Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Departamento de Ciências Exatas - Câmpus de Três Lagoas
Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT

WESLEN XAVIER DE MORAES

Solução em Série de Potências para Equações Diferenciais Ordinárias Lineares de Segunda Ordem

Três Lagoas - MS
2016

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Departamento de Ciências Exatas - Câmpus de Três Lagoas
Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT

WESLEN XAVIER DE MORAES

Solução em Série de Potências para Equações Diferenciais Ordinárias Lineares de Segunda Ordem

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT do Departamento de Ciências Exatas da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus de Três Lagoas, como parte dos requisitos para obtenção do titulo de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Equações Diferenciais; Séries de Potências.

Prof. Dr. Fernando Pereira de Souza
Orientador

Três Lagoas - MS
2016

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Departamento de Ciências Exatas - Câmpus de Três Lagoas
Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT

Solução em Série de Potências para Equações Diferenciais Ordinárias Lineares de Segunda Ordem

por

WESLEN XAVIER DE MORAES

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT do Departamento de Ciências Exatas da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus de Três Lagoas, como parte dos requisitos para obtenção do titulo de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Equações Diferenciais; Séries de Potências.

Aprovada em JULHO de 2016.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. FERNANDO PEREIRA DE SOUZA - Orientador
UFMS / CPTL

Prof. Dr. RENATO CÉSAR DA SILVA
UFMS / CPTL

Prof. Dr. VANDO NARCISO
UEMS / Dourados

Três Lagoas - MS
2016

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a Deus, por ter me dado força e saúde e principalmente esta oportunidade de fazer este mestrado, pois só ele sabe o que passei.

A toda minha família, por sempre estarem me apoiando, mesmo nos momentos mais difíceis.

Ao professor Dr. Fernando Pereira de Souza por ter aceitado este desafio e ter encarado com seriedade e dedicação que foi esta dissertação.

Aos professores da UFMS/CPTL pelos seus ensinamentos e atenção dadas repassados durante o mestrado, que me inspiram desde sempre.

Aos meus amigos de mestrado, pela ajuda dada em momentos difíceis, que foram superadas pelo apoio de todos.

Resumo

Este trabalho trata dos conhecimentos básicos e intermediários sobre equações diferenciais ordinárias (EDO) até a segunda ordem. Para soluções de EDOs de primeira ordem, foram estudados os métodos de variáveis separáveis, fatores integrantes, equações exatas, equações de Bernoulli e equações de Riccati. Para o caso de EDOs de segunda ordem foram estudados primeiramente o caso homogêneo com coeficientes constantes, logo após, estudamos o caso não homogêneo usando o método de coeficientes indeterminados e para casos com coeficientes variáveis, estudamos o método de variação dos parâmetros. Para casos mais gerais, utilizamos o método das séries de potências.

Palavras Chaves: Equações Diferenciais Ordinárias; Séries de Potências.

Abstract

This paper addresses the basic and intermediate knowledge of ordinary differential equations (ODE) to the second order. To first order ODE solutions, methods of separable variables were studied, integrating factors, exact equations, Bernoulli equation and Riccati equations. In the case of second-order ODE they were first studied the homogeneous case with constant coefficients, after we studied the inhomogeneous case using the method of undetermined coefficients and for cases with variable coefficients, we studied the variation of parameters method. For more general cases, we use the method of power series.

Keywords: Ordinary Differential Equations; Power Series.

Conteúdo

Agradecimentos **i**

Resumo **ii**

Abstract **iii**

Introdução **3**

1 Terminologia e Definições Básicas de uma Equação Diferencial **5**
- 1.1 Solução de uma Equação Diferencial 6
- 1.2 Problema de Valor Inicial (PVI) 7

2 Equações Diferenciais de Primeira Ordem **8**
- 2.1 Método das Variáveis Separáveis 8
- 2.2 Método dos Fatores Integrantes 10
- 2.3 Equações Exatas 12
- 2.4 Equação de Bernoulli 17
- 2.5 Equação de Riccati 18

3 Equações Diferenciais de Segunda Ordem **20**
- 3.1 Soluções de EDOs Lineares Homogêneas 20
- 3.2 Dependência e Independência Linear 22
- 3.3 Soluções Linearmente Independentes 23
- 3.4 EDOs Lineares Homogêneas com Coeficientes Constantes 25
- 3.5 Comportamento de soluções de EDOs homogêneas com coeficientes constante 29
- 3.6 Equação de Euler 32
- 3.7 EDOs Lineares não Homogêneas 35
- 3.8 Método dos coeficientes indeterminados 36
- 3.9 Método de variação de parâmetros 39

4 Método das Séries **43**
- 4.1 Revisão de Séries de Potência 43
- 4.2 Solução em Séries de Potências para Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem 46
  - 4.2.1 Teorema de Existência e Unicidade para EDOs de Primeira Ordem Lineares 50
- 4.3 Solução em Série Perto de um Ponto Ordinário para EDOs de Segunda Ordem lineares 53
- 4.4 Pontos Singulares Regulares 58

4.4.1 O Método de Frobenius 60

Considerações Finais **65**

Bibliografia **65**

Introdução

O estudo das equações diferenciais se inicia com a criação do *Cálculo* por Isaac Newton (1642 - 1727) e Gottfried Wihelm Leibniz (1646 - 1716) durante o século XVII, que de forma independente, descobriram técnicas de derivação e integração que ainda são usadas nos dias atuais.

Newton nasceu na Inglaterra num vilarejo próximo a cidade de Londres, apesar de ser reconhecido como um físico renomado, foi professor de matemática na cadeira *Lucasan* durante boa parte da sua vida. Newton teve suas descobertas sobre cálculo e leis da mecânica datadas em 1665, mas devido à sensibilidade às críticas, divulgou seus resultados privadamente apenas a seus amigos, apesar de ter uma atuação relativamente modesta na área das equações diferenciais, conseguiu classificar as equações diferenciais de primeira ordem de acordo com as formas $dy/dx = f(x)$, $dy/dx = f(y)$ e $dy/dx = f(x, y)$, que serão estudadas no capítulo 1. Ainda desenvolveu um método para resolver equações diferenciais no caso em que $f(x, y)$ seja um polinômio usando séries infinitas.

Leibniz que nasceu na Alemanha na cidade de Leipzig era um matemático autodidata, embora tenha completado seu doutorado em filosofia com apenas 20 anos, teve seu desenvolvimento matemático após esse período. Leibniz obteve seus resultados sobre o cálculo de maneira independentemente, embora tenha sido em um período posterior a Newton, foi o primeiro a publicar algo sobre cálculo em 1684. Leibniz ao contrário de Newton, que tinha notações próprias e de dificíl compreensão, compreendia bem as vantagens de boa notação, a notação dy/dx que entendia a derivada como um quociente de dois diferenciais, o símbolo da integral $\displaystyle\int$ e os métodos como de separação de variáveis, de redução de equações homogêneas e o procedimento para resolver equações lineares de primeira ordem são devidos a ele. Leibniz ainda passou boa parte da sua vida como conselheiro e embaixador de diversas famílias reais alemãs, ajudando-o a ter uma correspondência intensa com outros matemáticos da época, entre eles os irmãos Bernoulli.

Os irmãos Jakob (1654 - 1705) e Johann (1667 - 1748) Bernoulli, de Basel, contribuíram com o desenvolvimento de diversos métodos para resolver equações diferenciais com diversas aplicações físicas. Jakob era professor de matemática em Basel em 1687, que mais tarde pertenceu a seu irmão após seu falecimento, desenvolveu um método para resolver uma equação diferencial de primeira ordem não linear transformando-a em linear, fazendo uma mudança de variável. Outra equação de primeira ordem redutível a uma equação linear é a equação de Riccati, desenvolvida pelo físico matemático italiano Jacopo Francesco Riccati (1676 - 1754), apesar de ter considerado diversas classes de equações diferenciais é conhecido principalmente pela Equação de Riccati que recebe o seu nome em sua homenagem.

Leonard Euler (1707 - 1783), que foi aluno de Johann Bernoulli e próximo à familia Bernoulli, ficou conhecido como o maior matemático de sua época, devido a sua prolificidade de suas obras. Seus interesses incluem diversas áreas da matemática em especial às equações diferenciais. Euler identificou a condição para que uma equação diferencial de primeira ordem seja exata e a teoria de fatores integrantes em 1734 - 1735. Euler também encontrou a solução geral para equações lineares homogêneas de segunda ordem com coeficientes constantes em 1743, estendendo esse resultado para equações não homogêneas em 1750 - 1751, estas equações serão estudadas no capítulo 3.

Até o fim do século XVIII, vários métodos haviam sido descobertos para resolver equações diferenciais, porém, no século XIX, iniciou-se a investigação de questões mais teóricas a respeito de existência e unicidade de soluções e métodos mais robustos e menos elementares como soluções em expansão em séries de potências que serão estudadas no capítulo 4.

Este trabalho é composto de 4 capítulos, onde abordaremos vários assuntos de equações diferenciais ordinárias, dando ênfase para uma escrita sucinta de fácil leitura, para que sirva de apoio à disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias.

O capítulo 1, tem por objetivo principal, mostrar as principais definições necessárias e a teoria básica para compreendermos o conteúdo deste trabalho, como a classificação quanto ao tipo, a ordem e a linearidade de uma equação diferencial, solução de uma EDO e problema de valor inicial (PVI).

No capítulo 2, estudaremos vários métodos teóricos para resolver equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, sendo eles o método das variáveis separáveis, método dos fatores integrantes, equações exatas, equação de Bernoulli e equação de Riccati.

No capítulo 3, estudaremos as equações diferenciais ordinárias de segunda ordem com coeficientes constantes, comportamento de soluções de EDOs homogêneas com coeficientes constante, equação de Euler, os métodos de coeficientes indeterminados e o de variação de parâmetros.

Já no capítulo 4, daremos inicialmente uma breve revisão de séries de potências, solução em série de potências para alguns tipos EDOs de primeira ordem e solução em série de potências para EDOs de segunda ordem, sendo soluções para pontos ordinário e singulares regulares.

Capítulo 1

Terminologia e Definições Básicas de uma Equação Diferencial

Neste capítulo introduziremos alguns conceitos básicos da teoria das Equações Diferenciais. As equações diferenciais podem ser classificadas pelo tipo, ordem e linearidade. Se uma equação diferencial contém somente derivadas ordinárias de uma única variável dependente, ela é chamada de **equação diferencial ordinária** (EDO), exemplo:

Equação de Bernoulli

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y^n = f(x)y,$$

Equação de Riccati

$$\frac{dy}{dx} = a(x) + b(x)y + c(x)y^2,$$

Equação de Clairaut

$$y(x) = x\frac{dy}{dx} + f\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

Equação de Euler

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2} + \alpha t\frac{dy}{dt} + \beta y = 0.$$

Uma equação que envolve as derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes de duas ou mais variáveis independentes é chamada de **equação diferencial parcial** (EDP), exemplos:

Equação do Calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),$$

Equação da Onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),$$

Equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

A **ordem** de uma equação diferencial é a ordem da mais alta derivada da variável dependente que aparece na equação. Por exemplo,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right) - 4y = e^x$$

é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem (ou de ordem dois). Já a equação

$$a^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

é uma equação diferencial parcial de quarta ordem. Embora as equações diferenciais parciais sejam muito importantes, seu estudo demanda um bom conhecimento da teoria de equações diferenciais. Portanto, na discussão deste trabalho, limitaremos nossa atenção às equações diferenciais ordinárias (EDOs).

Para prosseguirmos com os estudos deste trabalho, será necessário classificarmos as equações diferenciais ordinárias entre **lineares** e **não lineares**. No decorrer do trabalho, veremos que algumas equações diferenciais não lineares poderão ser reduzidas à uma equação diferencial linear. Uma equação diferencial ordinária

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0, \tag{1.1}$$

é dita **linear** se F é uma função linear nas variáveis $y, y', \dots, y^{(n)}$. Assim, a equação diferencial ordinária linear geral de ordem n é dada por

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = g(x), \tag{1.2}$$

onde $a_0, a_1, \dots, a_n$ e g são funções dadas de uma variável x.

Observe que as equações diferenciais lineares são caracterizadas por duas propriedades:

(i) A variável dependente y e todas as suas derivadas são do primeiro grau,

(ii) Cada coeficiente depende apenas de uma variável independente x.

No caso onde F é função linear a equação diferencial (1.1) é dita equação diferencial ordinária não linear.

Consideremos agora o conceito de solução de uma equação diferencial ordinária.

1.1 Solução de uma Equação Diferencial

Definição 1.1.1 *Uma solução de uma equação diferencial* $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = g(x)$ *em um intervalo* (α, β) *é uma função* y *tal que* $y', y'', ..., y^{(n)}$ *existem e satisfazem*

$$g(x) = F(x, y(x), y'(x), y''(x), ..., y^{(n)}(x)), \tag{1.3}$$

para todo $x \in (\alpha, \beta)$.

Exemplo 1.1.1 *A função* $y = xe^x$ *é uma solução para a equação linear* $y'' - 2y' + y = 0$ *no intervalo* $(-\infty, +\infty)$.

Para verificar isso, calculamos

$$y' = xe^x + e^x \qquad \text{e} \qquad y'' = xe^x + 2e^x.$$

Observe que

$$y'' - 2y' + y = (xe^x + 2e^x) - 2(xe^x + e^x) + xe^x = 0,$$

para todo número real.

1.2 Problema de Valor Inicial (PVI)

Um **problema de valor inicial** ou problema de condições iniciais é uma equação diferencial acompanhada do valor da função a determinar em um ponto dado chamado de valor inicial ou condição inicial. O número de condições coincide com a ordem da equação diferencial ordinária, e o PVI fica descrito como

$$\begin{aligned} F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) &= g(x), \\ y(x_0) &= y_0, \\ \frac{dy}{dx}(x_0) &= y_1, \\ &\vdots \\ \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}(x_0) &= y_{n-1}, \end{aligned}$$

onde $x_0 \in I$ e $y_0, \, , y_1, \, \ldots, y_{n-1}$ são constantes dadas.

A terminologia *condições iniciais* vem da mecânica, onde a variável independente x representa *instante* e normalmente é simbolizada como t. Então, se t_0 é o instante inicial, $y(t_0) = y_0$ representa o local inicial de um objeto e $y'(t_0)$ indica sua velocidade inicial.

Note que até o momento, verificamos que tais funções são soluções, nos próximos capítulos, mostraremos como encontrar as soluções.

Exemplo 1.2.1 *Dada a função $y(x) = sen(x) - cos(x)$, mostraremos que é uma solução para o problema de valor inicial para*

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0, \\ y(0) = -1, \\ \dfrac{dy}{dx}(0) = 1. \end{cases} \tag{1.4}$$

De fato, observe que

$$\begin{aligned} y(x) &= sen(x) - cos(x), \\ y'(x) &= cos(x) + sen(x), \\ y''(x) &= -sen(x) + cos(x), \end{aligned} \tag{1.5}$$

são todos definidos em $(-\infty, +\infty)$. Substituindo (1.5) em (1.4), teremos

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = [-sen(x) + cos(x)] + [sen(x) - cos(x)] = 0,$$

que se mantém para todo $x \in (-\infty, +\infty)$. Quando verificamos as condições iniciais, descobrimos

$$y(0) = sen(0) - cos(0) = -1 \qquad \text{e} \qquad \frac{dy}{dx}(0) = cos(0) + sen(0) = 1.$$

Portanto, $y(x) = sen(x) - cos(x)$ é uma solução para o problema de valor inicial (1.4).

Capítulo 2

Equações Diferenciais de Primeira Ordem

No capítulo anterior, foi definido as terminologias básicas necessárias para o desenvolvimento deste trabalho. Já neste capítulo, veremos que se uma equação diferencial de primeira ordem puder ser resolvida, veremos que a técnica ou método para resolvê-la, depende do tipo de equação de primeira ordem com que estamos lidando. Durante anos, muitos matemáticos posteriores a Newton e Leibniz, se esforçaram para resolver diversos tipos particulares de equações diferenciais, por isso, há vários métodos para se encontrar uma solução; o que funciona para um certo tipo de equação de primeira ordem, não se aplicará necessariamente a outros tipos de equações diferenciais.

Para algumas equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, veremos que essas por sua vez, podem ser resolvidas analiticamente, usando apenas as técnicas de integração vistas no curso de cálculo diferencial e integral. Comecemos por estudar o caso mais simples das equações diferenciais de primeira ordem, que são as equações da forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x).$$

De modo simples, esta resolução já era feita no curso de cálculo de modo implícito, apenas encontrando uma função f dada a sua primitiva F. Para esse tipo de equação, resolviam-se facilmente, usando apenas o Teorema Fundamental do Cálculo.

$$y(x) = \int f(x)\,dx + C,$$

em que C é uma constante arbitrária que será determinada futuramente pelos problemas com valor inical (PVI).

