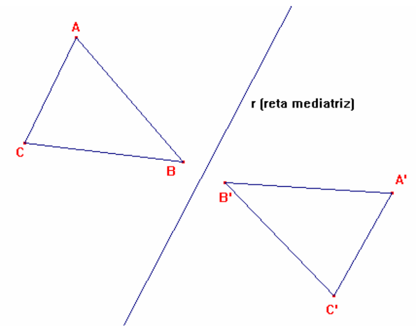
1. Selecionar *mediatriz* na caixa nº 5, clicar no ponto A e depois no ponto A’, imediatamente a mediatriz deste segmento $\overline{AA'}$ será construída. Esta reta mediatriz é o eixo de simetria da figura, pois é perpendicular aos segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ e $\overline{CC'}$, uma vez que estes segmentos são paralelos (podem verificar com a ferramenta *paralelos?*), e os divide em duas partes congruentes. Como podemos observar na Figura 4.60a.

(Modo b)- Representado na Figura 4.60b.

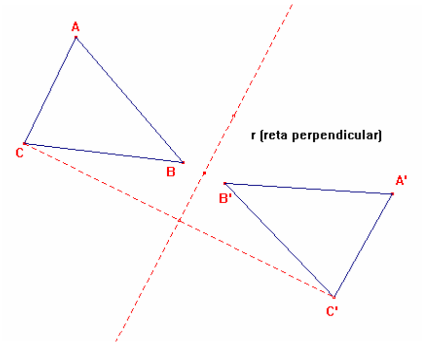
1. Escolher o segmento $\overline{AA'}$[1] e selecionar *ponto médio* na caixa nº 5, clicar no ponto A da figura e depois no ponto A’, imediatamente aparecerá o ponto médio O do segmento $\overline{AA'}$.

2. Selecionar *reta perpendicular* na caixa nº 5, clicar no ponto O e depois clicar no segmento $\overline{CC'}$, imediatamente, aparecerá a reta $\overleftrightarrow{OP}$, perpendicular a $\overline{CC'}$, passando por O, que é o eixo de simetria desta figura; conseqüentemente, esta reta será perpendicular aos segmentos $\overline{BB'}$ e $\overline{AA'}$, passando pelo ponto médio destes.

[1] Poderiam encontrar o ponto médio de qualquer um dos segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ ou $\overline{CC'}$.



a)



b)

Figura 4.60. Modo a e b da atividade 2 b.

Atividade 2 – (item c)

A figura que compõe esta atividade está representada na Figura 4.61.

Figura 4.61. Figura da atividade 2 c.

Apesar das situações de validação e de institucionalização, realizadas na categoria I, utilizando lápis e papel, é ainda possível que nas respostas de alguns alunos haja uma representação de eixo de simetria para cada figura isoladamente, não as considerando como original e reflexo.

Os eixos vertical e horizontal devem ser representados pelos alunos. O eixo horizontal poderá ser o mais representado por eles, uma vez que a figura dada possui este eixo se os dois objetos forem considerados como uma só figura. O eixo vertical, que não é eixo de simetria da figura, quando for representado, é considerado como uma resposta precipitada por falta de atenção, ou pode ser que os alunos estejam pensando que têm a figura e seu (possível) reflexo. Se os dois aparecem, seguem-se as mesmas justificativas para cada eixo tratado acima.

Para traçar o eixo de simetria desta atividade e a reta vertical (que não é eixo de simetria), os alunos podem proceder como descrito nos seguintes modos:

(Modo a)- Construindo o eixo de simetria (s), representado na Figura 4.62.

1. Verificar se C e C’ são, respectivamente, pontos médios de $\overline{BE}$ e $\overline{B'E'}$. A medida do segmento $\overline{BC}$ (1,80 cm) é obtida, na tela, selecionando

distância e comprimento na caixa nº 9, clicando no ponto C e depois no ponto B. Procedendo analogamente, obtém-se as medidas dos segmentos $\overline{CE}$, $\overline{B'C'}$ e $\overline{C'E'}$, que também possuem 1,80 cm de comprimento, como mostrado na Figura 4.62. Logo C é ponto médio de $\overline{BE}$ e C' é ponto médio de $\overline{B'C'}$'. Para verificarmos se os segmentos $\overline{BA}$, $\overline{B'A'}$, $\overline{EF}$ e $\overline{E'F'}$ possuem a mesma medida, devemos proceder da mesma forma e concluiremos que todos têm a mesma medida (2,51 cm). Portanto, as duas figuras são congruentes.

2. Verificar se o segmento $\overline{BE}$ é perpendicular aos segmentos $\overline{BA}$, $\overline{CD}$ e $\overline{EF}$ e, da mesma forma, se $\overline{B'E'}$ é perpendicular aos segmentos $\overline{B'A'}$, $\overline{C'D'}$ e $\overline{E'F'}$. Isto é feito selecionando *perpendicular?* na caixa nº 8 e clicando no segmento $\overline{BE}$ e depois no $\overline{BA}$ e, por fim, em um lugar qualquer da tela aparecerá escrito "objetos perpendiculares". Repete-se o procedimento para todos os outros pares de segmentos. Logo $\overline{BE}$ é perpendicular aos segmentos $\overline{BA}$, $\overline{CD}$ e $\overline{EF}$ e $\overline{B'E'}$ é perpendicular aos segmentos $\overline{B'A'}$, $\overline{C'D'}$ e $\overline{E'F'}$. A reta $\overline{CC'}$, eixo de simetria desta figura, é traçada.

3. Selecionar *reta* na caixa nº 2, clicar no ponto médio C da figura e, depois, no ponto C'. Imediatamente, aparecerá a reta $\overleftrightarrow{CC'}$, eixo de simetria da figura.

A reta $\overleftrightarrow{CC'}$ é a mediatriz de $\overline{BE}$ e $\overline{B'E'}$. As duas figuras são congruentes, logo a reta $\overleftrightarrow{CC'}$ é o eixo de simetria da figura.

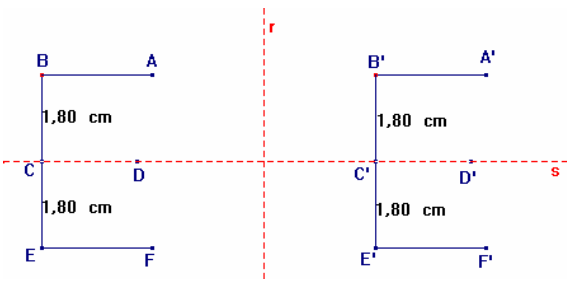


Figura 4.62. Figura da atividade 2 c.

(Modo b)- Para construir a reta vertical, que não é eixo de simetria da figura, os alunos apenas selecionam *reta* e traçam a reta r clicando em dois pontos, de forma que esta reta fique no "meio" das duas. Para eles, esse procedimento é suficiente. Este eixo pode ser representado por estarem apenas percebendo a igualdade das figuras e por não estarem considerando a reflexão da imagem como parte do conceito. Neste caso, podemos dizer que ainda acreditam que a translação é o reflexo da figura, pois uma delas pode ser empurrada até que se encaixe na outra.

Alguns invariantes operatórios suscetíveis de serem utilizados pelos alunos podem ser: "a figura desta atividade tem um eixo horizontal (ou vertical) de simetria"; "a figura desta atividade tem dois eixos, horizontal e vertical, de simetria"; "o simétrico da figura desta atividade é uma figura deslocada horizontalmente".

Atividade 2 – item d)

A figura que compõe esta atividade está representada na Figura 4.63.

Figura 4.63. Figura da atividade 2d.

Supõe-se que os eixos vertical e horizontal sejam representados, por alguns alunos, passando pela metade da figura e que, provavelmente, nas respostas dos alunos não haja uma representação de eixo de simetria para cada figura isoladamente, pois esta situação já é de conhecimento dos alunos.

Para traçar os eixos de simetria desta atividade, os alunos podem proceder, executando os mesmos passos da atividade anterior, para a construção da reta s, que é eixo de simetria (horizontal) da figura. Este pode ser observado na Figura 4.64. Para construir o eixo vertical de simetria (r), devem proceder da seguinte forma:

1. Primeiramente, devem verificar que as duas figuras têm a mesma forma e o mesmo tamanho, como no passo 1 da atividade anterior.
2. Selecionar *mediatriz* na caixa nº 5, clicar no ponto A e depois no ponto A', imediatamente, a mediatriz do segmento $\overline{AA'}$ – reta r – é construída. Esta reta mediatriz é o eixo de simetria da figura, pois é perpendicular aos segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, $\overline{DD'}$, $\overline{EE'}$, $\overline{FF'}$ e os divide em duas partes congruentes.

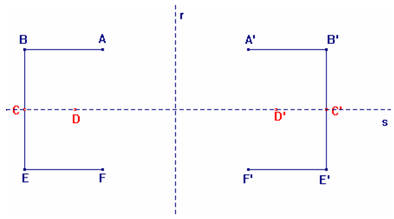


Figura 4.64. Figura e eixos de simetria da atividade 2d-CI – Computador.

Alguns invariantes operatórios possivelmente utilizados pelos alunos, na execução desta atividade, podem ser: “a figura desta atividade tem um eixo horizontal (ou vertical) de simetria”; “a figura desta atividade tem dois eixos, horizontal e vertical, de simetria”.

4.14 Informações Gerais sobre a Experimentação com o Computador

Cada categoria da seqüência didática com a utilização do computador foi realizada numa única sessão de 3 horas-aula, tendo aproximadamente dez minutos para cada ficha de atividade. No final de cada categoria, foram feitas discussões (em grupo) sobre os resultados produzidos pelos alunos (situações de validação coletivas), seguidas de momentos de institucionalização por parte da pesquisadora.

Dando início à experimentação, a pesquisadora informou ao grupo de alunos que trabalharia com o software *Cabri-Géomètre II*, o motivo da escolha deste software e informou também que este programa possui uma janela onde é possível rever tudo que fizeram e escreveram nas atividades.

Todos os computadores já estavam com o *Cabri* disponível na tela, e iniciamos uma fase de familiarização dos alunos com o *software*. Esta fase de familiarização foi desenvolvida em duas etapas: manipulação livre pelos alunos do *software;* manipulação de algumas janelas, suas composições e como utilizá-las, sendo conduzidos pela pesquisadora. Por exemplo, como construir pontos, retas, segmentos; como construir um triângulo, um polígono; como medir um segmento; como copiar uma figura e como salvar a atividade. Os alunos envolveram-se no entendimento de como manipular as ferramentas do *software* e nas possibilidades de desenhos que podiam criar. As maiores dificuldades que ocorreram foram de adaptação e domínio do controle do *mouse.*

Um dia após esta fase de familiarização, iniciamos a aplicação da seqüência didática com a utilização do computador. Para abrir a atividade, os alunos devem, na barra de *menu*, selecionar a caixa *arquivo* e depois *abrir*. Nesta caixa, encontram-se as atividades propostas: atividade 1, atividade 2, e assim, sucessivamente, até à última atividade, mas só poderão abri-la com a autorização da pesquisadora. Para selecioná-la, basta clicar na atividade e, imediatamente, esta aparece na tela do *Cabri*, pronta para ser resolvida. Depois de resolvida, eles devem clicar novamente nesta caixa de arquivo e selecionar *salvar* (o comando *Salvar* salva uma construção da janela de desenho ativa para um arquivo cujo nome foi previamente especificado), salvando assim a atividade e produzindo desta forma material para ser analisado.

As aplicações destas categorias aconteceram como programadas e com poucas interferências do pesquisador. Sentimos os alunos seguros em relação ao computador e também na busca de soluções para as atividades e percebemos um maior interesse deles em resolvê-las. Com exceção de um aluno, que teve problema para salvar a primeira atividade, solicitando a presença da pesquisadora, os outros não fizeram perguntas à pesquisadora no desenrolar das atividades.

A experimentação ocorreu sempre da mesma maneira: os alunos selecionavam a atividade; era feita a leitura do enunciado pela pesquisadora e, depois, a resolução pelos alunos. Assim, não falaremos sobre a experimentação específica de cada atividade desta categoria.

4.15 Análise *a Posteriori* das Atividades

a) Análise a *posteriori* da atividade 1

Os alunos preocuparam-se em analisar se a figura possuía mais de um eixo de simetria e traçaram os eixos que julgaram existir.

Nenhum aluno quadriculou a tela, isto é, não encontramos nos arquivos de resposta esta situação e também não vimos alunos utilizando este recurso. Acreditamos que não quadricularam a tela por não a terem utilizado na categoria anterior, quando a atividade o sugeria, ou por terem efetuado contagem errada dos quadradinhos. Surgiram procedimentos de medidas de segmentos; traçado de ponto médio, bem como a utilização da ferramenta *simetria axial* do *Cabri*.

A complexidade das figuras e a impossibilidade de “dobrar o papel” tornaram a atividade complicada e induziram os alunos a cometer alguns “erros”, como, por exemplo, traçar eixos diagonais, quando estes não existiam.

Analisamos, individualmente, cada item desta atividade como está descrito a seguir. As respostas apresentadas pelos alunos para cada figura, encontram-se no Quadro de Respostas da Atividade 1- CI- computador, no Anexo II, p. 277.

Trapézio isósceles (Item a).

Para o trapézio isósceles, os eixos de simetria apresentados pelos alunos foram:

- o aluno 7 construiu eixos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$**,** dividindo-o em dois triângulos (ABC e DCB) congruentes (Figura 4.53, p. 170);
- dois alunos (14 e 26) não construíram eixos (Figura 4.53, p. 170);
- os outros sete alunos construíram um eixo que passa, aproximadamente, pelos pontos médios dos lados paralelos e_1 (Figura 4.53, p. 170).

Neste último caso, representado pela maior parte dos alunos, foi utilizada a ferramenta *reta* (ou *segmento)* do *Cabri*. O eixo de simetria traçado corretamente, com instrumentos de precisão, não surgiu. Seis destes alunos também mediram os lados do trapézio, talvez por estarem experimentando a ferramenta de medida e não tentando validar sua resposta, pois em nenhuma atividade os alunos tentaram observar se as distâncias dos vértices aos eixos foram preservadas. A Figura 4.65 ilustra este caso.

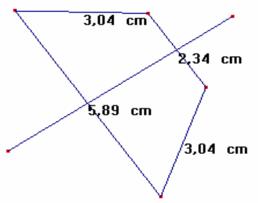


Figura 4.65. Procedimentos dos alunos - medida dos lados do trapézio.

Nas respostas dos alunos, pudemos identificar os seguintes teoremas-em-ação, de eixo de simetria do trapézio isósceles desta atividade:

- O trapézio isósceles, inclinado em relação às bordas inferior e superior da tela, tem um eixo de simetria que também é inclinado;
- As diagonais do trapézio isósceles são eixos de simetria;
- O trapézio isósceles tem um eixo de simetria, aquele que passa pelo ponto médio dos lados paralelos.

Paralelogramo (Item b).

Os eixos de simetria representados, pelos alunos, para o paralelogramo foram os seguintes:

- sete alunos não marcaram eixos de simetria;
- dois alunos construíram os dois eixos que passam pelos pontos médios dos lados opostos;
- o aluno 9 construiu o eixo passando pelos pontos médios dos lados menores.

Sete alunos perceberam a assimetria do paralelogramo e as diagonais não surgiram entre as respostas destes, uma vez que esta figura também estava presente na categoria I, com lápis e papel. No momento de discussões coletivas, os alunos sentiram necessidade de dobrar nas diagonais para que verificassem que não eram eixos de simetria desta figura. Apesar destas discussões, três alunos ainda o consideram como tendo eixo de simetria. Podem ter assim os traçados, por falta de atenção ou por não perceberem ainda a não sobreposição das partes ao se dobrar no eixo por eles construído.

Os dois alunos que traçaram os dois eixos que passam pelos pontos médios dos lados opostos não utilizaram de fato a ferramenta *ponto médio* do *Cabri*, apenas traçaram as retas, passando aproximadamente pelos pontos médios dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$, e depois $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$**.** O aluno que representou o eixo, que passa pelos pontos médios do lado menor do paralelogramo, utilizou a ferramenta *ponto médio* do *Cabri* no traçado do ponto P e do ponto R, pontos médios de $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$, respectivamente, e depois, com a ferramenta *reta* do *Cabri*, traçou a reta $\overleftrightarrow{PR}$. Como representado na Figura 4.55, p. 171.

Nas respostas dos alunos, pudemos identificar os seguintes teoremas-em-ação, de eixo de simetria do paralelogramo:

- O paralelogramo tem um eixo de simetria, passando pelos pontos médios dos lados menores;
- O paralelogramo tem dois eixos de simetria ,passando pelos pontos médios dos lados menores e maiores.

Polígono irregular de cinco lados (Item c).

Os eixos de simetria representados, pelos alunos, para o polígono irregular de cinco lados foram os seguintes:

- oito alunos não marcaram eixos de simetria;
- o aluno 26 traçou o eixo $\overline{AD}$;
- o aluno 9 traçou três eixos de simetria.

O aluno que apresentou o eixo de simetria $\overline{AD}$ não deve ter observado que as figuras resultantes do traçado do eixo (um triângulo e um quadrilátero), não tinham a mesma quantidade de lados. O aluno que apresentou três eixos (Figura 4.56d, p.172), em sua resposta, procedeu como discutido na análise *a priori* e escolheu a ferramenta *segmento* do *Cabri*. Neste caso, provavelmente ele executou a tarefa sem se envolver com ela. Segundo Brousseau (1986), não ocorreu a devolução da situação-problema. Os outros casos, como previsto, não surgiram.

Nas respostas dos alunos, pudemos identificar os seguintes teoremas-em-ação, de eixo de simetria do polígono irregular de cinco lados: “As diagonais do polígono irregular de cinco lados são eixos de simetria”; “o eixo $\overline{AD}$ que passa pelos pontos A e D do polígono irregular de cinco lados é de simetria”.

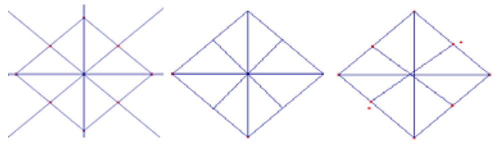
Quadrado (Item d).

Para o quadrado, as respostas dadas pelos alunos podem ser agrupadas da seguinte forma:

- dois alunos traçaram dois eixos diagonais;
- sete alunos traçaram quatro eixos de simetria;
- o aluno 26 traçou apenas um eixo diagonal - o vertical.
- Nenhum aluno a considerou assimétrica.

Apenas três alunos ainda não perceberam os quatros eixos do quadrado. Entretanto, dos que perceberam, pudemos afirmar que estão utilizando conhecimentos adquiridos durante as atividades da categoria anterior.

Os eixos de simetria do quadrado foram representados utilizando as ferramentas *retas* ou *segmento* do *Cabri*, mas esta última foi preferida por oito dos alunos. Dois resolveram a atividade corretamente e procederam como descrito na análise a priori, conforme ilustrado na Figura 4.66a, utilizando as ferramentas *ponto médio* e *reta* do *Cabri*. Outros dois apenas traçaram os quatro eixos, sem nenhuma precisão na resposta, como mostrado nas Figuras 4.66b e 4.66c.



a) b) c)

Figura 4.66. Respostas dos alunos representando os quatro eixos do quadrado.

Nas respostas dos alunos, pudemos identificar os seguintes teoremas-em-ação, de eixo de simetria do quadrado com uma das diagonais na posição vertical.

- As diagonais do quadrado são eixos de simetria;
- As duas diagonais e as retas que passam pelos pontos médios dos lados opostos do quadrado são de simetria".

b) Análise *a posteriori* da atividade 2

Os alunos não ativaram os pontos da malha quadriculada e por isso não utilizaram a contagem de quadradinhos nesta atividade. A ferramenta preferida dos alunos, no traçado de eixo de simetria, foi *segmento*.

As respostas dadas pelos alunos para cada item que compõe esta atividade encontram-se no Quadro de Respostas da Atividade 2, no Anexo II, p. 278.

(Item a).

Para a figura do item a, as respostas dadas pelos alunos podem ser agrupadas da seguinte forma:

- o aluno 1 traçou o eixo vertical;
- nove alunos não marcaram eixos de simetria.

Observamos que quase todos os alunos perceberam que não temos a figura e seu (possível) reflexo. Eles podem ter percebido a não sobreposição das partes e estarem utilizando conhecimentos dos momentos de institucionalização. Suas justificativas foram:

- "Não tem eixo de simetria". (Aluno 6)
- "Não achei simétrico". (Aluno 9)

O Aluno 1 traçou o eixo vertical, que não existe, para esta figura, sem se preocupar em preservar a distância entre os pontos. Ele simplesmente traçou uma reta entre as figuras. A justificativa para esta resposta foi a seguinte: “As duas figuras são iguais medidas e se encaixam”. Para ele, as figuras são as mesmas e, se transladadas, coincidem, portanto, ainda se fixa somente na congruência das figuras.

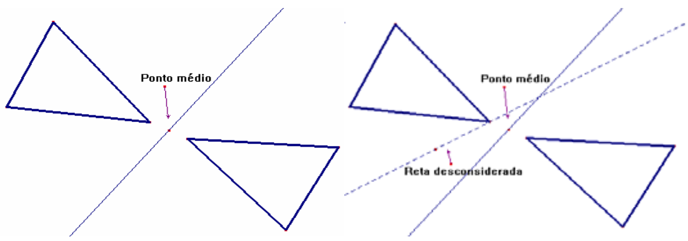
Nas respostas dos alunos, pudemos identificar os seguintes teoremas-em-ação, de eixo de simetria para atividade 2a: “a figura tem um eixo vertical de simetria entre as duas figuras”.

(Item b)

Para o item b, a figura foi considerada, por todos, como tendo um eixo inclinado de simetria, passando entre as figuras. Nenhum aluno a considerou assimétrica.

Dos dez alunos, dois procederam da seguinte forma: marcaram o ponto médio do segmento que une os vértices mais próximos e o eixo de simetria, não perpendicular ao segmento, foi traçado, passando por este ponto, como ilustrado na Figura 4.67a. Pôde-se observar que os alunos começaram a se preocupar com a eqüidistância dos pontos, mas não de todos os pontos. O Aluno 18 fez, primeiramente, uma possível reta de simetria (pontilhada) e a desconsiderou, como podemos observar na Figura 4.67b. Este aluno, não satisfeito com seu resultado, abandonou-o, lembrou-se do ponto médio e o utilizou em sua resposta.

Parece que esse aluno não percebeu que o eixo feito por ele não é uma resposta correta, pois era necessário, pelo menos, mais um ponto (o ponto médio de um outro par de vértices correspondentes) ou que o eixo traçado fosse perpendicular ao segmento ligando os vértices correspondentes.



a) b)

Figura 4.67. Procedimento do aluno na atividade 2b.

O Aluno 14 encontrou os pontos médios do lado menor dos dois triângulos, talvez pensando em traçar aí o eixo de simetria, na tentativa de dividi-la em partes “iguais”. Pode estar utilizando o invariante operatório: “o eixo de simetria divide a figura em duas partes congruentes”. Na revisão da construção, nenhuma reta foi efetivamente traçada. Parece que ele procurou preservar a distância entre os dois vértices mais próximos, como podemos ver na Figura 4.68. Pode também estar utilizando o invariante operatório: “a distância da figura ao eixo de simetria deve ser preservada”.

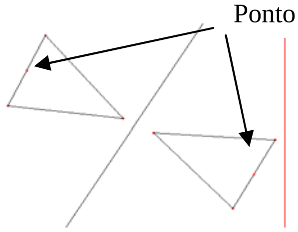


Figura 4.68. Procedimento do aluno na atividade 2b-ponto médio.

Vejamos algumas justificativas dadas por alguns desses alunos:

- “Medi a *distancia*” (Aluno12).
- “Tracei a reta que as divide” (Alunos 3 e 8).
- “Se eu dobrar a figura no meio, vira uma figura só” (Aluno 18).
- “Dobrando na reta se encaixam” (Aluno 21).
- “Se dobrar na reta elas se coincidem” (Aluno 15).
- “As figuras existem eixo porque quando elas forem dobradas elas serão iguais” (Aluno 26).

O aluno da primeira frase não realizou efetivamente nenhuma medida, quando ele diz: “medi a distancia” deve estar se referindo à visualização, por ter procurado traçar o eixo entre as figuras. Na segunda frase, parece que estão pensando que o eixo de simetria divide a figura em duas partes. Pode estar utilizando o invariante operatório 1 (p. 57): Nas frases seguintes, os conceitos de dobradura e sobreposição foram fortemente representados pelos alunos. Pode estar utilizando o invariante operatório 2 (p. 58.). Estes conceitos podem ser caracterizados como re-investimento de conhecimentos pelos alunos nas situações-problema anteriores.

Os alunos desenvolveram esta atividade, desenhando um eixo inclinado de simetria entre as figuras, como era provável de acontecer.

Nas respostas dos alunos, pudemos identificar o seguinte teorema-em-ação, de eixo de simetria para atividade 2b: “a figura tem um eixo inclinado de simetria que está a igual distância dos vértices desta”.

(Item c)

Para a figura do item c, as respostas apresentadas pelos alunos ficaram assim distribuídas:

- dois alunos não construíram eixo de simetria;
- três alunos construíram dois eixos paralelos às bordas do papel;
- quatro alunos construíram o eixo horizontal;
- O Aluno 26 construiu o eixo vertical.

Os alunos não construíram eixos em cada figura como na categoria anterior; portanto, já reduziram o número de procedimentos “incorretos”. A ferramenta utilizada no traçado do eixo de simetria foi o segmento de reta.

Vejamos algumas justificativas dadas por esses alunos:

- “As duas são iguais e as medidas também” (Aluno 14).
- “Eu tracei duas retas diferentes uma na horizontal e a outra na vertical” (Aluno 7).
- “Medi as distâncias” (Aluno 21).
- “Eu não encontrei o eixo simétrico, porque na figura não tem” (Aluno 15).

Na primeira frase, o aluno traçou o eixo vertical, centrando-se na posição das figuras e na medida das mediu alguns segmentos com o recurso do *Cabri*. Na terceira frase, o eixo traçado pelo aluno foi o eixo horizontal, nenhuma distância foi efetivamente realizada. Esse aluno deve ter usado somente a visualização. Na quarta frase, o aluno a considera assimétrica e não percebe o eixo horizontal de simetria, talvez por não considerar os dois objetos como uma só figura.

Nas respostas dos alunos, pudemos identificar os seguintes teoremas-em-ação, de eixo de simetria para atividade 2 - item c:

- A figura tem dois eixos de simetria (horizontal e vertical);
- A figura tem um eixo vertical (ou horizontal) de simetria.

(Item d)

Para o item d, as respostas apresentadas pelos alunos foram:

- sete alunos traçaram dois eixos, horizontal e vertical, de simetria;

- três alunos representaram somente o eixo vertical.

Vemos que esses alunos já perceberam os dois eixos de simetria da figura. E as justificativas de alguns desses alunos foram:

- "O E e seu outro lado" (Aluno 1).
- "Cruzei um traço ao meio da linha central" (Aluno 15).
- "Essa figura tem duas retas de simetria" (Aluno 21).
- "Dobrando ao meio temos dois lados iguais" (Aluno 26).
- "É um eixo, se dobra encaixa" (Aluno 12).

Para a primeira justificativa, parece que o aluno percebeu a inversão da figura e, assim, nos apresentou esta frase. Pode estar utilizando o invariante operatório 3 (p. 58). Para a segunda e a terceira justificativas, esses alunos identificaram dois eixos de simetria na figura: um horizontal e outro vertical. Um deles afirma que esses dois eixos se cruzam. Para as duas últimas afirmativas, os alunos perceberam a superposição das partes das figuras, se fossem dobradas no eixo de simetria e podem estar utilizando o invariante operatório 2 (p. 58).

Nas respostas dos alunos, pudemos identificar os seguintes teoremas-em-ação, de eixo de simetria para a figura da atividade 2- item d:

- A figura tem dois eixos de simetria (horizontal e vertical);
- A figura tem somente um eixo vertical de simetria;
- A figura tem um eixo horizontal de simetria.

4.16 Síntese do Terceiro Momento Coletivo

O terceiro momento coletivo de nossa pesquisa refere-se à categoria I com a utilização do computador. Esta categoria foi proposta como uma fase de adaptação ao *software Cabri Géomètre II*, para diminuir a ansiedade dos alunos em relação às atividades a serem resolvidas no computador: selecionar, manipular e utilizar as ferramentas do *Cabri* e reinvestir os conhecimentos anteriores.

Ao iniciarmos a primeira atividade desta categoria, o aluno 12 disse: "Eu peguei o segmento e fui traçando os eixos quando eu achava que tinha. Na primeira eu tracei um eixo só, no meio da figura (se referindo ao eixo da figura), na segunda e terceira não tracei e no quadrado 4 eixos". Quando este aluno falou que não traçou eixo para o paralelogramo, os alunos (alunos 6 e 9) o questionaram dizendo que ele tem eixo de simetria, e o aluno 12 entra na conversa e diz; “lembra quando dobramos na diagonal?”. E em relação à última figura, os alunos 1 e 7 disseram que só marcaram os eixos diagonais, “esqueci, eu sabia que tinha, mas não fiz” (Aluno 7).

Depois que todos se pronunciaram, ocorreram os fechamentos, pela pesquisadora, de cada figura que fazia parte desta atividade e foram resolvidas da seguinte maneira. A primeira figura, trapézio isósceles foi resolvida através dos modos a e c, como descrito na análise *a priori* deste item. Para o paralelogramo, que é assimétrico, uma vez que os alunos receberam as atividades impressas em papel, recortamos a figura, e através de dobraduras, realizamos dobras nos possíveis eixos de simetria para mostrar a não sobreposição das partes em que a figura ficou subdividida. Da mesma maneira, procedemos para o polígono irregular de cinco lados. Para a última, o quadrado com uma das diagonais na posição vertical, resolvemos de modo análogo ao modo a da figura paralelogramo, quando construímos os possíveis eixos “errôneos” que os alunos poderiam desenhar, como descrito na análise *a priori*.

Na discussão da segunda atividade, item a, o aluno 7 parece ter convencido seus colegas, quando disse “a figura não tem eixo, uma vez que o outro lado não é invertido, lembram da mudança do lado?”. Como a figura é assimétrica, a pesquisadora apenas mostrou, através da utilização de dobradura, que as duas partes não se sobrepõem ao se dobrar em possíveis eixos de simetria.

Para o item b, os comentários foram que a figura tem eixo de simetria e que é uma reta inclinada. O aluno 18 falou que tentou traçar o ponto médio, mas desistiu (esta situação está representada na Figura 4.67b, da análise *a posteriori*, p. 186). Quando questionado por que desistiu, disse “depois eu pensei e não achei mais necessário. Aí, tracei uma reta entre as figuras, achei que só isto estava bom”. Esta atividade foi resolvida pela pesquisadora pelos modos a e b, como descrito na análise a priori deste item.

Para o item c, o aluno 6 falou que traçou um eixo vertical para a figura, mas logo em seguida outro aluno (9), entrando na discussão e discordando, disse possuir somente o eixo horizontal. Alguns alunos concordaram, e esse aluno ainda continuou, “na próxima figura (item d), sim, teremos o eixo vertical. Nessa não”. Nesse momento, o aluno 15 intervém e diz; “a próxima figura, tem os dois. É só olhar bem na tela, que você vê as partes iguais e se encaixam”. Percebemos que o aluno 6 não aceitou que o eixo vertical é “errôneo”. Para mostrarmos a ele a não sobreposição das partes ao se dobrar neste, foi realizada uma dobra no eixo sugerido. Esta atividade foi resolvida como no modo a descrito na análise *a priori* deste item. Para o item d, como surgiu nas discussões, os alunos concordaram com o eixo vertical de simetria. Mas alguns alunos pediram para resolvê-la por dobradura também. Esta foi realizada e depois foi resolvida através dos passos descritos na análise *a priori* deste item.

Na discussão destas atividades, alguns alunos disseram que preferiram utilizar a ferramenta *segmento do Cabri* e outros, a ferramenta *reta*, mas percebemos que, para eles, tanto faz traçar o eixo com qualquer uma das ferramentas.

No decorrer da resolução das atividades, os alunos mobilizaram procedimentos "corretos" e "incorretos" e, neste momento de discussões coletivas, tentaram justificar por que assim procederam e a convencer seus colegas da validade de suas respostas, como pudemos observar neste relato em vários momentos. As discussões foram finalizadas com a institucionalização das situações-problema pela pesquisadora. Assim, ocorreram situações de ação, formulação e validação, durante o decorrer da aplicação desta seqüência-didática. No item b, está representada uma situação de ação, segundo Brousseau (1986), em que o aluno, na busca de solução de um problema, realiza determinadas ações mais imediatas, resultando um conhecimento de natureza mais operacional. Há o predomínio do aspecto experimental do conhecimento, sem a preocupação de explicitar ou mesmo justificar o que foi feito na resolução. Percebemos que o aluno se lembra de conhecimentos anteriores, mas não sabendo como aplicá-los, abandona-os e parte para uma resposta mais imediata, sem nenhuma precisão.

Os alunos, aparentemente, só sentiram seguros depois de efetuarmos a dobradura para assim se convencerem da validade de suas respostas, ou das respostas apresentadas pelos colegas. No caso, essas atividades de dobraduras podem "servir para contestar ou mesmo rejeitar proposições" (Freitas, 2002, p. 80).

4.17 Síntese sobre a Categoria I com Computador

Comparando as respostas dos alunos no computador em relação à categoria I, com a utilização de lápis e papel, observamos uma redução no número de eixos de simetria "incorretos" traçados em figuras e os alunos apresentaram uma tendência em preservar a medida de segmentos de figuras. Muitos dos invariantes específicos presentes na correspondente categoria com lápis e papel não surgiram utilizando o computador.

Acreditamos que, por causa dos momentos coletivos, o uso de invariantes incorretos foi menor, pois os conceitos adquiridos foram re-investidos nas soluções das atividades desta categoria. Além disso, as ferramentas disponibilizadas pelo *Cabri* foram mais facilmente utilizadas como, por exemplo, *distância*, *ponto médio* e *segmento*.

Nessa categoria, muitos alunos passaram a considerar as figuras das atividades 2a e 2b como o original e seu reflexo, o que não ocorreu anteriormente.

Na análise das atividades dessa categoria, percebemos idéias comuns a respeito de eixo de simetria, as quais foram agrupadas em dois blocos: um em que se considerou que o eixo de simetria deve passar aproximadamente pelos pontos médios dos lados paralelos da figura e outro no qual o eixo de simetria devia ser desenhado entre as duas figuras.

Na análise das atividades dessa categoria, percebemos invariantes comuns a respeito de eixo de simetria. Um desses invariantes é que “o eixo de simetria deve passar aproximadamente pelos pontos médios dos lados paralelos da figura”, associando-se o procedimento de marcar o ponto médio dos lados da figura, auxiliando o traçado do eixo de simetria. O outro invariante é que “o eixo de simetria deve ser desenhado entre as duas figuras”, e o procedimento de traçar o eixo de simetria entre os dois triângulos ou figuras foi utilizado.

PARTE IV

CATEGORIA II COM O COMPUTADOR

4.18 Análise *a Priori* das Atividades

a) ATIVIDADE 1

A tarefa a ser executada é encontrar o simétrico de uma circunferência em relação a um eixo inclinado de simetria. O procedimento utilizado deve ser descrito. A área de trabalho é não quadriculada, o eixo de simetria é inclinado e a circunferência encontra-se do lado direito deste.

Análise a *priori* da atividade 1

A figura que compõe esta atividade está representada na Figura 4.69

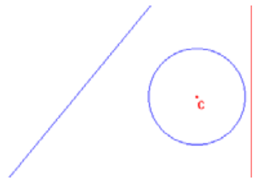


Figura 4.69. Figura da atividade 1- C II - Computador.

O objeto que faz parte desta atividade é uma circunferência. Os alunos não foram informados sobre como construir circunferências com o *Cabri*. É possível que todos os alunos descubram como fazê-lo, uma vez que a ferramenta para traçado de circunferências fica visível na barra de ferramentas na caixa n° 4. Em suas respostas, devemos ter os centros marcados e a circunferência apagada, na tentativa de construção da imagem da circunferência.

Nesta atividade, o eixo de simetria é inclinado e a circunferência dada está do lado direito do eixo. Esta posição em relação ao eixo de simetria, aparentemente, pode dificultar esta atividade, pois, normalmente, realizamos a escrita e a leitura da esquerda para a direita.

Para encontrar corretamente o simétrico da circunferência dada em relação a um eixo inclinado, os alunos poderão proceder de vários modos.

(Modo a). Utilizando a ferramenta *simetria axial* do *Cabri*. Para isto basta executar os seguintes passos:

1. Selecionar *simetria axial* da caixa n°. 6, clicar primeiro na circunferência de centro C, em seguida sobre o eixo de simetria e imediatamente aparece a imagem deste na tela. Este procedimento está representado na Figura 4.70.

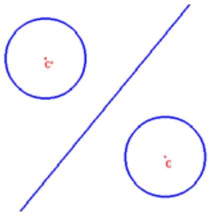


Figura 4.70. Utilização da ferramenta *simetria axial* na atividade 1.

O método acima é o mais fácil, rápido, cômodo e principalmente, preciso.

(Modo b). Sem a utilização da ferramenta *simetria axial* do *Cabri*. Os alunos podem executar os seguintes passos.

1. Selecionar *reta perpendicular* da caixa nº 5, clicar no ponto C e depois no eixo de simetria (reta r), imediatamente aparece a reta s (perpendicular a r passando por C), que é o lugar geométrico do ponto C' (imagem de C). Como podemos observar na Figura 4.71.

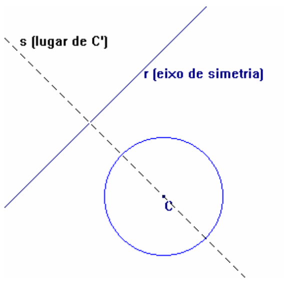


Figura 4.71. Resolução sem a utilização da ferramenta *simetria axial* do *Cabri.*

2. Selecionar *circunferência* da caixa n°4, construindo uma circunferência definida por um ponto (centro) e o raio, clicar no ponto O – ponto de interseção das retas r e s – e depois no ponto C – centro da circunferência dada –, isto é, mantemos a distância do centro (C) da circunferência ao eixo, imediatamente surge a circunferência (em vermelho, na Figura 4.72) que também é o possível lugar geométrico de C'.

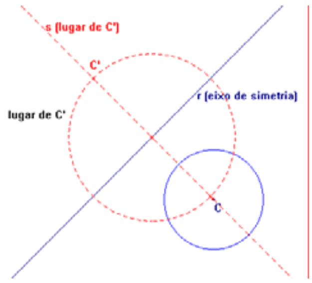


Figura 4.72. Lugar de C’ e C’ da atividade 1.

A reta s e a circunferência são os possíveis lugares do ponto C’; logo, C’ encontra-se na interseção destas. Podemos observar na Figura 4.72 o ponto C’. No passo seguinte a imagem é construída.

3. Selecionar *ponteiro* na caixa n°. 1, clicar na circunferência azul e fazer uma cópia desta, usando a ferramenta *copiar e colar* do *Cabri*. Assim teremos uma nova circunferência que deve ser arrastada até que o centro desta coincida com o ponto C’. Esta é a circunferência de centro C’ simétrica da circunferência de centro C em relação ao eixo de simetria.

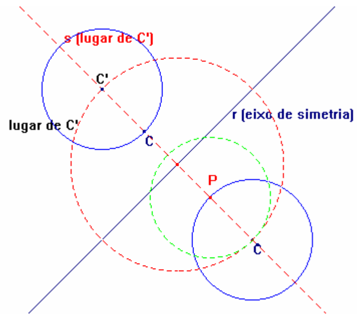


Figura 4.73. Construção da resposta da atividade 1.

É provável que os alunos utilizem somente a ferramenta *circunferência* do *Cabri*. Eles, simplesmente, desenham uma circunferência com a utilização desta, procurando colocá-la próxima do eixo de simetria, numa referência horizontal; vertical, ou diagonal. Provavelmente, não devem utilizar medidas, mas procuram preservar o raio da circunferência, apenas visualizando. Isto é, podem proceder do seguinte modo (incorreto):

Modo c):

1. Selecionar *circunferência* da caixa n°. 4, clicar na tela do *Cabri*, no possível lugar da imagem da circunferência, procurando colocá-la próxima do eixo de simetria e escolhendo uma referência horizontal; ou vertical, ou diagonal.

Com o auxílio do *mouse*, através de pequenos movimentos, tentam manter a medida da circunferência inicial, visualmente.

Alguns invariantes operatórios suscetíveis de serem utilizados, pelos alunos, podem ser: “o simétrico de uma circunferência em relação a um eixo de simetria é uma circunferência igual à dada e do lado esquerdo do eixo de simetria”; “o simétrico de uma circunferência em relação a um eixo de simetria é uma circunferência transladada horizontalmente (ou verticalmente ou diagonalmente)”; “o simétrico de uma circunferência em relação a um eixo de simetria é uma circunferência”.

b) ATIVIDADE 2

A tarefa a ser executada é fazer a reflexão de alguns pontos em relação a um eixo de simetria, utilizando-se de um recurso do *Cabri* de livre escolha. Os pontos podem estar próximos, distantes ou sobre o eixo de simetria. A área de trabalho apresentada ao aluno contém pontos de uma grade e o eixo de simetria é inclinado. A figura que compõe esta atividade está representada na Figura 4.74.

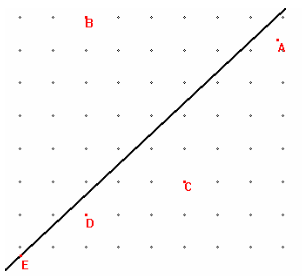


Figura 4.74. Figura da atividade 2 - CII – Computador.

Análise a *priori* da atividade 2

Quanto à localização dos pontos na malha quadriculada: o ponto A está posicionado próximo do eixo de simetria; o ponto B está posicionado afastado do eixo de simetria; o ponto C está posicionado afastado do eixo de simetria e situa-se entre o ponto A e o ponto B; o ponto D está situado próximo do eixo de simetria; o ponto E pertence ao eixo de simetria. O nível de dificuldade varia segundo a posição dos pontos em relação ao eixo de simetria e em relação à grade. Pesquisas indicam que pontos próximos ao eixo de simetria são mais fáceis de acertos, do que pontos distantes do eixo de simetria (Grenier, 1989). É provável que os alunos percebam que o simétrico de um ponto é outro ponto que está à mesma distância da reta dada e pertencente à reta perpendicular ao eixo que contém o primeiro.

Os alunos devem refletir os pontos, mas não devem denotar nomes para estes. É provável que eles utilizem a visualização na preservação da distância entre os pontos; utilizem a distância entre o ponto dado e a reta de simetria, deixando o valor na tela do computador; e utilizem a ferramenta *simetria axial* do *Cabri*.

Para encontrar corretamente o simétrico dos pontos dados em relação ao eixo inclinado de simetria, os alunos podem proceder de vários modos. Vamos descrever alguns desses.

(Modo a) Utilizando a ferramenta *simetria axial* do *Cabri*. Para isto basta executar os seguintes passos:

1. Selecionar *simetria axial* na caixa n° 6, clicar primeiro no ponto A e em seguida sobre o eixo de simetria. Imediatamente, aparece a imagem deste ponto na tela, que deve ser nomeado. Eles devem proceder desta forma para todos os pontos que compõem esta atividade. Este procedimento está representado na Figura 4.75.

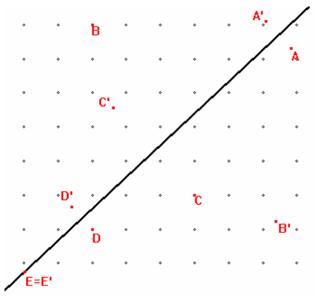


Figura 4.75. Resolução da atividade 2, simetria axial do *Cabri*.

(Modo b) Neste modo, eles podem executar os seguintes passos:

1. Selecionar *reta perpendicular* na caixa nº 5, clicar, por exemplo, no ponto A e depois no eixo de simetria (reta r), imediatamente, aparece a reta s, perpendicular à reta r passando por A. Esta reta s é o lugar geométrico do ponto A’. Este passo deve ser repetido para todos os outros pontos dados.

2. Para manter a distância do ponto A ao eixo de simetria, basta usar as ferramentas *circunferência* ou *compasso*. Assim, selecionando, por exemplo, a ferramenta *circunferência* da caixa n°. 4 e clicando no ponto P, ponto de interseção da reta r com a reta s, e depois no ponto A, aparece

na tela a circunferência de raio $\overline{PA}$. O ponto A', simétrico de A em relação ao eixo de simetria, situa-se na interseção desta circunferência com a reta s. Isto é repetido para todos os outros pontos. Na Figura 4.76, temos a representação deste modo, com o pontilhado retirado somente para facilitar a visualização.

Figura 4.76[1]. Modo b, da atividade 2.

Alguns invariantes operatórios que podem ser utilizados, pelos alunos, são: "o simétrico de um ponto em relação a um eixo de simetria é um ponto"; "o simétrico de um ponto em relação a um eixo de simetria é um ponto transladado horizontalmente (ou verticalmente ou diagonalmente)"; "os pontos dados devem ser primeiro unidos por segmentos de reta, para depois se obter o simétrico (da nova figura)"; "o simétrico de um ponto em relação a um eixo inclinado de simetria é um ponto do outro lado deste".

Quanto à localização dos pontos refletidos, devem surgir nas respostas dos alunos, a imagem sendo posicionada:

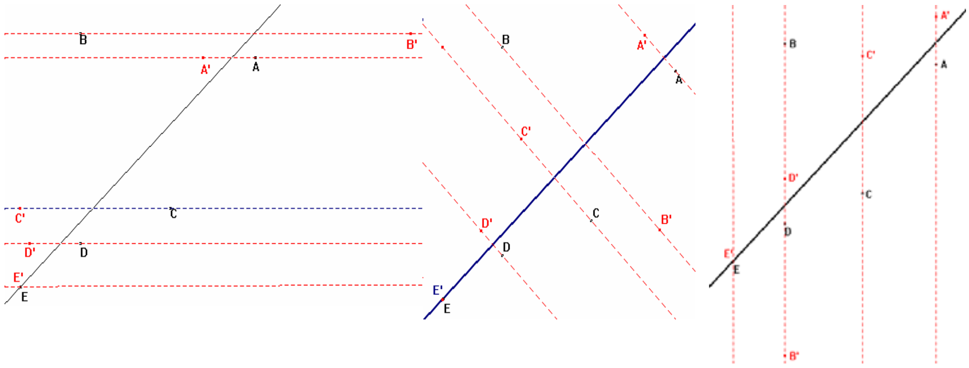
- na reta horizontal que contém o ponto, procurando manter a eqüidistância ao eixo de simetria (referência horizontal), representado na Figura 4.77a;

- em uma reta inclinada (referência diagonal), representado na Figura 4.77b.

- na reta vertical que contém o ponto, procurando manter a eqüidistância ao eixo de simetria (referência vertical), representado na Figura 4.77c.

-

[1] Nas Figuras 7.8 e 7.9, retiramos o pontilhado da tela para facilitar a visualização dos procedimentos.



a) b) c)

Figura 4.77. Procedimento: Referência horizontal, vertical ou diagonal.

c) ATIVIDADE 3

A tarefa a ser executada é fazer a reflexão de alguns segmentos em relação a um eixo de simetria, utilizando um recurso do *Cabri* de livre escolha. Os segmentos podem estar próximos, afastados ou interceptando o eixo de simetria. A área de trabalho apresentada ao aluno contém segmentos em uma grade e o eixo de simetria é inclinado.

Análise *a priori* da atividade 3

A posição dos segmentos, em relação ao eixo de simetria, e em relação à grade, pode dificultar a resolução desta atividade. Pesquisas indicam que segmentos próximos ao eixo de simetria são mais fáceis de acertos, do que segmentos distantes do eixo de simetria (Grenier, 1989).

Quanto à localização dos segmentos refletidos, é provável que apareçam em suas respostas a imagem sendo representada:

- na reta horizontal que contém o segmento, procurando manter a eqüidistância ao eixo de simetria (referência horizontal);
- na reta vertical que contém o segmento, procurando manter a eqüidistância ao eixo de simetria (referência vertical);
- em uma reta inclinada.

Acreditamos que a malha quadriculada não auxilia no traçado dos segmentos simétricos solicitados. Mesmo tendo todas as extremidades dos segmentos dados, coincidindo com os pontos da malha, a dificuldade continua, uma vez que o eixo de simetria é inclinado e, nem sempre, a imagem das extremidades dos segmentos cairá sobre os pontos da malha, como, por exemplo, o ponto G da Figura 4.78 que coincide com um ponto da malha, mas a sua imagem G' não.

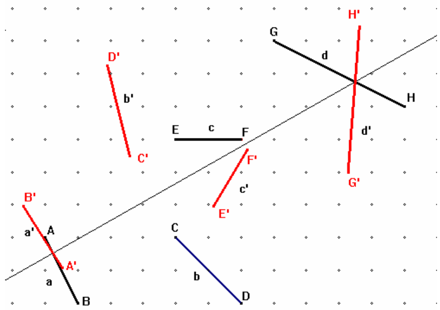


Figura 4.78. Ponto G coincidindo com ponto da tela quadriculada, mas a sua imagem não.

Para encontrar corretamente o simétrico dos segmentos dados em relação a um eixo inclinado de simetria, os alunos podem proceder de vários modos. Vamos descrever alguns deles.

(Modo a) Utilizando-se a ferramenta *simetria axial* do *Cabri*. Para isto, basta executar os seguintes passos:

1. Selecionar *simetria axial* na caixa n° 6, clicar primeiro no segmento a e em seguida sobre o eixo de simetria. Imediatamente, aparece o segmento a' na tela, que deverá ser nomeado. Repetir este passo para todos os outros segmentos, conforme podemos observar na Figura 4.78.

(Modo b) Sem utilizar a ferramenta *simetria axial* do *Cabri*. Para isto basta executar os seguintes passos:

1) Selecionar *rótulo* e nomear as extremidades de todos os segmentos dados. Como podemos observar na Figura 4.79. Consideremos o segmento $d = \overline{GH}$. Selecionar *reta perpendicular* na caixa n° 5, clicar no ponto G e depois no eixo de simetria. Imediatamente aparece a reta s que é perpendicular ao eixo, passando pelo ponto G e é o lugar geométrico de G' (simétrico de G em relação ao eixo). Repetindo o passo para o ponto H, teremos a reta t que é o lugar geométrico do ponto H' (simétrico de H em relação ao eixo). Isto é executado para todos os outros segmentos.

2) Selecionar *circunferência* da caixa n°. 4, clicar no ponto P, interseção do eixo com a reta s, e depois no ponto G. Imediatamente, surge uma circunferência que também é o lugar geométrico de G’, pois esta mantém a distância do eixo ao ponto G. O ponto de interseção da reta s com esta circunferência é o ponto G’, e convém nomeá-lo. Devendo repetir os passos para o ponto H e para todos os outros segmentos.

3) Finalmente, selecionar *segmento* na caixa n°. 3, clicar no ponto G’ e, depois, no ponto H’, surge na tela o segmento d’, que deve também ser nomeado, e este é o simétrico de d em relação ao eixo de simetria. Repete-se este passo para todos os outros segmentos.

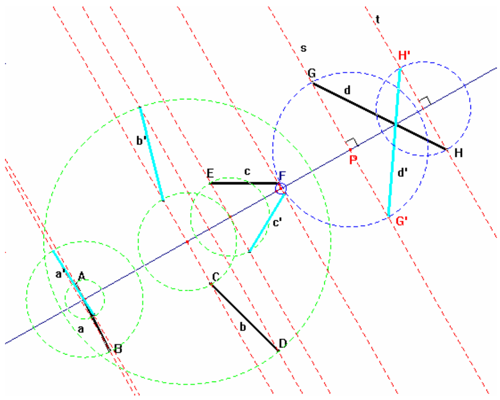


Figura 4.79. Atividade 3, (Modo b).

Acreditamos que os alunos não devem desenvolver o modo b descrito acima, talvez pela complexidade de execução, por não saberem ou por não acharem necessário. Podem proceder da seguinte maneira, uma vez que para eles basta:

(Modo 1): Copiar o segmento, utilizando a ferramenta *copiar* do *Cabri*, e colá-lo, com a ferramenta *colar* do *Cabri.*

(Modo 2): Através da ferramenta *segmento* da caixa n°. 3, desenhar um segmento, clicando em dois pontos na tela, de modo que procurem manter (visualmente): a distância do segmento ao eixo e de suas medidas.

Os modos 1 e 2 descritos levam a respostas incorretas da atividade.

Alguns dos invariantes operatórios suscetíveis de serem utilizados, pelos alunos, nesta atividade, podem ser: “o simétrico de um segmento em relação a um eixo de simetria é um segmento"; "o simétrico de um segmento em relação a um eixo de simetria é um segmento transladado horizontalmente (ou verticalmente ou diagonalmente)"; "os segmento dados devem ser primeiros unidos por segmentos de reta, para depois ser obter o simétrico (da nova figura)"; "o simétrico de um segmento em relação a um eixo inclinado de simetria é um segmento do outro lado deste".

d) ATIVIDADE 4

A tarefa dos alunos consiste em fazer a reflexão de uma figura em relação a um eixo vertical de simetria. A figura dada é simples e encontra-se encostada no eixo de simetria. A área de trabalho é não quadriculada e o aluno pode escolher o recurso a ser utilizado. A figura foi construída, utilizando-se a ferramenta *segmento* do *Cabri* e a atividade está representada na Figura 4.80.

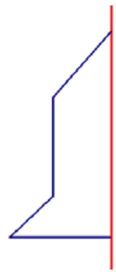


Figura 4.80. Figura da atividade 1 - CII – Computador.

Análise a *priori* da atividade 4

Alguns dos invariantes operatórios possíveis de serem utilizados, pelos alunos, nesta atividade, podem ser: "o simétrico da figura dada em relação a um eixo de simetria é uma figura que preserva a forma e as dimensões da figura original"; "o simétrico da figura dada em relação a um eixo de simetria não é uma figura transladada horizontalmente"; "para construir o simétrico da figura dada com a utilização do *Cabri*, deve-se refletir segmento por segmento da figura".

É provável que os alunos utilizem a ferramenta *simetria axial*, na obtenção do simétrico desta figura, refletindo segmento por segmento; que efetuem medida dos segmentos dados, utilizando-se a ferramenta *distância* e procurem traçar os segmentos, segundo essas medidas; que utilizem retas auxiliares, passando pelos vértices da figura dada; mas que encontrem dificuldades em reproduzir as medidas dos segmentos, por ser difícil mantê-la somente através da manipulação do *mouse*.

Para encontrar corretamente o simétrico desta figura em relação ao eixo vertical de simetria, os alunos podem proceder de várias maneiras. Vamos descrever algumas delas.

(Modo a). Devem proceder da mesma maneira como realizado na atividade anterior (1º. passo do modo a), refletindo segmento por segmento através da ferramenta *simetria axial.*

(Modo b). Sem a utilização da ferramenta *simetria axial* do *Cabri*. Para isto, devem executar os seguintes passos:

1) Proceder de modo análogo ao que foi feito na atividade anterior (1º passo do modo b). Inicialmente, os vértices da figura serão nomeados, depois são traçadas retas auxiliares perpendiculares ao eixo de simetria, passando vértice por vértice desta e, finalmente, procede-se como nos passos 2 e 3 do modo b. Na Figura 4.81, os passos desses procedimentos estão ilustrados.

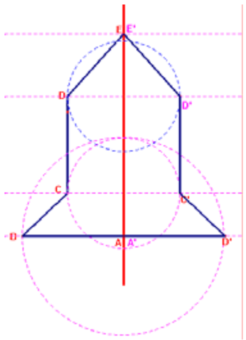


Figura 4.81. Atividade 4, sem a utilização da ferramenta simetria *axial* do *cabri*.

e) ATIVIDADE 5

Fazer a reflexão de duas figuras, isto é, de quadriláteros irregulares (o primeiro é côncavo e o segundo, convexo em relação a um eixo inclinado de simetria). A primeira figura se encontra do lado direito do eixo de simetria e o eixo de simetria corta a segunda. A área de trabalho é não quadriculada e o aluno pode escolher o recurso a ser utilizado. Eles devem justificar seus procedimentos. A figura que compõe esta atividade foi construída por segmentos de reta e esta está representada na Figura 4.82.

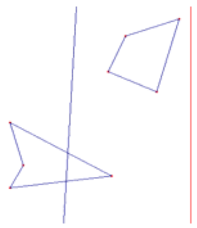


Figura 4.82. Figura da atividade 5.

Análise a *priori* da atividade 5

Alguns dos invariantes operatórios a serem utilizados, pelos alunos, nesta atividade, podem ser: “o simétrico de cada figura dada em relação a um eixo de simetria é uma figura que preserva a forma e as dimensões da figura original”; “o simétrico de uma figura (afastada do eixo), em relação a um eixo de simetria é uma figura também afasta deste”; “o eixo intercepta a figura dada, logo este também intercepta a figura-imagem”.

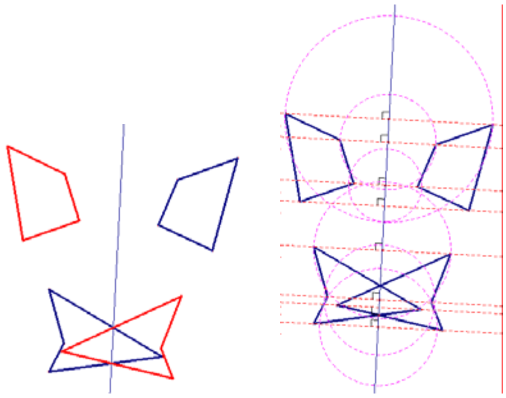
É provável que alguns alunos utilizem ferramentas do *Cabri*, como por exemplo: a *simetria axial*, encontrando assim a solução exata e não soluções aproximadas; *distância*, calculando medidas dos segmentos que constituem a figura e fazendo a reflexão segundo essas medidas, ou calculando medidas dos segmentos que constituem a figura e fazendo a translação segundo essas medidas; s*egmento*s, construindo segmentos com esta ferramenta e transladando-os, sem preservar as medidas dos segmentos que fazem parte desta atividade.

O grau de dificuldade na obtenção do reflexo do primeiro quadrilátero, mesmo estando afastado do eixo, parece bem menor do que do segundo. Isto é justificado pelo fato da segunda figura ser convexa, assimétrica e por cortar o eixo de simetria, entrelaçando-se com sua imagem. Acreditamos que os alunos, apenas visualmente, determinem o possível lugar dos segmentos da figura, preservando a medida destes e os posicionem no lado oposto da figura dada.

Alguns alunos podem construir o simétrico das figuras dadas numa referência horizontal. Não devem surgir as referências verticais ou diagonal nas repostas, possivelmente por não haver espaço para assim procederem.

Especificamente, em relação ao segundo quadrilátero, alguns alunos devem apenas refletir parte da figura, como, por exemplo, a que se encontra do lado esquerdo do eixo de simetria.

Como as figuras são formadas por segmentos de retas, os alunos podem resolver esta atividade, procedendo como na atividade anterior: modo a, utilizando simetria axial (Figura 4.83a); ou modo b, com a utilização das ferramentas *reta perpendicular* e *circunferência* (Figura 4.83b).



a) b)

Figura 4.83. Resolução correta da atividade 5.

4.19 Informações Gerais sobre a Experimentação

A execução das atividades desta categoria foi conduzida, pela pesquisadora, da mesma maneira como foi feita nas categorias anteriores: leitura do enunciado e, em seguida, execução das atividades pelos alunos. Somente na primeira atividade alguns alunos questionaram como fazer uma circunferência; logo, não descreveremos informações especificas para cada atividade. Descrevemos apenas o problema da atividade 1.

Inicialmente, alguns alunos questionaram sobre como fazer uma circunferência, utilizando o aplicativo. A resposta dada foi que eles deveriam procurar uma maneira para resolver este problema com o uso do *Cabri*. Alguns alunos já haviam construído circunferências, quando estavam manipulando as ferramentas do *Cabri*, no início da aplicação, e logo começaram a usá-la. Alguns pontos marcados na atividade devem ter sido feitos no aprendizado da ferramenta *circunferência* com o auxílio do *mouse*.

4.20 Análise *a Posteriori* das Atividades

a) Análise a *posteriori* da atividade 1

Para esta atividade, as respostas dadas pelos alunos podem ser agrupadas da seguinte forma:

- dois alunos fizeram a circunferência-imagem numa referência diagonal;
- dois alunos fizeram a circunferência-imagem numa referência horizontal;
- o Aluno 6 fez a circunferência-imagem numa referência vertical;
- o Aluno 12 fez a circunferência-imagem posicionada próxima a circunferência dada;
- dois alunos fizeram a circunferência-imagem correta por se utilizarem da ferramenta *simetria axial*.

Estas respostas encontram-se no Quadro de Respostas da Atividade 1, no Anexo II, p. 280.Descrevemos os procedimentos dos alunos para esta atividade a seguir.

Os Alunos 1 e 18 fizeram o simétrico da circunferência em relação ao eixo de simetria, utilizando a ferramenta *circunferência* do *Cabri*, e esta foi desenhada numa referência diagonal, como representado na Figura 4.84. Possivelmente, eles utilizaram os invariantes 1. 4 e 8 (p. 59-64).

Figura 4.84. Referência diagonal da circunferência.

O Aluno 12 fez uma circunferência transladada na diagonal e depois optou por uma circunferência próxima à dada. Provavelmente, pode estar utilizando os mesmos invariantes citados anteriores. O simétrico da circunferência dada, em relação ao eixo de simetria, foi traçado, utilizando-se a ferramenta *circunferência* do *Cabri*. A primeira circunferência traçada foi a tracejada e a segunda ficou bem próxima da resposta correta. A representação do aluno está ilustrada na Figura 4.85.

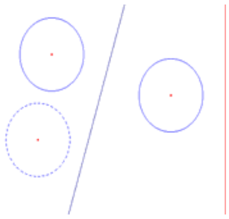


Figura 4.85. Circunferência próxima a inicial.

Parece que o fato do eixo de simetria ser inclinado, induziu esses alunos a fazer o reflexo da circunferência numa translação diagonal, provavelmente por estarem começando a perceber que, como o eixo é inclinado, os procedimentos referência horizontal ou vertical não podem ser utilizados.

O Aluno 12 fez algumas tentativas de circunferências, utilizando a ferramenta *circunferência* do *Cabri* e optou por apresentar, como solução, uma circunferência transladada verticalmente e posicionada abaixo da circunferência dada, como mostrado na Figura 4.86. Esse aluno pode ter desconsiderado o eixo e pensado num eixo horizontal, entre as duas circunferências. Os pontos desconsiderados à esquerda do eixo de simetria seriam soluções bem mais próximas da exata, do que a que nos apresentou.

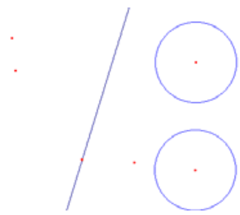


Figura 4.86. Referência vertical da atividade 1- Aluno2.

O Aluno 21 fez uma circunferência transladada verticalmente e posicionada abaixo da circunferência dada. Não satisfeito com sua resposta, apagou-a e construiu uma resposta, utilizando a ferramenta *simetria axial* do *Cabri*. Este fato foi percebido apenas nos registros feitos no papel, pois o que restou da atividade na tela do C*abri* foi apenas um ponto, como podemos observar na Figura 4.87.

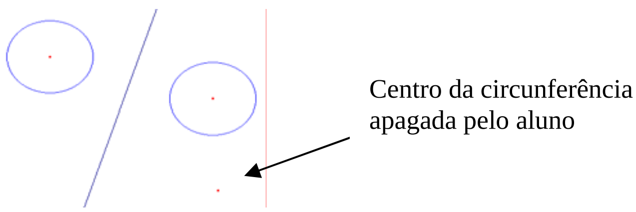


Figura 4.87. Utilização da ferramenta simetria axial.