2.1 Método das Variáveis Separáveis

Uma classe simples de equações diferenciais de primeira ordem que podem se resolvidas usando apenas as técnicas de integração é a de **equações separáveis** (ou variáveis separáveis). As equações de primeira ordem do tipo

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{2.1}$$

que podem ser reescritas de modo a isolar as variáveis x e y em lados opostos da equação. Considerando

$$f(x,y)=\frac{M(x)}{N(y)},$$

sendo M e N funções dependentes das variáveis x e y respectivamente, com N não nula. Deste modo, a equação (2.1) poderá ser reescrita como

$$\frac{dy}{dx}=\frac{M(x)}{N(y)}. \tag{2.2}$$

Definição 2.1.1 *Uma equação diferencial ordinária de primeira ordem é dita separável ou de variáveis separáveis se pode ser escrita na forma (2.2).*

Para resolvermos a equação separável dada em (2.2), vamos reescrevê-la como

$$M(x)+N(y)\frac{dy}{dx}=0. \tag{2.3}$$

Considere H_1 e H_2, primitivas de M e N respectivamente. Como

$$H_1'(x)=M(x) \qquad \text{e} \qquad H_2'(y)=N(y),$$

a equação (2.3) poderá ser reescrita como

$$H_1'(x)+H_2'(y)\frac{dy}{dx}=0. \tag{2.4}$$

Pela regra da cadeia, temos

$$H_2'(y)\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}H_2,$$

logo, podemos escrever a equação (2.4) como

$$\frac{d}{dx}[H_1(x)+H_2(y)]=0 \tag{2.5}$$

e integrando (2.5), obtemos a solução dada implicitamente pela equação

$$H_1(x)+H_2(y)=C,$$

onde C é uma constante arbitrária.

O procedimento utilizado anteriormente pode ser seguido para qualquer equação diferencial de variáveis separáveis. Vejamos a seguir um exemplo.

Exemplo 2.1.1 *Considere a equação*

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x+1}{y}. \tag{2.6}$$

A equação (2.6) é separável, pois pode ser escrita na forma (2.2), pois $M(x) = 2x+1$ e $N(y) = y$, assim a resolução de (2.6) poderá ser resolvida usando apenas as técnicas de integração, pois

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{2x+1}{y}, \\
y\,\frac{dy}{dx} &= 2x+1, \\
\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}y^2\right) &= 2x+1, \\
\frac{1}{2}y^2 &= \int (2x+1)\,dx, \\
\frac{1}{2}y^2 &= x^2+x+C_1, \\
y^2 &= 2x^2+2x+C_2,
\end{aligned}$$

que é a solução implícita da equação (2.6), onde C_1 e C_2 são constante arbitrárias de integração.

2.2 Método dos Fatores Integrantes

Outra classe de equações de primeira ordem

$$y' = F(x,y)$$

que iremos trabalhar são aquelas onde a função F depende linearmente da variável y, chamada de equação diferencial ordinária linear, e sua forma geral é dada por

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{2.7}$$

onde p e q são funções dadas dependentes apenas da variável x, em algum intervalo I. Quando $q(x) = 0$ na equação (2.7) para todo $x \in I$, a equação é dita **Equação Homogênea**.

O **Fator Integrante** é uma função $\mu(x)$ tal que o produto da EDO linear de primeira ordem por $\mu(x)$, faz com que o lado esquerdo da equação (2.7) possa ser visto como a derivada do produto de duas funções.

Multiplicando (2.7) por $\mu(x)$, teremos

$$\mu(x)y' + \mu(x)p(x)y = \mu(x)q(x).$$

Somando e subtraindo $\mu'(x)y(x)$ no primeiro membro, obtemos

$$\mu(x)\,y' + \mu'(x)y(x) - \mu'(x)y(x) + \mu(x)p(x)\,y = \mu(x)\,q(x), \tag{2.8}$$

assumindo que

$$-\mu'(x)y(x) + \mu(x)p(x)y(x) = 0, \tag{2.9}$$

a equação (2.8) fica

$$\mu(x)y' + \mu'(x)y(x) = \mu(x)q(x).$$

ou ainda

$$\frac{d}{dx}\left(\mu(x)y(x)\right) = \mu(x)q(x). \tag{2.10}$$

Integrando a equação (2.10) em relação a x, obtemos

$$\mu(x)y(x) = \int \mu(x)q(x)\,dx,$$

logo obtemos a solução

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\int \mu(x)q(x)dx.$$

Para determinarmos $\mu(x)$, temos que levar em consideração a equação (2.9). Resolvendo esta equação temos

$$y(x)(-\mu(x) + \mu(x)p(x)) = 0,$$

ou seja,

$$-\mu'(x) + \mu(x)p(x) = 0.$$

Note que

$$\begin{aligned} \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} &= p(x), \\ \frac{d}{dx}[\ln \mu(x)] &= p(x), \end{aligned} \tag{2.11}$$

e integrando a equação (2.11), teremos

$$\begin{aligned} \int \frac{d}{dx}[\ln \mu(x)]dx &= \int p(x)\,dx, \\ \ln \mu(x) &= \int p(x)\,dx + C, \\ \mu(x) &= e^{\int p(x)\,dx + C} = e^{\int p(x)\,dx}\,e^{C}, \end{aligned}$$

considerando $C = 0$ ja que $\mu(x)$ é um fator da equação (2.7), portanto

$$\mu(x) \;=\; e^{\int p(x)\,dx}.$$

Exemplo 2.2.1 *Considere a equação diferencial*

$$y' + y = 0. \tag{2.12}$$

Para resolvermos esta equação (2.12), vamos calcular o fator integrante

$$\mu(x) = e^{\int 1dx} = e^{x},$$

multiplicando (2.12) por $\mu(x) = e^{x}$, obtemos

$$e^{x}y' + e^{x}y = 0$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{d}{dx}[e^x y] = 0,$$

e integrando em relação a x, teremos

$$e^x y = C,$$

onde C é uma constante de integração, assim obtemos a solução

$$y = Ce^{-x}.$$

Veremos nas próximas seções, três casos especiais em que EDOs de primeira ordem não lineares que também podem ser resolvidas através de um método específico.

2.3 Equações Exatas

Para o estudo das EDOs de primeira ordem, existem na prática diversos métodos de resoluções aplicáveis, sendo as EDOs lineares de primeira ordem e as separáveis, que discutimos anteriormente as mais simples de serem aplicadas. Consideremos agora, uma classe de equações, conhecidas como equações exatas. Lembrando que essas equações de primeira ordem podem ser resolvidas por métodos elementares de integração e são bastante especiais, sendo que a maioria das EDOs de primeira ordem não podem ser resolvidas dessa maneira.

Considere uma equação diferencial na forma

$$M(x, y) + N(x, y)\, y' = 0. \tag{2.13}$$

Suponha que podemos identificar uma função F tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = M(x, y), \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = N(x, y), \tag{2.14}$$

e tal que $F(x, y) = C$ define $y = f(x)$ implicitamente como uma função diferenciável de x. Então

$$M(x, y) + N(x, y)\, y' = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}F[x, y(x)]$$

e a equação diferencial (2.13) fica

$$\frac{d}{dx}F[x, y(x)] = 0. \tag{2.15}$$

Nesse caso, a equação (2.13) é dita uma equação diferencial **exata**. Soluções da equação (2.13), ou da equação equivalente (2.15), são dadas implicitamente por

$$F(x, y) = C, \tag{2.16}$$

onde C é uma constante arbitrária.

O teorema a seguir nos fornece um modo sistemático de determinar se uma equação é exata, para isto, vamos utilizar o seguinte lema:

Lema 2.3.1 (Teorema de Clairaut)

Suponha que f seja definida em uma bola aberta $D \subset \mathbb{R}^2$ que contenha o ponto (a, b). Se as funções f_{xy} e f_{yx} forem ambas contínuas em D, então

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b). \tag{2.17}$$

Dem: Ver [6] na página 960.

Teorema 2.1 (Critério para Diferencial Exata)

Suponha que as funções M, N, M_y, e N_x, onde os índices denotam derivadas parciais, são contínuas em uma região R: $\alpha < x < \beta$, $\gamma < y < \delta$. Então a equação

$$M(x, y) + N(x, y)\, y' = 0$$

é uma equação diferencial exata em R se, e somente se,

$$M_y(x, y) = N_x(x, y) \tag{2.18}$$

em cada ponto de R. Isto é, existe uma função F satisfazendo

$$F_x(x, y) = M(x, y) \qquad e \qquad F_y(x, y) = N(x, y),$$

se, e somente se, M e N satisfazem a equação (2.18).

Dem: Primeiramente vamos verificar que se

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{2.19}$$

é exata, então

$$\frac{\partial}{\partial y} M(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} N(x, y).$$

Como a equação (2.19) é exata, existe uma função $F(x, y)$ de tal modo que $F_x(x, y) = M(x, y)$ e $F_y(x, y) = N(x, y)$. Assim, derivando M em relação a y, temos

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}. \tag{2.20}$$

Derivando N em relação a x, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \tag{2.21}$$

Pelo lema (2.3.1), as equações (2.20) e (2.21) são equivalentes, logo

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x},$$

como queriamos.

Vamos mostrar agora que se M e N satisfazem a equação (2.18), então a equação (2.13) é exata. A demonstração envolve a construção de uma função F satisfazendo as equações

$$F_x(x,y) = M(x,y) \qquad \text{e} \qquad F_y(x,y) = N(x,y).$$

Suponha que exista uma função satisfazendo (2.14), então integrando em relação a x, e utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos

$$F(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y). \tag{2.22}$$

Agora derivando (2.22) em relação a y e usando o fato de que $F_y = N$, temos

$$\begin{aligned} N(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right) + g'(y) \\ g'(y) &= N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right), \end{aligned} \tag{2.23}$$

Para encontrar a função $g(y)$, basta integrarmos a equação (2.23) em relação a y,

$$g(y) = \int N(x,y)dy - \int \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right)dy, \tag{2.24}$$

e substituindo (2.24) em (2.22), encontramos

$$F(x,y) = \int M(x,y)dx + \int N(x,y)dy - \int \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right)dy. \tag{2.25}$$

Observe que em (2.24) a função g é realmente uma equação que depende só de y, pois derivando

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} g(y) &= \int \frac{\partial}{\partial x} N(x,y)dy - \frac{\partial}{\partial x}\int \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right)dy \\ &= \int \left[\frac{\partial}{\partial x}N(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right]dy \\ &= \int \left[\frac{\partial}{\partial x}N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}M(x,y)\right]dy \\ &= \int 0\, dy = 0, \end{aligned}$$

portanto a função F descrita em (2.25) é a função procurada.

O exemplo a seguir, ilustra bem o método descrito anteriormente para encontrarmos uma solução de uma EDO exata.

Exemplo 2.3.1 *Considere a EDO*

$$(3x^2 - 2xy) + (2y - x^2)\, y' = 0. \tag{2.26}$$

Definindo $M(x,y) = 3x^2 - 2xy$ e $N(x,y) = 2y - x^2$, temos

$$M_y(x,y) = -2x = N_x(x,y),$$

desse modo, a equação (2.26) é exata, logo existe uma $F(x, y)$ tal que

$$F_x(x, y) \quad = \quad 3x^2 - 2xy \tag{2.27}$$

e

$$F_y(x, y) = 2y - x^2. \tag{2.28}$$

Integrando (2.27) em relação a x, teremos

$$F(x, y) = x^3 - x^2y + g(y). \tag{2.29}$$

Agora, derivando (2.29) em relação a y e usando (2.28), obtemos

$$F_y(x, y) = -x^2 + g'(y) = 2y - x^2,$$

assim

$$g'(y) = 2y.$$

Integrando a equação precedente em relação a y, teremos

$$g(y) = y^2 + C, \tag{2.30}$$

onde C é uma constante de integração.

Substituindo (2.30) em (2.29), obtemos a solução geral

$$F(x, y) = x^3 - x^2y + y^2 + C.$$

Portanto, a solução de (2.26) é dada implicitamente pela equação

$$x^3 - x^2y + y^2 = C.$$

Para certas EDOs não exatas, existe uma maneira para transformá-las em exata multiplicando-se por um certo fator integrante. Deste modo, suponha que a equação

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \tag{2.31}$$

não seja exata, assim multiplicamos a equação (2.31), por um certo fator μ, de tal modo, que

$$\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = 0, \tag{2.32}$$

seja exata. Pelo Teorema (2.1), a equação (2.32) é exata se, e somente se,

$$(\mu M)_y = (\mu N)_x. \tag{2.33}$$

Como M e N são funções reais dadas, a equação (2.33) tem que satisfazer a equação diferencial

$$M\mu_y - N\mu_x + (M_y - N_x)\mu = 0. \tag{2.34}$$

Se conseguirmos encontrar uma função μ, que satisfaça a equação (2.34), então a equação (2.32) se transforma em equação exata.

Supondo que μ é uma função de x, teremos

$$(\mu M)_y = \mu M_y \qquad \text{e} \qquad (\mu N)_x = \mu N_x + N\frac{d\mu}{dx}.$$

Assim, se $(\mu M)_y$ é igual a $(\mu N)_x$, é necessário que a equação

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{M_y - N_x}{N}\mu,$$

seja válida. Se $(M_y - N_x)/N$ é uma função só de x, então o fator integrante μ existe e dependerá só de x. Além disso, μ pode ser encontrado resolvendo-se a equação (2.35), usando o método das variáveis separáveis.

Um procedimento semelhante pode ser usado para se determinar uma condição sobre a qual a equação (2.31), tenha um fator integrante que depende só de y. Neste caso

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{N_x - M_y}{M}\mu. \tag{2.35}$$

Exemplo 2.3.2 *Consideremos a equação diferencial dada por*

$$(2x^2 + y)\,dx + (x^2y - x)\,dy = 0. \tag{2.36}$$

A equação (2.36) é não linear, verifiquemos se é exata, definindo $M(x, y) = 2x^2 + y$ e $N(x, y) = x^2y - x$, vemos que se

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = (2xy - 1).$$

Pelo fato de que

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x},$$

então a equação (2.36) não é exata Vamos procurar então um fator integrante

$$\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N} = \frac{1 - (2xy - 1)}{x^2y - x} = \frac{2(1 - xy)}{-x(1 - xy)} = -\frac{2}{x}.$$

Obtemos uma função de apenas x, de modo que um fator integrante é dado por

$$\mu(x) = e^{\int \frac{-2}{x}dx} = x^{-2}.$$

Quando multiplicamos a equação (2.36) por $\mu(x) = x^{-2}$, obtemos uma equação exata

$$(2 + yx^{-2})\,dx + (y - x^{-1})\,dy = 0.$$

Solucionando essa equação, por fim encontramos a solução dada implicitamente pela equação

$$2x - yx^{-1} + \frac{y^2}{2} = C,$$

onde C é uma constante arbitrária.

Algumas EDOs de primeira ordem não caracterizadas anteriormente também podem ser resolvidas usando outras técnicas auxiliares, como a Equação de Bernoulli e a Equação de Riccati, que são EDOs de primeira ordem não lineares e que não se encaixam em nenhum tipo estudado até agora. Supondo apenas que exista uma solução, veremos que será possível reduzir uma EDO não linear de primeira ordem em um EDO linear de primeira ordem.

2.4 Equação de Bernoulli

A Equação de Bernoulli apareceu pela primeira vez na investigação de um problema bem famoso: o do cálculo da curva isócrona, que fundamenta a construção de relógios de pêndulo.

A Equação de Bernoulli, pode ser definida como

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n, \tag{2.37}$$

onde $p(x)$ e $q(x)$ são funções contínuas definidas num intervalo aberto I e n um número real não nulo, diferente de zero e de um, fixado. Sua resolução se reduz a substituir

$$v = y^{1-n}, \tag{2.38}$$

na equação (2.37). Esta substituição transforma a equação (não linear) em uma equação linear, ou seja, se multiplicarmos a equação de (2.37) por y^{-n}, obtemos

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + p(x)y^{1-n} = q(x). \tag{2.39}$$

Observe que derivando $v = y^{1-n}$ em relação a x, teremos

$$\frac{dv}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx},$$

assim,

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-n}\frac{dy}{dx}. \tag{2.40}$$

Substituindo (2.38) e (2.40) na equação (2.39), obtemos

$$\frac{1}{1-n}\frac{dv}{dx} + p(x)\, v = q(x),$$

ou ainda

$$\frac{dv}{dx} + (1-n)p(x)\, v = (1-n)\, q(x),$$

que é uma EDO de primeira ordem linear, que pode ser resolvida facilmente usando o método do fator integrante.