A ferramenta *simetria axial* do *Cabri* não foi apresentada aos alunos na fase de manipulação do software, mas esta ferramenta foi descoberta por esse aluno. Com a utilização deste recurso, a atividade foi desenvolvida com êxito. Assim, o modo a, previsto na análise *a priori*, foi executado.

Os Alunos 4 e 26 fizeram uma circunferência numa referência horizontal e procuraram preservar a distância da figura ao eixo de simetria e também a medida do raio.

Oito alunos marcaram vários centros, na tentativa de construir uma circunferência, cujo raio fosse próximo ao da circunferência dada. Dois alunos utilizaram uma reta, passando pelo centro da circunferência, procurando demarcar o lugar do centro da circunferência-resposta. Uma preocupação em manter a distância foi percebida, quando os centros das tentativas ainda permaneceram marcados. A reta traçada não era perpendicular à reta dada. Uma destas respostas encontra-se na Figura 4.88.

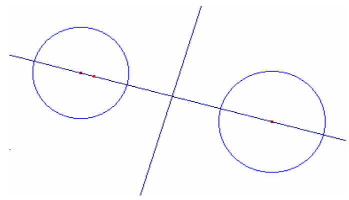


Figura 4.88. Reta auxiliar passando pelo centro da circunferência dada.

Nesta atividade, as circunferências tracejadas são as que foram apagadas pelos alunos. Os alunos não ativaram o quadriculado da tela. Os procedimentos referência horizontal, vertical ou diagonal foram representados e a atividade só foi desenvolvida corretamente por dois alunos, por utilizarem a ferramenta *simetria axial*.

Nas respostas dos alunos, pudemos identificar os seguintes teoremas-em-ação, sobre o simétrico de uma circunferência em relação a um eixo inclinado de simetria:

- O simétrico de uma circunferência, em relação a um eixo inclinado de simetria, é uma circunferência transladada diagonalmente;
- O simétrico de uma circunferência, em relação a um eixo inclinado de simetria, é uma circunferência próxima à dada e do outro lado do eixo;
- O simétrico de uma circunferência, em relação a um eixo inclinado de simetria, é uma circunferência transladada verticalmente, e posicionada abaixo da circunferência dada;
- O simétrico de uma circunferência, em relação a um eixo inclinado de simetria, é uma circunferência transladada horizontalmente, preservando a distância da figura ao eixo de simetria e também a medida do raio.

b) Análise a *posteriori* da atividade 2

Surgiram vários tipos de respostas. Estas se encontram no Quadro de Respostas da Atividade 2 no Anexo II, p.281. Agrupamos as respostas dadas nos itens a seguir, as quais estão ilustradas na Figura 4.89.

a) O Aluno 9 preocupou-se em posicionar cada ponto-imagem na linha horizontal da malha onde o ponto dado se encontrava, numa translação horizontal, preservando a distância ao eixo, através da contagem de pontos da malha quadriculada, como pode ser observado na Figura 4.89d. Talvez estes procedimentos tenham ocorrido pelo fato da área de trabalho ser quadriculada.

b) Oito alunos representaram a imagem do ponto no prolongamento de uma reta inclinada (imaginária), passando pelo ponto dado. Algumas vezes, preocuparam-se com a distância (Figuras 4.89e, e 4.89d); outras vezes, não, como nas Figuras 4.89a e 4.89b. Este foi o procedimento mais comum no grupo.

c) O Aluno 14 marcou a imagem do ponto como na situação anterior, mas com a preocupação em traçar um segmento de reta auxiliar. Este segmento não foi traçado perpendicular à reta de simetria, mas é provável que o aluno tenha se lembrado da importância do perpendicularismo, pois quando questionado disse: “É aquela reta que você falou naquele dia”.

A ferramenta *simetria axial* não foi utilizada e por isso nenhum aluno acertou a atividade e nenhuma resposta baseou-se na referência vertical. A demarcação da distância visual entre os pontos foi a mais utilizada. Pontos foram construídos e descartados, mas não foram apagados.

Os simétricos dos pontos dados foram representados da seguinte forma pelos alunos:

- Ponto A: nove alunos utilizaram a referência diagonal e um aluno utilizou a referência horizontal.
- Ponto B: nove alunos utilizaram a referência diagonal e um aluno utilizou a referência horizontal.
- Pontos C: dois alunos nada fizeram; sete alunos utilizaram a referência diagonal e um aluno utilizou a referência horizontal.
- Ponto D: dois alunos nada fizeram; sete alunos utilizaram a referência diagonal e um aluno utilizou a referência horizontal.
- Ponto E: seis alunos nada fizeram; três alunos utilizaram a referência diagonal e um aluno utilizou a referência horizontal.

Provavelmente, a área de trabalho quadriculada induziu os alunos na marcação dos pontos, pois, analisando as atividades, observamos que eles procuraram transladá-los horizontalmente ou diagonalmente sobre uma linha (imaginária) do pontilhado da tela. Nesta atividade, diferentemente do que ocorreu na correspondente atividade com lápis e papel previamente executada, não houve uma tendência de união de todos os pontos dados, pois ocorreram momentos de discussões coletivas e correções das atividades da categoria anterior. Notamos uma diferença marcante nestas respostas, os alunos procuraram preservar a distância do ponto ao eixo de simetria, e numa única resposta observamos uma preocupação da imagem ser marcada na reta perpendicular, apesar da reta utilizada não ter sido efetivamente perpendicular ao eixo, passando pelo ponto dado. A idéia de que a reflexão de um ponto em relação a uma reta é um ponto firmou-se neste grupo de alunos.

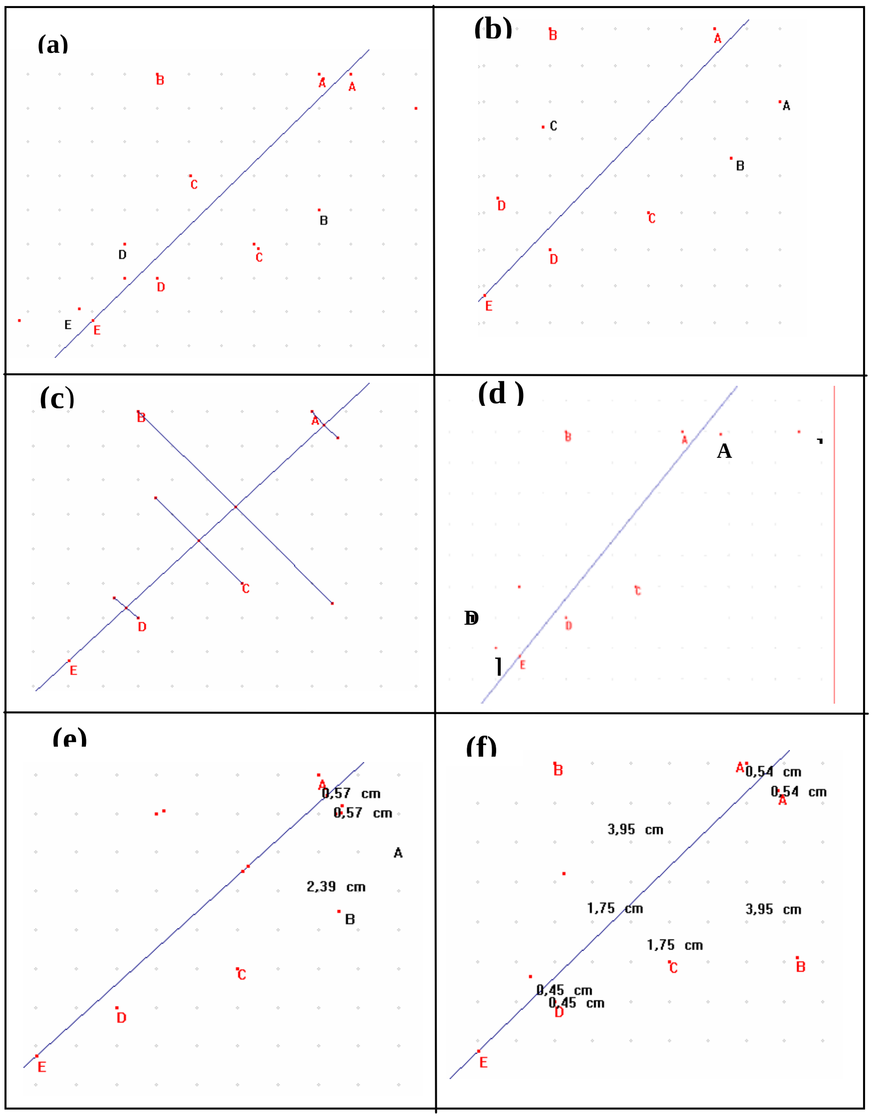


Figura 4.89. Procedimento dos alunos na atividade 2.

Nas respostas dos alunos, pudemos identificar os seguintes teoremas-em-ação, sobre o simétrico de pontos em relação a um eixo inclinado de simetria:

- O simétrico de um ponto, em relação a um eixo de simetria, é um ponto;
- O simétrico de um ponto, em relação a um eixo inclinado de simetria, é outro ponto deslocado horizontal (ou vertical);
- O simétrico de um ponto, em relação a um eixo inclinado de simetria, é outro ponto que preserva a distância do ponto inicial ao eixo de simetria;
- A imagem do ponto deve ser representada no prolongamento de uma reta inclinada (imaginária), passando pelo ponto dado.

c) Análise *a posteriori* da atividade 3

Notamos uma variedade de respostas dadas, e estas se encontram no Quadro de Respostas da Atividade 3 no Anexo II, p. 282. A seguir, apresentamos estas respostas.

- Três alunos procuraram preservar as medidas de alguns segmentos, como exemplificado na Figura 4.90e;
- Alguns alunos fizeram a referência horizontal somente de alguns segmentos, como observado no segmento c das Figuras 4.90c e 4.90e;
- Alguns construíram a imagem do segmento no prolongamento de uma reta inclinada (imaginária), passando pelo segmento dado, como podemos observar no segmento b das Figuras 4.90a, 4.90c e 4.90e;
- Algumas vezes, preocuparam-se com a distância do segmento ao eixo, como podemos observar nas Figuras 4.90a e 4.90b para alguns pontos;
- Um aluno utilizou a ferramenta *simetria axial* do *Cabri*, como podemos observar na Figura 4.90f;
- Um aluno construiu segmentos paralelos aos segmentos dados, como podemos observar os segmentos a, c e d, na Figura 4.90d;

Como visto, surgiram vários tipos de soluções e algumas dessas respostas foram agrupadas, como mostrado na Figura 4.90. A resposta correta só ocorreu, quando foi utilizada a ferramenta *simetria axial* do *Cabri* (modo a), representado na Figura 4.90f. Assim, nove alunos não obtiveram êxito.

O conceito de que o simétrico de um segmento em relação a um eixo é um segmento consolidou-se neste grupo de alunos. Não houve uma tendência de unir todos os pontos, tendo a mesma justificativa da atividade 2.

Os procedimentos referência horizontal, vertical e diagonal também surgiram nas respostas, podendo ocorrer os três simultaneamente na mesma atividade. Na Figura 4.90, temos representados alguns desses procedimentos.

Os simétricos dos segmentos dados foram representados da seguinte forma pelos alunos:

- Segmento a: 4 alunos o fizeram, interceptando o eixo de simetria e seis alunos o fizeram afastado do eixo.
- Segmento b: oito alunos o fizeram no prolongamento de uma reta inclinada (imaginária), passando pelo segmento dado e dois alunos o fizeram refletido.
- Segmento c: três alunos o fizeram no prolongamento de uma reta inclinada (imaginária), passando pelo segmento dado; dois alunos o fizeram numa referência vertical; um aluno o fez numa referência diagonal e três alunos o fizeram refletido.
- Segmento d: quatro alunos o fizeram, interceptando o eixo de simetria; três alunos o fizeram numa referência vertical; um aluno fez a reflexão apenas de parte destes segmentos e dois alunos nada fizeram.

Nas respostas dos alunos, pudemos identificar os seguintes teoremas-em-ação, sobre o simétrico de segmentos em relação a um eixo inclinado de simetria:

- O simétrico de um segmento em relação a um eixo inclinado de simetria é um segmento transladado horizontalmente;
- Se o eixo de simetria é inclinado, então o segmento-imagem também é inclinado;
- O simétrico de um segmento, em relação a um eixo inclinado de simetria, deve ser construído no prolongamento de uma reta inclinada (imaginária), passando pelo segmento dado;
- Se o eixo intercepta o segmento dado, então o segmento-imagem deve ser paralelo ao segmento inicial;
- Se o eixo intercepta o segmento dado, então este também interceptará o segmento-imagem;
- O simétrico de um segmento, em relação a um eixo inclinado de simetria, é um segmento paralelo ao dado.

- A distância, do segmento ao eixo, tem que ser mantida depois da reflexão.

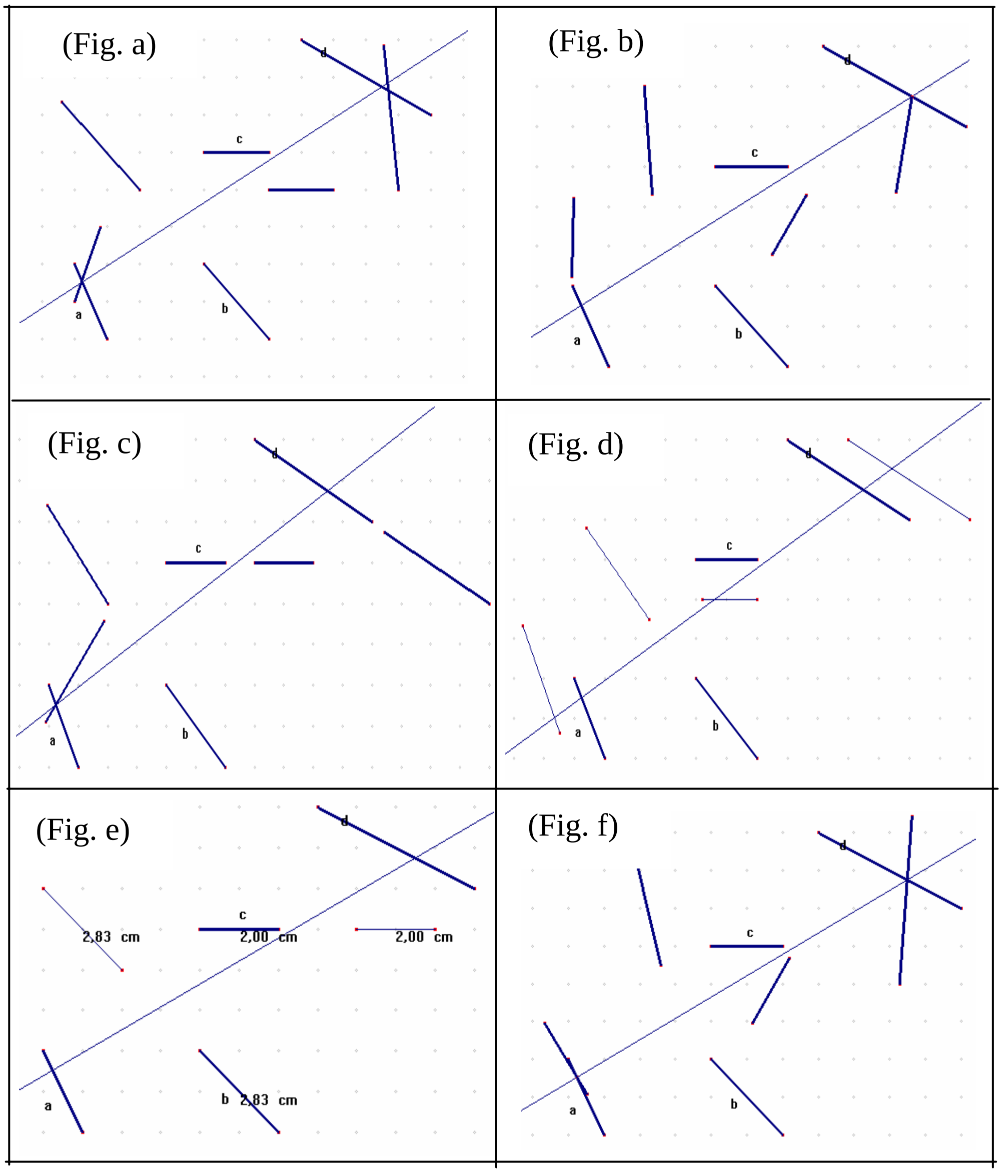
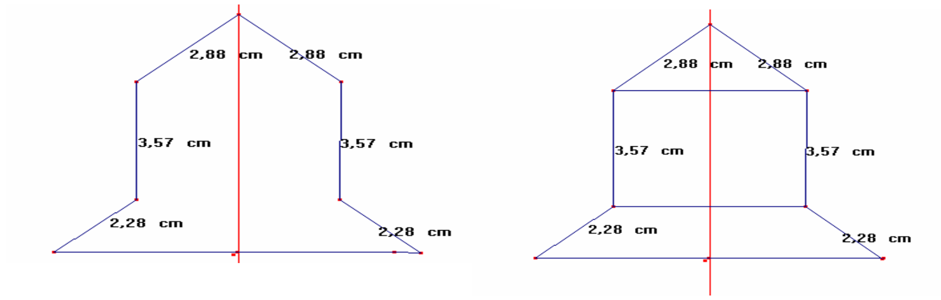


Figura 4.90. Procedimentos dos alunos. Atividade 3 - C II – Computador.

d) Análise a *posteriori* da atividade 4

Todos os alunos nos apresentaram uma resposta muito próxima da correta, como podemos observar nas Figuras 4.91, 4.92. No Anexo II, p. 283, temos um Quadro com as Respostas dadas pelos alunos.

Os procedimentos citados na análise *a priori* ocorreram. Os mais comuns, realizados por um grande número de alunos (7), observados nesta atividade, foram: começar, traçando os segmentos da figura de cima para baixo, preservando as medidas dos segmentos, como podemos observar na Figura 4.91.



a) b)

Figura 4.91 Exemplos, onde ocorreu a preservação das medidas dos segmentos.

Em alguns casos, como na Figura 4.91b e na Figura 4.92, observamos a preocupação em traçar segmentos de reta auxiliares na determinação da imagem dos extremos dos segmentos. Para esses alunos, para construir o simétrico de uma figura, em relação a um eixo inclinado de simetria, é necessário construir segmentos de reta auxiliares na determinação da imagem dos extremos dos segmentos. Na Figura 4.92b, apesar do resultado não ter sido muito bom, este recurso apareceu.

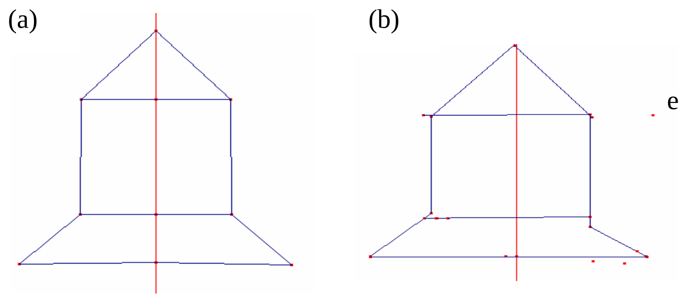


Figura 4.92. Exemplos da utilização de segmentos reta.

A ferramenta *simetria axial* não foi utilizada, portanto o modo a, como descrito na análise *a priori*, não foi desenvolvido pelos alunos. Eles utilizaram apenas a ferramenta *ponto* e *segmento* do *Cabri*.

Acreditamos que a área de trabalho não foi quadriculada pelos alunos por não acharem necessário e por nem sempre tê-los ajudado. Se tivesse sido quadriculada, talvez não surgissem as retas auxiliares, pois alguns vértices da figura ficariam sobre a grade quadriculada, facilitando a contagem de pontos da grade quadriculada e a marcação dos pontos necessários para o posterior traçado dos segmentos por estes pontos, desde que o eixo esteja “sobre” os pontos da malha.

Nas respostas dos alunos, pudemos identificar os seguintes teoremas-em-ação, sobre o simétrico de uma figura (encostada no eixo) em relação a um eixo vertical de simetria:

- As medidas dos segmentos dados têm que ser mantidas depois da reflexão;
- O simétrico de uma figura construída por segmentos de reta do *Cabri*, em relação a um eixo inclinado de simetria, é obtido utilizando a ferramenta *ponto* do *Cabri*. Primeiro, marcam-se os extremos e somente depois traçam os segmentos.

e) Análise a *posteriori* da atividade 5

As respostas dadas pelos alunos, para esta atividade, encontram-se em dois quadros. O primeiro quadro, no Anexo II, p. 284, contém as respostas da primeira figura que compõe esta atividade e no mesmo anexo, p. 285, temos um quadro com as repostas dadas pelos alunos, para a segunda figura.

Os Alunos 6 e 15 resolveram esta atividade utilizando a ferramenta *simetria axial* do *Cabri;* por isso não mediram os segmentos. Temos este resultado ilustrado na Figura 4.83a (p. 205).

Todos os outros alunos, com exceção do Aluno 18, procuraram medir os segmentos da primeira figura e preservar estas medidas na construção da figura final, que pode ser refletida ou transladada. Nestes procedimentos:

- Três alunos mediram todos os segmentos da figura dada e procuraram preservar estas medidas na figura final, como observado na Figura 4.93.

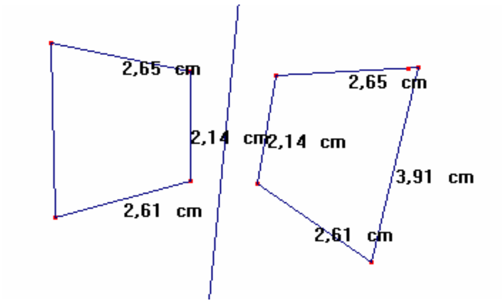


Figura 4.93. Medida de todos os segmentos e preservação destas.

- O aluno 12 mediu alguns segmentos e procurou preservar algumas dessas medidas na figura final, como ilustrado na Figura 4.94.

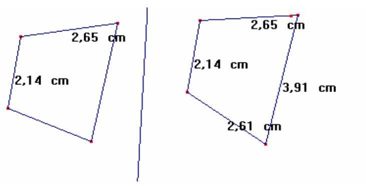


Figura 4.94. Medida de alguns segmentos e translação da figura.

- Três alunos mediram alguns segmentos e procuraram preservar as medidas na figura final, mas, pela dificuldade em manipular o *mouse* e reproduzir esta medida, deixaram um outro valor.

O Aluno 26 traçou eixos de simetria nas duas figuras, como mostrado na Figura 4.95.

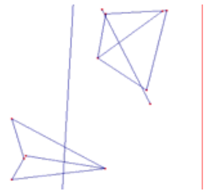
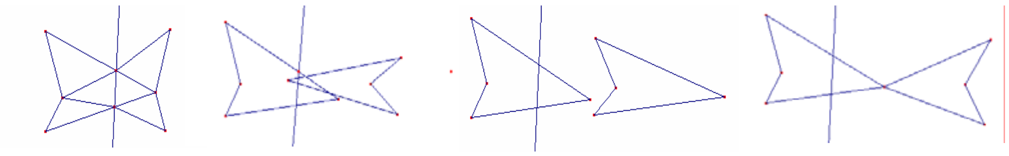


Figura 4.95. Traçado de eixo de simetria na atividade 5.

Percebeu-se que o aluno não entendeu a atividade, traçando eixos que, em seu entender, seriam eixos de simetria de cada figura isoladamente, desconsiderando o eixo de simetria dado e a tarefa a realizar.

Ainda, para a primeira figura, o Aluno 12 fez a resposta numa referência horizontal e quatro alunos, conforme quadro no Anexo II, p. 284, fizeram a reflexão da figura sem se preocupar com a eqüidistância da figura ao eixo de simetria.

Não houve a preocupação com medidas para a segunda figura. Pudemos observar nas Figuras 4.96a, 4.96b e 4.96d que estes alunos refletiram a figura com uma medida qualquer, embora na Figura 4.96d, tenhamos uma reflexão transladada da figura, sem preservar as medidas (Aluno 21). Na Figura 4.96c, a imagem é uma translação horizontal da figura inicial (Aluno12). Nas Figuras 4.96a e 4.96b, a imagem intercepta o eixo e nas Figuras 4.96c e 4.96d não.



a) b) c) d)

Figura 4.96. Procedimento dos alunos: medida aproximada.

No Quadro de Respostas da Atividade 5, observamos que:

- dois alunos, fizeram uma referência horizontal da figura;
- cinco alunos fizeram a reflexão da figura sem se preocupar com a eqüidistância e medidas da figura;
- o aluno 26 fez eixos na figura.

Nas respostas dos alunos, pudemos identificar os seguintes teoremas-em-ação, sobre o simétrico de dois quadriláteros, um côncavo e outro convexo, em relação a um eixo vertical de simetria:

- As medidas dos segmentos, que formam o quadrilátero côncavo (ou o convexo), depois da reflexão, devem ser preservadas;
- As medidas dos segmentos, que compõem o quadrilátero côncavo (ou o convexo), depois da reflexão, devem ser visualmente preservadas;
- O simétrico de um quadrilátero côncavo (ou convexo), em relação a um eixo inclinado de simetria, é um quadrilátero côncavo (ou convexo), transladado horizontalmente;
- Se um quadrilátero (côncavo) está afastado do eixo de simetria, então a sua imagem também deverá estar afastada do eixo de simetria;
- Se o eixo intercepta o segmento dado, então este também intercepta o segmento-imagem;
- um quadrilátero (convexo) intercepta o eixo de simetria, então a sua imagem também deverá interceptá-lo.

4.21 Síntese do Quarto Momento Coletivo

Os alunos já esperavam este momento. Para a primeira atividade, o Aluno 2 falou que é muito difícil fazer uma circunferência 'igual' à primeira e pudemos perceber que a sua dificuldade estava na tentativa de preservar o raio da circunferência-imagem, atrelada aos movimentos do mouse. Sua resposta é uma circunferência transladada na vertical e de comprimento do raio bem próximo da inicial, como representado na Figura 4.86 (p. 207). Quando questionado sobre sua resposta, falou: "Elas vão se coincidir se dobrarmos no 'meio' (eixo horizontal)". O Aluno 12 entrou na conversa, questionou "mas ela tem que estar do outro lado e o eixo não é este". Outros alunos concordaram que a solução do aluno estava incorreta. O Aluno 14 disse: "Ela tem que ficar do outro lado e um pouco inclinado. Estão vendo os eixos?". E continuou: "Eu fiz uma reta passando pelo centro e fiz uma aí, mas do outro lado do eixo", "A reta deu a inclinação". Alguns acharam que essa resposta era correta, e disseram "eu não lembrei da reta".

Resolvemos esta atividade, com a ferramenta simetria axial (modo a, da análise *a priori*), e nesse momento o Aluno 21 falou: "em algumas atividades, eu fiz com ela". Ele foi questionado de como havia encontrado a ferramenta, e respondeu:

“Eu estava clicando nas caixas e pedindo *ajuda* e aí eu fiz tentativas, e percebi que tinha que “ir na caixa dela e clicar na circunferência e depois no eixo - demorei”. Ao ser questionado do motivo de não ter utilizado a ferramenta em outras atividades, ele argumentou: “Porque os colegas não a usavam”. E continuou: “Eu usei a caixa da simetria, mas não sabia se estava certo. (...) Achei que sim. Era legal”.

Esse aluno, segundo Freitas (2002, p. 78-79), “realiza uma ação de natureza mais experimental sem, no entanto, se preocupar com a explicitação de um resultado teórico que esclareça ou justifique a validade de sua resposta”. Ele aprende e usa uma ferramenta do *software*, mas em nenhum momento procura analisar o resultado, para verificar se algumas propriedades de simetria que já são de seu domínio, como por exemplo, distância, posições em relação ao eixo (afastada do eixo, ou cortando-o). Dá-se por satisfeito com sua solução. Estas atividades foram resolvidas pela pesquisadora, como descrito no modo a e b da análise *a priori*.

Enquanto discutíamos, os alunos começaram a fazer as outras atividades da seqüência com a ferramenta *simetria axial*, como se quisessem verificar suas respostas ou ver a resposta correta. Não foi possível contê-los, abriam a atividade e a utilizavam. Houve uma interrupção nas nossas discussões, mas procuramos mostrar a importância de continuarmos discutindo seus procedimentos e aceitaram que prosseguíssemos o trabalho. Temos, aqui, a confirmação do fato de que se esta ferramenta lhes fosse apresentada na fase de familiarização do *software*, eles só iriam resolver as situações-problema, utilizando-a, uma vez que queríamos ver como reagiriam frente ao computador, como resolveriam a situação e que ferramentas escolheriam para resolvê-la.

A atividade 1 também foi resolvida como no modo b, descrito na análise *a priori*. Mas os alunos comentaram a necessidade de muitos passos e que com a ferramenta *simetria axial*, não, mas procuramos mostrar que se ela não estivesse disponível, eles teriam que saber fazê-la de outra maneira.

As resoluções das atividades 2 e 3 foram um pouco mais complicadas de serem discutidas. Apesar das correções da atividade 6 (categoria II - lápis e papel), ainda persistiram nos alunos os procedimentos de fazer o simétrico de uma figura em relação a uma reta, utilizando a referência horizontal, ou a vertical ou a diagonal. Assim, para atividade 2, alguns disseram: “Eu segui os pontos da tela e fiz do outro lado o ponto. E procurei manter a distância” (Aluno 9); “eu tracei reta e marquei o ponto” (Aluno 21). A resposta deste aluno está representada na Figura 4.89c (p.210).

Como vemos, a idéia de que a imagem está sempre no semiplano oposto ao da figura dada é forte. Ao Aluno 21, que usou a ferramenta *simetria axial* na atividade anterior, foi perguntado porque não utilizou essa ferramenta. Segundo ele: não o fez porque fazer pontos era fácil.

Para a atividade 4, os alunos disseram que esta atividade foi fácil de resolver: “era só selecionar segmento e tentando fazê-lo igual do outro lado” (Aluno 9). Muitos concordaram com este aluno e disseram que também fizeram deste modo. O aluno afirmou: “eu sabia que o resultado era um foguete, só faltava fazer o outro lado. Tracei umas retas para me ajudar e fui medindo os lados”. O aluno parece confiar na sua resposta e tem uma idéia do todo, isto é, do resultado final da figura após a reflexão desta em relação ao eixo vertical de simetria. Ele age sobre o problema e aplica conhecimentos anteriores, no caso, utilização de retas auxiliares, mas não perpendiculares, passando pelos vértices da figura dada; procura preservar as medidas da figura inicial e produz uma resposta muito próxima da figura resultante, após a reflexão da parte dada em relação ao eixo de simetria. A resolução desta atividade foi executada pela pesquisadora, através da execução dos modos a e b, como descrito na análise *a priori.*

Quando demos início à última atividade, o Aluno 12 falou “deve ser legal fazê-la por simetria. Eu sabia que a segunda figura tinha que cortar o eixo também e a outra não”. Para finalizar, os modos a e b foram executados.

Os modos de resolução das situações-problema preferidos pelos alunos, para esta categoria, utilizando o computador, foi a ferramenta *simetria axial* do *Cabri*. Mas a pesquisadora lhes apresentou pelo menos duas maneiras distintas de resolver o problema, com a utilização de ferramentas do *Cabri*, como por, exemplo mediatriz. Segundo Freitas (2002), “ao visar a institucionalização de determinados saberes que considera importantes, o professor seleciona questões essenciais para a apropriação de um saber formal a ser incorporado como patrimônio cultural”.

4.22 Síntese sobre a Categoria II com o Computador

De modo geral, usando o computador, muitos dos procedimentos e prováveis invariantes que ocorreram na categoria I, não surgiram nesta categoria, provavelmente como conseqüência dos momentos de discussões coletivas e das correções das atividades anteriores.

Alguns alunos ainda produziram alguns “erros” ou respostas incompletas, como pode ser observado nas análises *a posteriori* específicas de cada atividade, persistindo ainda a utilização de invariantes falsos e seus procedimentos associados como, por exemplo, procedimentos referência horizontal, vertical e diagonal. Isto, de certa forma, é esperado, pois segundo Vergnaud (1982):

> (...) a construção e apropriação de todas as propriedades de um conceito ou todos os aspectos de uma situação é um processo de muito fôlego que se estende ao longo dos anos, às vezes uma dezena de anos, com analogias e mal-entendidos entre situações, entre concepções, entre procedimentos, entre significantes (Vergnaud, 1982, p. 2).

Os modos de execução das atividades com ferramentas do *Cabri*, como previsto na análise *a priori*, dificilmente apareceram, talvez por falta de domínio de conceitos da geometria euclidiana, de simetria e do próprio recurso.

Na análise das atividades, pôde-se observar a preservação das medidas dos segmentos e a eqüidistância destes ao eixo de simetria. Alguns alunos traçaram retas auxiliares, não necessariamente perpendiculares. Acreditamos que o conceito de ortogonalidade já começou a fazer parte dos conhecimentos utilizados por esse grupo de alunos na resolução de problemas de simetria axial, uma vez que na categoria anterior o conceito já fora institucionalizado.

Não observamos a tendência em unir pontos ou segmentos, procurando formar uma figura fechada. O caso em que a figura intercepta o eixo ainda caracterizou uma dificuldade para a grande maioria dos alunos e o êxito só ocorreu com a utilização da ferramenta *simetria axial* do *Cabri.*

Ao procuramos identificar, mediante a observação e o diálogo, como o aluno estava pensando, obtivemos pistas do que ele não estava compreendendo. Na análise das atividades desta categoria, pudemos identificar ainda os mesmos invariantes da categoria II utilizando lápis e papel. Para diminuir a utilização sucessiva de procedimentos e de possíveis invariantes operatórios “errôneos”, pelos alunos, o professor pode planejar a intervenção adequada para auxiliar o aluno a refazer o caminho e tentar transpor barreiras. A este grupo de alunos, parece necessário propor novas seqüências didáticas, envolvendo o conceito de simetria axial, para que tenham oportunidade de modificar e ampliar os conhecimentos novos e reinvesti-los em novas situações, ou cotidianas, ou para que os permitam aproximar-se de um conhecimento matemático “oficial”, ou seja, conceitos científicos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A importância do ensino da Geometria é incontestável. As transformações geométricas, como parte integrante da Geometria, têm aplicações em diversos campos do conhecimento. A simetria em particular está presente tanto em nosso cotidiano como no campo científico. O conceito de simetria, quando utilizado de forma adequada, é uma ferramenta útil para explorar e aplicar diversos conceitos de geometria. Diante disso, construímos o trabalho, tendo como objetivo a identificação de procedimentos e invariantes operatórios de alunos do quarto ciclo do Ensino Fundamental diante de situações-problema, envolvendo simetria axial.

Para situar quando e como a simetria passou a ser objeto de estudo no Brasil e verificar como ela é proposta e veiculada nos livros didáticos, realizamos alguns estudos preliminares. Nesses estudos, descrevemos brevemente a introdução do estudo de transformações geométricas no ensino no Brasil, percorremos os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) de Matemática do Ensino Fundamental, analisamos alguns livros didáticos de Matemática, entre eles os adotados na escola em que desenvolvemos nossa experimentação. Esses livros seguem as sugestões contidas nos PCN’s (1998), mas alguns apresentam problemas na forma em que abordam o conceito de simetria: as posições das figuras em relação ao eixo; as posições do eixo; figuras planas e espaciais estão misturadas; conceito de simetria desconectado de outros conteúdos.

Analisamos também algumas pesquisas sobre o tema. As pesquisas indicavam alguns procedimentos utilizados pelos alunos em situações-problema, envolvendo a simetria axial, dentre eles a referência horizontal, vertical, diagonal e reflexão transladada, que nos permitiram levantar a hipótese de que eram suscetíveis de surgirem nas respostas do grupo estudado, uma vez que Mabuchi (2000), havia observado que certos “erros” e concepções são semelhantes, independente da cultura.

A Teoria dos Campos Conceituais, a Teoria das Situações e a Engenharia Didática, que embasaram nossa pesquisa, mostraram-se adequadas para o estudo de procedimentos e invariantes operatórios utilizados pelos alunos, na resolução de situações-problema de simetria axial, da seqüência didática desenvolvida. No desenrolar das situações-problema, os alunos aceitaram-na como sua e partiram em busca de soluções. Nesse processo agiram, formularam, criaram estratégias, procedimentos e utilizaram invariantes operatórios na resolução das situações-problema propostas com lápis e papel e computador.

Desta forma, a análise das produções dos alunos, para as atividades propostas, nos permitiu estudar procedimentos por eles utilizados e identificar invariantes operatórios implícitos nesses. Os momentos coletivos contribuíram para tornar explícitos alguns invariantes operatórios utilizados pelos alunos e compreender melhor seus procedimentos.

No desenvolvimento das atividades, pudemos perceber quais foram os recursos materiais que os alunos preferiram e quais passaram a utilizar com mais freqüência em outros momentos. Percebemos a preferência dos alunos pelo uso de dobradura e decalque, pela facilidade na obtenção do simétrico de pontos, segmentos e figuras. Observamos também o recurso de dobrar o papel e olhar contra-a-luz na obtenção da imagem da figura (ponto ou segmento), ou ainda, o recurso de dobrar o papel e fazer o decalque das figuras.

O esquadro e o compasso quase não foram utilizados, provavelmente por esses materiais terem sido praticamente abolidos dos livros didáticos por um longo período de tempo, e alguns deles estarem retornando de maneira muito discreta. A régua foi utilizada, basicamente, em traçados de retas e de segmentos de reta, sendo que em pouquíssimos casos os alunos utilizaram a graduação da régua na medida de segmentos.

Várias atividades foram apresentadas em papel quadriculado, mas percebemos que nem sempre os alunos utilizaram a contagem de quadradinhos e, quando o fizeram, nem sempre obtiveram êxito em suas respostas. O quadriculado reforça os procedimentos referência horizontal ou vertical, pois as linhas da malha quadriculada privilegiam as direções horizontal e vertical, conforme afirma Grenier (1985).

Apesar do papel transparente ser um material muito útil em situações-problema envolvendo a simetria axial, esse recurso não foi muito aceito pelos alunos, provavelmente por não saberem utilizá-lo ou pela dobradura ter sido utilizada no início da experimentação ou pela falta de conhecimento anterior sobre simetria axial.

Foi possível identificar também que no desenvolvimento de algumas atividades houve dificuldades dos alunos na compreensão dos enunciados, contendo palavras-chave relativas ao conceito de simetria como, por exemplo, eixo de simetria, simétrico e reflexão.

Pudemos, assim, observar que dentre todos os materiais concretos sugeridos, o único que se mostrou útil na execução correta das atividades foi a dobradura, confirmando, parcialmente, nossa hipótese. Entretanto, o uso da dobradura pode dificultar a ampliação do conceito para atividades nas quais o eixo de simetria não passa pelo meio da figura. Grenier (1989) afirma que o conceito de simetria usando dobradura é de uso limitado, mas pode contribuir para que o aluno busque uma definição mais adequada e com instrumentos mais eficazes.

Nas atividades, usando o computador, observamos que a máquina contribuiu para despertar e prender a atenção dos alunos, particularmente na obtenção do simétrico de um ponto, de um segmento em relação a uma reta ou de uma outra figura. Percebemos um avanço nas respostas dos alunos na preservação da medida conforme o objeto fosse um ponto, um segmento ou uma outra figura; no cuidado ao de traçar retas auxiliares (não necessariamente perpendiculares). Essas preocupações somente foram percebidas, por um único aluno, na última atividade com lápis e papel. Acreditamos que elas passaram a ser representadas pelos alunos nas situações propostas no computador, porque eles já possuíam mais conhecimentos de simetria, apresentados nas situações de institucionalização, ocorridas no final das categorias I e II com a utilização de lápis e papel.

Observando as soluções apresentadas e os relatos dos alunos, pudemos concluir que o computador facilitou a realização das atividades. Os alunos ficaram admirados com os resultados e com a praticidade na obtenção do simétrico de uma figura em relação a um eixo de simetria e também com a possibilidade de criar desenhos com este recurso, utilizando a ferramenta *simetria axial* do *Cabri*.

Após as situações de institucionalização realizadas no final de cada categoria, o papel transparente e o computador devem ter-se tornado novas ferramentas disponíveis a este grupo de alunos, para a resolução de problemas, envolvendo a simetria axial, uma vez que lhes foram apresentados. O mesmo não pode ser afirmado quanto à utilização de régua, esquadro e compasso, pois a não preferência e a não utilização desses materiais pode estar relacionada com o maior tempo gasto para a execução de uma única atividade, com a dificuldade em manuseá-los ou ainda com os conceitos geométricos envolvidos em sua utilização.

Nas soluções das atividades da seqüência didática, surgiram vários procedimentos dos alunos em relação à simetria axial. Verificou-se a existência de procedimentos corretos, “incorretos” ou incompletos, como haviam surgido nas experiências relatadas no Capítulo II, por pesquisadores como Grenier (1985), Gutiérrez & Jaime (1987) e Mabuchi (2000). Dentre os procedimentos "incorretos" criados para as soluções das atividades destacamos:

1. Traçado do eixo de simetria, passando aproximadamente pelo "meio" da figura.
2. Traçado do eixo de simetria, dividindo a figura em duas partes "iguais".
3. Obtenção da imagem da figura sem respeitar a distância da figura ao eixo de simetria.
4. Obtenção da imagem da figura através de uma referência horizontal (ou referência vertical, ou referência diagonal).
5. Obtenção da imagem da figura através de uma reflexão transladada da figura.
6. Obtenção do reflexo da figura sem respeitar a correspondência ortogonal, em relação ao eixo.
7. Criação de outro eixo de simetria para o problema.
8. Desconsideração do eixo de simetria dado.
9. Posicionamento do reflexo da figura sempre do outro lado do eixo de simetria.
10. Obtenção da imagem da figura não contando corretamente os quadradinhos da malha quadriculada.
11. União de todos os pontos (ou segmentos) dados no problema, sem refleti-los.
12. União de todos os pontos (ou segmentos) dados no problema e em seguida reflexão da figura formada.

A maioria dos procedimentos corretos em nossa pesquisa só surgiu quando os alunos utilizaram dobraduras ou a ferramenta simetria axial do *Cabri*. Entre os procedimentos "corretos" criados para as soluções das atividades, envolvendo a obtenção do simétrico de uma figura em relação a um eixo, podemos citar:

1. Obtenção correta da figura-imagem, utilizando dobradura e decalque.
2. Obtenção da figura-imagem, contando corretamente os quadradinhos da malha quadriculada.
3. Obtenção da figura-imagem, utilizando papel transparente.
4. Obtenção correta da figura-imagem, utilizando a ferramenta *simetria axial* do *Cabri.*

Muitos desses procedimentos descritos não são particulares de nossa pesquisa. Vários deles, com exceção dos dois procedimentos 11 e 12 foram também encontrados em outras pesquisas como mencionado no Capítulo I. Muitos outros procedimentos surgiram neste trabalho e encontram-se na análise *a posteriori* de cada atividade das categorias. Nos procedimentos incorretos 11 e 12, os alunos buscam construir figuras fechadas, provavelmente para que possam aplicar os conhecimentos adquiridos anteriormente, obtidos nas soluções das primeiras atividades da categoria I com lápis e papel, que consistiam na identificação de eixos de simetria de figuras fechadas. Isto também pode ser justificado pelas atividades propostas nos livros didáticos analisados, que sempre são figuras fechadas.

O foco central da nossa pesquisa foi a identificação de procedimentos e invariantes operatórios de alunos do IV ciclo do Ensino Fundamental, relativos a simetria axial. No capítulo II (seção 2.1, p. 63 – 68), enunciamos e discutimos alguns invariantes operatórios suscetíveis de serem construídos e utilizados pelos alunos nas situações-problema propostas, que foram observados nas respostas deste grupo. A maior parte dos invariantes operatórios deste trabalho não aparecem explicitados nas respostas, mas estão de modo subjacente nos procedimentos apresentados. Os que foram explicitados encontram-se na análise *a posteriori* de algumas atividades, pois puderam ser identificados nas falas dos alunos ou nas justificativas dadas por eles. A seguir, citaremos e comentaremos alguns invariantes que puderam ser identificados nas respostas dos alunos.

Os invariantes: "O eixo de simetria divide a figura aproximadamente no 'meio'(falso)" e "O eixo que divide a figura em duas partes congruentes é de simetria (falso)", através das discussões coletivas ou individuais com o grupo de alunos, diferem um do outro da seguinte forma: no primeiro invariante, o eixo de simetria, apesar de dividir a figura em duas partes, não implica que estas partes sejam "iguais", como observado na Figura 4.8b do raio da atividade 1 com lápis e papel; no segundo invariante, existe a preocupação de traçar um eixo que forme duas figuras congruentes, embora não necessariamente que se sobreponham.

Se os alunos trabalham com o invariante operatório "O simétrico de uma figura em relação a um eixo, deve ficar sempre do outro lado deste (falso)", de maneira geral, eles parecem evitar as respostas em que a figura-dada e a figura–imagem se entrecruzam, como as das atividades 3 e 4 da Categoria II com lápis e papel.

Percebemos que, para a grande maioria dos alunos que participaram desta pesquisa, é suficiente que a figura-imagem esteja “mais ou menos” à mesma distância da figura ao eixo de simetria, utilizando basicamente a visualização. Eles podem ter utilizado o falso invariante “O simétrico de uma figura em relação a um eixo deve ser posicionado aproximadamente à mesma distância desta ao eixo de simetria”. O invariante verdadeiro, que deveria ser utilizado, é “O simétrico de uma figura em relação a um eixo deve ser posicionado exatamente à mesma distância desta ao eixo de simetria”.

Alguns alunos são capazes de dar e aceitar uma resposta aproximada, quase correta, para seus problemas, talvez por gastarem um tempo maior na execução de determinada atividade com a utilização de régua, esquadro e compasso; por não saberem fazer corretamente a atividade ou por não sentirem necessidade de assim procederem. Mas por outro lado, alguns alunos não se contentam e buscam alternativas de solução para que obtenham êxito na atividade.

O invariante “O simétrico de um ponto, situado sobre o eixo de simetria é um ponto coincidente com o ponto-dado” (verdadeiro) foi utilizado por alguns alunos, como podemos observar na atividade 6, que faz parte da Categoria II com lápis e papel (ponto “L”). Neste invariante, percebemos a aplicação da primeira propriedade, citada no Capítulo I, Seção 1.1, p.21-22. A imagem de um ponto L (qualquer) no eixo de simetria é o próprio ponto (L=L’).

Percebemos, de maneira geral, que muitos alunos não se apropriaram totalmente do invariante “O simétrico de uma figura é uma figura que conserva a forma, as dimensões e inverte a orientação de pontos não-colineares” (verdadeiro). Muitas vezes, utilizam apenas uma parte dele, como podemos observar no invariante: “O simétrico de uma figura é uma figura que conserva a forma”, como foi evidenciado em algumas atividades dos alunos, como, por exemplo: “O simétrico de um triângulo em relação a um eixo de simetria é um triângulo”, ou “O simétrico de uma circunferência é uma circunferência igual à dada”. Percebemos nessas respostas a aplicação da quarta propriedade, citada no Capítulo I, Seção 1.1, p.21-22. Ainda podemos citar o invariante: “O simétrico de uma figura é uma figura que inverte a orientação de pontos não-colineares”, que, de certa forma, pudemos identificá-lo nas situações em que os alunos refletiram a figura dada, mas sem se preocuparem com as propriedades eqüidistância e perpendicularismo.

No invariante "O eixo de simetria divide a figura em duas partes que coincidem exatamente por sobreposição" (verdadeiro), parece evidente a igualdade das partes da figura proporcionada pelo eixo de simetria e a sobreposição dessas partes, ficando implícito a inversão da orientação de pontos não-colineares.

Pudemos verificar, também, através da análise de alguns livros didáticos, que abordam a simetria axial no Ensino Fundamental, que alguns autores, na maioria das vezes, a introduzem da seguinte forma: "a linha de dobra é o eixo de simetria de uma figura simétrica e, se dobrarmos no eixo, as duas partes coincidem, ocasionando uma figura simétrica". Este pode se tornar um invariante operatório para os alunos, uma vez que eles podem se apropriar e passar a utilizá-los nas soluções de determinadas situações-problema.

Nessa pesquisa, na busca das soluções das situações-problema propostas, os alunos apresentaram diversas dificuldades, algumas referentes à elaboração de justificativas nas atividades e outras referentes à utilização dos materiais concretos. Essas dificuldades foram vistas como parte de um processo no qual houve quebra do contrato escolar tradicional em que o conhecimento é transmitido e recebido em sala de aula. De modo geral, muitos professores ainda não partem do problema para que ocorram situações a-didáticas, não permitindo a mobilização de conhecimentos pelos alunos, inviabilizando também as situações de validação. Desse modo as situações de institucionalização em suas salas de aula acabam comprometidas.

Em nossa pesquisa foram utilizados lápis e papel e computador, diferindo das pesquisas analisadas, pois nelas optou-se por apenas um desses recursos. Um outro diferencial de nossa pesquisa é a identificação de invariantes operatórios suscetíveis dos alunos terem utilizado nas soluções das situações-problema sobre simetria axial, envolvendo a identificação, observação e traçado de eixo de simetria e de simétrico de uma figura (ponto ou segmento) em relação a um eixo pré-estabelecido.

Durante o desenvolvimento do trabalho, percebemos que os alunos centraram-se mais na congruência das partes da figura subdividida e, em segundo plano, na propriedade de sobreposição dessas partes ao se dobrar no eixo de simetria. Alguns alunos utilizaram conhecimentos novos, advindos das situações de institucionalização, mesmo que embrionários. Uma justificativa para isto talvez seja pelo fato da pesquisadora, no início da experimentação, ser uma intrusa no ambiente escolar destes alunos.

Como vimos, a simetria parece ser um conceito extremamente natural de ser compreendido, mas pesquisas sobre esse tema como a de Grenier (2000), Tahri (1993), Vergnaud (1996), Vogue (2000) e outros mostram que, mesmo após vários anos de atividades escolares, alguns alunos ainda apresentam dificuldades em resolver corretamente problemas que envolvam noções de simetria.

Vergnaud (1996) retrata, também, as dificuldades dos alunos com o conceito, mesmo após vários anos de estudo e nos apresenta uma maneira de tentarmos mudar esta situação:

> Nós percebemos então como a criança que vai à escola primária e depois à secundária pode formar uma representação cada vez mais complexa da simetria, inicialmente do ponto de vista operacional, ou seja, na compreensão de traços simétricos e, ao mesmo tempo, do ponto de vista predicativo, ou seja, da enunciação. Algumas crianças têm problema na compreensão e depois na enunciação desses conceitos. Então, um dos problemas do ensino é desenvolver ao mesmo tempo a forma operatória do conhecimento, isto é, o saber-fazer, e a forma predicativa do conhecimento, isto é, saber explicitar os objetos e suas propriedades (Vergnaud, 1996, p. 13).

Acreditamos que, para que este quadro mude, se torna necessário que seqüências didáticas sejam elaboradas, para que haja envolvimento dos alunos nas diversas atividades e desafios propostos com essa finalidade. É preciso que os alunos percebam a importância do seu estudo por utilizar e aplicar conceitos de geometria, bem como nas Ciências e em outras situações que eles possam explorar. Para que isso ocorra, parece importante que a simetria seja abordada de forma integrada com as outras transformações; que ela seja trabalhada em vários momentos, e retomada e estendida gradativamente durante toda a vida escolar do aluno; que sejam apresentados desafios aos alunos utilizando, por exemplo, a dobradura e outros materiais de manipulação, inclusive régua, esquadro e compasso; que permitam aos alunos extrair e discutir propriedades de simetria, para que possam explorar situações-problema não tradicionais e questões do dia-a-dia; que sejam discutidas as vantagens de se utilizar um ou outro recurso.

Cabe ao professor o desafio de proporcionar aos alunos seqüências didáticas adequadas para a construção do conceito de simetria axial, para que eles desenvolvam seu rol de esquemas e procedimentos, pois novos esquemas requerem novos invariantes operatórios e que podem ser objeto de estudo em outro trabalho.

No desenvolvimento do trabalho foi possível responder a alguns questionamentos acerca dos procedimentos utilizados pelos alunos em atividades de simetria plana axial. Muitos procedimentos, além das referências horizontal, vertical e diagonal, surgem e são interessantes de serem estudados, procurando entender porque os alunos os utilizam. A utilização de seqüências didáticas como mostrada também pode ser útil para estudar o desenvolvimento dos alunos na realização das atividades ao passar de uma categoria para outra, analisando procedimentos e invariantes operatórios possivelmente utilizados e os reinvestimentos destes nas novas e em outras situações.

Acreditamos que esse tipo de trabalho contribuirá para o aprimoramento dos estudos e análises sobre procedimentos e de invariantes operatórios suscetíveis de serem utilizados pelos alunos na resolução de situações-problema relativas ao conceito de simetria axial. Uma continuidade deste trabalho, após esta fase de análise e identificação, seria a elaboração de uma nova seqüência didática, com a utilização de lápis e papel e computador, para a desestabilização desses invariantes operatórios falsos detectados dentro do trabalho, visando também identificar contribuições do uso do *Cabri*, como instrumento para a aprendizagem da Simetria, como o trabalho desenvolvido na pesquisa de Derbre e Mouffak (2004).

Um outro aspecto a ser investigado é a diminuição no aparecimento dos procedimentos referências horizontal, vertical e diagonal, no estudo dos movimentos reflexão, rotação e translação, ao serem utilizados diversos materiais concretos, de maneira gradativa e em várias retomadas, também analisando a evolução do aluno no decorrer das atividades realizadas.

ANEXO I

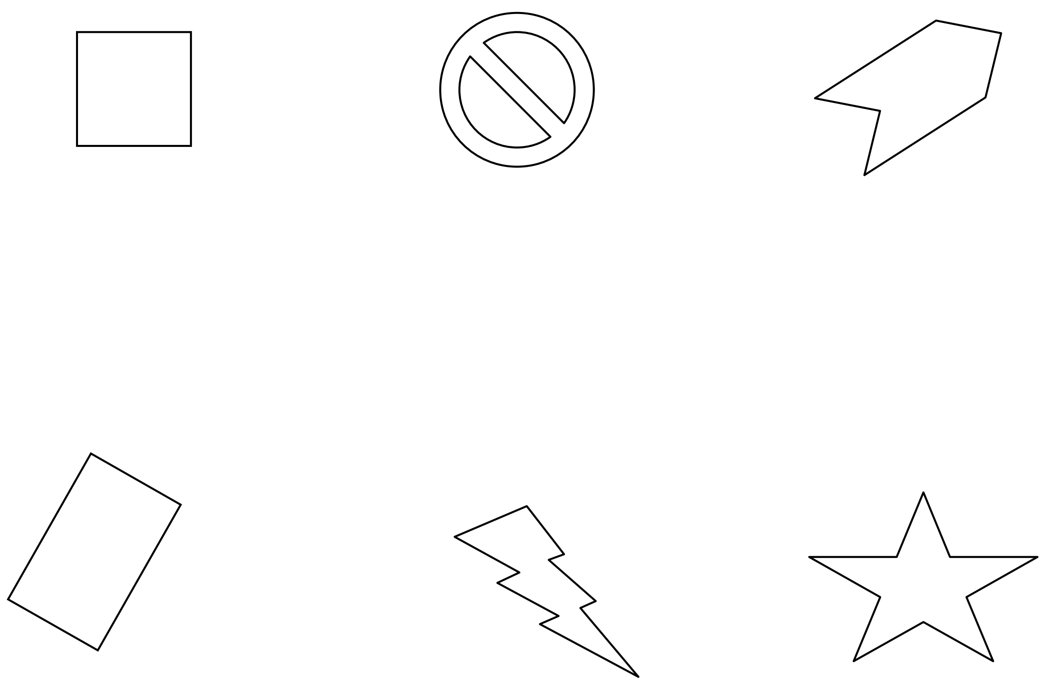
A seqüência-didática

CATEGORIA I

Lápis e Papel

ATIVIDADE 1

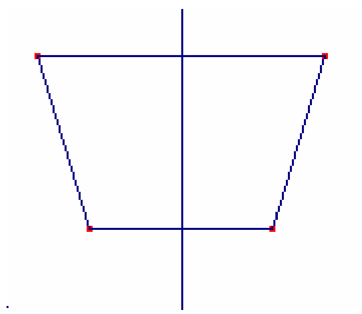
Observe as figuras abaixo. Sem dobrá-las ou recortá-las, risque com caneta e régua os eixos de simetria das figuras dadas, caso elas possuam.



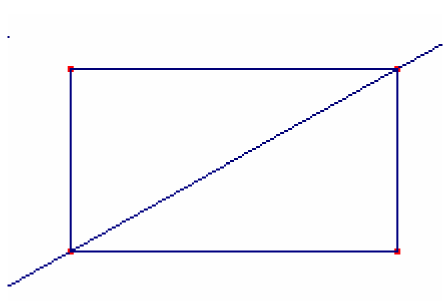
ATIVIDADE 2

Observe cada figura abaixo e decida se as retas traçadas são eixos de simetria. Justifique sua resposta.

a)



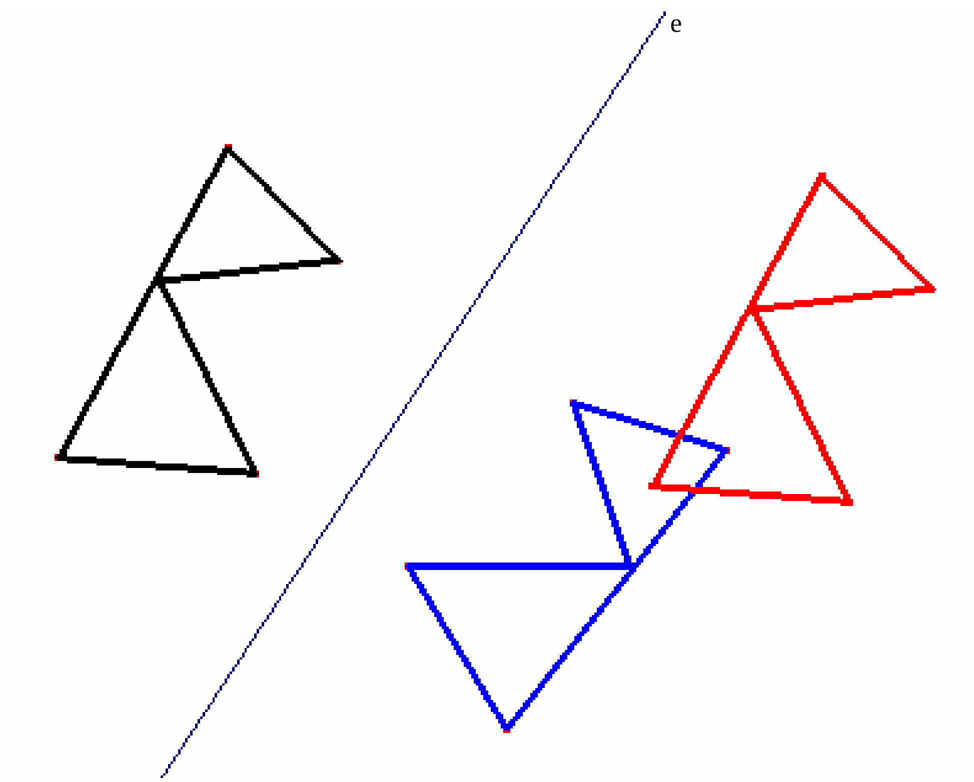
b)



Resposta:-- -

ATIVIDADE 3

Qual é o simétrico da figura preta em relação ao eixo de simetria e? A figura azul ou a figura vermelha?

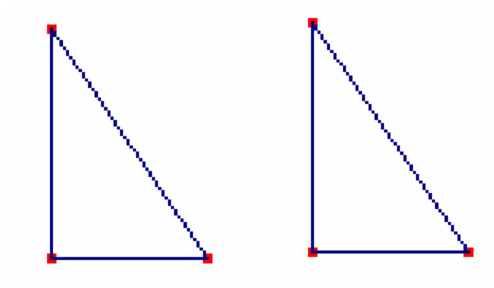
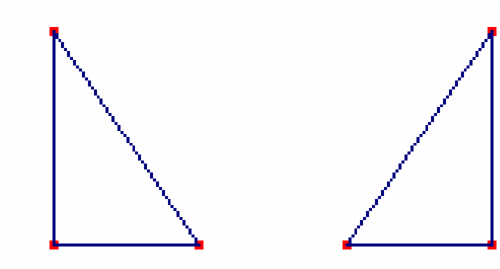
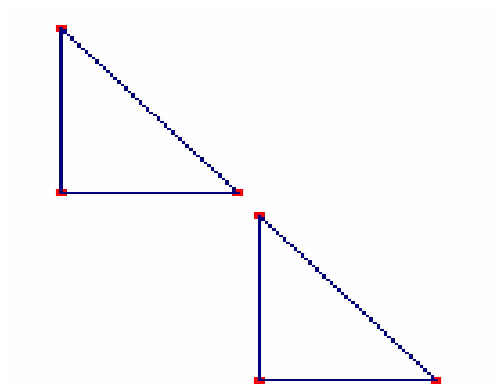
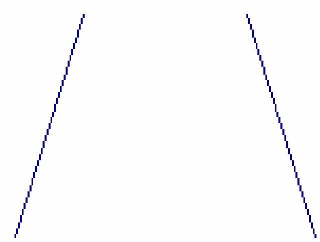
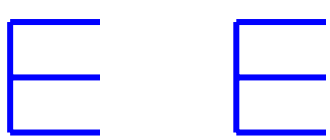
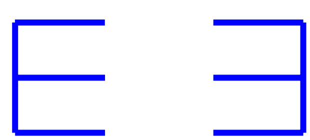


Resposta---

Justifique porque você escolheu a figura azul ou porque você escolheu a figura vermelha.

ATIVIDADE 4

Com caneta tracem o(s) eixo(s) de simetria, caso existam, utilizando-se de instrumentos de desenho à sua escolha. Justifique sua escolha por este material.