Exemplo 2.4.1 *Considere a EDO*

$$y' + 2tg(x)\, y = \sqrt{y}\, sen(2x). \tag{2.41}$$

Identificando $n = 1/2$, $p(x) = 2tg(x)$ e $q(x) = sen(2x)$, vamos dividir a equação por $\sqrt{y}$, ou seja

$$y^{-\frac{1}{2}}y' + 2tg(x)y^{\frac{1}{2}} = sen(2x). \tag{2.42}$$

Tomando $v = y^{\frac{1}{2}}$ teremos por consequência $v' = \frac{1}{2}y^{\frac{1}{2}}\, y'$, que substituindo em (2.42), obtemos

$$2v' + 2tg(x)v \;=\; sen(2x),$$

$$v' + tg(x)v = \frac{sen(2x)}{2}. \tag{2.43}$$

Deste modo, a equação (2.41) se transforma em uma equação linear de primeira ordem não homogênea. Usando o método dos fatores integrantes, encontraremos

$$sec(x)v = -cos(x) + C, \tag{2.44}$$

onde C é uma constante de integração. Substituindo $v = \sqrt{y}$ em (2.44) teremos,

$$\sqrt{y}sec(x) = -cos(x) + C,$$

ou então

$$y(x) = [C\,cos(x) - cos^2(x)]^2.$$

2.5 Equação de Riccati

Considere a EDO

$$\frac{dy}{dx} = a(x) + b(x)y + c(x)y^2, \tag{2.45}$$

onde $a(x)$, $b(x)$ e $c(x)$ são funções dependentes de x. Se conhecermos uma solução particular y_p da equação, a seguinte mudança de variável transformará a equação em uma equação linear

$$y = y_p + \frac{1}{v} \qquad \Longrightarrow \qquad y' = y_p' - \frac{1}{v^2}v'.$$

Substituindo em (2.45), temos

$$y_p' - \frac{1}{v^2}v' = a(x) + b(x)\left[y_p + \frac{1}{v}\right] + c(x)\left[y_p + \frac{1}{v}\right]^2. \tag{2.46}$$

Como y_p é solução da equação (2.45), segue que

$$y_p = a(x) + b(x)y_p + c(x)y_p^2,$$

desta forma, podemos reescrever a equação (2.46) como

$$-\frac{1}{v^2}v' = \frac{b(x)}{v} + \frac{2y_pc(x)}{v} + \frac{c(x)}{v^2}, \tag{2.47}$$

multiplicando a equação (2.47) por $-v^2$ teremos

$$v' = -b(x)v - 2vy_pc(x) - c(x),$$

que pode ser resolvida facilmente usando o método dos fatores integrantes.

Exemplo 2.5.1 *Encontre a solução geral da seguinte equação sabendo que $y_p(x)$ é uma solução particular*

$$y' = e^xy^2 - y + e^{-x}, \qquad y_p(x) = -e^{-x}cotg(x).$$

Trata-se de uma equação de Riccati e para a resolver usamos a seguinte substituição

$$y = y_p + \frac{1}{v} \qquad \Longrightarrow \qquad y' = y_p' - \frac{v'}{v^2}$$

é conveniente não substituir y_p pela função dada, já que o fato desta ser solução da equação simplificará os resultados. Substituindo na equação de Riccati obtemos

$$\begin{aligned} y_p' - \frac{v'}{v^2} &= e^x \left(y_p^2 + 2\frac{y_p}{v} + \frac{1}{v^2} \right) - y_p - \frac{1}{v} + e^{-x} \\ v^2 \left(y_p' - e^x y_p^2 + y_p - e^{-x} \right) &= v' + (2y_p e^x - 1)\, v + e^x \end{aligned}$$

como y_p é solução, o termo nos parênteses no lado esquerdo é nulo e obtém-se a seguinte equação linear para $v(x)$

$$v' - (2cotg(x) + 1)v = -e^x. \tag{2.48}$$

A solução de (2.48) é dada por

$$v = e^x sen^2(x)(cotg(x) + c) = e^x sen(x)(cos(x) + csen(x)),$$

logo a solução de (2.48) é

$$y = e^{-x} \frac{sen(x) - ccos(x)}{cos(x) + csen(x)}.$$

Capítulo 3

Equações Diferenciais de Segunda Ordem

Neste capítulo, concentraremos nossa atenção as EDOs lineares de ordem 2. Começamos a discussão sobre EDOs homogêneas com coeficientes constantes. Inicialmente, vamos nos atentar a desenvolver uma teoria elementar para a compreensão das EDOs homogêneas e posteriormente, trataremos do caso não homogêneo com coeficientes constantes e um caso especial de coeficientes variáveis.

Uma equação diferencial de segunda ordem tem a forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right), \tag{3.1}$$

onde F é alguma função dada. Neste capítulo, vamos tratar o caso linear, ou seja, no caso onde a função f tem a forma

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = g(x) - p(x)\frac{dy}{dx} - q(x)y. \tag{3.2}$$

Assim, reescrevemos a equação (3.2) como

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x), \tag{3.3}$$

Para discutirmos a equação (3.2) e procurar uma possível solução, vamos nos limitar a intervalos nos quais as funções p, q, e g sejam contínuas.

Inicialmente daremos uma atenção inicial as EDOs lineares homogêneas como veremos a seguir.

3.1 Soluções de EDOs Lineares Homogêneas

Vamos estudar nesta seção o PVI dado por

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y &= g(x), \\ y(x_0) &= y_0, \\ y'(x_0) &= y_1', \end{cases} \tag{3.4}$$

onde p, q e g são funções definidas em um intervalo aberto I contendo x_0 e y_0, y_1 são constantes dadas.

O próximo teorema nos fornece condições suficientes para a existência de uma única solução para (3.4).

Teorema 3.1.1 (Existência e Unicidade)

Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + p(x)(x)y' + q(x)(x)y & = & g(x), \\ y(x_0) & = & y_0, \\ y'(x_0) & = & y_1', \end{cases}$$

onde p, q e g são contínuas em um intervalo aberto I que contém o ponto x_0. Então , existe exatamente uma solução y deste problema e a solução existe em todo o intervalo I.

Dem: A demonstração poderá ser encontrada em [2] na página 38.

No teorema a seguir, trataremos que a soma, ou a **superposição**, de duas ou mais soluções de uma equação diferencial linear homogênea é também uma solução, para isto, usaremos a notação de operador diferencial.

Teorema 3.1 (Princípio da Superposição)

Se y_1 e y_2 são soluções da equação diferencial,

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{3.5}$$

então a combinação linear

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x),$$

em que c_1 e c_2, são constantes arbitrárias, também é solução.

Dem: Sejam $y_1(x)$ e $y_2(x)$ soluções de (3.5) Se definirmos $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, então

$$\begin{aligned} L[c_1y_1 + c_2y_2] &= [c_1y_1 + c_2y_2]'' + p(x)[c_1y_1 + c_2y_2]' + q(x)[c_1y_1 + c_2y_2] \\ &= c_1y_1'' + c_2y_2'' + c_1p(x)y_1' + c_2p(x)y_2' + c_1p(x)y_1 + c_2q(x)y_2 \\ &= c_1[y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1] + c_2[y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2] \\ &= c_1L[y_1] + c_2L[y_2]. \end{aligned}$$

Como $L[y_1] = 0$ e $L[y_2] = 0$, segue que $L[c_1y_1+c_2y_2] = 0$. Mostramos assim que $y = c_1y_1+c_2y_2$ também é solução.

Exemplo 3.1.1 *As funções $y_1 = e^{-x}$ e $y_2 = xe^{-x}$ são ambas soluções para a EDO homogênea de segunda ordem*

$$L[y] = y'' - 2y' + y = 0$$

no intervalo $(-\infty, \infty)$. Pelo princípio da superposição, a combinação linear

$$y(x) = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x}$$

é tambem uma solução para a EDO no intervalo.

De fato,

$$y' = -c_1e^{-x} + c_2e^{-x} - c_2xe^{-x} \qquad \text{e} \qquad y'' = c_1e^{-x} - c_2e^{-x} + c_2xe^{-x} - c_2e^{-x}$$

logo,

$$\begin{aligned} L[y](x) &= c_1e^{-x} - c_2e^{-x} + c_2e^{-x} - c_2xe^{-x} + 2[-c_1e^{-x} + c_2e^{-x} - c_2xe^{-x}] + c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} \\ &= 2c_1e^{-x} + 2c_2xe^{-x} - 2c_2e^{-2} - 2 - c_1e^{-x} + 2c_2e^{-x} - 2c_2xe^{-x} \\ &= 0. \end{aligned}$$

No Teorema (3.1), mostramos que com apenas duas soluções da equação (3.5), pode-se construir uma família de soluções dadas por

$$y = c_1y_1 + c_2y_2.$$

A seguir, veremos que tipo de soluções são essas.

3.2 Dependência e Independência Linear

As definições a seguir são de suma importância para o estudo de equações diferenciais lineares.

Definição 3.2.1 *Dizemos que um conjunto de funções f_1 e f_2 são linearmente dependentes em um intervalo I se, existem constantes c_1 e c_2 não nulas, tais que*

$$c_1f_1(x) + c_2f_2(x) = 0$$

para todo $x \in I$. Caso contrário, dizemos que o conjunto de funções é linearmente independente.

Exemplo 3.2.1 *As funções $f_1(x) = sen(2x)$ e $f_2(x) = sen(x)cos(x)$ são linearmente dependentes no intervalo $(-\infty, +\infty)$, pois*

$$c_1sen(2x) + c_2sen(x)cos(x) = 0$$

é satisfeita para todo x real se $c_1 = 1/2$ e $c_2 = -1$.

O Teorema a seguir proporcionará uma condição suficiente para a independência linear de 2 funções em um certo intervalo. Supondo que cada função seja diferenciável. Este Teorema é devido a Josef Maria Hoëne Wronski [2].

Teorema 3.2 (Critério para Independência Linear de duas Funções)

Suponha que f_1 e f_2 sejam diferenciáveis. Se o determinante

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix} \tag{3.6}$$

for diferente de zero em pelo menos um ponto do intervalo I, então as funções f_1 e f_2 serão linearmente independentes no interalo I.

[2] **Josef Maria Hoëne Wronski** (1778 - 1853) nascido na Polônia e educado na Alemanha, Wronki passou a maior parte de sua vida na França. Mais um filósofo do que um matemático, ele acreditou que a verdade absoluta poderia ser alcaçada através da matemática [1].

O determinante do teorema precedente é denotado por

$$W(f_1(x), f_2(x))$$

e é chamado o **Wronskiano** das funções f_1 e f_2.

Dem: Suponha que $W(f_1(x_0), f_2(x_0)) \neq 0$ para algum x_0 fixado no intervalo I e que, $f_1(x)$ e $f_2(x)$ sejam linearmente independentes no intervalo. O fato de que as funções são linearmente dependentes, significa que existem constantes c_1 e c_2, não nulas, para as quais

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0$$

para todo x em I. Derivando essa combinação, temos

$$c_1 f_1'(x) + c_2 f_2'(x) = 0.$$

Obtemos então um sistema de equações lineares

$$\left\{ \begin{array}{lcrcl} c_1 f_1(x) & + & c_2 f_2(x) & = & 0, \\ c_1 f_1'(x) & + & c_2 f_2'(x) & = & 0. \end{array} \right. \tag{3.7}$$

Mas a dependência linear de f_1 e f_2 implica que (3.7) possui solução não trivial para cada x no intervalo. Logo,

$$W(f_1(x), f_2(x)) = \left| \begin{array}{cc} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{array} \right| = 0.$$

para todo x em I. Isso contradiz a suposição de que $W(f_1(x_0), f_2(x_0)) \neq 0$. Concluímos que f_1 e f_2 são linearmente independentes.

Corolário 3.2.1 *Se f_1 e f_2 são diferenciáveis e linearmente dependentes em I, então*

$$W(f_1(x), f_2(x)) = 0$$

para todo x no intervalo.

Exemplo 3.2.2 *Para $f_1(x) = e^{m_1 x}$, $f_2(x) = e^{m_2 x}$, $m_1 \neq m_2$,*

$$W(e^{m_1 x}, e^{m_2 x}) = \left| \begin{array}{cc} e^{m_1 x} & e^{m_2 x} \\ m_1 e^{m_1 x} & m_2 e^{m_2 x} \end{array} \right| = (m_2 - m_1) e^{(m_1 + m_2)x} \neq 0$$

para todo valor real de x. Logo, f_1 e f_2 são linearmente independente em qualquer intervalo do eixo x.

3.3 Soluções Linearmente Independentes

Nesta seção, estaremos interessados em encontrar duas soluções y_1 e y_2 para uma equação diferencial homogênea que são linearmente independentes. Surpreendentemente, o Wronskiano não nulo de um conjunto de duas soluções em um intervalo I é necessário e suficiente para a independência linear.

Teorema 3.3 (Critério para Independência Linear de Soluções)

Sejam y_1 e y_2 soluções para a equação diferencial linear homogênea de segunda ordem em um intervalo I. Então, o conjunto de soluções é linearmente independente em I se, e somente se,

$$W(y_1(x), y_2(x)) \neq 0$$

para todo x em I.

Dem: Se o $W(y_1(x), y_2(x)) \neq 0$ para todo x em I, segue-se imediatamente do Teorema (3.2) que y_1 e y_2 são linearmente independentes.

Agora, devemos mostrar que, se y_1 e y_2 são soluções linearmente independentes para uma equação diferencial linear homogênea de segunda ordem, então $W(y_1, y_2) \neq 0$ para todo x em I. Para ver isso, vamos supor que y_1 e y_2 sejam linearmente independentes e que exista um ponto x_0 em I para o qual

$$W(y_1(x_0), y_2(x_0)) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = 0.$$

então existem c_1 e c_2, não nulas, tais que

$$c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) = 0,$$

$$c_1y_1'(x_0) + c_2y_2'(x_0) = 0. \tag{3.8}$$

Se definirmos $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, então, em vista de (3.8), $y(x)$ satisfaz também

$$y(x_0) = 0, \qquad y'(x_0) = 0. \tag{3.9}$$

Mas a função identicamente nula satisfaz a equação diferencial e as condições iniciais (3.9). Portanto, pelo Teorema de Unicidade de Solução, tem-se $y = 0$, ou seja,

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = 0$$

para todo x em I. Isso contradiz a suposição de que y_1 e y_2 são linearmente independentes no intervalo.

No próximo Teorema, veremos que para encontrarmos uma solução geral, basta termos duas soluções LI.

Teorema 3.4 *Suponha que y_1 e y_2 são duas soluções da equação diferencial*

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{3.10}$$

Então a família de soluções da equação

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

com coeficientes arbitrários c_1 e c_2 inclui todas as soluções da equação (3.10) se, e somente se, existe um ponto x_0 em I onde o wronskiano não é nulo.

Dem: A demonstração pode ser encontrada em [1] na página 115.

3.4 EDOs Lineares Homogêneas com Coeficientes Constantes

Nesta seção vamos analisar a equação do tipo

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{3.11}$$

na qual a, b e c são constantes com $a \neq 0$. A solução deste tipo de equação, pode ser analizada intuitivamente, já que uma possível solução seria

$$y = e^{rx}$$

onde r é uma constante qualquer, poi tem a propriedade de ser linearmente dependente de sua primeira e segunda derivada. Para que essa função seja uma solução, será preciso que

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy &= ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx}, \\ &= e^{rx}(ar^2 + br + c) = 0, \end{aligned}$$

como a exponencial nunca se anula, tem-se que

$$ar^2 + br + c = 0, \tag{3.12}$$

sendo

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{e} \qquad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

as raízes de (3.12).

Este polinômio designa-se *polinômio característico* e é fundamental para prosseguirmos nossos estudos com as equações diferenciais. As raízes podem ser distintas, iguais ou complexas, deste modo, estudaremos separadamente os 3 casos.

Raízes Reais Distintas

O caso em que as raízes da equação característica (3.12) referente a equação (3.11) são r_1 e r_2 com $r_1 \neq r_2$, temos que

$$y_1(x) = e^{r_1x} \qquad \text{e} \qquad y_2(x) = e^{r_2x}$$

são soluções para a equação (3.11). Temos ainda que

$$\begin{aligned} W(e^{r_1x}, e^{r_2x}) = \begin{vmatrix} e^{r_1x} & e^{r_2x} \\ r_1e^{r_1x} & r_2e^{r_2x} \end{vmatrix} &= r_2e^{r_2x}e^{r_1x} - r_1e^{r_1x}e^{r_2x} \\ &= (r_2 - r_1)e^{(r_1+r_2)x}. \end{aligned}$$

Como tínhamos suposto $r_1 \neq r_2$ e que $e^{(r_1+r_2)x} \neq 0$ para todo x, então

$$W(e^{r_1x}, e^{r_2x}) \neq 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

logo, pelo Teorema (3.4), temos que a solução geral é dada por

$$y = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}.$$

Exemplo 3.4.1 *Dada a EDO homogênea*

$$y'' + 3y' + 2y = 0,$$

encontre a solução geral.