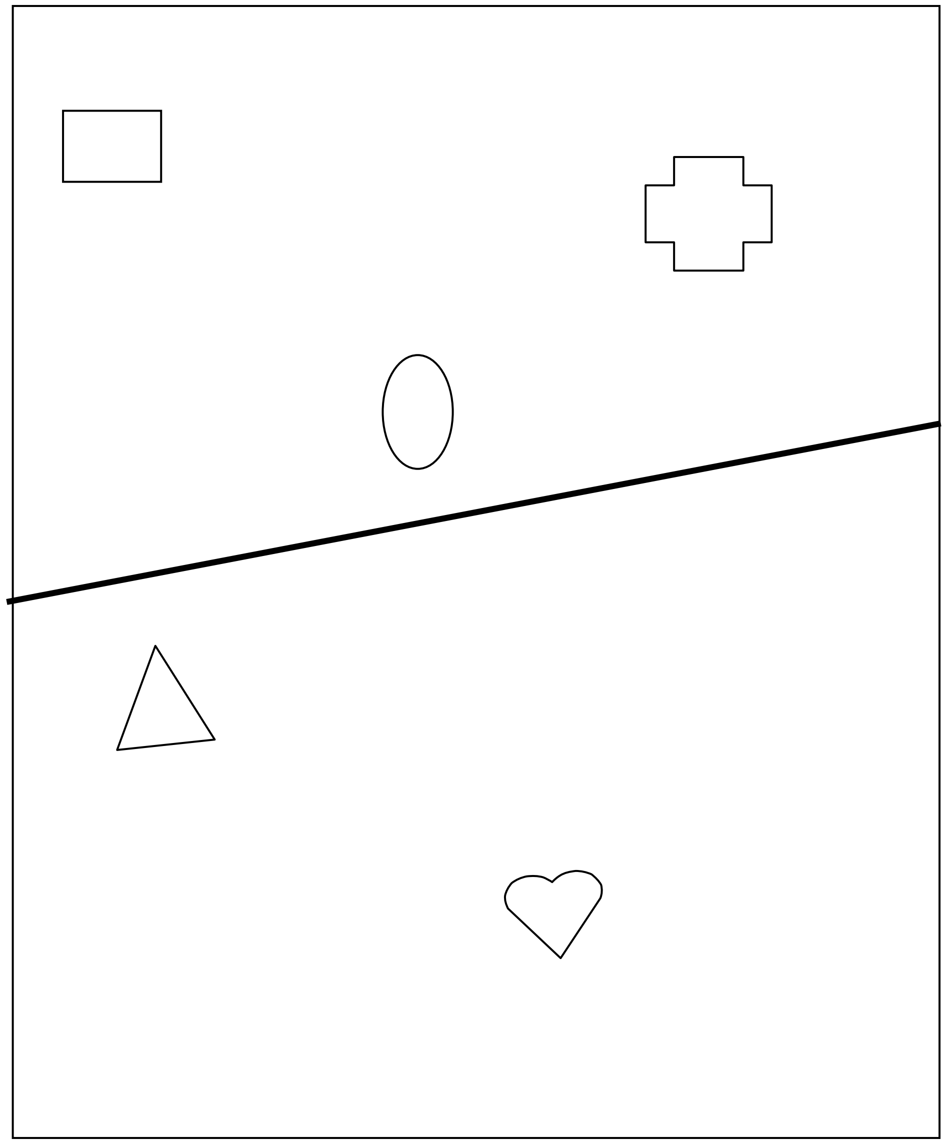
Atividade a	**Atividade b**
	
Atividade c	**Atividade d**
	
Atividade e	**Atividade f**
	

CATEGORIA II

Lápis e Papel

ATIVIDADE 1

Faça a reflexão das figuras dadas em relação ao eixo de simetria (reta preta). Você pode utilizar-se do artifício de dobrar no eixo de simetria.



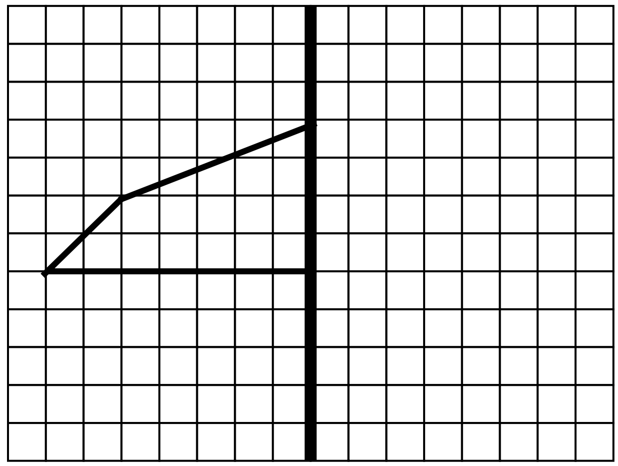
Continuação da atividade 1 – Categoria II

Analise a figura dada e a que você desenhou. Elas são ditas simétricas em relação ao eixo de simetria. Enuncie algumas propriedades (ou características) de figuras simétricas.

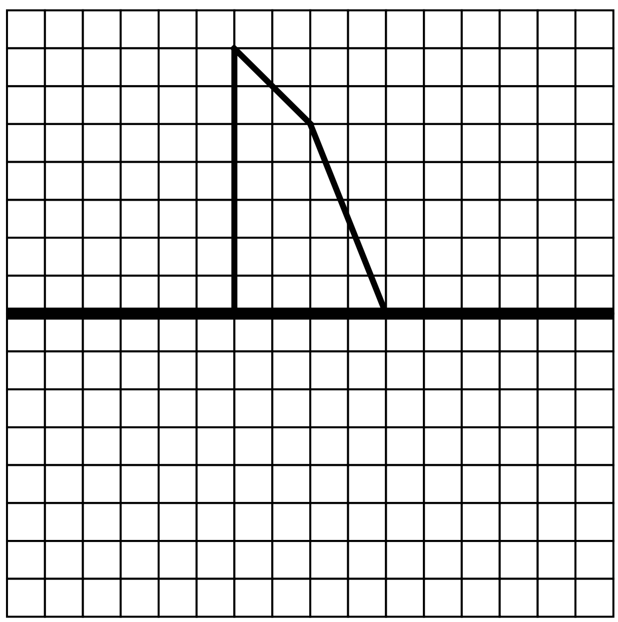
ATIVIDADE 2

As figuras dadas são simétricas em relação a reta preta (eixo de simetria). Desenhe a outra parte.

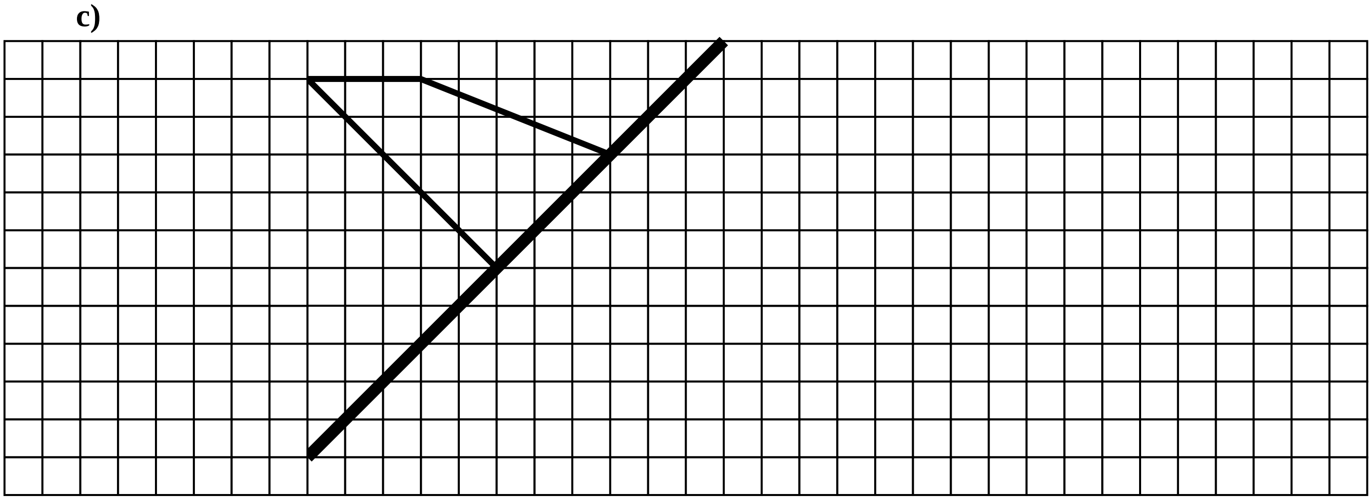
a)



b)

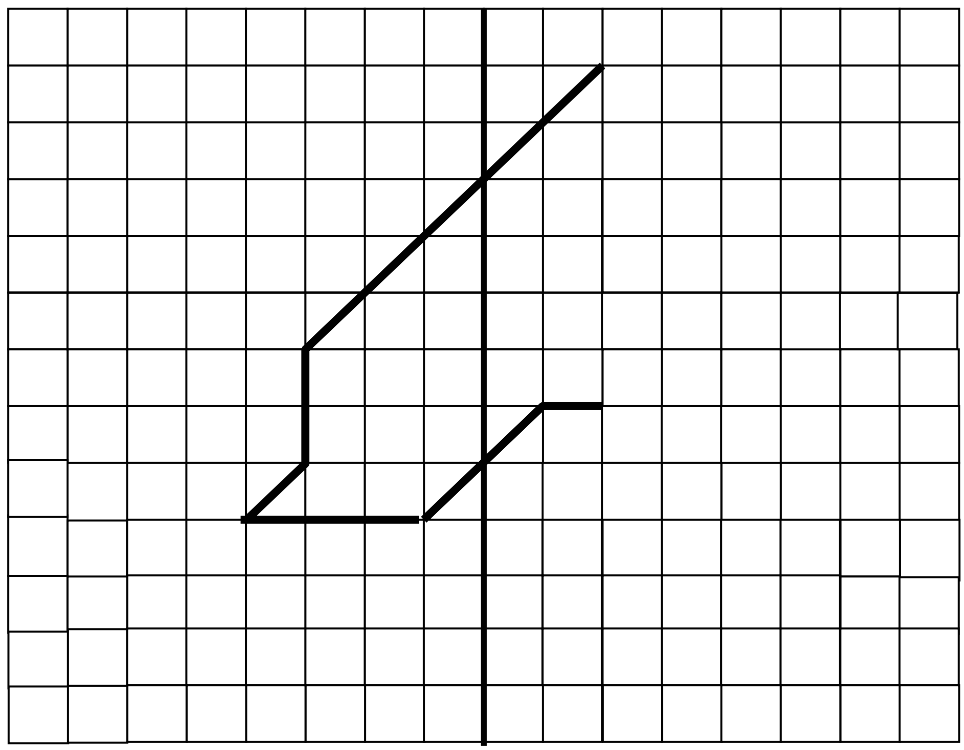


c)



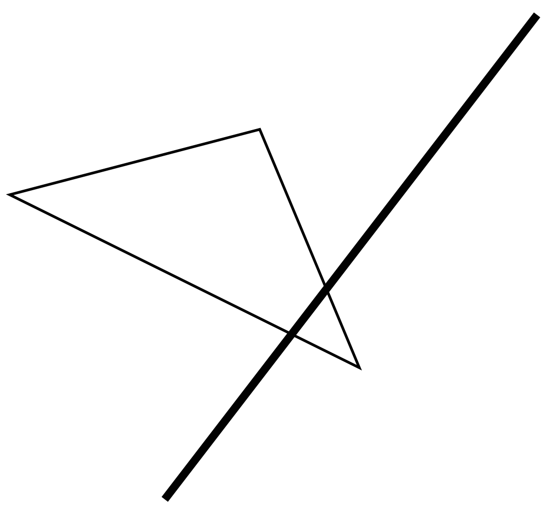
ATIVIDADE 3

Faça a reflexão da figura em relação a reta preta dada.



ATIVIDADE 4

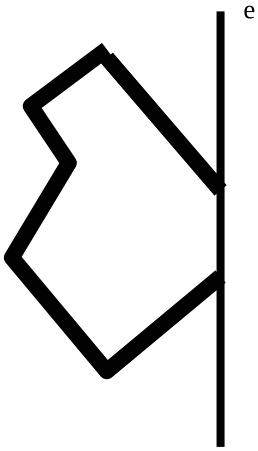
Faça a reflexão da figura em relação a reta preta dada.



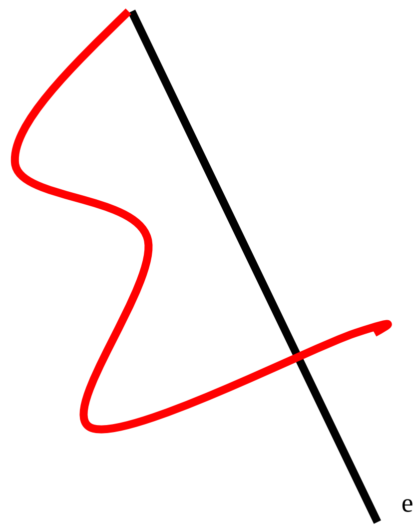
ATIVIDADE 5:

Vocês estão recebendo uma folha de papel transparente e esta folha de sulfite contendo "metades" desenhadas de algumas figuras. Utilize o papel transparente para fazer a reflexão das figuras em relação ao eixo e.

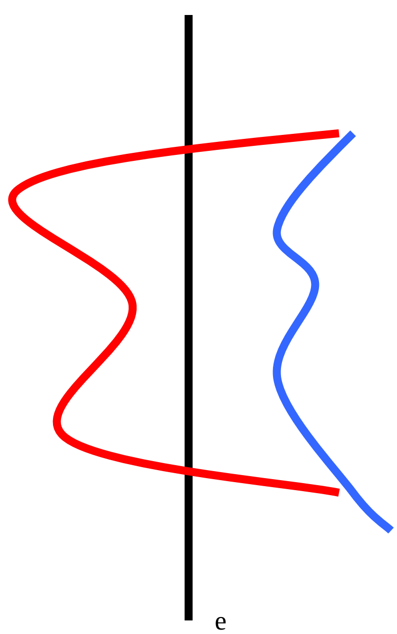
a)



b)

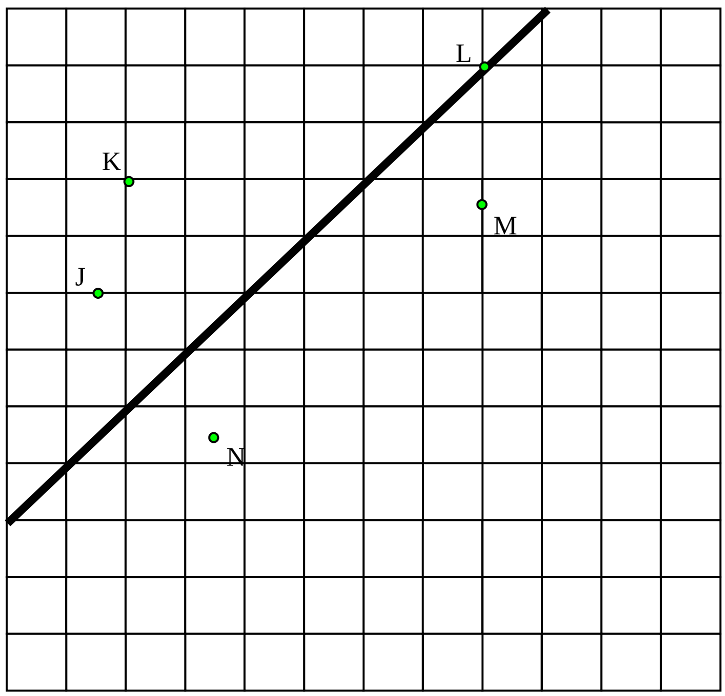


c)



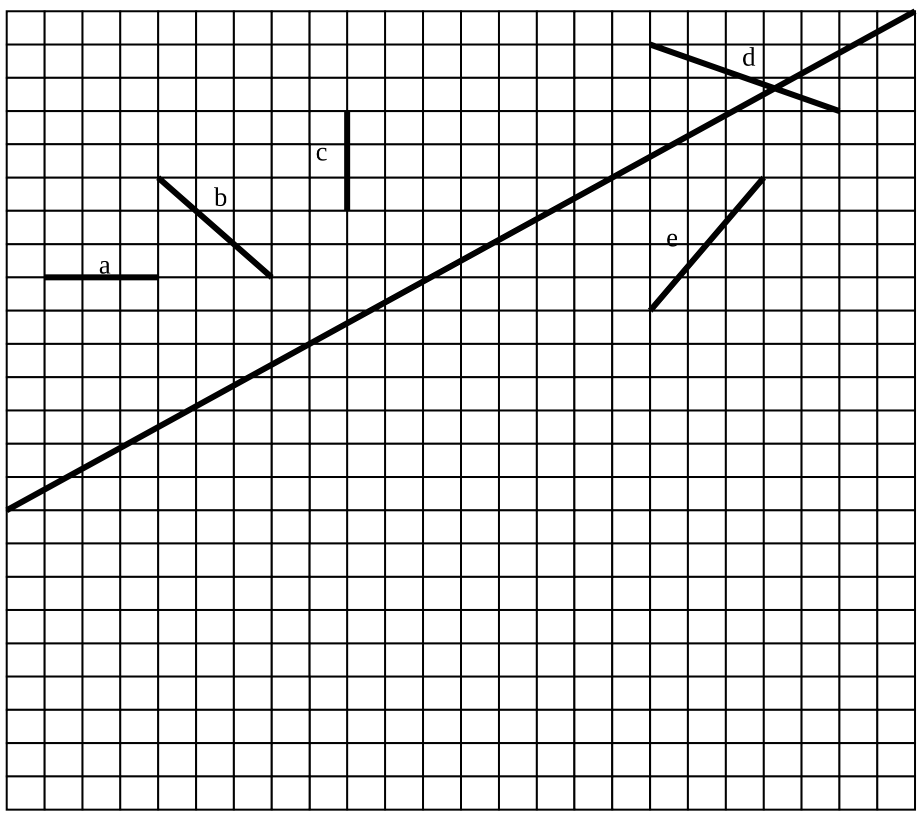
ATIVIDADE 6

Faça o simétrico de cada ponto dado, considerando a linha preta o eixo de simetria.



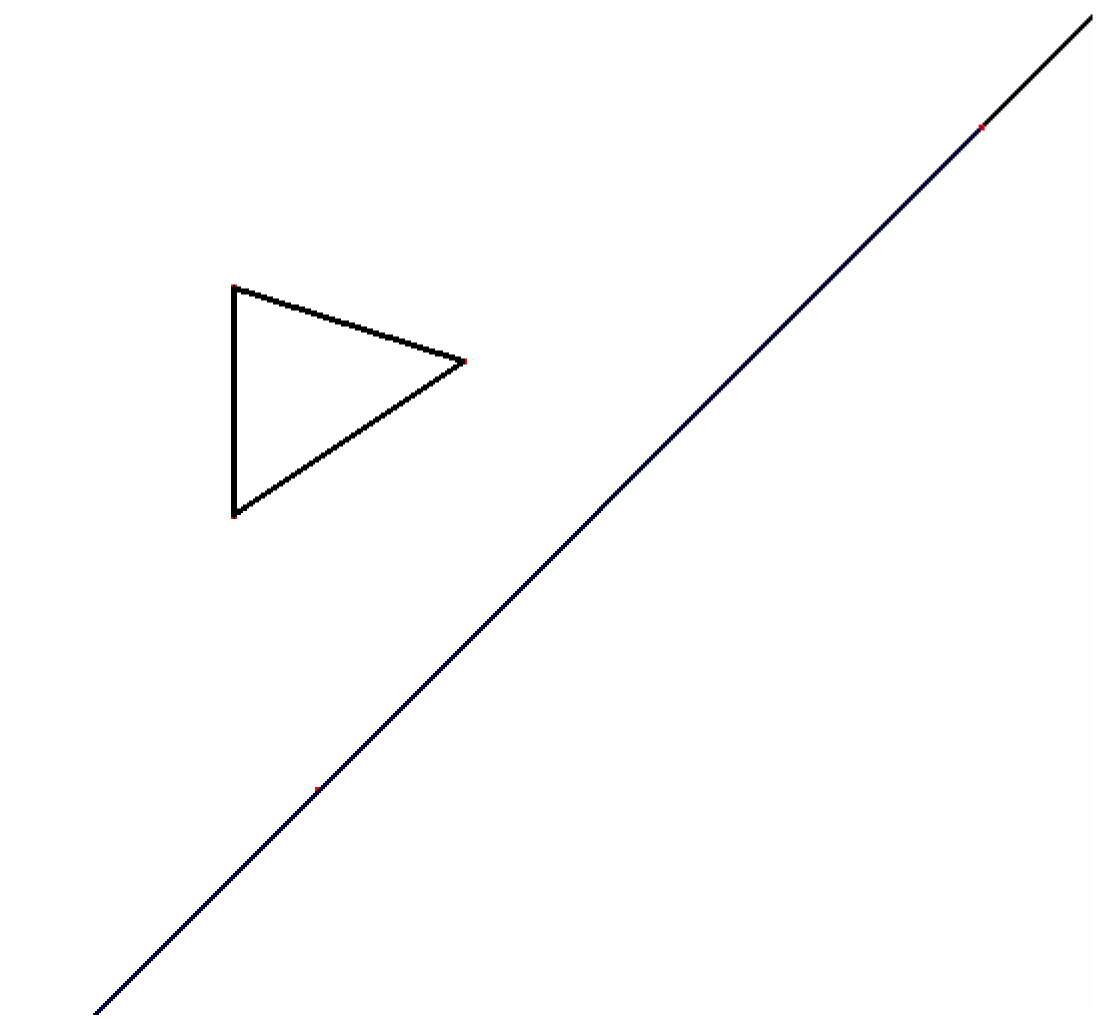
ATIVIDADE 7

A reta preta inclinada é o eixo de simetria. Faça a reflexão de cada segmento em relação a esta reta.



ATIVIDADE 8

Utilizando-se de ferramentas de precisão: régua, esquadro e compasso, faça a reflexão da figura em relação à reta preta (eixo de simetria). Descreva seu procedimento.



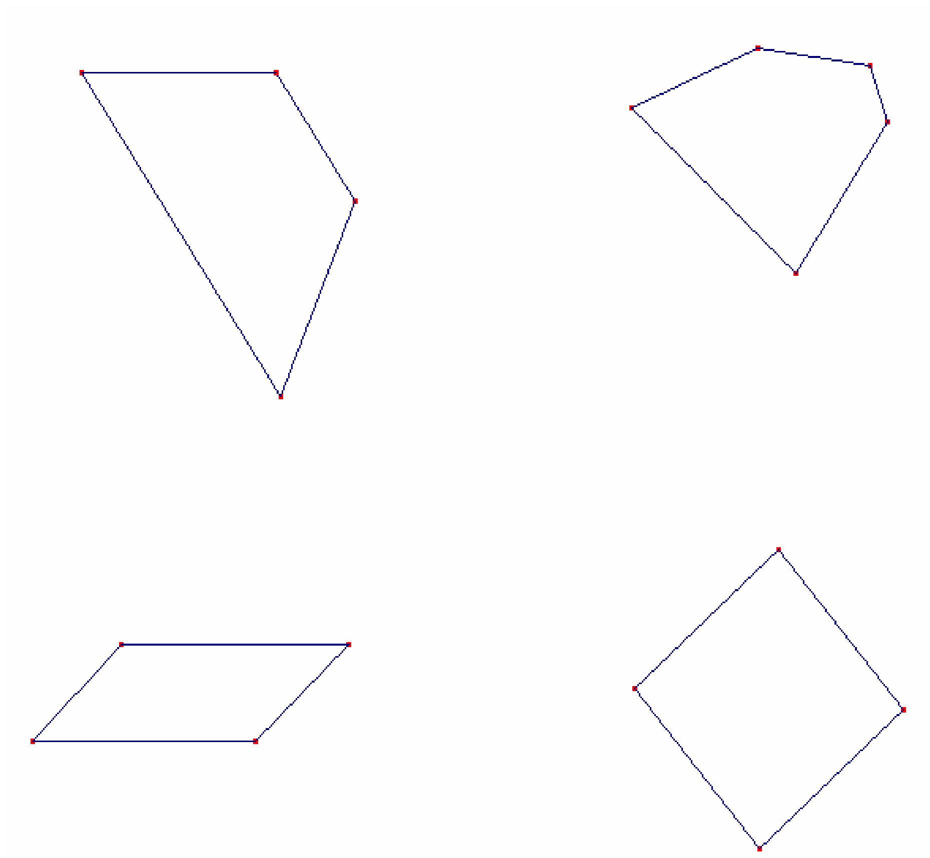
Descreva seu procedimento:

CATEGORIA I

Computador

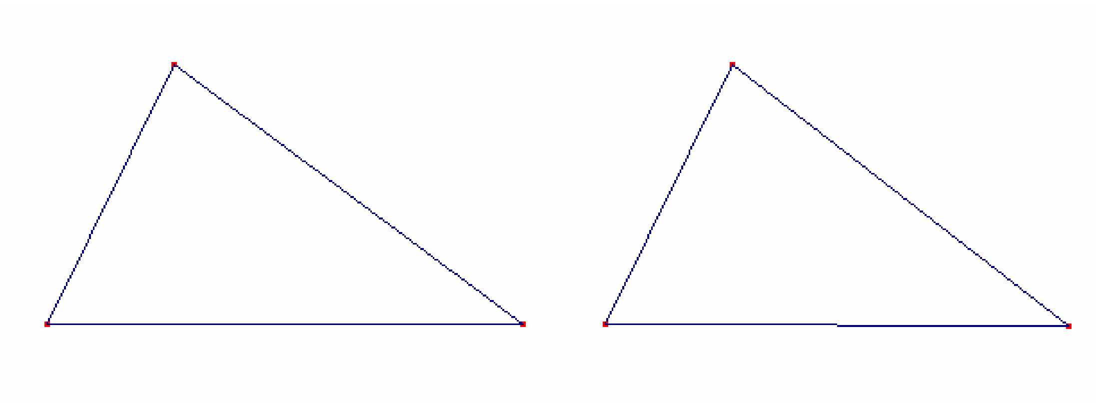
ATIVIDADE 1

Trace a(s) reta(s) de simetria, caso existam.



ATIVIDADE 2a

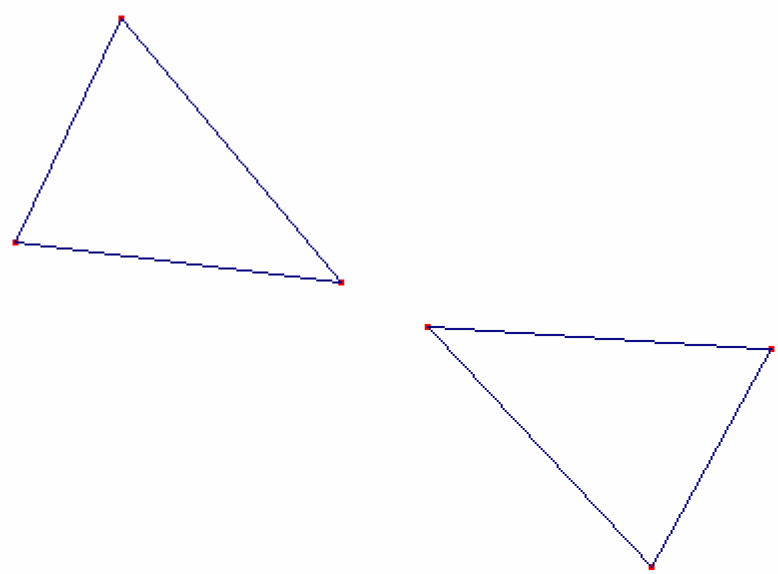
Item a): Trace o eixo de simetria, se existir.



Justifique seu procedimento:

ATIVIDADE 2b

Item b): Trace o eixo de simetria, se existir.



Justifique seu procedimento:

ATIVIDADE 2c

Item c): Trace a(s) reta(s) de simetria, caso existam.

Justifique seu procedimento:

ATIVIDADE 2d

Item d): Trace a(s) reta(s) de simetria, caso existam.

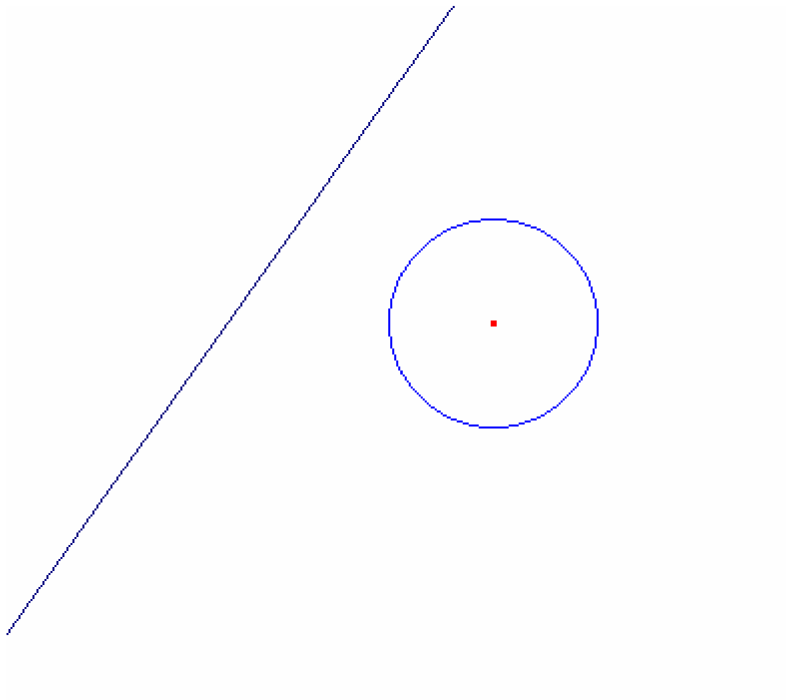
Justifique seu procedimento:

CATEGORIA II

COMPUTADOR

ATIVIDADE 1

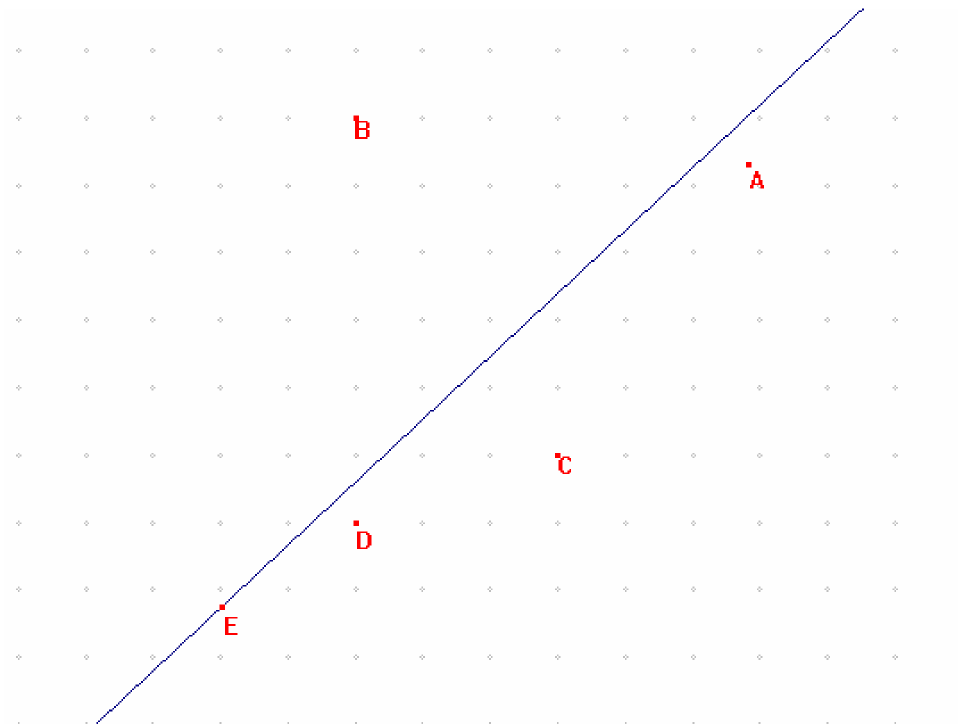
Trace o simétrico desta circunferência, em relação a reta dada (eixo de simetria).



Justifique seu procedimento:

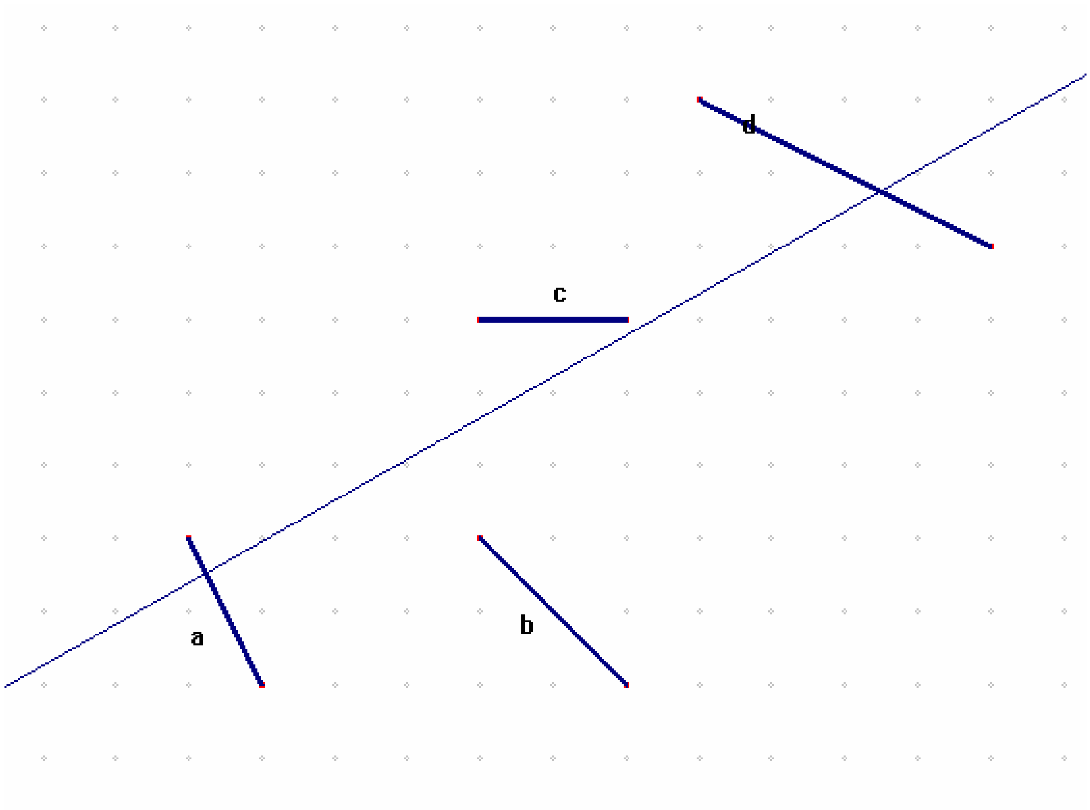
ATIVIDADE 2

Utilizando-se de um recurso do *Cabri*, faça a reflexão dos pontos dados em relação ao eixo de simetria. Descreva como procedeu.