Temos que a equação característica é dada por

$$r^2 + 3r + 2 = 0,$$

que obtém como solução $r_1 = -2$ e $r_2 = -1$, deste modo, a solução geral é dada por

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x}.$$

Raízes reais iguais

Para o segundo caso em que as raízes são iguais, utilizaremos o método de d'Alembert[3]. Neste caso, o discriminante é $b^2 - 4ac = 0$ e a única raíz é dada por $r = -b/2a$. Logo temos uma solução dada por

$$y_1 = e^{-bx/2a}.$$

Para encontrar uma segunda solução, supomos que

$$y = v(x)y_1(x) = v(x)e^{-bx/2a}$$

onde $v(x)$ é uma função a determinar. Note que

$$y' = v'(x)e^{-bx/2a} - \frac{b}{2a}v(x)e^{-bx/2a},$$

e

$$y'' = v''(x)e^{-bx/2a} - \frac{b}{2a}v'(x)e^{-bx/2a} + \frac{b^2}{4a^2}v(x)e^{-bx/2a}.$$

Então, substituindo na equação (3.11), obtemos

$$\left[a\left(v''(x) - \frac{b}{a}v'(x) + \frac{b^2}{4a^2}v(x)\right) + b\left(v'(x) - \frac{b}{2a}v(x)\right) + cv(x)\right]e^{-bx/2a} = 0.$$

Desconsiderando o fator $e^{-bx/2a}$ que nunca se anula, e rearrumando os termos restantes, encontramos

$$av''(x) + (b-b)v'(x) + \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c\right)v(x) = 0. \tag{3.13}$$

A parcela envolvendo $v'(x)$ é obviamente nula. Além disso, o coeficiente de $v(x)$ é $c-(b^2/4a)$, que também é zero, pois $b^2 - 4ac = 0$ no problema em consideração. Assim, a equação (3.13) se reduz a

$$v''(x) = 0; \tag{3.14}$$

[3]**Jean d'Alembert** (1717 - 1783), matemático francês, foi contemporâneo de Euler e Daniel Bernoulli, e é conhecido, principalmente, por seu trabalho em mecânica e equações diferenciais. O princípio de d'Alembert em mecânica e o paradoxo de d'Alembert em hidrodinâmica receberam esse nome em sua homenagem [1]

integrando duas vezes a expressão (3.14), teremos

$$v(x) = c_1 + xc_2.$$

Portanto, obtemos duas soluções $y_1(x) = e^{-\frac{b}{2a}x}$ e $y_2(x) = (c_1 + c_2x)e^{-\frac{b}{2a}x}$, assim temos a solução geral

$$y(x) = c_1e^{-bx/2a} + c_2xe^{-bx/2a}.$$

Exemplo 3.4.2 *Determine a solução geral para a equação diferencial*

$$y'' + 4y' + 4y = 0. \tag{3.15}$$

O polinômio característico da equação (3.15) é dado por

$$r^2 + 4r + 4 = 0,$$

sendo $r_1 = r_2 = -2$ a raíz. Deste modo a solução geral é dada por

$$y = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x}.$$

Raízes complexas

Para o caso em que o discriminante

$$b^2 - 4ac < 0,$$

as raízes do polinômio característico (3.12) são um par complexo conjugado

$$r_1 = \alpha + i\beta \qquad \text{e} \qquad r_2 = \alpha - i\beta,$$

onde $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ e $\beta = \sqrt{4ac - b^2}$. Formalmente, não há diferença entre este caso com o outros dois já mencionados anteriormente em que

$$y = c_1e^{(\alpha+i\beta)x} + c_2e^{(\alpha-i\beta)x}.$$

Porém na prática, preferimos trabalhar com funções reais em vez de exponenciais complexas. Para este fim, usamos a **fórmula de Euler**: $e^{i\mu x} = cos(\mu x) + isen(\mu x)$ com $\mu \in \mathbb{R}$.

Deste modo, teremos as soluções

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}cos(\beta x) + ie^{\alpha x}sen(\beta x) \qquad \text{e} \qquad y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}cos(\beta x) - ie^{\alpha x}sen(\beta x).$$

As soluções y_1 e y_2 encontradas anteriormente, são funções que têm valores complexos e que por conveniência e praticidade, não usaremos, já que os coeficientes da EDO são números reais. Pelo Teorema do *Princípio da Superposição*, a soma e a diferença entre soluções também é uma solução, assim vamos simplificar a expressão da solução fazendo,

$$y_1 + y_2 = 2e^{\alpha x}cos(\beta x) \qquad \text{e} \qquad y_1 - y_2 = 2ie^{\alpha x}sen(\beta x).$$

Substituindo os termos constantes 2 e $2i$ por constantes arbitrárias, teremos como solução geral

$$y(x) = c_1e^{\alpha x}cos(\beta x) + c_2e^{\alpha x}sen(\beta x), \tag{3.16}$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias

Definição 3.4.1 *Se y_1 e y_2 são soluções da equação (3.10) em algum intervalo I tais que $W(y_1(x), y_2(x)) \neq 0$ para todo $x \in I$, então dizemos que y_1 e y_2 formam um* ***conjunto fundamental*** *de soluções.*

Notemos que a equação (3.16) forma um conjunto fundamental de soluções, pois se considerarmos

$$u(x) = e^{\alpha x} cos(\beta x) \qquad \text{e} \qquad v(x) = e^{\alpha x} sen(\beta x)$$

então

$$u'(x) = \alpha e^{\alpha x} cos(\beta x) - \beta e^{\alpha x} sen(\beta x) \qquad \text{e} \qquad v'(x) = \alpha e^{\alpha x} sen(\beta x) + \beta e^{\alpha x} cos(\beta x)$$

logo

$$W(u(x), v(x)) = \begin{vmatrix} u(x) & v(x) \\ u'(x) & v'(x) \end{vmatrix} = u(x)v'(x) - u'(x)v(x), \tag{3.17}$$

substituindo u, u', v e v' em (3.17), teremos

$$\begin{aligned} W(u(x), v(x)) &= e^{\alpha x} cos(\beta x)[\alpha e^{\alpha x} sen(\beta x) + \beta e^{\alpha x} cos(\beta x)] \\ &\quad - e^{\alpha x} sen(\beta x)[\alpha e^{\alpha x} cos(\beta x) - \beta e^{\alpha x} sen(\beta x)] \\ &= \alpha e^{2\alpha x} cos(\beta x) sen(\beta x) + \beta e^{2\alpha x} cos^{(}\beta x) \\ &\quad - \alpha e^{2\alpha x} sen(\beta x) cox(\beta x) + \beta e^{2\alpha x} sen^2(\beta x) \\ &= \beta e^{2\alpha x}(sen^2(\beta x) + cos^2(\beta x)) \\ &= \beta e^{2\alpha x} \neq 0. \end{aligned}$$

Portanto a família $u(x) = e^{\alpha x} cos(\beta x)$ e $v(x) = e^{\alpha x} sen(\beta x)$, formam um conjunto fundamental de soluções, logo a solução é dada por

$$y = c_1 e^{\alpha x} cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x} sen(\beta x).$$

Exemplo 3.4.3 *Dada a EDO*

$$y'' + 2y' + 8y = 0,$$

encontre a solução geral.

O polinômio caraterístico é

$$r^2 + 2r + 8 = 0,$$

sendo duas raízes complexas

$$r_1 = -1 + i\sqrt{7} \qquad \text{e} \qquad r_2 = -1 - i\sqrt{7},$$

logo a solução geral é dada por

$$y = e^{-x}[c_1 sen(\sqrt{7}x) + c_2 cos(\sqrt{7}x)].$$

3.5 Comportamento de soluções de EDOs homogêneas com coeficientes constante

Nesta seção, estamos interessados em fazer uma analize para o comportamento das soluções a medida que $x \longrightarrow \infty$ para alguns casos especiais que veremos logo em seguida.

Suponhamos uma EDO linear homogênea de modo que a, b e c são constantes positivas, e mostraremos que todas as soluções da equação

$$ay'' + by + cy = 0, \tag{3.18}$$

tendem a zero quando $x \longrightarrow \infty$. Para isto, faremos 3 análises para possíveis soluções.

Caso 1: Raízes Distintas

Inicialmente faremos uma análise para as raízes da equação característica $ar^2+br+c = 0$ associada a equação (3.18), que são

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{e} \qquad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

de modo que a solução para a equação (3.18) seja

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}.$$

Como estamos supondo constantes positivas, temos $b > 0 \Longrightarrow b^2 > 0$, então

$$b^2 > b^2 - 4ac \Longrightarrow b > \sqrt{b^2 - 4ac},$$

como $2a > 0$, teremos

$$-b + \sqrt{b^2 - 4ac} < 0 \Longrightarrow \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} < 0.$$

Desta maneira, concluímos que $y < 0$. É claro que $r_2 < 0$, assim

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} y(x) &= \lim_{x\to\infty} c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{x}, \\
&= \lim_{x\to\infty} c_1 e^{r_1 x} + \lim_{x\to\infty} c_2 e^{r_2 x}, \\
&= 0 + 0, \\
&= 0,
\end{aligned}$$

já que r_1 e r_2 são ambos negativos.

Caso 2: Raízes Iguais

Vimos na seção anterior que, da equação característica $ar^2 + br + c = 0$ associada a equação (3.18) no caso em que $\sqrt{b^2 - 4ac} = 0$, as raízes são iguais, assim a solução é dada por

$$y(x) = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx},$$

onde $r = -\dfrac{b}{2a} < 0$, logo teremos que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} y(x) &= \lim_{x\to\infty} c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx} \\
&= \lim_{x\to\infty} c_1 e^{rx} + \lim_{x\to\infty} c_2 x e^{rx} \\
&= \lim_{x\to\infty} c_1 e^{-\frac{b}{2a}x} + \lim_{x\to\infty} c_2 x e^{-\frac{b}{2a}x} \\
&= 0 + 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Caso 3: Raízes Complexas

Para o caso em que a equação característica $ar^2+br+c=0$ associada a equação (3.18) obtenha raízes complexas, teremos que considerar $\sqrt{b^2-4ac}<0$, obtendo como solução

$$r = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac-b^2}}{2a} = -\frac{b}{2a} \pm i\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a},$$

chamando de $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ e $\beta = \dfrac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$ teremos

$$r = \alpha \pm \beta i,$$

deste modo teremos a solução

$$y(x) = c_1 e^{\alpha x} cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x} sen(\beta x).$$

Antes de analizarmos o comportamento da solução, veremos um lema importante para a análise.

Lema 3.5.1 *Se f é uma função limitada e g é uma função tal que $\lim_{x\longrightarrow\infty} g(x) = 0$, então*

$$\lim_{x\to\infty} f(x)\cdot g(x) = 0.$$

Fazendo a análise do comportamento, teremos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} y(x) &= \lim_{x\to\infty} c_1 e^{\alpha x} cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x} sen(\beta x), \\
&= \lim_{x\to\infty} c_1 e^{\alpha x} cos(\beta x) + \lim_{x\to\infty} c_2 e^{\alpha x} sen(\beta x),
\end{aligned}$$

como as funções $cos(\beta x)$ e $sen(\beta x)$ são limitadas e a função $e^{\alpha x} \to 0$, pois $\alpha = -\dfrac{b}{2a} < 0$, então pelo Lema (3.5.1)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} y(x) &= \lim_{x\to\infty} c_1 e^{\alpha x} cos(\beta x) + \lim_{x\to\infty} c_2 e^{\alpha x} sen(\beta x), \\
&= 0 + 0, \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Caso 4: Coeficiente $b = 0$

O comportamento da solução da equação (3.18) para o caso em que $a > 0$ e $c > 0$ mas $b = 0$, não terá o mesmo resultado dos casos anteriores, pois, da equação característica associada a equação (3.18)

$$ar^2 + c = 0,$$

que tem como solução

$$r = \pm i\sqrt{\frac{c}{a}}$$

e a solução geral é dada por

$$y(x) = c_1 cos\left(x\sqrt{\frac{c}{a}}\right) + c_2 sen\left(x\sqrt{\frac{c}{a}}\right).$$

Note que quando $x \longrightarrow \infty$ a solução não será nula, porém, permanecerá limitada.

Caso 5: Coeficiente $c = 0$

Para o caso em que $a > 0$ e $b > 0$, mas $c = 0$, obtemos como equação característica $ar^2 + br = 0$ associada a equação (3.18), que tem como raízes

$$r_1 = 0 \qquad \text{ou} \qquad r_2 = -\frac{b}{a},$$

logo, obtemos a solução

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{r_2 x}. \tag{3.19}$$

Assim o comportamento da solução quando $x \longrightarrow \infty$ é

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} y(x) &= \lim_{x\to\infty} c_1 + c_2 e^{r_2 x}, \\ &= \lim_{x\to\infty} c_1 + \lim_{x\to\infty} c_2 e^{r_2 x}, \end{aligned}$$

como $r_2 = -\dfrac{b}{a} < 0$, temos

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} y(x) &= \lim_{x\to\infty} c_1 + c_2 e^{r_2 x}, \\ &= c_1 + 0, \\ &= c_1. \end{aligned}$$

Para este caso, nota-se que a solução quando $x \longrightarrow \infty$, tende a uma constante a determinar.

Considere agora um valor inicial $y(0) = y_0$ e $y'(0) = y_0'$ para o caso em que $a > 0$ e $b > 0$ e $c = 0$. Assim

$$\begin{aligned} y(0) = y_0 &= c_1 + c_2 e^0, \\ &= c_1 + c_2 \end{aligned}$$

e derivando a solução (3.19), teremos

$$y'(x) = c_2 r_2 e^{r_2 x} \tag{3.20}$$

e substituindo $y'(0) = y'_0$ em (3.20), obtemos

$$\begin{aligned} y'(0) = y'_0 &= c_2 r_2 e^0, \\ &= c_2 r_2 \end{aligned}$$

ou então

$$-\frac{b}{a} c_2 = y'_0.$$

Deste modo, teremos o sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 &= y_0, \\ -\dfrac{b}{a} c_2 &= y'_0, \end{cases}$$

sendo $c_1 = \dfrac{a y'_0 + b y_0}{b}$ e $c_2 = -\dfrac{a}{b} y'_0$, portanto, a solução torna-se

$$y(x) = \frac{a y'_0 + b y_0}{b} - \frac{a}{b} y'_0 e^{-(b/a)x}$$

e consequentemente

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} y(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{a y'_0 + b y_0}{b} - \frac{a}{b} y'_0 e^{-(b/a)x}, \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{a y'_0 + b y_0}{b} - \lim_{x\to\infty} \frac{a}{b} y'_0 e^{-(b/a)x}, \\ &= \frac{a y'_0 + b y_0}{b} - 0, \\ &= \frac{a y'_0 + b y_0}{b}. \end{aligned}$$

3.6 Equação de Euler

Nesta seção, apresentaremos um certo tipo equação linear homogênea em que os coeficientes são variáveis e que pode ser resolvida através de um método desenvolvido por Euler. A equação de Euler é dada por

$$a x^2 y'' + b x y' + c y = 0, \tag{3.21}$$

sendo a, b e c constantes.

Para este caso, observa-se que a solução para esta equação tem a propriedade cuja primeira derivada multiplicada por x e segunda derivada multiplicada por x^2 sejam linearmente dependentes da função original. Uma função que tem esta propriedade é a função

$$y = x^r, \tag{3.22}$$

em que r é qualquer constante real dada.

Substituindo (3.22) na equação (3.21), obtemos

$$ar(r-1)x^r + brx^r + cx^r = 0,$$

portanto teremos

$$ar(r-1) + br + c = 0, \tag{3.23}$$

cujas raízes são

$$r_1 = \frac{a-b+\sqrt{(b-a)^2-4ac}}{2a} \qquad \text{e} \qquad r_2 = \frac{a-b-\sqrt{(b-a)^2-4ac}}{2a}.$$

A equação (3.23) é conhecida como *polinômio característico*, sendo que cada raiz r_1 e r_2, nos conduz a uma solução particular. Consideremos então os 3 casos:

Raízes reais Distintas

As raízes r_1 e r_2 neste caso são reais e distintas, que nos conduz a duas soluções particulares. Pode-se mostrar que o Wronskiano das duas soluções correspondentes é não nulo e portanto a solução geral é;

$$y_g = c_1x^{r_1} + c_2x^{r_2}. \tag{3.24}$$

Temos ainda que

$$W(x^{r_1}, x^{r_2}) = \begin{vmatrix} x^{r_1} & x^{r_2} \\ r_1x^{r_1} & r_2x^{r_2} \end{vmatrix} = r_2x^{r_2}x^{r_1} - r_1x^{r_1}x^{r_2} = (r_2-r_1)x^{(r_1+r_2)}.$$

Como tínhamos suposto $r_1 \neq r_2$ e que $x^{(r_1+r_2)} \neq 0$ para todo x não nulo, então

$$W(x^{r_1}, x^{r_2}) \neq 0,$$

logo, pelo Teorema (3.24), temos que a solução geral é dada por

$$y = c_1x^{r_1} + c_2x^{r_2},$$

onde

$$r_1 = \frac{a-b+\sqrt{(b-a)^2-4ac}}{2a} \qquad \text{e} \qquad r_2 = \frac{a-b-\sqrt{(b-a)^2-4ac}}{2a}.$$

Raízes reais Iguais

Se as raízes r_1 e r_2 são iguais, então conhecemos apenas uma solução $y_1 = x^{r_1}$, da equação (3.21). Deste modo, vamos aplicar o método de d'Alambert para descobrir uma segunda solução linearmente independente de y_1 procurando então y_2 onde

$$y_2 = vy_1, \tag{3.25}$$

que nos dá

$$y_2' = v'y_1 + vy_1' \qquad \text{e} \qquad y_2'' = v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1'' \tag{3.26}$$

Substituindo (3.25) e (3.26) em (3.21) teremos

$$ax^2(v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1'') + bx(v'y_1 + vy_1') + cvy_1 = 0.$$

Agrupando os termos, obtemos

$$ax^2y_1v'' + (2ax^2y_1' + bxy_1)v' + (ax^2y_1'' + bxy_1' + cy_1)v = 0. \tag{3.27}$$

Como $y_1 = x^{r_1}$ é solução particular da equação (3.21), então o argumento de v da equação (3.27) é nulo, logo podemos reescrever

$$ax^{r_1+2}v'' + (2r_1x^{r_1+1} + bx^{r_1+1})v' = 0,$$

que ao simplificar, obtemos a equação

$$axv'' + (2r_1 + b)v' = 0. \tag{3.28}$$

Como $r_1 = r_2$ temos que a raíz do polinômio característico é dada por

$$r_1 = r_2 = \frac{a-b}{2a}.$$

Logo, substituindo $2r_1 + b = a$ na equação (3.28), obtemos a equação

$$axv'' + av' = 0,$$

ou ainda,

$$xv'' + v' = 0,$$

que pode ser redutível para uma EDO de primeira ordem. Fazendo a mudança de variável $z = v'$, obtemos

$$x\frac{dz}{dx} + z = 0$$

Separando as variáveis, integrando e tomando nulo a constante de integração, encontramos

$$\ln z = -\ln x,$$

de onde segue

$$v' = z = \frac{1}{x}. \tag{3.29}$$

Integrando a equação (3.29), segue que $v = \ln x$, logo

$$y_2 = x^{r_1}\ln x.$$

Portanto a solução geral da equação de Euler é dada por

$$y(x) = c_1x^{r_1} + c_2x^{r_1}\ln|x|.$$

Raízes Complexas

Uma das raízes é $r = \alpha + i\beta$ e a correspondente solução é complexa. As partes real e imaginária dessa solução serão soluções reais. Para separar a parte real e imaginária usamos o seguinte método

$$x^{(\alpha+i\beta)} = x^{\alpha}e^{\ln|x^{i\beta}|} = x^{\alpha}e^{i\beta\ln|x|} = x^{\alpha}\left[cos(\beta\ln|x| + isen(\beta\ln|x|)\right].$$

A solução geral é a uma combinação linear das partes real e imaginárias (as quais são linearmente independentes)

$$y(x) = x^{\alpha}[c_1\cos(\beta\ln|x| + c_2sen(\beta\ln|x|)].$$

Na próxima seção, será desenvolvido o caso em que as EDOs não são homogêneas, sendo que a solução geral consiste em achar uma solução da equação homogênea associada a EDO e uma solução particular que veremos a seguir.

3.7 EDOs Lineares não Homogêneas

Nesta seção, nos atentaremos às equações diferenciais lineares não homogêneas, ou seja, equações do tipo

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x), \tag{3.30}$$

em que as funções p, q e g são contínuas em um intervalo aberto I. A equação

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{3.31}$$

chamada de equação homogênea associada à equação (3.30) em que p e q são as mesmas funções da equação (3.30). Os resultados a seguir, nos fornecem uma estrutura de soluções para a construção de uma solução geral.

Teorema 3.5 *Se Y_1 e Y_2 são duas soluções da equação (3.30), então sua difereça $Y_1 - Y_2$ é uma solução da equação homogênea associada (3.31). Se, além disso, y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções para a equação (3.31), então*

$$Y_1(x) - Y_2(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x), \tag{3.32}$$

onde c_1 e c_2 são constantes determinadas.

Dem: Notemos inicialmente que Y_1 e Y_2 satisfazem as equações

$$Y_1'' + p(x)Y_1' + q(x)Y_1 = 0 \qquad \text{e} \qquad Y_2'' + p(x)Y_2' + q(x)Y_2 = 0.$$

Subtraindo as equações, teremos

$$Y_1'' - Y_2'' + p(x)[Y_1' - Y_2'] + q(x)[Y_1 - Y_2] = 0, \tag{3.33}$$

pela propriedade da soma e diferença de derivadas, temos ainda que

$$[Y_1 - Y_2]'' + p(x)[Y_1 - Y_2]' + q(x)[Y_1 - Y_2] = 0, \tag{3.34}$$

o que prova que a diferença $Y_1 - Y_2$, também é solução para a equação (3.31), deste modo, podemos escrever

$$L[Y_1 - Y_2] = 0, \tag{3.35}$$

de onde segue que $Y_1 - Y_2$ é uma solução da equação (3.31). Como as soluções da equação (3.31) podem ser dadas por uma combinação linear de funções em um conjunto fundamental de soluções, então a equação (3.32) é válida, o que prova nossa demonstração.

Teorema 3.6 *A solução geral da equação não homogênea (3.30) pode ser escrita na forma*

$$y = c_1 y_1(x) + y_2(x) + Y_p(x), \tag{3.36}$$

onde y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções da equação homogênea associada (3.31), c_1 e c_2 são constantes arbitrárias e Y_p é uma solução particular da equação não homogênea (3.30).

Dem: Segue do Teorema precedente nossa demonstração. Notemos que a equação (3.32) é válida se assumirmos que Y_1 como uma solução arbitrária de y da equação (3.30) e Y_2 particular Y_p. Da equação (3.32) obtemos assim,

$$y(x) - Y_p(x) = c_1 y_1(x) + y_2(x),$$

que equivale à equação (3.36). Como y é uma solução arbitrária da equação (3.30), a expressão da equação (3.36) inclui todas as soluções da equação (3.30).

De modo geral, encontrar uma solução geral $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, em que y_1 e y_2 são soluções fundamentais da equação homogenênea associada será chamada de solução da equação homogênea associada y_h. E encontrar uma solução $Y(x)$ da equação não homogênea será denotada por solução particular y_p. Pelo Teorema (3.6), a solução geral é dada por $y_g = y_h + y_p$.

Para as próximas seções, vamos discutir dois métodos para determinarmos as soluções das equações diferenciais de segunda ordem, que são conhecidos como método dos coeficientes indeterminados e variação dos parâmetros, verificando suas vantagens e desvantagens.

3.8 Método dos coeficientes indeterminados

Consideremos as EDOs lineares de coeficientes constantes

$$y'' + by' + cy = g(x).$$

Para alguns casos, a função g torna simples o cálculo para encontrarmos uma solução particular. Consideraremos alguns casos para que posteriormente generalizaremos o método.

Consideraremos inicialmente o caso em que g é uma função exponencial, logo é razoável supor que a solução $y(x)$ seja proporcional à exponencial, já que as derivadas da função exponencial são múltiplos da própria função exponencial. Por exemplo, esperamos que a equação

$$y'' + 3y' + 2y = 2e^{3x}, \tag{3.37}$$

tenha soluções particulares da forma

$$y_p = Ae^{3x},$$

onde A é um coeficiente a ser determinado. As derivadas da função são

$$y' = 3Ae^{3x} \qquad \text{e} \qquad y'' = 9Ae^{3x}.$$

Substituindo na equação (3.37), teremos

$$9Ae^{3x} + 3(3Ae^{3x}) + 2Ae^{3x} = 2e^{3x},$$

que obtemos

$$20Ae^{3x} = 2e^{3x},$$

logo, obtemos $A = 1/10$, deste modo teremos a solução $y_p = \dfrac{e^{3x}}{10}$. Da solução homogênea, temos

$$y_h = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x},$$

portanto, pelo Teorema (3.6), a solução geral é dada por

$$y_g = y_h + y_p = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} + \frac{e^{3x}}{10}.$$

Para o caso em que a função g for um polinômio, a solução é de certa maneira parecida com o exemplo anterior, pois se considerarmos por exemplo

$$y'' - 4y' + 2y = 2x^2,$$

temos que g é um polinômio de segundo grau, deste modo, podemos supor

$$y_p = A + Bx + Cx^2$$

e substituindo na equação diferencial

$$y'' - 4y' + 2y = 2C - 4B + 2A + (2B - 8C)x + 2Cx = 2x^2,$$

temos que é necessário que os coeficientes A, B e C verifiquem as seguintes equações

$$\begin{cases} 2A - 4B + 2C = 0, \\ \qquad 2B - 8C = 0, \\ \qquad\qquad 2C = 2. \end{cases}$$

A solução deste sistema dá os coeficientes que definem a solução particular

$$y_p = 7 + 4x + x^2.$$

Como a solução homogênea associada é $y_h = c_1e^{2+\sqrt{2}} + c_2e^{2-\sqrt{2}}$ então a solução geral é dada por

$$y_g = c_1e^{2+\sqrt{2}} + c_2e^{2-\sqrt{2}} + 7 + 4x + x^2.$$

Vejamos o caso onde a funções g é uma função trigonométrica.

Considere a EDO

$$y'' - 3y' + 2y = 10sen(2x). \tag{3.38}$$

Para EDOs de segunda ordem deste tipo, ou seja, que envolva seno ou cosseno, seria razoável supor que a solução seria algo do tipo $y = Asen(2x)$ que nos conduziria a

$$\begin{aligned} -4Asen(2x) - 6Acos(2x) + 2Asen(2x) &= 10sen(2x), \\ -2Asen(2x) - 6Acos(2x) &= 10sen(2x), \end{aligned}$$

que ao resolver nos daria $A = -5$ e $A = 0$, um absurdo, desta forma, admitimos a solução como

$$y = Acos(2x) + Bsen(2x),$$

e substituindo na equação (3.38), obtemos

$$y'' - 3y' + 2y = (-4A - 6B + 2A)cos(2x) + (-4B + 6A + 2B)sen(2x),$$

como o seno e o cosseno são funções linearmente independentes, esta última combinação linear delas só poderá ser igual a $10sen(2x)$ se

$$\begin{cases} -4A - 6B + 2A = 0 \\ -4B + 6A + 2B = 10. \end{cases}$$

A solução deste sistema é $A = -\frac{1}{2}$, $B = \frac{3}{2}$ e a solução particular é

$$y_p = -\frac{1}{2}cos(2x) + \frac{3}{2}sen(2x).$$

Como $y_h = c_1e^x + c_2e^{2x}$, temos que a solução geral é dada por

$$y_g = c_1e^x + c_2e^{2x} - \frac{1}{2}cos(2x) + \frac{3}{2}sen(2x).$$

Como vimos anteriormente, a solução da equação era determinada como uma combinação linear de soluções que coincidentemente eram sempre linearmente independentes, na qual comparávamos seus coeficientes. No entanto, se alguma das funções independentes fosse também solução da equação homogênea associada, a equação obtida não teria solução particular, como podemos ver por exemplo na equação

$$y'' - 3y' - 4y = e^{-x}, \tag{3.39}$$

pois, se usarmos o método do primeiro exemplo,

$$y = Ae^{-x} \quad \Longrightarrow \quad y'' - 3y' - 4y = (A + 3A - 4A)e^{-x} = 0$$

a solução particular neste caso tem a forma

$$y = Axe^{-x},$$

assim, substituindo na equação (3.40)

$$y' = Ae^{-x} - Axe^{-x} \qquad \text{e} \qquad y'' = -Ae^{-x} - Ae^{-x} + Axe^{-x}$$

onde A pode ser determinado por substituição na equação, já que neste caso a função anterior não é solução da equação homogênea (se fosse, teríamos multiplicado mais uma vez por x). Logo teremos

$$-Ae^{-x} - Ae^{-x} + Axe^{-x} - 3(Ae^{-x} - Axe^{-x}) - 4Axe^{-x} = e^{-x}, \tag{3.40}$$

o que nos dá

$$-5Ae^{-x} = e^{-x} \Longrightarrow A = -\frac{1}{5},$$

portanto a solução geral é dada por

$$y(x) = c_1e^{4t} + c_2e^{-x} - \frac{xe^{-x}}{5}.$$

Para ampliarmos nosso conjunto de equações que podemos utilizar o método de coeficientes indeterminados, consideremos que o lado direito como um produto dos três primeiros casos, por exemplo a equação

$$y'' - 6y' + 9y = (2 + x)e^{3x}cos(2x).$$

Desta forma a solução particular terá a forma

$$y = (A + Bx)e^{3x}cos(2x) + (C + Dx)e^{3x}sen(2x),$$

mas se o lado direito fosse

$$y'' - 6y' + 9y = (2 + x)e^{3x},$$

teriamos a solução como

$$y = (Ax^2 + Bx^3)e^{3x} + (Cx^2 + Dx^3)e^{3x}.$$

Vimos que foi preciso multiplicar os dois polinômios duas vezes por x, já que as funções e^{3x} e xe^{3x} são soluções da equação homogênea associada e os coeficientes A, B, C e D podem ser determinado usando raciocínio análogo aos exemplos anteriores determinando assim a solução particular e posteriormente a solução geral.

Embora o método dos coeficientes indeterminados seja relativamente fácil de exercutarmos, ele é limitado a um conjunto restrito de funções consideradas anteriormente, sendo seus coeficientes constantes. Para outros tipos de equações lineares será preciso usar outros métodos como, por exemplo, o método de variação de parâmetros, que não se restringe a EDOs com coeficientes constantes.

3.9 Método de variação de parâmetros

O método de variação de parâmetros poderá ser utilizado para EDO linear, e não apenas para EDOs lineares com coeficientes constantes como foi visto no método de coeficientes indeterminados. No entanto, para vermos a sequência do método é preciso primeiro conhecer a solução geral da equação diferencial homogênea associada, e só assim para que possamos começar o método. Consideremos uma equação diferencial linear de segunda ordem

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x). \tag{3.41}$$

Vamos admitir que a solução da equação homogênea associada é dada por

$$y_h = c_1y_1 + c_2y_2,$$

em que y_1 e y_2 são soluções fundamentais e também uma solução particular

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2, \tag{3.42}$$

em que u_1 e u_2 são funções a determinar. Derivando a solução (3.42), teremos

$$y_p' = u_1' y_1 + u_2' y_2 + u_1 y_1' + u_2 y_2',$$

assumindo que

$$u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0 \tag{3.43}$$

e derivando novamente a equação (3.42), chegamos a

$$y_p'' = u_1' y_1' + u_2' y_2' + u_1 y_1'' + u_2 y_2''.$$

Substituindo a última igualdade na equação (3.41), teremos

$$y_p'' + p y_p' + q y_p = u_1' y_1' + u_2' y_2' + u_1(y_1'' + p y_1' + q y_1) + u_2(y_2'' + p y_2' + q y_2).$$

Os termos entre parêntesis são nulos, já que tanto y_1 e y_2 são soluções da equação homogênea associada. Obtemos assim

$$u_1' y_1' + u_2' y_2' = g(x).$$

Esta equação junto com a equação (3.43), constitui um sistema linear de duas equações que permite calcular as funções u_1 e u_2, ou seja, teremos que resolver a equação matricial

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ g(x) \end{bmatrix},$$

em que

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0,$$

desta forma, podemos utilizar o *Método de Cramer* para resolver o sistema e encontrar

$$u_1'(x) = \frac{-y_2(x)\, g(x)}{W(y_1, y_2)} \qquad \text{e} \qquad u_2'(x) = \frac{y_1(x)\, g(x)}{W(y_1, y_2)}.$$

Calculando as primitivas

$$u_1(x) = -\int \frac{y_2(x)\, g(x)}{W(y_1, y_2)} dx \qquad \text{e} \qquad u_2(x) = \int \frac{y_1(x)\, g(x)}{W(y_1, y_2)} dx,$$

teremos portanto a solução particular

$$Y(x) = -y_1(x) \int \frac{y_2(x)\, g(x)}{W(y_1, y_2)} dx + y_2(x) \int \frac{y_1(x)\, g(x)}{W(y_1, y_2)} dx,$$

Logo, obtemos a solução geral dada por

$$y_g(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) - y_1(x) \int \frac{y_2(x)\, g(x)}{W(y_1, y_2)} dx + y_2(x) \int \frac{y_1(x)\, g(x)}{W(y_1, y_2)} dx.$$

Veremos a seguir, um exemplo de uma EDO linear não homogênea, que pode ser usado o método de variação de parâmetros.