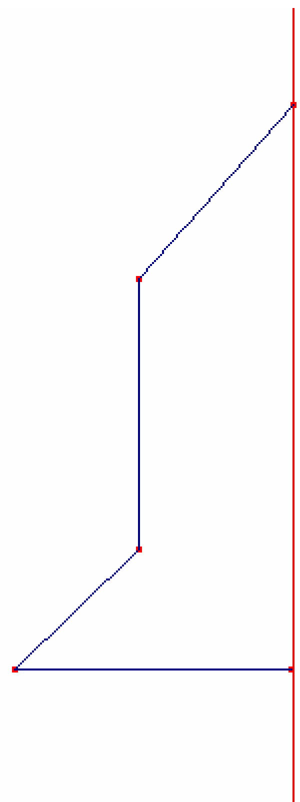
ATIVIDADE 3

Utilizando-se de um recurso do *Cabri*, faça a reflexão dos segmentos dados em relação ao eixo de simetira. Descreva como procedeu.



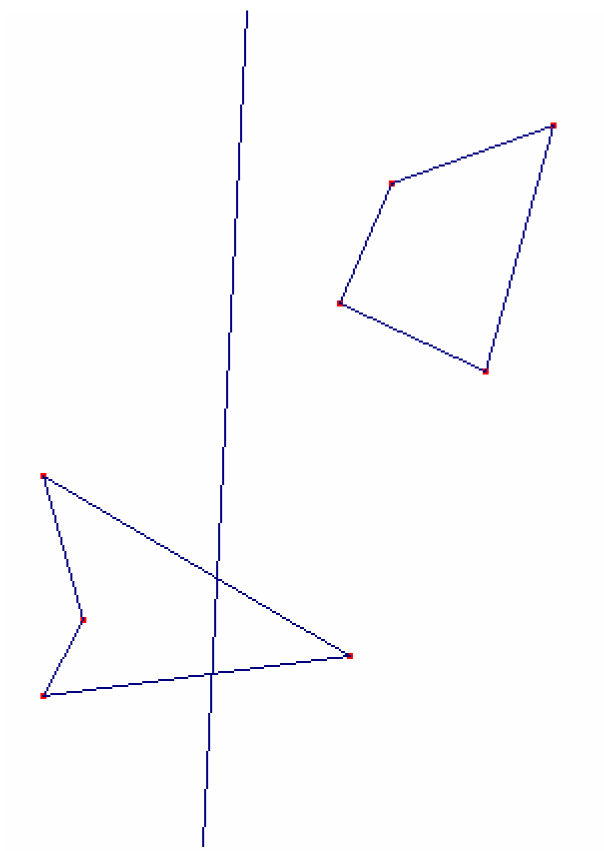
ATIVIDADE 4

Faça a reflexão da figura em relação a reta vermelha, utilizando-se de um recurso do *Cabri*.



ATIVIDADE 5

Faça a reflexão das figuras em relação a reta dada (eixo de simetria).



Justifique seu procedimento:

ANEXO II

Quadro de Respostas das Atividades

CATEGORIA I

Lápis e Papel

QUADRO DE RESPOSTAS DA ATIVIDADE 1

CATEGORIA I - LÁPIS E PAPEL

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	A16	A17	A18	A19	A20	A21	A22	A23	A24	A25	A26	A27
Fig. a	V	4	V	D1	V	D1	4	D2	D1	D1	D1	4	D1	D1	D2	4	HD1	D1	D1	V	V	D1	D12	V	D2	D2	D1
Fig. b	SE	EF	EF	EF	H	SE	2	SE	EF	EF	EF	SE	SE	EF	SE	HV	SE	EF	SE	SE	SE	EF	EF	SE	EF	SE	SE
Fig. c	I	I	I	I	I	I	I	SE	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	SE	I
Fig. d	La	SE	La	Le	D1	SE	SE	Le	D1	D1	SE	D1	La	La/e	La/e	La/e	D1	La	D1	La	La	D2	Le	D2	D2	Le	La
Fig. e	I	SE	SE	I	SE	SE	SE	SE	SE	I	SE	I	SE	SE	SE	SE	SE	SE	SE	I	SE	SE	SE	SE	SE	SE	SE
Fig. f	V	V	SE	V	V	V	SE	V	SE	V	V	V	SE	V	V	SE	V	V	SE	V	V	V	SE	V	V	SE	V

LEGENDA:
D1: eixo diagonal 1.
D2: eixo diagonal 2.
D12: eixo diagonal 1 e diagonal 2.
V: eixo vertical.
H: eixo horizontal.
HV: eixo horizontal e vertical.
HD1: eixo horizontal e diagonal 1.
SE: sem eixo.
I: eixo inclinado.
La: eixo paralelo ao lado maior.
Le: eixo paralelo ao lado menor.
La/e: eixo paralelo ao lado maior e eixo paralelo ao lado menor.
EF: eixo entre a faixa.
4: Quatro eixos de simetria da figura.
2: dois eixos de simetria da figura

QUADRO DE RESPOSTAS DA ATIVIDADE 2

CATEGORIA I - LÁPIS E PAPEL

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	A16	A17	A18	A19	A20	A21	A22	A23	A24	A25	A26	A27
Fig. a	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	N	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
Fig. b	N	N	N	N	S	N	N	S	S	S	N	S	S	N	S	S	S	S	N	S	S	S	S	S	S	S	S

LEGENDA

S: quando os alunos considerarem que a reta dada é eixo de simetria para a figura.
N: quando os alunos não considerarem a reta dada como eixo de simetria para a figura

QUADRO DE RESPOSTAS DA ATIVIDADE 3

CATEGORIA I - LÁPIS E PAPEL

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	A16	A17	A18	A19	A20	A21	A22	A23	A24	A25	A26	A27
Verm.	X	X		X				X		X			X	X		X						X	X	X	X	X	X
Azul			X		X	X	X		X		X	X			X		X	X	X	X	X						

LEGENDA:

X: Figura escolhida pelo aluno.
Verm.: Figura vermelha.
Azul: Figura azul.

QUADRO DE RESPOSTAS DA ATIVIDADE 4

CATEGORIA I - LÁPIS E PAPEL

Fig.	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	A16	A17	A18	A19	A20	A21	A22	A23	A24	A25	A26	A27
a)	EPH	SE	EB	SE	SE	SE	EH	SE	SE	EH	SE	EB	ET	EPH	SE	EPC	SE	SE	SE	SE	SE	EH	SE	SE	EPH	ET	ET
b)	V	V	SE	ET	V	V	EH	SE	SE	SE	SE	EB	ET	EHT	V	SE	ET	V	SE	V	V	SE	V	SE	SE	SE	ET
c)	EI	H	ET	ET	SE	EI	SE	SE	ET	H	ET	EB	ET	ET	EI	EPC	ET	EI	ET	SE	SE	SE	SE	EI	EB	EI	ET
d)	SE	V	SE	SE	SE	SE	SE	SE	SE	SE	SE	V	EHS	SE	V	SE	SE	V	SE	V	SE	SE	SE	V	V	SE	EHS
e)	V	SE	SE	SE	SE	SE	SE	SE	SE	SE	SE	SE	EHF	SE	SE	SE	SE	SE	SE	SE	SE	SE	SE	V	EI	SE	SE
f)	V	V	SE	SE	V	SE	SE	SE	SE	V	SE	V	EHF	SE	V	SE	SE	V	SE	V	V	SE	V	V	EI	SE	SE

LEGENDA:

EI: eixo inclinado entre as figuras.
ET: eixo em cada triângulo.
EB: eixo passando pela base dos triângulos.
EH: eixo coincidindo com a hipotenusa sendo traçado em cada triângulo.
EHS: eixo horizontal traçado em cada segmento.
EHF: eixo horizontal traçado em cada figura.
EPH: eixo traçado paralelo à hipotenusa do primeiro triângulo.
EHT: eixo horizontal passando pelo meio dos dois triângulos.
EPC: eixo traçado paralelo ao cateto maior.
H: eixo horizontal entre as duas figuras.
SE: sem eixo de simetria.

CATEGORIA II

Lápis e Papel

QUADRO DE RESPOSTAS DA ATIVIDADE 1

CATEGORIA II LÁPIS E PAPEL

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	A16	A17	A18	A19	A20	A21	A22	A23	A24	A25	A26	A27
Dobra	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
Decalque	S	S	N	S	N	S	N	S	S	N	S	S	N	S	N	S	N	S	S	N	N	N	N	S	S	S	S
Acerta	PB	C	E	C	PC	PB	E	PCB	C	PB	C	FM	E	C	PB	C	PB	C	C	E	PCB	E	E	PB	PB	C	C
Ref. H	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N
Ref. V	N	N	N	N	N	N	N	RV	N	N	N	N	N	N	RV	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N
Ref. D	N	N	N	N	RD	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	RD	N	N

LEGENDA:
AP: Reflexão de parte das figuras.
C: Certa.
E: Erra.
N: Não.
S: Sim.
FM: Figuras desenhadas sobre o eixo de simetria.
PB: Reflexo das figuras que se encontram no semiplano abaixo do eixo.
PCB: Reflexo de algumas figuras da parte do semiplano acima e algumas figuras do semiplano abaixo.
PC: Reflexo das figuras que se encontram no semiplano acima do eixo.
RD: Referência diagonal.
RV: Referência vertical.
RH: Referência horizontal.

QUADRO DE RESPOSTAS DA ATIVIDADE 2

CATEGORIA II - LÁPIS E PAPEL

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	A16	A17	A18	A19	A20	A21	A22	A23	A24	A25	A26	A27
Fig. a	E	E	EC	C	EC	C	E	E	C	C	C	C	EC	C	EC	C	E	C	E	E	C	C	C	E	C	C	C
Fig. b	E	C	C	C	EC	C	C	E	C	E	C	C	C	C	LP	LP	C	C	C	C	C	E	C	C	LP	LP	C
Fig. c	E	C	C	C	E	C	C	C	E	C	E	E	C	C	E	E	C	E	E	C	C	C	EC	C	C	E	E
a) CQ	E	E	EC	C	EC	C	E	E	C	C	C	C	EC	C	EC	C	E	C	E	E	C	C	C	E	C	C	C
b) CQ	E	C	C	C	EC	C	C	E	C	E	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	E	C	C	C	C	C
c) CQ	E	C	C	C	E	C	C	C	E	C	E	E	C	C	E	E	C	E	E	C	C	C	EC	C	C	E	E

LEGENDA

E: Erra.
C: certa
EC: Erra a atividade e depois a resolve corretamente.
LP: Refleti a figura em relação ao lado perpendicular ao eixo de simetria.
CQ: Contagem de quadradinhos.

QUADRO DE RESPOSTAS DA ATIVIDADE 3

CATEGORIA II - LÁPIS E PAPEL

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	A16	A17	A18	A19	A20	A21	A22	A23	A24	A25	A26	A27
Certa	N	N	N	C	N	C	N	N	N	C	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N
Ref.	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N
R/T	N	S	S	N	S	N	N	S	S	N	S	N	N	N	S	N	N	N	S	S	N	N	S	S	N	S	N
DP	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N
Dobra	N	N	N	S	N	N	N	N	N	S	N	N	N	S	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N
Fecha	S	N	N	N	N	N	S	N	N	N	N	N	S	S	N	S	S	S	N	N	N	N	N	N	S	N	S
Aberta	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	S	N	N	N	N	N	N	N	N	S	S	N	N	N	N	N

LEGENDA
Aberta: uma figura qualquer aberta.
C: certa.
DP: desconsideração da parte da figura que ultrapassa o eixo de simetria.
Dobra: utilização de dobradura.
Fecha: arruma uma maneira de simplesmente fechar a figura.
Ref.: referência horizontal, referência vertical e referência diagonal.
R/T: reflexão seguida de deslocamento da figura.
S: sim.

QUADRO DE RESPOSTAS DA ATIVIDADE 4

CATEGORIA II - LÁPIS E PAPEL

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	A16	A17	A18	A19	A20	A21	A22	A23	A24	A25	A26	A27
Certa	N	N	N	DP	N	N	DP	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	C	N	C	N	N
Fig/E	S	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N
PB	PB	N	PB	N	PB	N	N	PB	PB	N	PB	PB	PB	N	PB	PB	PB	PB	N	PB	PB	PB	N	N	N	N	N
EM	N	N	N	N	N	N	N	N	N	EM	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N
Ref.	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N
R/T	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N
DP	N	N	N	S	N	N	S	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N
Dobra	N	N	S	N	N	N	S	S	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	S	N	S	N	N

LEGENDA
C: Acerta.
Dobra: Utilização de dobradura.
DP: Desconsideração da parte da figura que ultrapassa o eixo de simetria.
EM: Eixo de simetria paralelo ao lado maior do triângulo dado.
Fecha: Arruma uma maneira de simplesmente fechar a figura.
Fig/E: Figura conjuntamente com o eixo.
N: não.
PB: Resposta no prolongamento da base do triângulo dado.
Ref.: Referência horizontal, Referência vertical e Referência diagonal.
R/T: Reflexão seguida de deslocamento da figura.
S: Sim.

QUADRO DE RESPOSTAS DA ATIVIDADE 5

CATEGORIA II - LÁPIS E PAPEL

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	A16	A17	A18	A19	A20	A21	A22	A23	A24	A25	A26	A27
a)	C	C	CP	C	C	T	C	CP	C	C	C	AB	C	CP	C	C	AB	R	CP	C	C	C	C	C	C	C	C
b)	DP	DP	CP	DP	C	FE	DP	CP	FE	DP	DP	AB	C	CP	FE	C	AB	FE	CP	DP	DP	DP	DP	DP	C	DP	DP
c)	AB	C	CP	C	C	RV	RV	CP	RH	AB	RH	AB	RHE	CP	AB	C	AB	AB	CP	RV	AB	RV	RHE	RA	C	RV	RV

LEGENDA:

AB: Atividade em branco.
C: Certa.
CP: Reflexão no papel transparente.
FE: Figura conjuntamente com eixo.
R: Rotação da figura.
RA: Reflexão transladada da parte azul.
RV: Reflexão transladada da parte vermelha.
RH: Referência horizontal.
RHE: Referência horizontal da figura conjuntamente com seu eixo.
RP: Reflexão de parte da figura.
T: Translada a figura horizontalmente.

QUADRO DE RESPOSTAS DA ATIVIDADE 6

CATEGORIA II - LÁPIS E PAPEL

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	A16	A17	A18	A19	A20	A21	A22	A23	A24	A25	A26	A27
Certa	C	N	N	N	C	C	C	C	N	N	N	N	C	C	N	N	C	N	N	N	C	C	C	N	C	N	N
Ref. H	N	N	N	N	N	N	N	N	AH	N	N	AH	N	N	N	AH	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N
Ref. V	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N
Ref. D	N	N	AD	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	S	S	N	S	N	N	N	N	N	S	N	N	N
R/T	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N
Fecha	S	S	N	S	N	N	N	N	S	S	S	S	N	N	N	N	N	N	N	S	N	N	S	N	S	N	N
Dobra	S	S	S	S	S	S	S	S	S	N	N	N	S	S	S	N	S	S	N	N	S	S	S	S	S	S	S
Reta auxiliar	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	S	N	N	N	N	S	N	N	N	N	N	N	N	N

LEGENDA

C: Acerta.
RP: Refleti alguns pontos e une-os.
AD: Refleti alguns pontos diagonalmente.
AH: Refleti alguns pontos horizontalmente.
RD: Referência diagonal.
RV: Referência vertical.
RH: Referência horizontal.

QUADRO DE RESPOSTAS DA ATIVIDADE 7

CATEGORIA II - LÁPIS E PAPEL

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	A16	A17	A18	A19	A20	A21	A22	A23	A24	A25	A26	A27
Certa	N	C	N	C	C	C	C	C	C	N	C	N	C	C	N	C	C	N	C	N	C	N	C	C	C	N	C
Ref. H	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	RH	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N
Ref. V	N	N	RV	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N
Ref. D	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	RD	N	N	N	N	N	N	N	N	N
RR	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	RR	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N
Fecha	S	S	N	S	N	N	N	N	N	S	N	N	N	N	N	N	N	N	S	S	N	S	N	N	S	S	N
Dobra	N	S	N	S	S	S	S	S	S	S	S	N	S	S	N	S	S	S	S	N	S	N	S	S	S	N	S
Cria E	N	N	N	N	N	N	N	N	N	EH	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N

LEGENDA

C: Acerta.
EH: Cria eixo horizontal
RH: Referência horizontal
RV: Referência Vertical
RD: Referência Diagonal
RR: Reflexão no prolongamento do segmento.
S: Sim.

QUADRO DE RESPOSTAS DA ATIVIDADE 8

CATEGORIA II - LÁPIS E PAPEL

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	A16	A17	A18	A19	A20	A21	A22	A23	A24	A25	A26	A27
Certa	N	CA	N	CA	CA	CA	N	CA	N	N	CA	CA	CA	CA	N	N	CA	N	N	CA	CA	N	CA	CA	CA	CA	CA
Ref. H	N	N	N	N	N	N	RH	N	N	RH	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N
Ref. V	N	N	N	N	N	N	N	N	RV	N	N	N	N	N	N	N	N	N	RV	N	N	N	N	N	N	N	N
Ref. D	RD	N	RD	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	RD	RD	N	RD	N	N	N	N	N	N	N	N	N
Dobra	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N
REC	RC	E	R	E	RC	R	RC	RC	R	RC	R	R	REC	E	R	R	REC	E	EC	R	EC	R	EC	RE	E	R	E
MÃO	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N
VISÃO	S	N	N	S	S	S	S	S		S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S

LEGENDA
CA: Acerta.
C: Compasso.
RH: Referência horizontal.
RV: Referência vertical.
RD: Referência diagonal.
REC: Régua, esquadro e compasso.
R: Régua.
RE: Régua e esquadro.
RC: Régua e compasso.
EC: Esquadro e compasso
E: Esquadro.
AH: Refleti alguns pontos horizontalmente.

CATEGORIA I

Computador

QUADRO DE RESPOSTAS DA ATIVIDADE 1

CATEGORIA I - COMPUTADOR

ATIVIDADE 1										
	A1	**A6**	**A7**	**A9**	**A12**	**A14**	**A15**	**A18**	**A21**	**A26**
Figura a	EPL	EPL	ED	EPL	EPL	SE	EPL	EPL	EPL	SE
Figura b	SE	ELMA	SE	ELME	SE	SE	ELMA	SE	SE	SE
Figura c	SE	SE	SE	4	SE	SE	SE	SE	SE	D-AD
Figura d	ED	4Q	ED	4Q	4Q	4Q	4Q	4Q	4Q	D1

LEGENDA

EPL: eixo passando pelos lados paralelos.
SE: sem eixo de simetria.
ED: duas diagonais.
ELMA: dois eixos passando pelos pontos médios dos lados opostos.
ELME: eixo passando pelos pontos médios dos lados menores.
D2: diagonal 2, conforme figura 6.6, p.190.
4 eixos conforme figura 6.8b, p.192 .
D-AD: eixo passando pelos pontos A e D (conforme figura 6.8a, p.192).
4Q: quatro eixos do quadrado.
D1b: diagonal 1, conforme figura 6.6, p.190.
D1: diagonal do quadrado, eixo vertical.

QUADRO DE RESPOSTAS DA ATIVIDADE 2

CATEGORIA I - COMPUTADOR

ATIVIDADE 2										
	A1	**A6**	**A7**	**A9**	**A12**	**A14**	**A15**	**A18**	**A21**	**A26**
Figura a	V	SE	SE	SE	SE	SE	SE	SE	SE	SE
Figura b	PMV	EI	EI	EI	EI	PMLI	EI	PMV	EI	EI
Figura c	SE	V	HV	H	H	HV	SE	H	HV	H
Figura d	V	HV	HV	HV	V	HV	HV	V	HV	HV

LEGENDA

EI: eixo inclinado.
H: horizontal.
HV: eixos vertical e horizontal.
PMV: ponto médio dos vértices mais próximos e eixo inclinado.
PMLI: ponto médio do lado menor e eixo inclinado.
V: eixo vertical entre as figuras.
SE: sem eixo de simetria.

CATEGORIA II

Computador

QUADRO DE RESPOSTAS DA ATIVIDADE 1

CATEGORIA II - COMPUTADOR

ATIVIDADE 1										
	A1	**A6**	**A7**	**A9**	**A12**	**A14**	**A15**	**A18**	**A21**	**A26**
Certa	N	N	C	N	N	N	N	N	EC	N
Ref. H	N	N	N	RH	N	N	N	N	N	RH
Ref. V	N	RV	N	N	N	N	N	N	N	N
Ref. D	RD	N	N	N	N	N	N	RD	N	N
Outros	N	N	N	N	PD	RPC	RPC	N	N	N
Simetria axial	N	N	SA	N	N	N	N	N	SA	N

LEGENDA

EC: erra e acerta.
PD: posiciona a circunferência imagem próxima da dada.
RPC: reta passando pelo centro da circunferência dada.
RH: referência horizontal.
RV: referência vertical.
RD: referência diagonal.

QUADRO DE RESPOSTAS DA ATIVIDADE 2

CATEGORIA II - COMPUTADOR

ATIVIDADE 2										
	A1	**A6**	**A7**	**A9**	**A12**	**A14**	**A15**	**A18**	**A21**	**A26**
Certa	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N
Outros	N	N	N	N	N	RA	N	N	N	N
Simetria axial	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N

LEGENDA

N: não.
RA: reta auxiliar.
RH: referência horizontal.
RV: referência vertical.
RD: referência diagonal.

QUADRO DE RESPOSTAS DA ATIVIDADE 3

CATEGORIA II - COMPUTADOR

ATIVIDADE 3										
	A1	**A6**	**A7**	**A9**	**A12**	**A14**	**A15**	**A18**	**A21**	**A26**
Certa	N	N	C	N	N	N	N	N	N	N
Simetria axial	N	N	S	N	N	N	N	N	N	N

LEGENDA

C: certa.
RH: referência horizontal.
RV: referência vertical.
RD: referência diagonal.
S: simetria axial.

QUADRO DE RESPOSTAS DA ATIVIDADE 4

CATEGORIA II - COMPUTADOR

ATIVIDADE 4										
	A1	**A6**	**A7**	**A9**	**A12**	**A14**	**A15**	**A18**	**A21**	**A26**
Certa	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P
PM	PM	NP	PM	PM	PM	NP	PM	PM	PM	NP
RA	N	RA	N	RA	N	RA	N	N	N	N
ferramenta	*Ps*	S	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*Ps*	*S*
Simetria axial	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N

LEGENDA

P: resultado próximo do correto.
PM: preservação de medidas.
NP: não preservação de medidas.
RA: reta auxiliar.
Ps: ferramentas utilizadas: ponto e segmento.
S: ferramenta utilizada segmento.
N: não.

QUADRO DE RESPOSTAS DA ATIVIDADE 5 - Primeira Figura

CATEGORIA II - COMPUTADOR

* Procedimentos diferentes para cada figura que compõe esta atividade.

ATIVIDADE 5 – Primeira figura										
1ª Figura	**A1**	**A6**	**A7**	**A9**	**A12**	**A14**	**A15**	**A18**	**A21**	**A26**
Certa	N	C	N	N	N	N	C	N	N	N
PM	PM	PMS	PM	PM	PM	PM	PMS	NP	PM	PM
Ref. H	RH	N	N	N	RH	N	N	N	RH	N
R	N	N	R	R	N	R	N	R	N	N
EF	N	N	N	N	N	N	N	N	N	EF
Simetria axial	NS	S	NS	NS	NS	NS	S	NS	NS	NS

LEGENDA
C: certa.
EF: eixo na figura.
PM: preservação de medidas.
PMS: preservação de medidas por utilizar ferramenta *simetria axial*.
RH: referência horizontal.
R: reflexão sem se preocupar com a eqüidistância da figura ao eixo.
S: ferramenta utilizada *simetria axial*.
N: não
NS: não utilizaram a ferramenta *simetria axial.*
NP: não preservou as medidas.

QUADRO DE RESPOSTAS DA ATIVIDADE 5 - Segunda Figura

CATEGORIA II - COMPUTADOR

* Procedimentos diferentes para cada figura que compõe esta atividade.

ATIVIDADE 5 – Segunda figura										
2ª Figura	**A1**	**A6**	**A7**	**A9**	**A12**	**A14**	**A15**	**A18**	**A21**	**A26**
Certa	N	C	N	N	N	N	C	N	N	N
PM	NP	PMS	NP	NP	NP	NP	PMS	NP	NP	NP
Ref. H	N	N	N	N	RH	N	N	RH	N	N
RF	RF	N	N	RF	N	N	N	N	RFT	N
EF	N	N	N	N	N	N	N	N	N	EF
Simetria axial	N	S	N	N	N	N	S	N	N	N
Corta eixo	N	S	N	S	N	N	S	N	N	N

LEGENDA
C: certa.
EF: eixo na figura.
PMS: preservação de medidas por utilizar ferramenta *simetria axial*.
N: não.
NP: não preservação de medidas.
RH: referência horizontal.
RF: reflexão da figura, sem se preocupar com a eqüidistância e com medidas desta.
RF: reflexão e translação da figura final.
S: ferramenta utilizada *simetria axial*.
N: não utilizaram a ferramenta *simetria axial*.

ANEXO III

Pesquisa de Denise Grenier

Figuras da pesquisa de Grenier- França

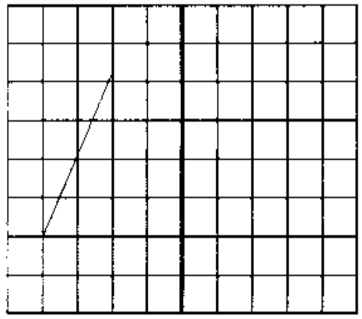


Figura 1

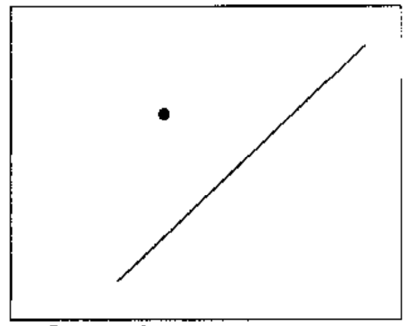


Figura 2

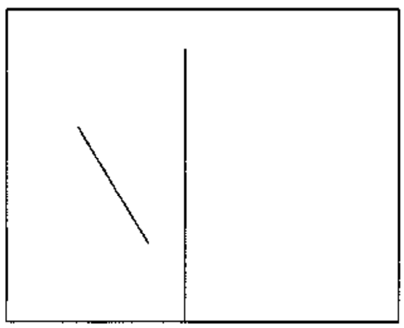


Figura 3

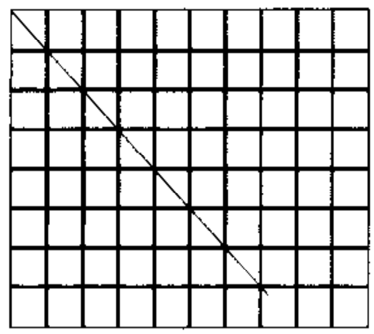


Figura 4

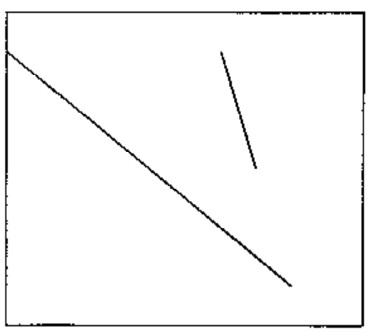


Figura 5

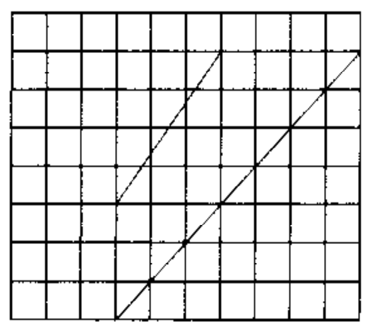


Figura 6

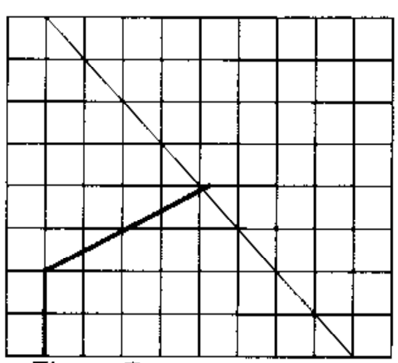


Figura 7

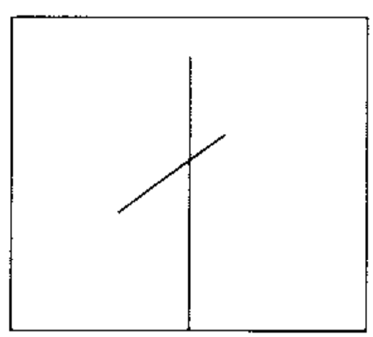


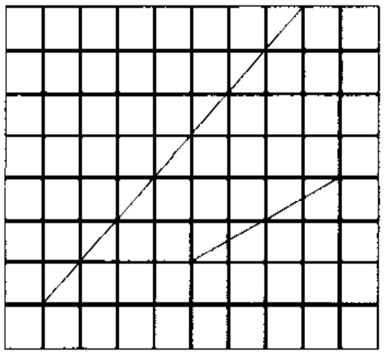
Figura 8

ANEXO IV

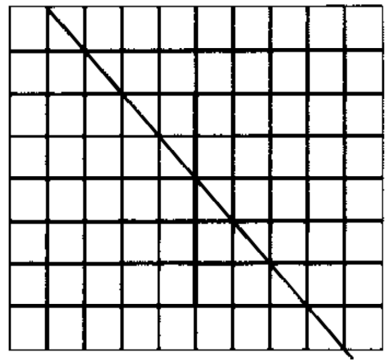
Algumas Questões da Pesquisa de Mabuchi

4. No quadriculado dado determine o simétrico do segmento (em verde), em relação à reta **r**

a)

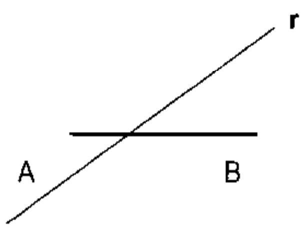


b)

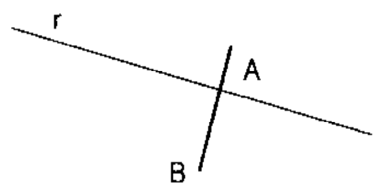


5. Determine o simétrico do segmento AB, em relação `reta **r**.

a)

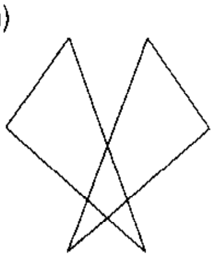


b)

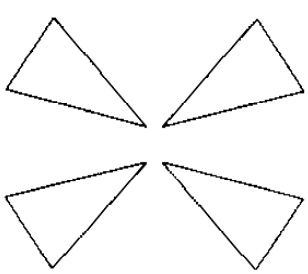


6. Tudo o que estiver na mesma cor representa uma só figura. Indique com a letra S as figuras que são simétricas e com N as que não são simétricas. Naquelas que forem simétricas, determine o eixo de simetria, indicando, se possível, como você achou esses eixos.

a)



b)



c)

NAN

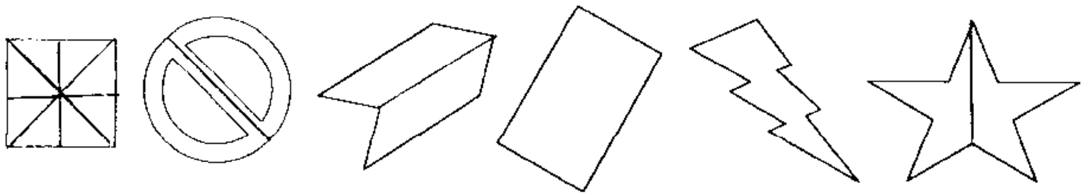
ANEXO V

Algumas Atividades dos Alunos

CATEGORIA I

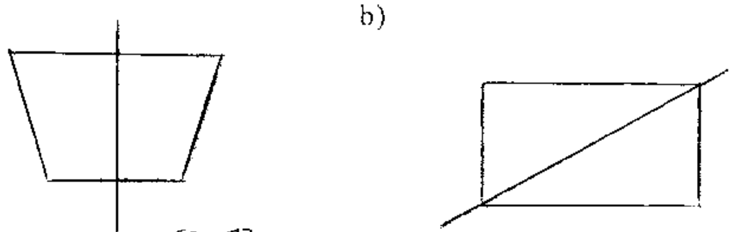
Lápis e Papel

ATIVIDADE 1: Observe as figuras abaixo. Sem dobrá-las ou recortá-las, risque com caneta e régua os eixos de simetria das figuras dadas, caso elas possuam.