Exemplo 3.9.1 *Consideremos a EDO com coeficientes variáveis*

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = x^4. \tag{3.44}$$

Note que a equação dada é uma equação de Euler. Primeiramente, vamos determinar a solução homogênea associada a equação (3.44), logo admitimos que a solução é dada por $y = x^r$ em um intervalo $I = (0, \infty)$, deste modo, derivando duas vezes teremos

$$y' = rx^{r-1} \qquad \text{e} \qquad y'' = r(r-1)x^{r-2},$$

substituindo na equação homogênea associada, teremos

$$\begin{aligned} x^2r(r-1)x^{r-2} - 3(rx^{r-1}) + 4x^r &= 0 \\ x^r[r(r-1) - 3r + 4] &= 0 \\ r^2 - 4r + 4 &= 0 \\ (r-2)^2 &= 0, \end{aligned}$$

onde $r = 2$ é a raíz de multiciplidade 2 e consequentemente a solução da equação homogênea associada é dada por

$$y_h = c_1x^2 + c_2x^2 \ln x.$$

De acordo com o método precedente a este exemplo, admitimos que a solução particular da equação (3.44) é

$$y_p = u_1x^2 + u_2x^2 \ln x$$

e seguindo o método de variação de parâmetros, derivamos y_p duas vezes, ou seja,

$$y_p' = u_1'x^2 + u_2'x^2 \ln x + u_1 2x + u_2(2x \ln x + x).$$

Assumindo que a parcela $u_1'x^2 + u_2'x^2 \ln x = 0$,

$$y_p' = u_1 2x + u_2(2x \ln x + x),$$

derivando y_p', teremos

$$y_p'' = u_1' 2x + 2u_1 + u_2'(2x \ln x + x) + u_2[(2 \ln x + 2) + 1].$$

Substituimos na equação (3.44)

$$\begin{aligned} x^2[u_1' 2x + 2u_1 + u_2'(2x \ln x + x) + u_2[(2 \ln x + 2) + 1]] & \\ -3x[u_1 2x + u_2(2x \ln x + x)] + 4[u_1x^2 + u_2x^2 \ln x] &= x^4 \end{aligned}$$

ou ainda,

$$u_2'x^3 + u_(' 2x^3 \ln x + x^3) = x^4.$$

Deste modo, da dedução do método de variação de parêmetros, o coeficiente de y'' é necessariamente igual a 1, logo vamos dividir a equação anterior por x^2, assim teremos o sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} 2xu_1' & + & u_2'(2x \ln x + x) & = & x^2, \\ u_1'x^2 & + & u_2'x^2 \ln x & = & 0, \end{array} \right.$$

que equivale a resolver a equação matricial

$$\begin{bmatrix} x^2 & x^2 \ln x \\ 2x & 2x \ln x + x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

onde

$$W = \begin{vmatrix} x^2 & x^2 \ln x \\ 2x & 2x \ln x + x \end{vmatrix} = x^3.$$

Pela *Regra de Cramer*, temos que

$$\begin{cases} u_1'(x) &= -x \ln x, \\ u_2'(x) &= x, \end{cases}$$

e as primitivas são

$$\begin{cases} u_1(x) &= -\dfrac{x^2 \ln x}{2} + \dfrac{x^4}{4}, \\ u_2(x) &= \dfrac{x^2}{2}. \end{cases}$$

Portanto a solução geral da equação (3.44) é

$$y_g(x) = c_1 x^2 + c_2 x^2 \ln x + \frac{x^4}{4}.$$

Capítulo 4

Método das Séries

Até agora, podemos ver vários métodos sistemáticos para resolver EDOs de segunda ordem com coeficientes constantes e um tipo especial com coeficientes variáveis no capítulo 3. A partir de agora, trataremos de uma classe muito maior de equações e a principal ferramenta será a representação em série de potências. Para isto, utilizaremos algumas vezes, EDOs com resultados analíticos para que possamos verificar sua veracidade.

4.1 Revisão de Séries de Potência

Primeiramente faremos um resumo dos resultados mais pertinentes sobre séries de potência nas quais usaremos em nossos resultados.

Definição 4.1.1 *Uma serie de potência é uma série da forma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

onde x é uma variável e c_n são constantes. Uma série de potências pode convergir para certos valores de x e divergir para outros valores de x.

De modo geral, a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots,$$

é chamada de série de potências centrada em x_0. É claro que toda série de potências é convergente para $x = x_0$. Para analisarmos a convergência da série de potências podemos utilizar os seguintes testes:

Teste da Razão. Suponha que $a_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e que $x \neq x_0$. Pelas propriedades de limite temos

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}(x - x_0)^{n+1}}{a_n (x - x_0)^n} \right| = |x - x_0| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |x - x_0| L,$$

então a série de potências converge para todos valores de x para os quais $|x - x_0|L < 1$ e diverge para os valores de x que $|x - x_0|L > 1$. Se $|x - x_0|L = 1$ o teste não é conclusivo.

Exemplo 4.1.1 *A série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ *converge para todos os valores reais de* x.

Para a série dada,

$$a_n = \frac{x^n}{n!} \quad e \quad a_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Assim, aplicando o teste da razão,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{x^n}\right| \\ &= |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \\ &= 0 \\ &< 1. \end{aligned}$$

Logo, pelo teste da razão a série converge para todos os valores reais de x.

Teste da Raiz. Suponha que $a_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e que $x \neq x_0$. Temos que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} = |x-x_0| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |x-x_0|L,$$

então a série de potências converge para todos valores de x que $|x-x_0|L < 1$ e diverge para os valores de x que $|x-x_0|L > 1$. Se $|x-x_0|L = 1$ nenhuma conclusão relativa à convergência pode ser tirada do teste.

Exemplo 4.1.2 *Ache os valores de* x *para os quais a série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty} n^3x^n$ *converge.*

Para a série dada temos $a_n = n^3x^n$. *Usamos o teste da raiz e calculamos* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n^3x^n|} = |x| \lim_{n\to\infty} n^{\frac{3}{n}} \tag{4.1}$$

Para determinar $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{3}{n}}$, *seja* $y = n^{\frac{3}{n}}$. *Então,* $\ln y = \frac{3}{n}\ln n$. *Assim,*

$$\lim_{n\to\infty} \ln y = 3 \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0,$$

assim $\lim_{n\to\infty} y = 1$. *Substituindo esse resultado em (4.1), temos*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n^3x^n|} = |x|.$$

Logo, a série a série de potências converge para $|x| < 1$. *A série é divergente quando* $|x| > 1$. *Se* $x = 1$, *a série de potências torna-se* $\sum_{n=0}^{\infty} n^3$, *que é divergente, pois* $\lim_{n\to\infty} n^3 \neq 0$. *De modo análogo, a série de potencias é divergente quando* $x = -1$.

Para cada valor de x o qual a série converge, ela representa um número que é a sua soma, assim, uma série de potências define uma função. A função f, com valores funcionais

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n,$$

tem como domínio todos os valores de x para os quais a série de potência converge. Para a série de potências temos um importante teorema enunciado a seguir.

Teorema 4.1.1 *Seja* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *uma dada série de potências. Então uma, e somente uma das seguintes afirmações é verdadeira:*
(i) a série converge somente para $x = x_0$;
(ii) a série converge para todos os valores de x;
(iii) existe um número não negativo ρ, *chamado de* ***raio de convergência***, *tal que a série converge para todos os valores de* x *para os quais* $|x-x_0| < \rho$ *e diverge para todos os valores de* x *para os quais* $|x-x_0| > \rho$.

No exemplo 4.1.1 a série converge para todos os valores reais de x enquanto que no exemplo 4.1.2 temos que a série converge no intervalo $(-1,1)$, ou seja, o raio de convergência é $\rho = 1$.

Para o estudo do método de solução por séries de potências, será necessário o uso de derivação nas séries. O seguinte teorema estabelece em que condições podemos derivar uma série de potências.

Teorema 4.1.2 *Seja* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *um série de potências cujo raio de convergência é* $\rho > 0$. *Então, se* f *for a função definida por*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

$f'(x)$ *existirá para todo* x *no intervalo aberto* $(-\rho, \rho)$, *sendo dada por*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n(x-x_0)^{n-1}.$$

Exemplo 4.1.3 *No exemplo 4.1.1 foi mostrado que a série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ *é convergente para todos os valores reais de* x. *Assim, se* f *for a função definida por*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

o domínio de f *será o conjunto de todos números reais. Segue do Teorema 4.1.2, que*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n!}$$

Uma vez que $\frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}$, *podemos reescrever* f' *como*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Concluímos que $f'(x) = f(x)$ *para todos os valores reais de* x. *Assim, a função* f *satisfaz a equação diferencial*

$$\frac{dy}{dx} = y$$

o qual tem solução geral $y(x) = Ce^x$. Logo $f(x) = Ce^x$, mas como $f(0) = 1$ então $C = 1$. Concluímos que

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

4.2 Solução em Séries de Potências para Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem

Começamos a seção com uma definição importante para prosseguirmos nossos estudos.

Definição 4.2.1 *Dizemos que uma função f é* ***analítica*** *em a quando ela pode ser representada em série de potência em $(x - a)$ com um raio de convergência $\rho > 0$.*

Note que funções usuais como e^x, $sen(x)$ e $cos(x)$ são analíticas em todos os seus pontos mas a função $1/x$ é analítica em todos os pontos exceto em $x = 0$.

Vejamos algumas EDOs de primeira ordem homogêneas que são resolvidas usando séries de potências.

Exemplo 4.2.1 *Considere a equação diferencial*

$$y' = 0. \tag{4.2}$$

Supondo que esta equação tenha uma solução em série de potências

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

temos que $y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1}$, assim

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} = 0,$$

implica em

$$a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = 0,$$

Logo a solução é dada por

$$y(x) = a_0.$$

Exemplo 4.2.2 *Seja agora a EDO*

$$y' + y = 0. \tag{4.3}$$

Supondo que a EDO admita uma solução em série

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

temos que sua derivada primeira é dada por

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$$

assim, substituindo em (4.3), teremos

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= 0, \\ \sum_{n=0}^{\infty} [a_{n+1}(n+1) + a_n] x^n &= 0, \end{aligned}$$

logo

$$a_{n+1}(n+1) + a_n = 0. \tag{4.4}$$

Atribuindo valores para n e resolvendo a recorrência (4.4), concluimos que a solução para a equação (4.3) é dada por

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n+1)!},$$

como a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n+1)!} = e^{-x}$, temos que a solução da equação (4.3) é

$$y(x) = a_0 e^{-x},$$

que confere com o resultado do exemplo (2.2.1) no capítulo 2.

Exemplo 4.2.3 *Considere a equação diferencial*

$$\begin{cases} y' + kxy &= 0, \\ y(0) &= y_0. \end{cases} \tag{4.5}$$

Suponhamos que a solução de (4.5) seja dada por uma série de potências de x

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

assim

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

e substituindo em (4.5), teremos

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + kx \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= 0, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1) a_{n+1} x^n + k a_n x^{n+1}\right] &= 0, \end{aligned}$$

que pode ser reescrita da seguinte forma,

$$a_1 + (2a_2 + ka_0)x + (3a_3 + ka_1)x^2 + (4a_4 + 4a_2) + \ldots = 0,$$

assim temos que

$$\begin{array}{rcl} a_1 &=& 0, \\ 2a_2 + ka_0 = 0 \Longrightarrow \quad a_2 &=& -\dfrac{ka_0}{2}, \\ 3a_3 + ka_1 = 0 \Longrightarrow \quad a_3 &=& 0, \\ 4a_4 + ka_2 = 0 \Longrightarrow \quad a_4 &=& \dfrac{k^2 a_0}{4 \cdot 2}, \\ 5a_5 + ka_3 = 0 \Longrightarrow \quad a_5 &=& 0, \\ 6a_6 + ka_4 = 0 \Longrightarrow \quad a_6 &=& -\dfrac{k^3 a_0}{6 \cdot 4 \cdot 2}, \end{array}$$

generalizando,

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n k^n a_0}{2n \cdot (2n-2) \cdots 6 \cdot 4 \cdot 2} \qquad \text{e} \qquad a_{2n+1} = 0.$$

Pelo fato de que $y(0) = a_0$ e $y(0) = y_0$, temos $a_0 = y_0$, logo a solução de (4.5) é dada por

$$y(x) = y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n k^n y_0 x^{2n}}{2n \cdot (2n-2) \cdots 6 \cdot 4 \cdot 2}. \tag{4.6}$$

Resolvendo a equação (4.5) pelo método dos fatores integrantes, temos

$$y = y_0 e^{\frac{kx^2}{2}} \qquad y(0) = y_0.$$

Calculando a série de MacLaurin, temos

$$\begin{array}{rcl} y'(x) &=& y_0 e^{\frac{kx^2}{2}}(-kx), \\ y''(x) &=& y_0 e^{\frac{kx^2}{2}} k^2 x^2 - y_0 e^{\frac{kx^2}{2}} k \\ &=& y_0 e^{\frac{kx^2}{2}}[k^2x^2 - k], \\ y'''(x) &=& y_0 e^{\frac{kx^2}{2}}(-kx)[k^2x^2 - k] + y_0 e^{\frac{kx^2}{2}}[2k^2x] \\ &=& y_0 e^{\frac{kx^2}{2}}[-k^3x^3 + 3k^2x], \\ y^{(iv)}(x) &=& y_0 e^{\frac{kx^2}{2}}(-kx)[-k^3x^3 + 3k^2x] + y_0 e^{\frac{kx^2}{2}}[-3k^3x^2 + 3k^2] \\ &=& y_0 e^{\frac{kx^2}{2}}[k^4x^4 - 6k^3x^2 + 3k^2], \\ & \vdots & \end{array}$$

e também

$$\begin{array}{rcl} y'(0) &=& 0, \\ y''(0) &=& -ky_0, \\ y'''(0) &=& 0, \\ y^{(iv)}(0) &=& 3y_0k^2, \\ & \vdots & \end{array}$$

Logo teremos

$$\begin{aligned} y(x) &= y_0 + y'(0)x + \frac{y''(0)x^2}{2!} + \frac{y'''(0)x^3}{3!} + \frac{y^{(iv)}(0)x^4}{4!} + \ldots \\ &= y_0 - \frac{ky_0x^2}{2!} + \frac{y_0 3k^2x^4}{4!} + \ldots \\ &= y_0 - \frac{ky_0x^2}{2} + \frac{y_0k^2x^4}{4 \cdot 2} + \ldots \\ &= y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n k^n y_0 x^{2n}}{2n \cdot (2n-2) \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} \end{aligned}$$

que é a série encontrada em (4.6)

Exemplo 4.2.4 *Considere a equação*

$$y' + kx^m y = 0. \tag{4.7}$$

Supondo que a equaçao admita uma solução em série de potências

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

assim

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^{n+1}$$

e substituindo-as em (4.7), teremos

$$\sum_{n-0}^{\infty} [(n+1)a_{n+1}x^n + ka_n x^{n+m}] = 0. \tag{4.8}$$

Desenvolvendo (4.8), teremos

$$\begin{aligned} a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + ma_mx^{m-1} + [(m+1)a_{m+1} + ka_0]x^m + \\ +[(m+2)a_{m+1} + ka_1]x^{m+1} + \ldots + [(2m+1)a_{2m+1} + ka_m]x^{2m} + \\ +[(2m+2)a_{2m+2} + ka_{m+1}]x^{2m+1} + \ldots = 0 \end{aligned}$$

assim, podemos notar que

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 \\ 2a_2 &= 0 \\ 3a_3 &= 0 \\ 4a_4 &= 0 \\ &\vdots \\ ma_m &= 0 \end{aligned}$$

o que nos da

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_m = 0.$$

e

$$(m+1)a_{m+1} + ka_0 = 0 \Rightarrow a_{m+1} = -\frac{ka_0}{(m+1)},$$

seguindo o raciocínio, temos ainda que

$$\begin{aligned} (m+2)a_{m+2} + ka_2 &= 0, \\ &\vdots \\ (2m+1)a_{2m+1} + ka_m &= 0, \end{aligned}$$

que nos da

$$a_{m+2} = a_{m+3} = \ldots = a_{2m+1} = 0,$$

assim

$$(2m+2)a_{2m+2} + ka_{m+1} = 0 \Longrightarrow a_{2m+2} = \frac{k^2 a_0}{2(m+1)^2}$$

e também

$$\begin{aligned} (2m+3)a_{2m+3} + ka_{m+2} &= 0, \\ (2m+4)a_{2m+4} + ka_{m+3} &= 0, \\ &\vdots \\ (3m+2)a_{3m+3} + ka_{2m+1} &= 0, \end{aligned}$$

que nos da

$$(3m+3)a_{3m+2} + ka_{3m+4} = 0 \Longrightarrow a_{3m+3} = -\frac{k}{(3m+3)}a_{2m+2},$$

ou seja,

$$a_{3(m+1)} = -\frac{ka_0}{3 \cdot 2 \cdot (m+1)^3}.$$

Concluimos que a solução é dada por

$$y(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)nk^n y_0}{n!(m+1)^n} x^{n(m+1)}.$$

Na próxima seção, resolveremos o caso mais geral $y' + p(x)y = 0$.

4.2.1 Teorema de Existência e Unicidade para EDOs de Primeira Ordem Lineares

Lema 4.2.1 *Sejam $f(x)$ e $g(x)$ polinômios tais que $g(x) \neq 0$. Então $f(x)/g(x)$ tem uma representação em série de potência de x,*

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

que converge para $|x| < r$, sendo r o raio do maior círculo no plano complexo com centro na origem tal que $g(z) \neq 0$, para todo $z \in \mathbb{C}$ com $|z| < r$.

Dem: Suponhamos sem perdas de generalidade que o grau de $f(x)$ seja menor que o grau de $g(x)$, pois caso contrário, o algorítmo de euclides nos garante que um quociente e um resto, onde o grau do numerador do resto é menor que o seu denominador, deste modo, teremos

$$g(x) = a_0(x - a_1)^{n_1} \cdots (x - a_k)^{n_k}.$$

com a_0, a_1, $a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$. Decompondo $f(x)/g(x)$ em frações parciais, obtemos a relação

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} \frac{\alpha_{ij}}{(x - a_i)^j}.$$

Para $a \in \mathbb{C}$, usando a série geométrica, temos que

$$\frac{1}{z-a} = -\frac{1}{a-z} = -\frac{1}{a}\frac{1}{1-\frac{z}{a}} = -\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{a}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{a^{n+1}}\right)z^n,$$

que converge para $|z/a| < 1$, ou seja, para $|z| < |a|$. Além disso,

$$\frac{1}{(z-a)^2} = -\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z-a}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{a^{n+1}}\right)z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-n-1}{a^{n+2}}\right)z^n$$

que também converge para $|z| < |a|$. Como

$$\frac{1}{(z-a)^j} = (-1)^{j-1}(j-1)!\frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}}\left(\frac{1}{z-a}\right)$$

então $\dfrac{1}{(z-a)^j}$ tem uma representação em série de potência de z para $j = 1, 2, \ldots$ que converge para $|z| < |a|$.

Logo $f(z)/g(z)$ tem uma representação em série de potências de z que converge para todo $z \in \mathbb{C}$ com $|z| < r$, em que $r = min\{|a_1|, \ldots, |a_k|\}$. Donde segue o resultado.

Teorema 4.1 *Considere a equação*

$$P(x)y' + Q(x)y = 0, \tag{4.9}$$

em que $P(x)$ e $Q(x)$ são funções analíticas e sem fatores comuns. Se $P(0) \neq 0$, então a equação tem solução geral em série de potências

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

em que y é a solução que convergem para $|x| < r$ sendo r o raio do maior círculo no plano complexo com centro na origem tal que $P(z) \neq 0$, para todo $z \in \mathbb{C}$ com $|z| < r$.

Dem: Dividindo-se a equação (4.9) por $P(x)$, obtemos então

$$y' + p(x)y = 0, \tag{4.10}$$

onde $p(x) = \dfrac{Q(x)}{P(x)}$. Pelo Lema (4.2.1) os coeficientes podem ser escritos em série de potências de x, sendo então

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n,$$

que converge para $|x| < r$, sendo r o raio do maior círculo no plano complexo com centro na origem tal que $p(z) \neq 0$, para todo $z \in \mathbb{C}$ com $|z| < r$. Suponha que a solução da equação seja dada em série de potências de x como

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \tag{4.11}$$

logo a derivada é representada como

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n. \tag{4.12}$$

Substituindo-se (4.11) e (4.12) em (4.10), obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1) a_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} p_{n-k} a_k \right] x^n &= 0, \end{aligned}$$

o que implica que os coeficientes são iguais a zero. Assim

$$(n+1) a_{n+1} = - \sum_{k=0}^{n} p_{n-k} a_k. \tag{4.13}$$

Como a série $\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$ é convergente, temos que existe um $M > 0$ tal que $|p_n| t^n < M$ e $|q_n| t^n < M$, para $0 < t < r$. Da equação (4.13), temos

$$\begin{aligned} (n+1)|a_{n+1}| &= \left| - \sum_{k=0}^{n} p_{n-k} a_k \right|, \\ &\leq \sum_{k=0}^{n} \frac{M}{n-k} |a_k|, \\ &\leq \frac{M}{t^n} \sum_{k=0}^{n} |a_k| t^k. \end{aligned}$$

Consideremos a série $\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$, definidos por

$$A_0 = |a_0| \qquad \text{e} \qquad (n+1) A_{n+1} = \frac{M}{t^n} \sum_{k=0}^{n} |a_k| t^k.$$

Por indução, temos que $|a_n| \leq A_n$, para $n = 0, 1, 2, \ldots$. Vamos mostrar que a série $\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$ é convergente para $|x| < r$, o que implica que a série de $y(x)$ também é convergente pelo teste da comparação. Deste modo, temos que

$$\begin{aligned} (n+1)A_{n+1} &= \frac{M}{t^n}\left[\sum_{k=0}^{n} A_k t^k + A_n t\right], \\ &= \frac{1}{t}\left[\frac{M}{t^{n-1}}\sum_{k=0}^{n-1} A_k t^k + M A_n t\right], \\ &= \frac{1}{t} n A_n + M A_n, \\ &= A_n\left(\frac{n}{t} + M\right). \end{aligned}$$

Pelo teste da razão

$$\left|\frac{A_{n+1}x^{n+1}}{A_n x^n}\right| = |x|\frac{A_{n+1}}{A_n} = |x|\frac{n + Mt}{(n+1)t} \longrightarrow \frac{|x|}{t} \qquad \text{quando} \qquad n \longrightarrow \infty.$$

Portanto a série $\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$ converge $|x| < t$, para todo $t < r$, logo converge para $|x| < r$. Como $|a_n| \leq A_n$, então pelo teste da comparação, a série $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ também converge para $|x| < r$.

O Teorema de Existência e Unicidade nos garante a existência da solução, mas nem sempre esta solução é dada explicitamente em funções analíticas usuais, o que pode ser visto em grande parte das soluções em série de potências.

4.3 Solução em Série Perto de um Ponto Ordinário para EDOs de Segunda Ordem lineares

Nesta seção, estaremos interessados em resolver equações diferenciais ordinária lineares de segunda ordem pelo método de séries de potências. Para este estudo, considere inicialmente a EDO linear homogênea

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0, \tag{4.14}$$

em que P, Q e R são polinômios.

Vários problemas nas engenharias, física e na matemática nos leva a equações da forma (4.14) com coeficientes polinomiais, como por exemplo a **Equação de Bessel**, dada por

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0, \tag{4.15}$$

sendo v constante, que é muito utilizada no estudo da vibrações de membranas.

A seguir, veremos uma definição importante, para prosseguirmos nossos estudos.

Definição 4.3.1 *Dizemos que um ponto x_0 é* ***ponto ordinário*** *ou não-singular da equação diferencial (4.14) se $P(x_0) \neq 0$, caso contrário é chamado de* ***ponto singular*** *da equação.*

Exemplo 4.3.1 *Todo ponto x da equação*

$$y'' + e^x y' + sen(x)y = 0$$

é ponto ordinário, em particular, $x = 0$ também é ponto ordinário.

Note que na equação de Bessel dada na equação (4.15), $x = 0$ é ponto singular. No Teorema de existência e unicidade a seguir, veremos soluções em séries potências em um ponto ordinário centrado na origem para uma EDO linear homogênea de segunda ordem.

Teorema 4.2 (Existência e Unicidade de Soluções em Série de Potências)

Considere a equação

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = 0, \tag{4.16}$$

em que $P(x)$, $Q(x)$ e $R(x)$ são polinômios sem fatores comuns. Se $P(0) \neq 0$, então a equação tem solução geral em série de potências

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 \left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} b_n x^n\right) + a_1 \left(x + \sum_{n=2}^{\infty} c_n x^n\right),$$

em que $y_1(x) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} b_n x^n$ e $y_2(x) = x + \sum_{n=2}^{\infty} c_n x^n$ são soluções fundamentais da equação que convergem para $|x| < r$ sendo r o raio do maior círculo no plano complexo com centro na origem tal que $P(z) \neq 0$, para todo $z \in \mathbb{C}$ com $|z| < r$.

Dem: Dividindo-se a equação (4.16) por $P(x)$ obtemos então

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{4.17}$$

Pelo Lema (4.2.1) os coeficientes podem ser escritos em série de potências de x, sendo então

$$p(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \qquad \text{e} \qquad q(x) = \frac{R(x)}{P(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n,$$

que convergem para $|x| < r$, sendo r o raio do maior círculo no plano complexo com centro na origem tal que $P(z) \neq 0$, para todo $z \in \mathbb{C}$ com $|z| < r$. Suponhamos que a solução da equação (4.17) possa ser escrita em série de potências de x como

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

As derivadas $y'(x)$ e $y''(x)$, são representadas em série de potência como

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n \qquad \text{e} \qquad y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n.$$

Substituindo-se na equação obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}p_nx^n\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}q_nx^n\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n &= 0\\
\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)(n+2)a_{n+2} + \sum_{k=0}^{n}[p_{n-k}(k+1)a_{k+1} + q_{n-k}a_k]\right]x^n &= 0,
\end{aligned}$$

o que implica que os coeficientes são todos iguais a zero. Assim

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} = -\sum_{k=0}^{n}[p_{n-k}(k+1)a_{k+1} + q_{n-k}a_k]. \tag{4.18}$$

Por outro lado, se aplicarmos o módulo na equação (4.18), temos

$$(n+1)(n+2)|a_{n+2}| = \sum_{k=0}^{n}[|p_{n-k}|(k+1)|a_{k+1}| + |q_{n-k}||a_k|] \tag{4.19}$$

Da convergência das séries de $p(x)$ e $q(x)$, temos que existe um $M > 0$ tal que $|p_n|t^n < M$ e $|q_n|t^n < M$, para $0 < t < r$ e $n = 0, 1, 2, \ldots$ Usando isso na equação (4.20), obtemos

$$\begin{aligned}
(n+1)(n+2)|a_{n+2}| &\leq \sum_{k=0}^{n}\left[\frac{M}{t^{n-k}}(k+1)|a_{k+1}| + \frac{M}{t^{n-k}}|a_k|\right]\\
&\leq \frac{M}{t^n}\sum_{k=0}^{n}[(k+1)|a_{k+1}| + |a_k|]t^k\\
&\leq \frac{M}{t^n}\sum_{k=0}^{n}[(k+1)|a_{k+1}| + |a_k|]t^k + M|a_{n+1}|t. \qquad (4.20)
\end{aligned}$$

Vamos considerar a série $\sum_{n=0}^{\infty}A_nx^n$, com os coeficientes definidos por $A_0 = |a_0|$ e $A_1 = |a_1|$onde

$$(n+1)(n+2)A_{n+2} = \frac{M}{t^n}\sum_{k=0}^{n}[(k+1)A_{k+1} + A_k]t^k + MA_{n+1}t. \tag{4.21}$$

Usando (4.20) e (4.21), por indução, temos que $|a_n| \leq A_n$, para $n = 0, 1, 2, \ldots$. Vamos mostrar que a série $\sum_{n=0}^{\infty}A_nx^n$ é convergente para $|x| < r$, o que implica que a série de $y(x)$ também é convergente pelo teste da comparação. Usando (4.21) temos que

$$\begin{aligned}
(n+1)nA_{n+1} &= \frac{M}{t^{n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}[(k+1)A_{k+1} + A_k]t^k + MA_nt\\
n(n-1)A_n &= \frac{M}{t^{n-2}}\sum_{k=0}^{n-2}[(k+1)A_{k+1} + A_k]t^k + MA_{n-1}t.
\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}
(n+1)nA_{n+1} &= \frac{1}{t}\left\{\frac{M}{t^{n-2}}\sum_{k=0}^{n-2}[(k+1)A_{k+1}+A_k]+M[nA_n+A_{n-1}]t\right\}+MA_nt \\
&= \frac{1}{t}\{n(n-1)A_n - MA_{n-1}t + M[nA_n + An-1]t\} + MA_nt \\
&= \frac{A_n}{t}\left\{n(n-1)+Mnt+Mt^2\right\}.
\end{aligned}$$

Então

$$\left|\frac{A_{n+1}x^{n+1}}{A_nx^n}\right| = \frac{n(n-1)+Mnt+Mt^2}{t(n+1)n}|x| \longrightarrow \frac{|x|}{t}, \qquad \text{quando} \quad n\longrightarrow\infty.$$

Assim a série $\sum_{n=0}^{\infty} A_nx^n$ converge $|x|<t$, para todo $t<r$. Logo a série $\sum_{n=0}^{\infty} A_nx^n$ converge para $|x|<r$. Como $|a_n| \leq A_n$, para $n=0,1,2,\ldots$, então também converge para $|x|<r$ a série

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n.$$

Agora, fazendo $n=0$ em (4.18), obtemos a_2 como combinação linear de a_0 e a_1. Substituindo-se este resultado em (4.18) para $n=1$ obtemos também a_3 como combinação linear de a_0 e a_1. Continuando desta forma obtemos

$$a_n = b_na_0 + c_na_1, \qquad \text{para} \quad n=2,3,\ldots.$$

Assim,

$$y(x) = a_0\left(1+\sum_{n=2}^{\infty} b_nx^n\right) + a_1\left(x+\sum_{n=2}^{\infty} c_nx^n\right).$$

Verifiquemos que $y_1(x) = 1+\sum_{n=2}^{\infty} b_nx^n$ e $y_2(x) = x+\sum_{n=2}^{\infty} c_nx^n$ são soluções fundamentais da equação (4.17).

Fazendo $a_0=1$ e $a_1=0$ obtemos $y_1(0)=1$ e fazendo $a_0=0$ e $a_1=1$ obtemos $y_2(0)=0$. Além disso

$$\begin{aligned}
W[y_1,y_2](0) &= \begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.
\end{aligned}$$

Como $W(y_1(0),y_2(0)) \neq 0$, sendo y_1 e y_2 soluções da equação (4.16), então y_1 e y_2 são soluções fundamentais da equação (4.16).

Um exemplo de uma equação linear muito simples que não pode ser resolvida pelos métodos dos capítulos anteriores e que pode ser resolvida pelo método das séries, é a equação de Airy, que veremos no exemplo a seguir.

Exemplo 4.3.2 *Considere a EDO*

$$y'' - xy = 0, \tag{4.22}$$

conhecida como equação de Airy.

A função P neste caso é 1, de maneira que a solução será analítica em $x = 0$ e pelo Teorema de Existência e Unicidade (4.2), nos garante que existe uma solução da forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{4.23}$$

Derivando duas vezes a solução (4.23), teremos

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}. \tag{4.24}$$

Substituindo as equações (4.23) e (4.24) em (4.22), vamos obter

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0,$$

deslocando os índices do somatório teremos

$$\sum_{n=-3}^{\infty} (n+3)(n+2)a_{n+3} x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0.$$

Vemos na primeira série que os dois primeiros termos para $n = -3$ e $n = -2$, os termos são nulos e o terceiro para $n = -1$ temos o termo $2a_2$, logo reescrevemos

$$2a_2 + \sum_{n=0}^{\infty} [(n+3)(n+2)a_{n+3} - a_n] x^{n+1} = 0.$$

Para que a série de potências seja nula em qualquer ponto x, é necessário que todos os coeficientes sejam nulos, deste modo, obtemos a relação de recorrência

$$(n+3)(n+2)a_{n+3} - a_n = 0, \tag{4.25}$$

sendo $a_2 = 0$.