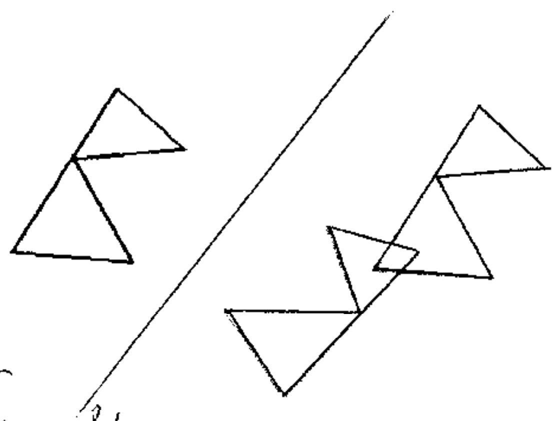
ATIVIDADE 2: Observe cada figura abaixo e decida se as retas traçadas são eixos de simetria. Justifique sua resposta.

a) b)



Resposta: na figura "a" o eixo está certo e na figura "B" está errado porque não está dividindo o retângulo em duas partes iguais

ATIVIDADE 3: Qual é o simétrico da figura preta em relação ao eixo de simetria e? A figura azul ou a figura vermelha?



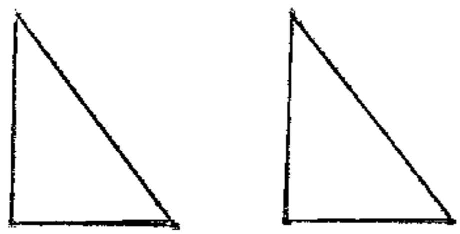
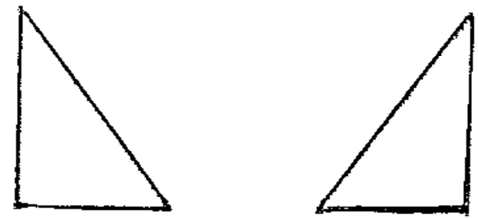
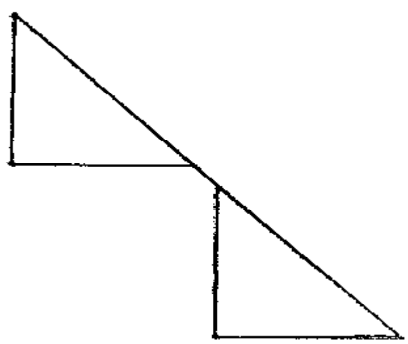
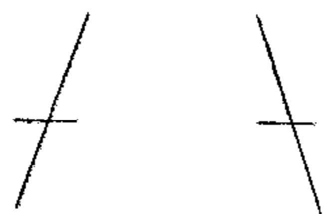
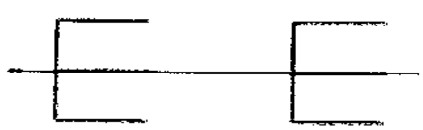
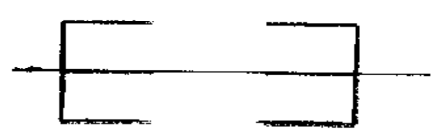
Resposta: Vermelha

Justifique porque você escolheu a figura azul ou porque você escolheu a figura vermelha.

Porque ela se encaichan.

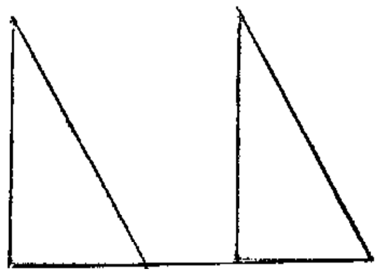
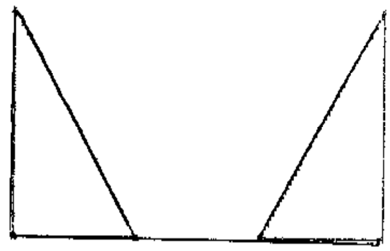
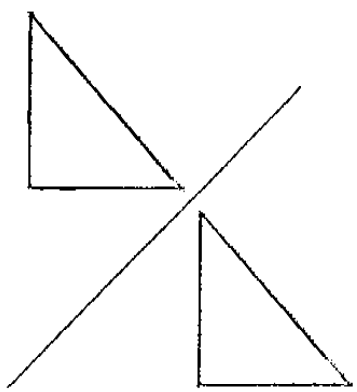
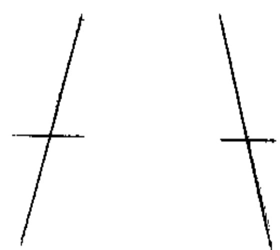
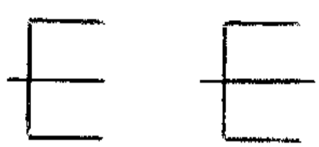
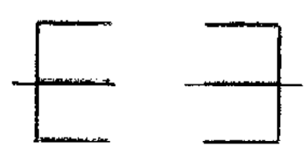
ATIVIDADE 4

Com caneta tracem o(s) eixo(s) de simetria, caso existam, utilizando-se de instrumentos de desenho à sua escolha. Justifique sua escolha por este material.

Atividade a	**Atividade b**
	
Atividade c	**Atividade d**
	
Atividade e	**Atividade f**
	

ATIVIDADE 4

Com caneta tracem o(s) eixo(s) de simetria, caso existam, utilizando-se de instrumentos de desenho à sua escolha. Justifique sua escolha por este material.

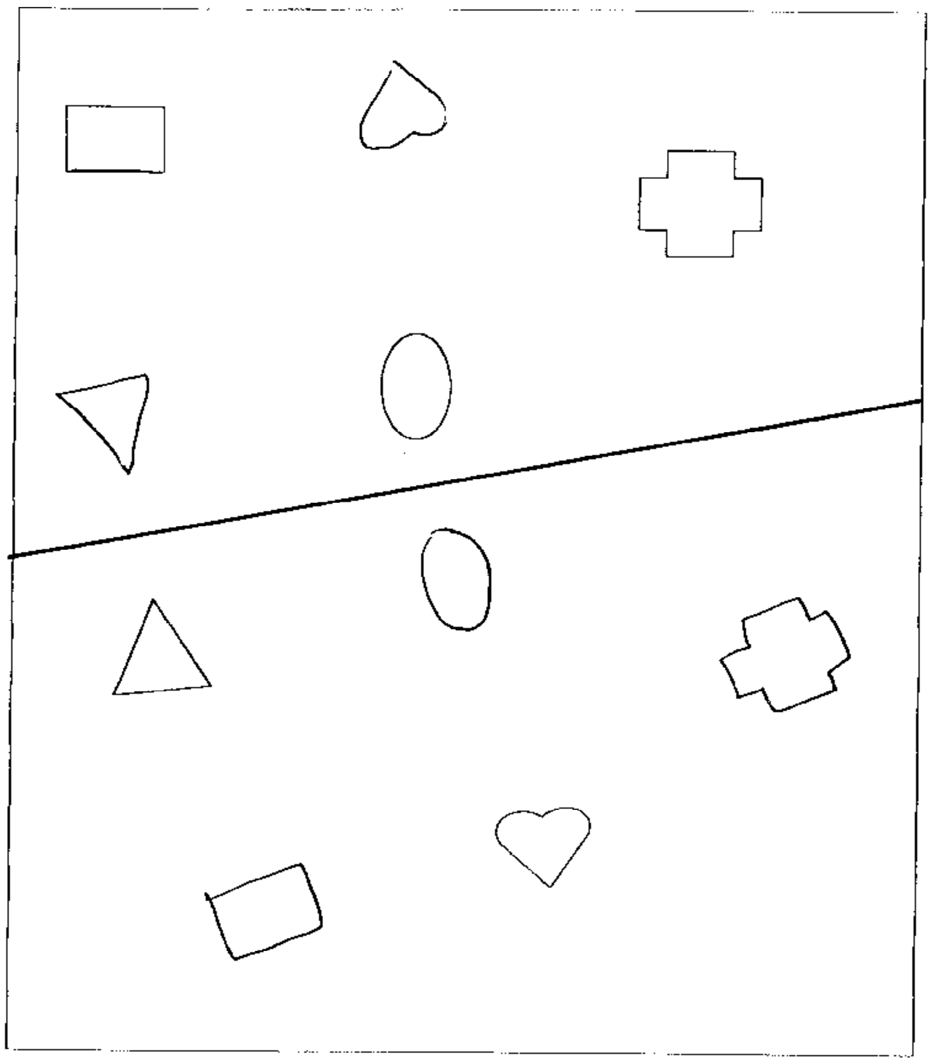
Atividade a	**Atividade b**
	
Atividade c	**Atividade d**
	
Atividade e	**Atividade f**
	

CATEGORIA II

Lápis e Papel

ATIVIDADE 1

Faça a reflexão das figuras dadas em relação ao eixo de simetria (reta preta). Você pode utilizar-se do artifício de dobrar no eixo de simetria.

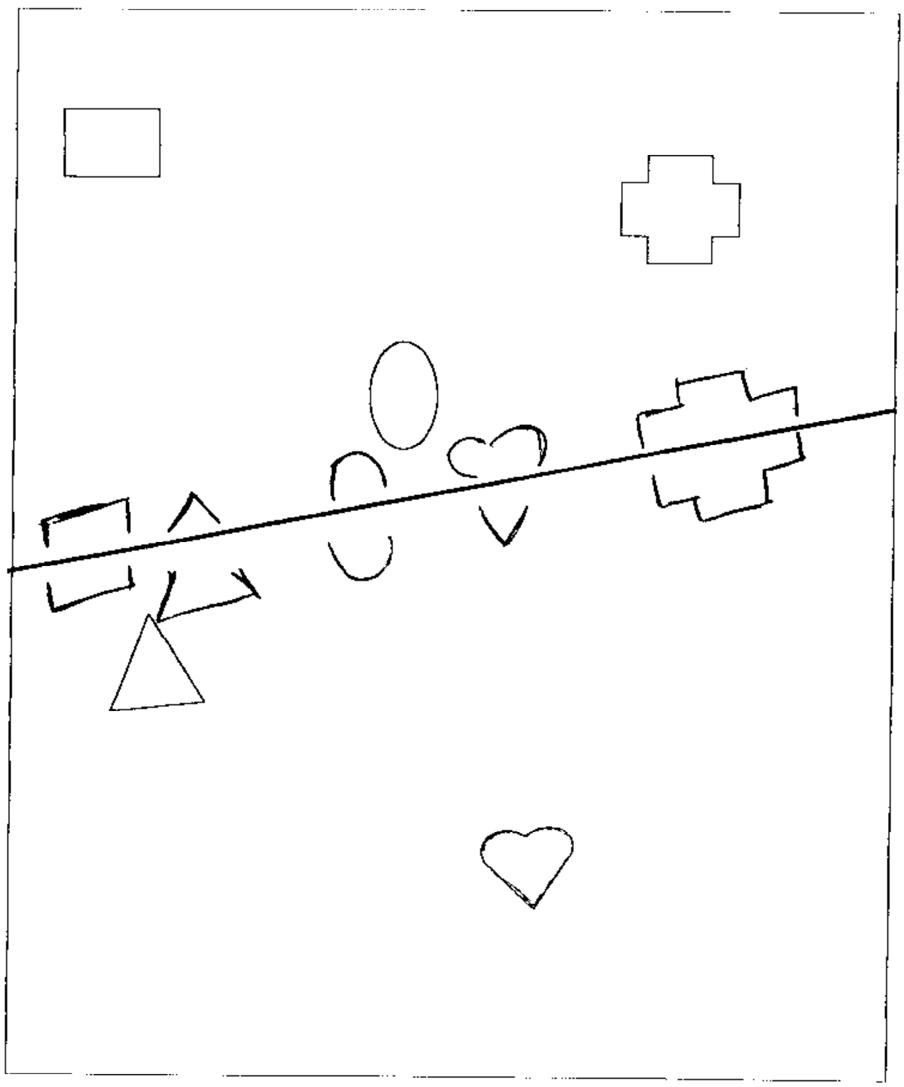


Continuação da atividade 1 – Categoria II

Analise a figura dada e a que você desenhou. Elas são ditas simétricas em relação ao eixo de simetria. Enuncie algumas propriedades (ou características) de figuras simétricas.

ATIVIDADE 1

Faça a reflexão das figuras dadas em relação ao eixo de simetria (reta preta). Você pode utilizar-se do artifício de dobrar no eixo de simetria.



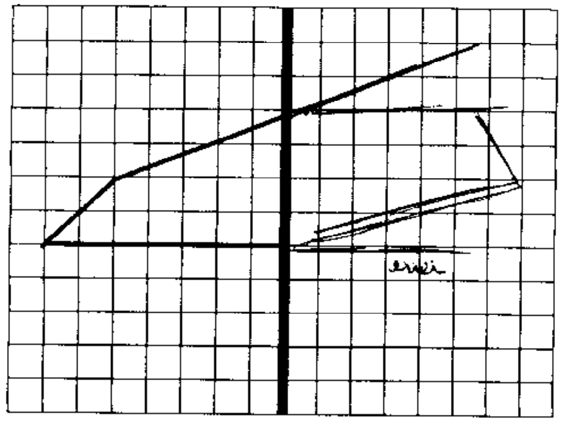
Continuação da atividade 1 – Categoria II

Analise a figura dada e a que você desenhou. Elas são ditas simétricas em relação ao eixo de simetria. Enuncie algumas propriedades (ou características) de figuras simétricas.

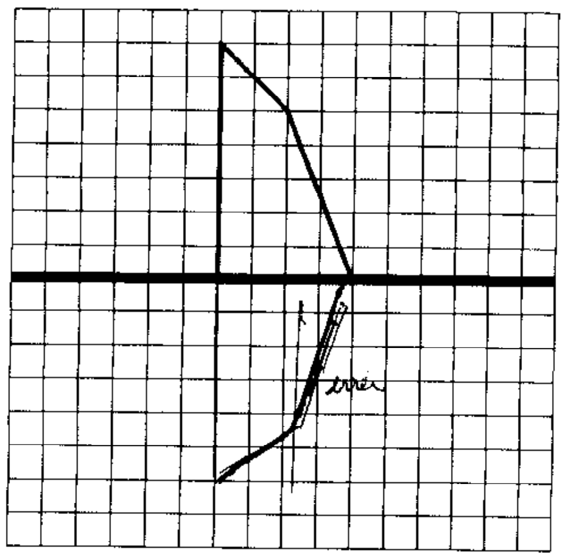
ATIVIDADE 2

As figuras dadas são simétricas em relação a reta preta (eixo de simetria). Desenhe a outra parte.

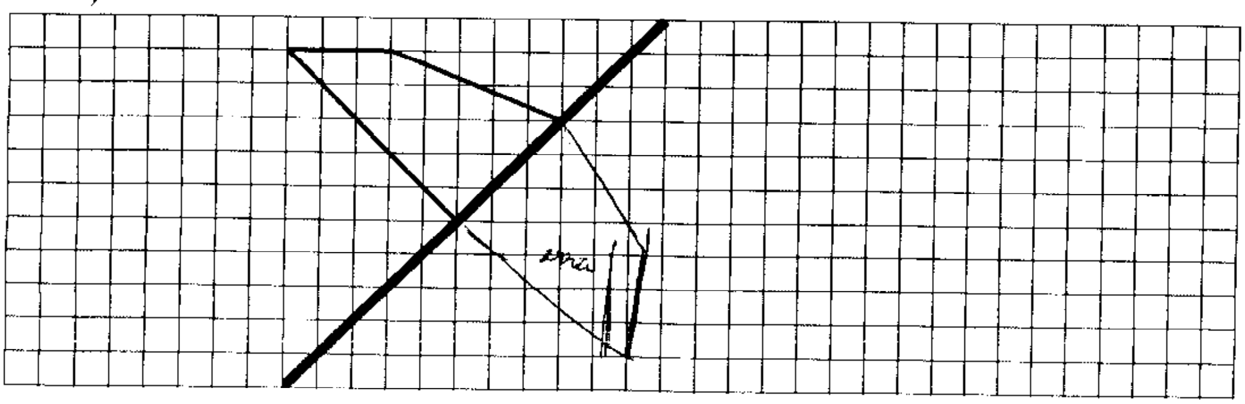
a)



b)

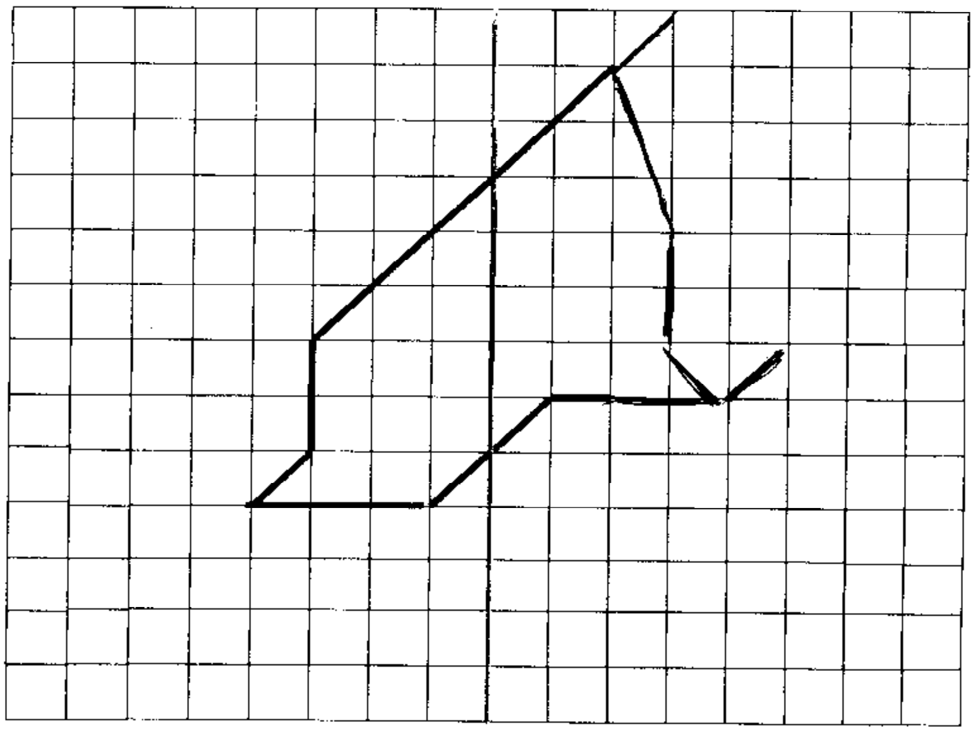


c)



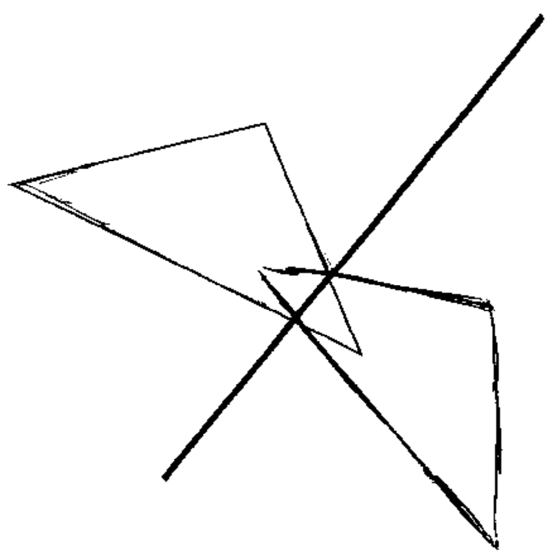
ATIVIDADE 3

Faça a reflexão da figura em relação a reta preta dada.



ATIVIDADE 4

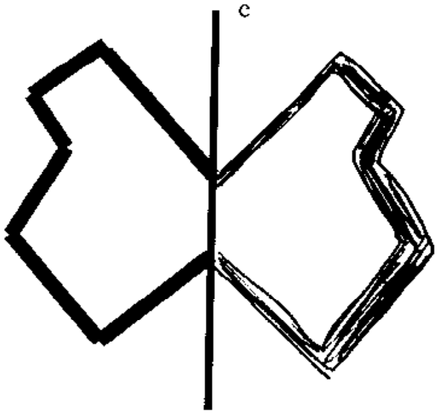
Faça a reflexão da figura em relação a reta preta dada.



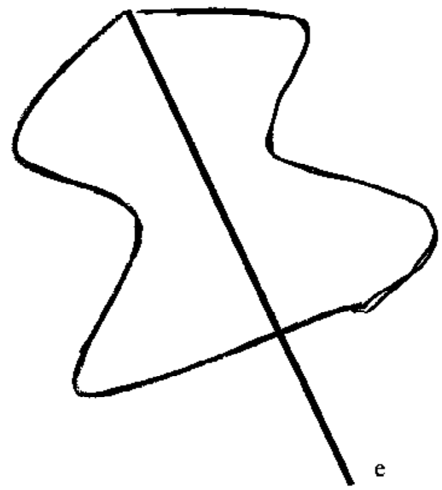
ATIVIDADE 5:

Vocês estão recebendo uma folha de papel transparente e esta folha de sulfite contendo "metades" desenhadas de algumas figuras. Utilize o papel transparente para fazer a reflexão das figuras em relação ao eixo e.

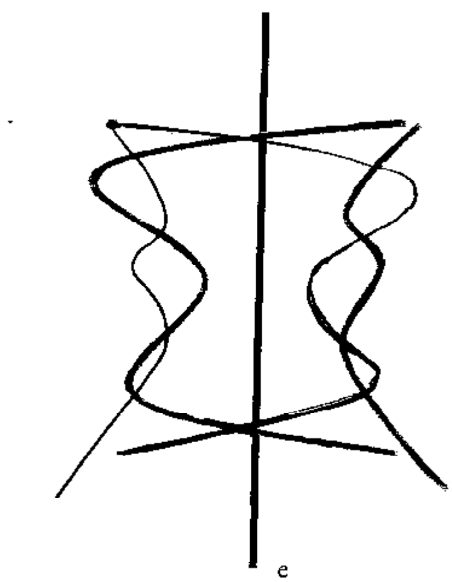
a)



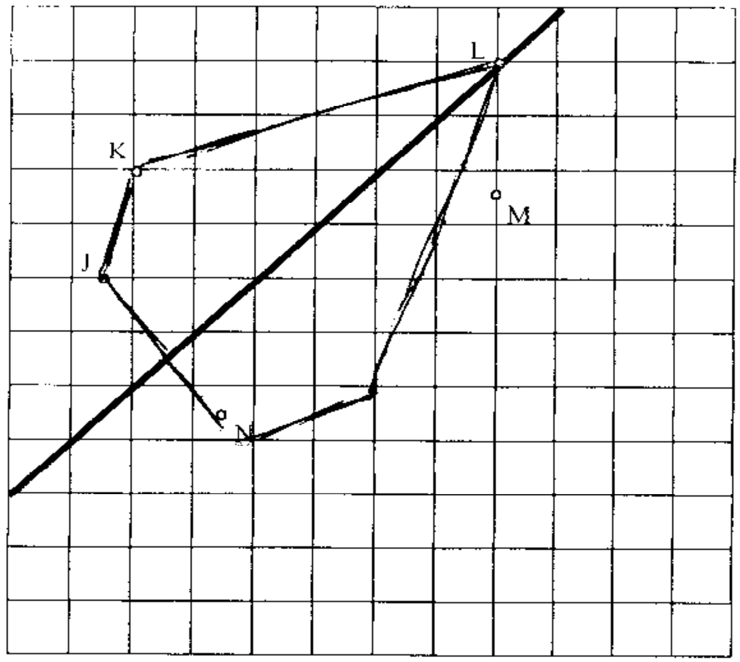
b)



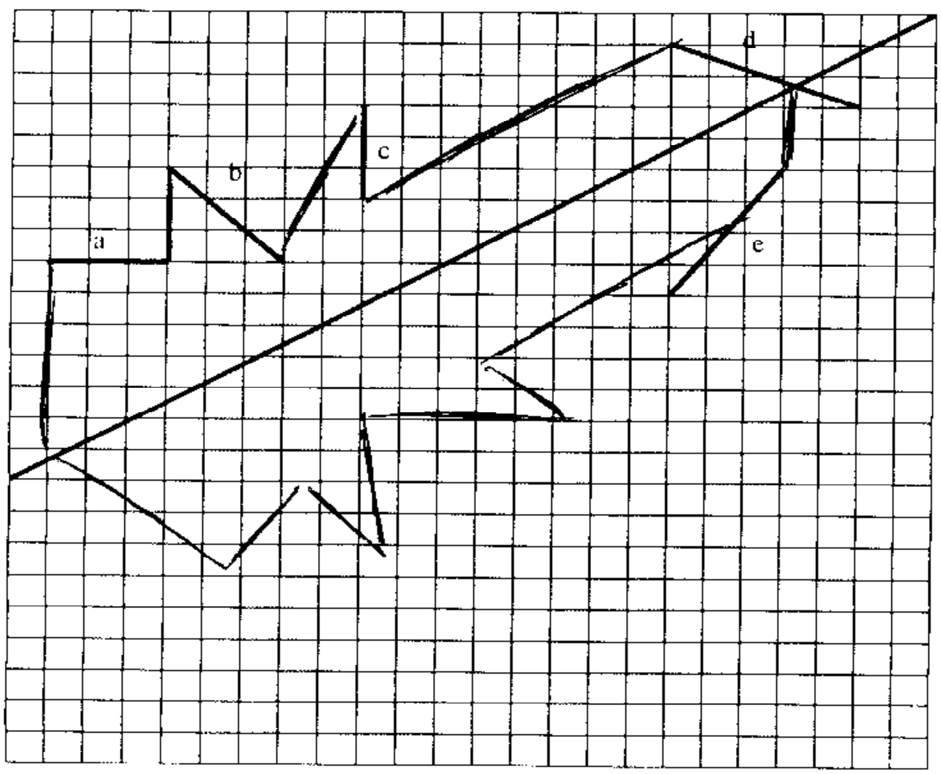
c)



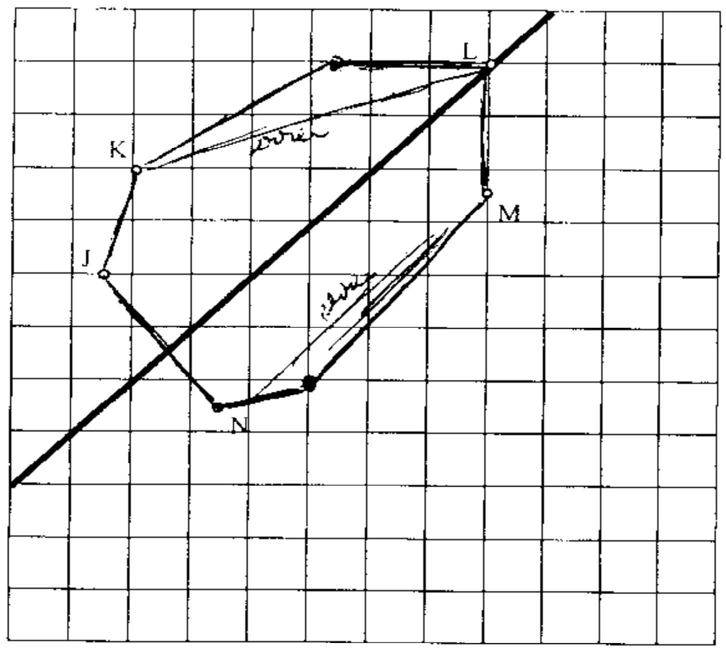
ATIVIDADE 6: Faca o simétrico de cada ponto dado, considerando a linha preta o eixo de simetria.



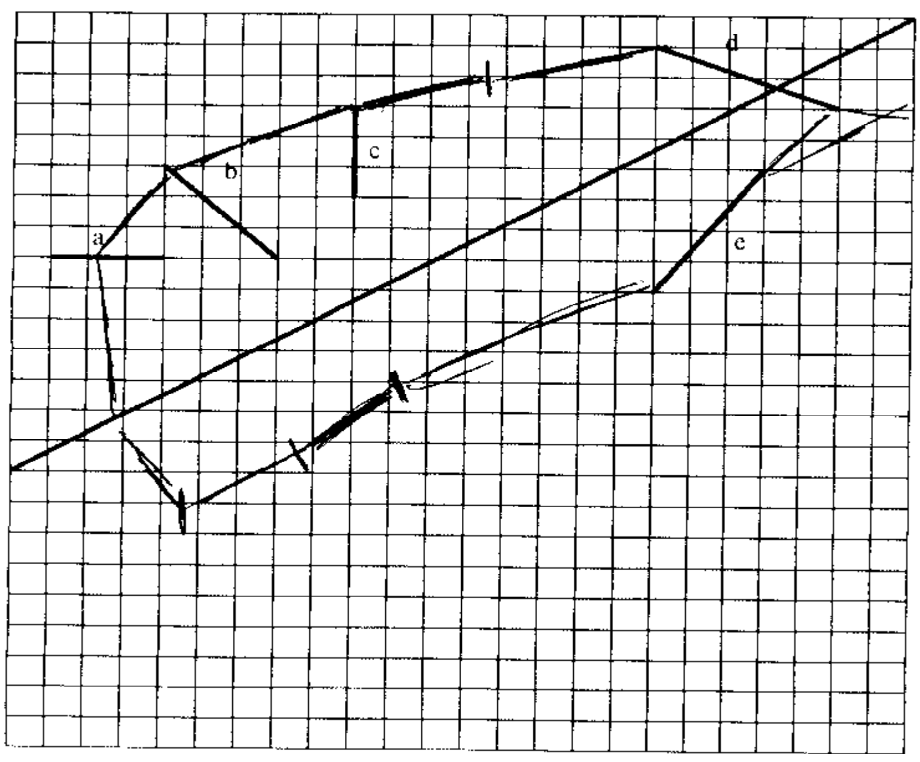
ATIVIDADE 7: A reta preta inclinada é o eixo de simetria. Faça a reflexão de cada segmento em relação a esta reta.