A solução da recorrência (4.25), consiste em determinar os coeficientes múltiplos de 3, múltiplos de 3 mais 1, e múltiplos de 3 mais 2, ou seja, a_0 determina a_3, que por sua vez determina a_6, a_9, $\ldots$; a_1 determina a_4, a_7, a_{10}, $\ldots$; e a_2 que determina a_5, a_8, a_{11}, $\ldots$, como $a_2 = 0$, conclui-se imediatamente que $a_5 = a_8 = a_{11} = \ldots = 0$.

Para sequência múltipla de n, obtemos

$$\begin{aligned}
a_3 &= \frac{a_0}{2 \cdot 3} \\
a_6 &= \frac{a_3}{5 \cdot 6} = \frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} \\
a_9 &= \frac{a_6}{8 \cdot 9} = \frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

e generalzando, teremos

$$a_{3n} = \frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdots (3n-1)3n}, \qquad n \geq 4.$$

Para a sequência múltipla de $n+1$, temos

$$\begin{aligned}
a_4 &= \frac{a_0}{3 \cdot 4}, \\
a_7 &= \frac{a_4}{6 \cdot 7} = \frac{a_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}, \\
a_{10} &= \frac{a_7}{9 \cdot 10} = \frac{a_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10}, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

que em geral teremos

$$a_{3n+1} = \frac{a_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdots 3n(3n+1)}, \qquad n \geq 4.$$

Assim a solução da equação de Airy é dada por

$$\begin{aligned}
y &= a_0 \left[1 + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} + \ldots + \frac{x^{3n}}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdots (3n-1)3n} + \ldots \right] \\
&+ a_1 \left[x + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \frac{x^7}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \ldots + \frac{x^{3n+1}}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdots 3n(3n+1)} + \ldots \right],
\end{aligned}$$

onde a_0 e a_1 são duas constantes arbitrárias. Em alguns casos as séries obtidas podem ser identificadas como alguma funções elementar conhecida, mas neste exemplo as séries não correspondem a nenhuma função conhecida, e constituem duas funções especiais designadas **funções de Airy**.

Na próxima seção, estudaremos o caso em que o ponto $x = 0$ centrada na origem não seja ordinário.

4.4 Pontos Singulares Regulares

Para resolvermos a equação diferencial

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0, \tag{4.26}$$

onde x_0 é ponto singular, ou seja, $P(x_0) = 0$ sendo que $Q(x_0) \neq 0$ e/ou $R(x_0) \neq 0$, necessitamos de um novo método, ja que infelizmente o método anterior não é aplicável a EDOs de segunda ordem com pontos singulares em x_0, ja que em x_0 as funções não seriam analíticas, logo não existe uma série de Taylor em $x - x_0$.

Estendendo o método das séries de potência das seções anteriores para pontos singulares, vamos restringir ao caso em que as singularidades das funções Q/P e R/P em x_0 não são muito "severas". Claro que uma singularidade não muito severa não é muito aceitável no ponto de vista matemático, para isto, definimos "singularidade não muito severa"ou "fraca"se

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \to x_0} (x - x_0) \frac{Q(x)}{P(x)} \qquad \text{é finito}, \\
&\lim_{x \to x_0} (x - x_0)^2 \frac{R(x)}{P(x)} \qquad \text{é finito}.
\end{aligned}$$

Veremos isto de maneira mais clara escrevendo a equação (4.26) como

$$y'' + \frac{p(x)}{x}y' + \frac{q(x)}{x^2} = 0, \tag{4.27}$$

onde

$$p(x) = x\frac{Q(x)}{P(x)} \qquad \text{e} \qquad q(x) = x^2\frac{R(x)}{P(x)},$$

para termos a seguinte definição.

Definição 4.4.1 *O ponto singular $x = 0$ da equação (4.26) é uma ponto **singular regular** se as funções $p(x)$ e $q(x)$ são ambas analíticas em $x = 0$. Caso contrário, trata-se de um ponto **singular irregular**.*

Exemplo 4.4.1 *Considere a equação diferencial*

$$x^2(1+x)y'' + x(4-x^2)y' + (2+3x)y = 0. \tag{4.28}$$

Colocando a equação (4.28) na forma padrão $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, será reescita como

$$y'' + \frac{4-x^2}{x(1+x)}y' + \frac{2+3x}{x^2(1+x)}y = 0.$$

Considerando

$$P(x) = \frac{4-x^2}{x(1+x)} \qquad \text{e} \qquad Q(x) = \frac{2+3x}{x^2(1+x)},$$

teremos que

$$\lim_{x\to 0} x\frac{4-x^2}{x(1+x)} = \infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0} x\frac{2+3x}{x^2(1+x)} = \infty,$$

conclui-se que em $x = 0$ é ponto singular. Para verificarmos se essa singularidade é regular ou irregular, vamos escrever a equação (4.28) na forma (4.27), ou seja,

$$y'' + \frac{(4-x^2)/(1+x)}{x}y' + \frac{(2+3x)/(1+x)}{x^2}y = 0,$$

isto é,

$$p(x) = \frac{(4-x^2)}{(1+x)} \qquad \text{e} \qquad q(x) = \frac{(2+3x)}{(1+x)}.$$

Verifica-se que o limite de $p(x)$ e $q(x)$ quando x tende a zero é finito para ambos os casos, conclui-se que $p(x)$ e $q(x)$ são analíticos em $x = 0$. Deste modo, $x = 0$ é ponto singular regular da equação diferencial dada.

4.4.1 O Método de Frobenius

O método que veremos nesta seção, consiste em determinar soluções para EDOs de segunda ordem em um ponto singular regular. Veremos inicialmente uma equação de Euler dada por

$$x^2y'' + p_0xy' + q_0y = 0, \tag{4.29}$$

que pode ser reescrita como

$$y'' + \frac{p_0}{x}y' + \frac{q_0}{x^2}y = 0,$$

sendo $p(x) = q_0$ e $q(x) = q_0$, em que $y(x) = x^r$ é uma solução da equação (4.29) se r é raíz da equação quadrática

$$r(r-1) + p_0r + q_0 = 0.$$

Em geral, consideramos $p(x)$ e $q(x)$ como séries de potências quando $p(x)$ e $q(x)$ são não constantes, assim a solução terá a forma

$$\begin{aligned} y(x) &= x^r\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^{n+r} \\ &= a_0x^r + a_1x^{r+1} + a_2x^{r+2} + \ldots \end{aligned}$$

Note que esta notação não é uma série de potências necessariamente inteiras, logo não podemos chamar de séries de potências inteiras.

Para a investida de acharmos uma solução para a equação

$$y'' + \frac{p(x)}{x}y' + \frac{q(x)}{x^2}y = 0,$$

vamos multiplicar por x^2, obtendo a equação

$$x^2y'' + xp(x)y' + q(x)y = 0. \tag{4.30}$$

Se $x = 0$ é um ponto singular regular, temos que $p(x)$ e $q(x)$ são analíticas em $x = 0$, deste modo , temos as séries

$$\begin{aligned} p(x) &= p_0 + p_1x + p_2x^2 + \ldots, \\ q(x) &= q_0 + q_1x + q_2x^2 + \ldots \end{aligned} \tag{4.31}$$

Supondo que a equação (4.30) tenha solução

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^{n+r}$$

e assumindo que $a_0 \neq 0$, as derivadas y' e y'' serão

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r-1} \tag{4.32}$$

e

$$y'' \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}(n+r-1)a_n x^{n+r-2} \tag{4.33}$$

Substituindo as equações (4.31) e (4.33) em (4.30), teremos

$$\begin{aligned} &[r(r-1)a_0x^r + (r+1)ra_1x^{r+1} + \ldots] \\ +&[p_0x + p_1x^2 + \ldots][ra_0x^{r-1} + (r+1)a_1x^r + \ldots] \\ +&[q_0 + p_1x + \ldots][a_0x^r + a_1x^{r+1} + \ldots] = 0. \end{aligned} \tag{4.34}$$

Como $a_0 \neq 0$, segue que

$$r(r-1) + p_0r + q_0 = 0 \tag{4.35}$$

A equação (4.35) é dita **equação indicial** da equação (4.30) e suas raízes (distintas ou iguais) são os expoentes da equação diferencial dada (no ponto singular $x = 0$).

Em geral, as raiz da *equação indicial* pode ser conduzida a uma solução em séries de potências. Mas em alguns casos específicos é possível determinar apenas uma única solução. O teorema a seguir, irá descrever o método para resolvermos uma EDO com pontos singulares regulares, e suas particulares.

Teorema 4.3 (Frobenius)

Se r_1 e r_2 são duas raízes da equação indicial (em $x = 0$) de uma EDO linear de segunda ordem com ponto singular em $x = 0$, existem três casos, a depender dos valores de r_1 e r_2:

1. *Se $r_1 - r_2$ for diferente de zero e diferente de um número inteiro, cada raiz conduz a uma solução diferente.*

2. *Se $r_1 = r_2$, é possível obter uma única solução y_1 a partir do método de Frobenius. A segunda solução terá a forma:*

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_1} + y_1 \ln\ x,$$

onde a sucessão b_n deverá ser obtida por substituição de y_2 na equação diferencial.

3. *Se $r_1 - r_2$ for um número inteiro, existirá uma solução y_1 com a forma usada no método de Frobenius. A segunda solução será:*

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_1} + cy_1 \ln\ x,$$

onde c é uma constante. Nos casos em que $c = 0$, a segunda solução tem também a forma do método de Frobenius, o qual implica que aplicando o método de Frobenius é possível encontrar as duas soluções y_1 e y_2 linearmente independentes. Quando c não é nula, o método de Frobenius permite encontrar apenas uma solução e a segunda solução deverá ser encontrada por substituição da forma geral de y_2 na equação diferencial.

Com as duas soluções encontradas seguindo o método indicado pelo teorema de Frobenius, a solução geral será:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x).$$

Vejamos um exemplo prático usando o método de Frobenius.

Exemplo 4.4.2 *Considere a EDO de segunda ordem homogênea dada por*

$$4xy'' + 2y' + y = 0. \tag{4.36}$$

Podemos obsservar que o ponto $x = 0$ é um ponto singular, portanto, não pode ser usado o método das séries visto nos exemplos anteriores. Para determinar se $x = 0$ é ponto singular regular e usar o método de Frobenius, calculamos

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x}{4x} = \frac{1}{2} \qquad ee \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{4x} = 0$$

que existem e são finitos, logo $x = 0$ é ponto singular regular. Deste modo, podemos assim usar o método de Frobenius e a equação indicial pode ser dada por

$$2r(r-1) + r = 0,$$

com raízes $r_1 = 0$ e $r_2 = 1/2$ que cairá no primeiro caso do método de Frobenius, assim

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \\ y' &= \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \\ y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}. \end{aligned}$$

Substituindo as equações precedentes na equação diferencial (4.36), obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} [4n(n-1)a_n x^{n-1} + 2na_n x^{n-1} + a_n x^n] = 0,$$

logo

$$\sum_{n=0}^{\infty} [4n(n+1)a_{n+1} + 2(n+1)a_{n+1} + a_n] x^n = 0.$$

Pelo princípio da identidade do somatório, teremos a fórmula de recorrência que será dada por

$$(n+1)(4n+2)a_{n+1} + a_n = 0. \tag{4.37}$$

Substituindo os termos para $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ teremos

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{a_0}{2}, \\ a_2 &= -\frac{a_1}{4\cdot 3} = \frac{a_0}{4\cdot 3\cdot 2}, \\ a_3 &= -\frac{a_2}{6\cdot 5} = -\frac{a_0}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}, \\ &\ \vdots \end{aligned}$$

e generalzando, teremos

$$a_n = \frac{(-1)^n}{(2n)!} a_0.$$

Com esta sequência e considerando $a_0 = 1$, a série de potências da primeira solução particular é

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^n = \cos(x^{1/2}).$$

Usando a segunda raiz $r_2 = \frac{1}{2}$, a série de potências da segunda solução será

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1/2}, \\ y' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1/2) a_n x^{n-1/2}, \\ y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 - 1/4) a_n x^{n-3/2}. \end{aligned}$$

Substituindo as equações precedentes na equação diferencial (4.36), obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(4n^2 - 1) a_n x^{n-1/2} + (2n+1) a_n x^{n-1/2} + a_n x^{n+1/2}] = 0.$$

Agrupando as séries, teremos

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(4n^2 + 8n + 3) a_{n+1} + (2n+3) a_{n+1} + a_n] x^{n+1/2} = 0,$$

sendo a fórmula de recorrência dada por

$$(2n+2)(2n+3) a_{n+1} + a_n = 0.$$

A solução geral, obtém-se de forma semelhante ao caso da primeira solução, pois

$$(2n+2)(2n+3) = \frac{(2n+3)!}{(2n+1)!}.$$

De maneira análoga teremos

$$y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{n+1/2} = sen(x^{1/2}).$$

Portanto, pelo método de Frobenius a solução geral é uma combinação linear das duas soluções particulares y_1 e y_2 que é dada por

$$y(x) = c_1 cos(x^{1/2}) c_2 sen(x^{1/2}).$$

Considerações Finais

Este trabalho teve por objetivo estudar as equações diferenciais ordinárias de primeira e segunda ordem, apresentando uma abordagem histórica simples e direta, desde a descoberta do cálculo diferencial com Newton e Leibniz no século XVII até soluções em séries de potências.

Logo de início, foi apresentada de maneira clara e objetiva as principais definições para o entendimento dos estudos abordados neste trabalho. Nos capítulos posteriores, vimos vários métodos de resolução de EDOs de primeira e de segunda ordem, sendo esta última apenas para o caso linear. Logo após, vimos outro tipo de solução usando séries de potências, que serviu de ferramenta para demonstrarmos o Teorema de Existência de soluções para EDOs de primeira e segunda ordem, para esta última, considerando apenas pontos ordinários. Desenvolvemos também o caso em que o ponto é singular regular para uma EDO linear de segunda ordem homogênea, extendendo ao Teorema de Frobenius.

Para o desenvolvimento, propusemos a elaborar uma escrita sucinta, rigorosa e didática, de tal modo, que possa ser usado tanto para notas de aulas para cursos regulares de graduação na disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias (ou Cálculo III por algumas instituições), quanto para material de apoio para modelagem de vários problemas físicos. Embora não abordados de maneira direta, as EDOs contribuíram para o desenvolvimento da ciência como um todo, o mundo ao qual vivemos hoje é apenas um reflexo de grandes contribuições matemáticas feitas por Newton e Leibniz na criação do Cálculo Diferencial e Integral por exemplo, que por sua vez, contribuiu direta e indiretamente para a modelagem de problemas físicos usando equações diferenciais.

Bibliografia

[1] BOYCE, William E; DIPRIMA, Richard C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, 9ª edição, LTC, 2009

[2] CODDINGTON, Earl A. *An Introduction to Ordinary Differential Equations*. Courier Corporation, 2012

[3] EDWARDS, C.H; PENNEY D.E. *Equações Diferenciais Elementares com Problemas de Contorno*. LTC, Rio de Janeiro, 1995

[4] FIGUEREDO, Djairo G; Neves, Aloisio F. *Equações Diferenciais Aplicadas*, coleção matemática universitária, IMPA SBM, Rio de Janeiro, 3ª edição, 2005.

[5] LEITHOLD, Louis. *O Cálculo com Geometria Analítica*. vol. 1, 3ª edição, Harbra Ltda, São Paulo, 1994

[6] LEITHOLD, Louis. *O Cálculo com Geometria Analítica*. vol. 2, 3ª edição, Harbra Ltda, São Paulo, 1994

[7] NAGLE, R. Kent; SAFF, Edward B; SNIDER, Arthur David. *Equações Diferenciais*, 8ª edição, São Paulo, Pearson Education do Brasil, 2012

[8] SOTOMAYOR, Jorge. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. vol. 11, IMPA, CNPq, Rio de Janeiro, 1979

[9] STEWART, James. *Cálculo*, vol. 1, São Paulo: Cengage Learning, Tradução: Antonio Carlos Moretti, 2006

[10] STEWART, James. *Cálculo*, vol. 2, São Paulo: Cengage Learning, Tradução: Antonio Carlos Moretti, 2009

[11] ZILL, Dennis G; Cullen, Michael R. *Equações Diferenciais*, vol. 1, 3ª edição, Makron Books, 2001