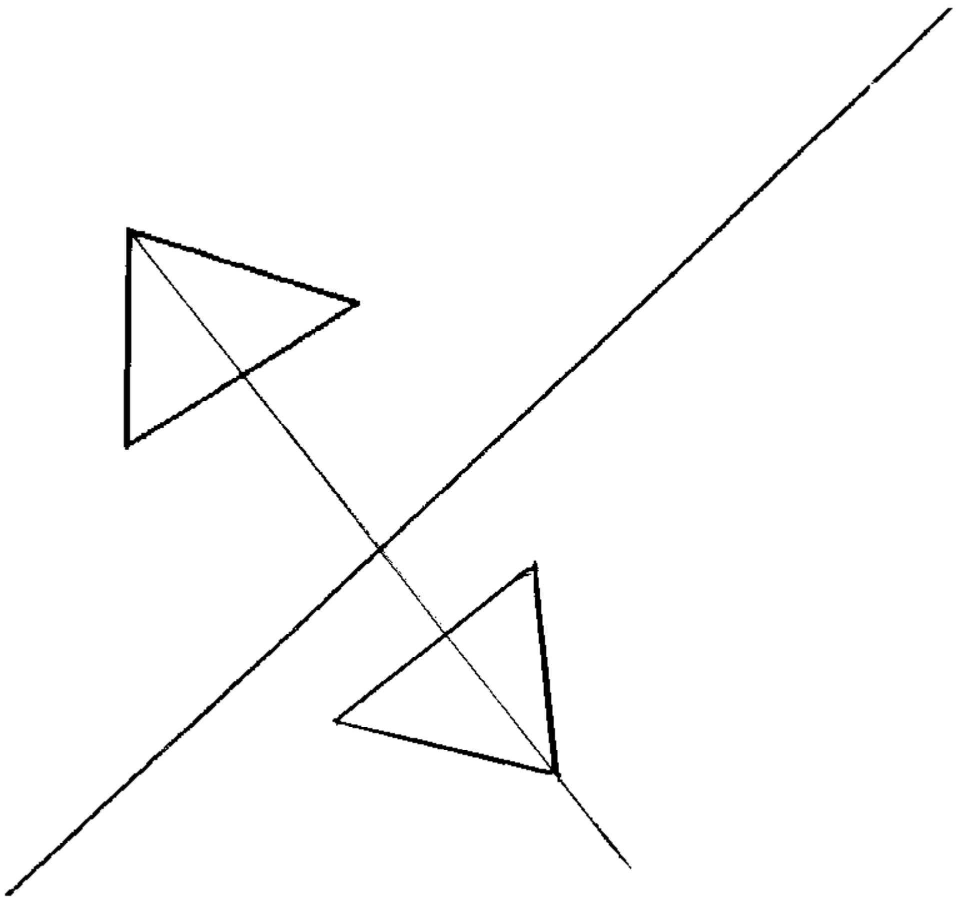
ATIVIDADE 6: Faça o simétrico de cada ponto dado, considerando a linha preta o eixo de simetria.



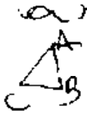
ATIVIDADE 7: A reta preta inclinada é o eixo de simetria. Faça a reflexão de cada segmento em relação a esta reta.



ATIVIDADE 8: Utilizando-se de ferramentas de precisão: régua, esquadro e compasso, faça a reflexão da figura em relação à reta preta (eixo de simetria). Descreva seu procedimento.



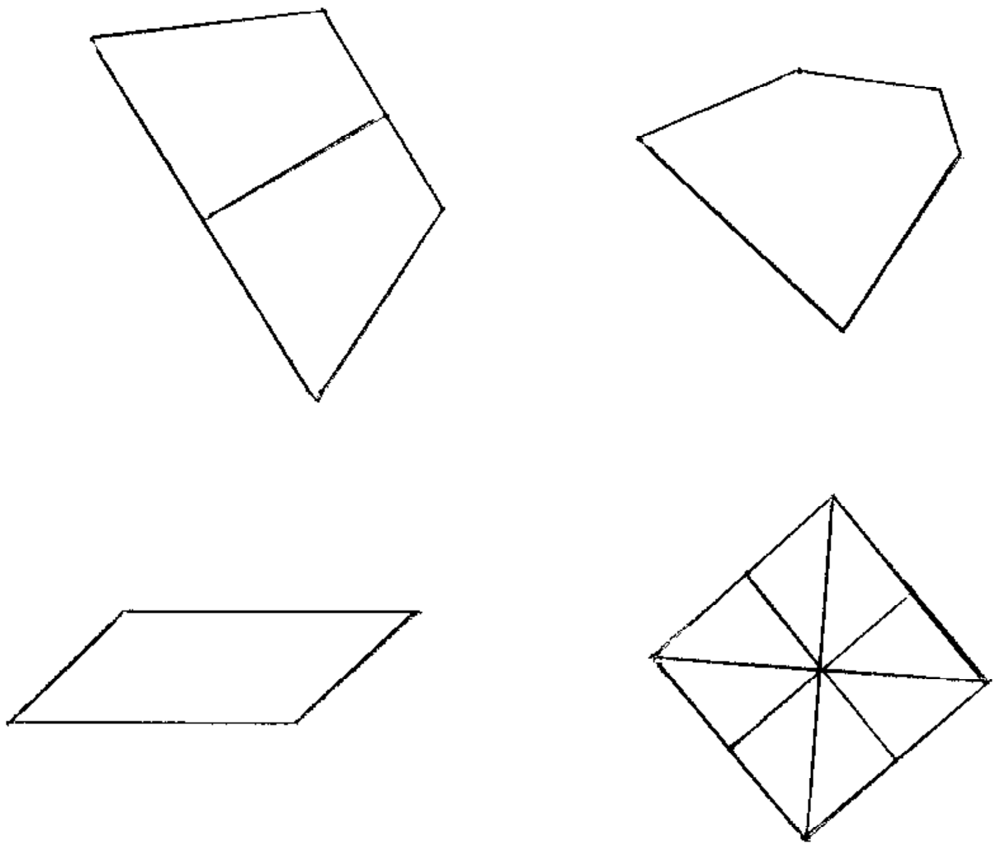
Descreva seu procedimento.

Eu medi com o compaço e
fiz a reta com o esquadro
Ex  eu medi o ponto A no B e o ponto B no C,
e o ponto C no A, depois só fiz a reta com o esquadro.

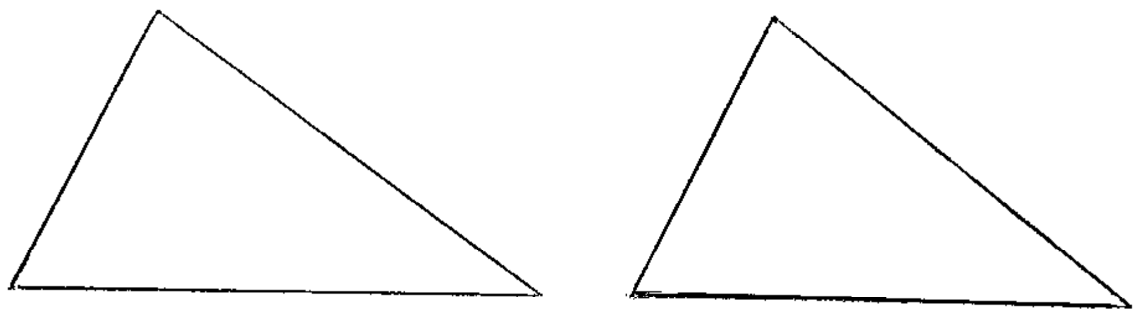
CATEGORIA I

Computador

ATIVIDADE 1: Trace a(s) reta(s) de simetria, caso existam.



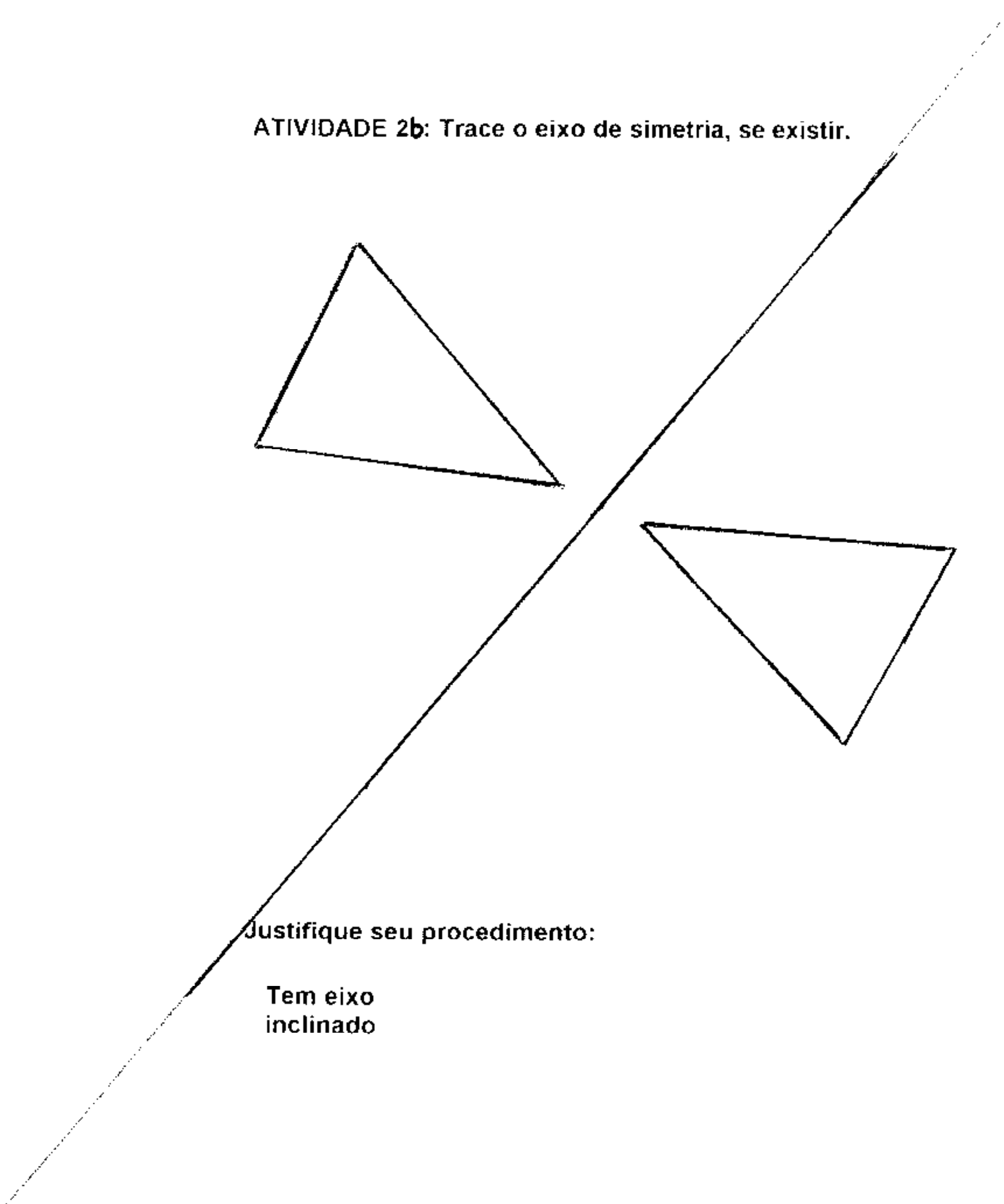
Atividade 2a: Trace o eixo de simetria, se existir.



Justifique seu procedimento:

Não tem eixo

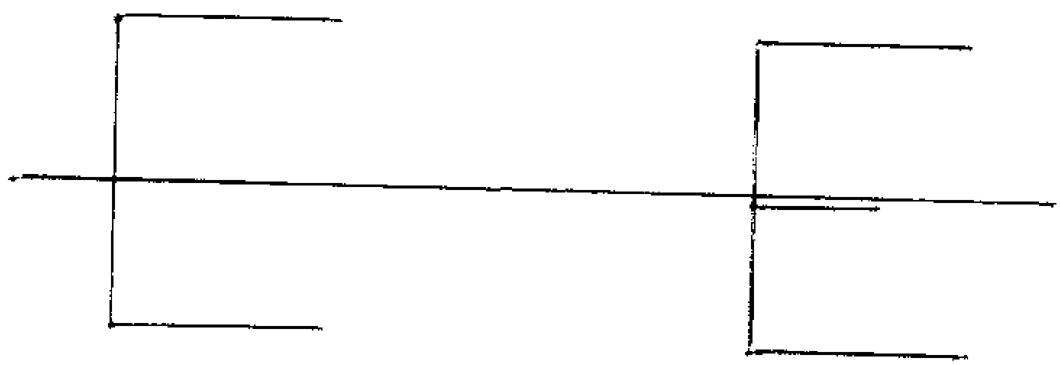
ATIVIDADE 2b: Trace o eixo de simetria, se existir.



Justifique seu procedimento:

Tem eixo
inclinado

ATIVIDADE 2c: Trace a(s) reta(s) de simetria, caso existam.



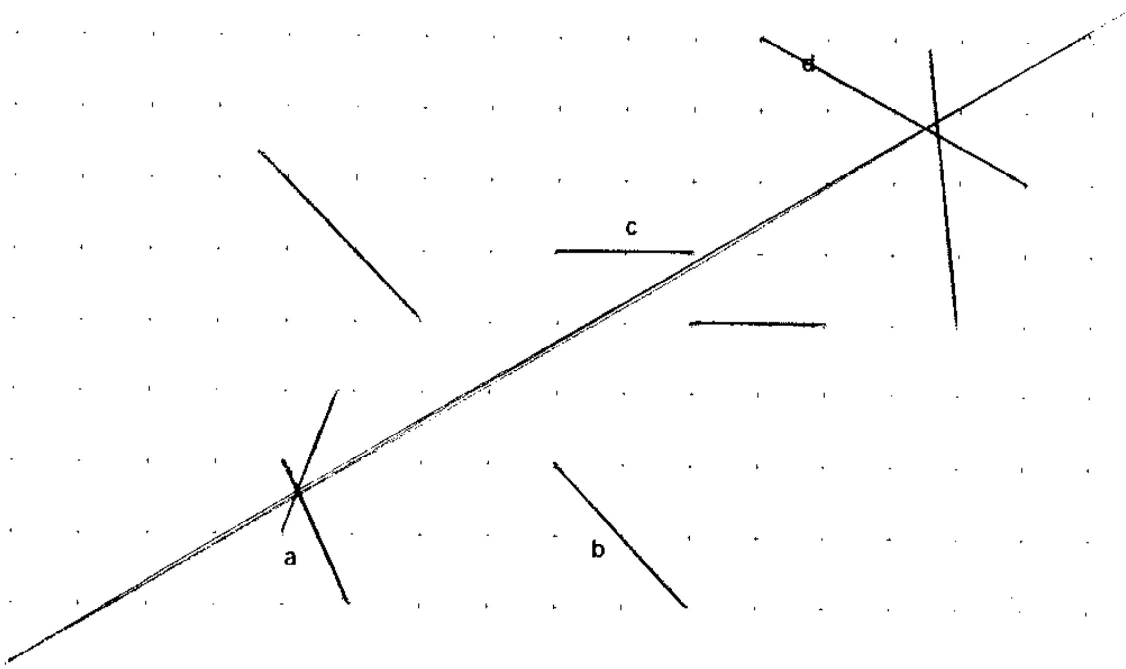
Justifique seu procedimento:

reta horizontal
no meio dela

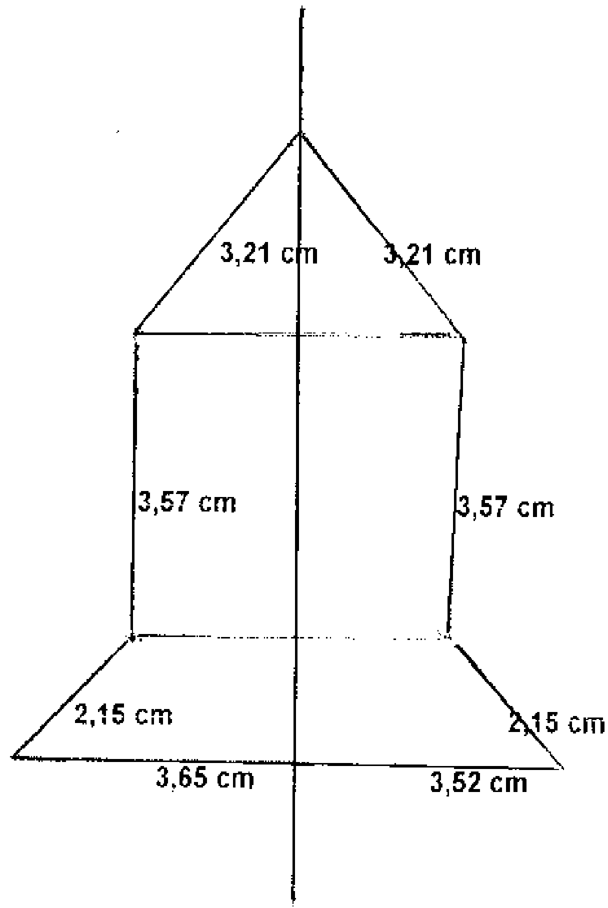
CATEGORIA II

Computador

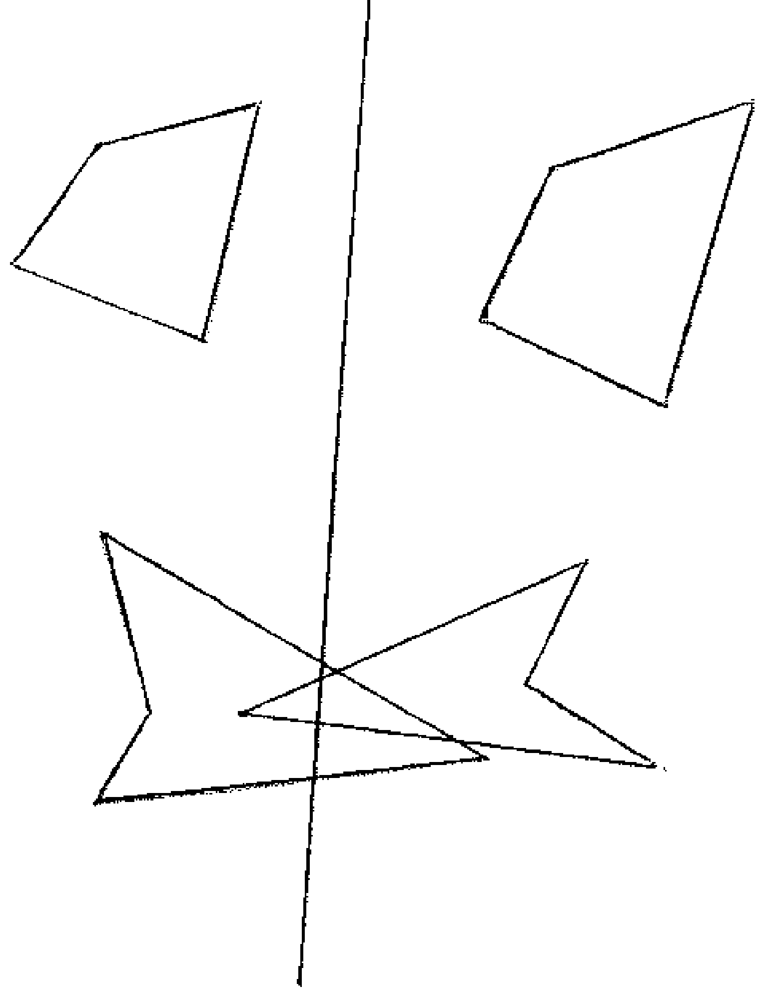
ATIVIDADE 3: Utilizando-se do quadriculado da tela, faça a reflexão dos segmentos da
Descreva como procedeu.



ATIVIDADE 4: Faça a reflexão da figura em relação a reta vermelha, utilizando-se de um recurso do Cabri.



ATIVIDADE 5: Faça a reflexão das figuras em relação a reta dada.



Justifique seu procedimento:

REFERÊNCIAS

Ag ALMOULOUD, S. Fundamentos da Didática Matemática. **Caderno de Educação Matemática**. PUC-SP. v. 3. p. 98-117, 2000.

Ambigramas.cjb.net. **O que é um ambigrama?** 2001. Disponível em: <http://ambigramas.vilabol.uol.com.br>. Acesso em 26 mai. 2005.

ARTIGUE, M. Ingénierie Didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. v. 9, n. 3, p. 281-308, 1988.

BALDIN, Y. Y.; VILLAGRA, G. A. L. **Atividades com Cabri-Géomètre II**. São Carlos: EdUFSCar, 2002.

BIANCHINI, E.; MIANI, M. **Construindo Conhecimentos em Matemática**. 5ª-8ª Séries. São Paulo: Moderna, 2000.

BITTAR, M. O uso de software educacionais no contexto da aprendizagem virtual. In: CAPISANI, D. (Org.). **Educação e arte no mundo digital**. Campo Grande: Ed. UFMS, 2000. p. 77-101.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais***:* 1º e 2º ciclos. Brasília: MEC/SEF, 1997. Disponível em < http://www.mec.gov.br/sef/estrut2/pcn/pdf/livro03.pdf>. Acesso em 12 mai. 2003.

_____ Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais***:* 3º e 4º ciclos. Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em < http://www.mec.gov.br/sef/estrut2/pcn/pdf/matematica.pdf >. Acesso em 12 mai. 2003.

______. Ministério da Educação e do Desporto (MEC). **Guia de Livros Didáticos –** 1ª a 4ª séries- PNLD 98. Brasília: Imprensa Nacional, 1998.

BROUSSEAU, G. Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 7, n. 2, p. 33-115, 1986.

______. Étude locale des processus d’acquisition en situations scolaires. In: ______. **Theory of didactical situations in mathematics**: didactique des mathématiques, 1970-1990. Introduction, p. 1-18, 1997.

CATUNDA, O. et al. **As transformações Geométricas e o Ensino de Geometria**. Salvador*:* Centro Editorial e Didático da UFBA, 1988.

CENTURIÓN, M.; JABUKO, J.; LELLIS, M. **Matemática na Medida Certa**. 5ª-8ª Séries. São Paulo: Scipione, 2003.

DANTAS, M. M. S. **Ensino da Matemática:** um processo entre a exposição e a descoberta. Salvador: EDUFBA, 1987.

______. et al. **As transformações geométricas e o ensino de geometria**. Salvador: EDUFBA, 1996. v. 1.

DERBRE, A.; MOUFFAK, Y. **L´intégration du logiciel Cabri dans lénseignement de la géométrie à l'école primaire*:* Cas de la symétrie axiale**. Mémoire Professionnel, PE2. IUFM, Grenoble, 2004.

DENYS, B.; GRENIER, D. Symetrie orthogonale: des élèves français et japonais face à une même tache de construction. **Petit X**, n. 12, 1986. Não paginado.

DOUADY, R. **A universidade e a didática da matemática***:* os IREM na França. Conferência proferida no IMPA em 05/04/1988 – Departamento de Matemática PUC/RJ.

FERNANDES, S. H. A. A. **Uma análise *Vygotskiana* da apropriação do conceito de simetría por aprendizes sem acuidade visual.** Dissertação de mestrado. Pontífica Universidade Católica de São Paulo, 2004.

FIORANO, C. J. **Estudo dirigido de desenho para o ensino programado**. 1ª edição. São Pulo: Discubra, [197-?].

FREITAS, J. L. M. de. A formação do professor e o uso de softwares na educação: entre o real e o impossível. In: CAPISANI, D. (Org.). **Educação e arte no mundo digital**. Campo Grande: Ed. UFMS, 2000. p. 103-112.

______. Situações didáticas. In: MACHADO, S. D. A. et al. (Org.) **Educação Matemática: uma introdução**. 2. ed. São Paulo: EDUC, 2002. p. 65-87.

GEEM - Grupo de Estudos da Matemática. **Matemática Moderna para o ensino secundário**. 2ª edição. São Paulo; LPM editora, 1965 apud MABUCHI, S. T.

GERÔNIMO, J. R.; FRANCO, V. S. **Simetrias no Plano:** uma abordagem geométrica, algébrica, pedagógica e computacional.

GRAVINA, M. A. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo**. Tese de doutorado. Faculdade de educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2001.

GRENIER, D. *Quelques aspects de la symétrie orthogonale pour des élèves de classe del plano.* Madri: Editorial Sintesis AS .

______. Quelques Aspects de La Symetrie Orthogonal e Pour Des Eleves de Classes de 4 ème Et 3 ème. **Petit X**, n. 7, p. 57-69, 1985.

______. Construction et étude d'un processus d'enseignement de la symétrie orthogonale: éléments d'analyse du fonctionnement de la théorie de situations. **Recherche en Didactique des Matématiques**. v. 10, n. 1, p. 5-60, 1989.

GROSSI, E. P. Os campos conceituais e a trama que preside as aprendizagens. **Projeto Vira Brasília Educação**. s.d., p. 1-9.

GUTIERREZ, R.; JAIME, A. **El grupo de las isometrias del plano**. Madri: Editorial Sintesis AS, 1996.

HART, K. et al. 1981. **Children’s Understanding of Mathematics**: 11- 16. The CSMS Mathematics Team. London: John Murray, 1981 apud MABUCHI, S. T.

HEALY, L. S. **Interative design and comparison of learning systems for reflection in two dimensions.** PhD Thesis. University of London, Inglaterra, 2002.

HENRY, M. **Didactique des Mathématiques:** une présentation de la didactique en vue de la formation des enseignants. Besançon: IREM, 1993.

IMENES, L. M.; JAKUBOVIC, J.; LELLIS, M. **Matemática**. Coleção Novo Caminho. 1ª-4ª Séries. São Paulo: Scipione, 1998.

KLINE, M. **El pensamiente matematico de la Antiguidade a nuestros dias**. v. 3. Madri: Alianza Editorial AS, 1992.

LABORDE, C. & CAPONNI, B. **Aprender a ver e a manipular o objeto geométrico além do traçado no cabri-géomètre.** Em Aberto, ano 14, no 62, Brasília, INEP. 1994.

LIMA, E. L. **Isometrias**. Coleção do Professor de Matemática. Rio de janeiro: SBM, 1995.

LIMA, I.; CHAACHOUA, H. O papel de um ambiente computacional de ensino na modelagem de concepções dos alunos: o caso da simetria ortogonal. In: Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, 14, 2003, NCE/UFRJ. **Anais do XIV SBIE Simpósio Brasileiro de Informática na Educação**: NCE/UFRJ, 2003. Não paginado. Disponível em <http://www.nce.ufrj.br/sbie2003/publicacoes/paper12.pdf>. Acesso em 14 mar. 2004.

LONGEN, A. **Matemática**. Coleção Descobrindo a Vida. 1ª-4ª Séries. São Paulo: Ed. do Brasil, 2001.

MABUCHI, S. T. **Transformações Geométricas**: a trajetória de um conteúdo ainda não incorporado às práticas escolares nem à formação de professores. Dissertação de mestrado. Pontífica Universidade Católica de São Paulo, 2000.

MACHADO, S. D. A. Engenharia didática. In: MACHADO, S. D. A. et al. (Org.) **Educação Matemática: uma introdução**. 2. ed. São Paulo: EDUC, 2002. p. 197-208.

MARTIN, G. E. **Transformation Geometry**: an Introduction to Symmetry. Nova Iorque: Springer–Verlag, 1932.

MILANI, E. (2001). A informática e a comunicação matemática. In: SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. (Org.). **Ler, escrever e resolver problemas***:* Habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed., 2001. p 176-200.

MOREIRA, M. A. A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de Ciências e a pesquisa nesta área. Disponível em <http://www.if.ufrgs.br/ienci>. Acesso em 15 jan. 2004.

OCHI, F. H. et al. **O uso de quadriculados no ensino da geometria**. 2 ed. São Paulo: IME-USP, 1995.

PAPY, F. **Mathématique Moderne**. v. 3. Paris: Didier, 1967.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da Geometria no Brasil: causas e conseqüências. **Revista Zetetiké**, n.1, p 7-17, 1993.

PERRIN-GLORIAN, M. J. Théorie des situations didactiques: naissence, développement, perpectivas. In: **Vingt Ans Didactique des Mathématiques em France**. Recherche en Didactique des Mathématiques. Paris: La Pensée Sauvage Editions, 1994.

PIAGET, J. **Estudos Sociológicos**. Rio de Janeiro: Forense, 1973.

Revista Nova Escola On-line. **PCN fáceis de entender**. Matemática 1 a 4. Disponível em <http://novaescola.abril.com.br/PCNs/matematica1_4.pdf>. Acesso em 05 mai. 2003.

______. **PCN fáceis de entender**. Matemática 5 a 8. Disponível em <http://novaescola.abril.com.br/PCNs/matematica5_8.pdf>. Acesso em 05 mai. 2003.

RIPPLINGER, H. M. G. Simetria : o homem na busca da ordem e da regularidade. **Revista Pró-Mat- Paraná**. n. 1, p 20-22, 1998.

SANGARÉ, M. S. La Marque d'une transformation - Une Etude de cas au Mali. **Les cahiers du laboratoire Leibniz**. n. 99, 2004. Disponível em <http://www-leibniz.imag.fr/LesCahiers/>. Acesso em 15 dez. 2004.

SANTOS, J. M. S. dos. **O que é geometria dinâmica?** Disponível em: <http://membros.aveiro-digital.net/santosdossantos/PORTOMAT2003-SP19/19_4.htm>. Acesso em 10 abr. 2005.

SILVA E. A. da; SOUZA, D. de. Programas em Slogow para a Exploração de Simetrias. **Revista de Educação Matemática**. n. 8, p 19-22, 2003.

SIQUEIRA, J. E. de M.; LIMA, P. F.; GITIRANA, V. Explorando a simetria de reflexão: uma seqüência didática no Cabri-Géomètre 1. In: EPEM - Encontro Pernambucano de Educação Matemática, 5, 2002, Garanhuns - PE. **Anais do V EPEM - Encontro Pernambucano de Educação Matemática**, 2002. Não paginado. Disponível em <http://www.dmat.ufpe.br/~mro/extensao/v_epem/anais/CC03.pdf>. Acesso em 20 jan. 2004.

Texas Instruments Incorporated. **Cabri Géomètre II**: guia de utilização para Windows. 1999. Disponível em: <http://education.ti.com/downloads/guidebooks/pt/gbbook_por.pdf>. Acesso em 12 jun.2005.

VALENTE, J. A. *O computador na sociedade do conhecimento.* Campinas, SP: UNICAMP/NIED,1999.

VAZ, R. L. **O uso das isometrias do software Cabri-géomètre como recurso no processo de prova e demonstração**. Dissertação de mestrado. Pontífica Universidade Católica de São Paulo, 2004.

VERGNAUD, G. A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. In: Carpenter, T.; Moser, J.; Romberg, T. **Addition and subtraction**: a cognitive perspective. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum. pp. 39-59, 1982.

______. Multiplicative structures. In: LESH, R.; LANDAU, M. (Org.). **Acquisition of Mathemtics Concepts and Processes**. Nova Iorque: Academic Press Inc, 1983.

______. La théorie de champs conceptuels. **Recherches en Didactique de Mathématiques**, v. 10, n. 23, p. 133-170, 1990.

______. Teoria dos Campos Conceituais. In: NASSER, L. (ed.). **Anais do 1º. Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro.** p. 1-26, 1993.

WEBBER, C. Modelisation informatique de processus didactiques-approche multi –agentes. Lês Conceptions em symetrie orthogonale. **Retraite Scientifique**, 2000. Disponível em < http://www-baghera.imag.fr/slides/CarineVogue08-00.ppt>. Acesso em 17 mar. 2004.

WEBBER, C.; LIMA, I. **Aprendendo a Simetria com o Baghera**. 2001. Disponível em: <http://www.diadelasimetria.com/cwil/cwil.htm>. Acesso em: 11 dez. 2004.

Informações sobre o *software Cabri-Géomètre II.*

Cabri-Géomètre II é criação de J. M. Laborde e F. Bellemain, da Université Joseph Fourier-Grenoble- França. Maiores informações podem ser encontradas no site: http//www-cabri.imag.fr