UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
CAMPUS DE TRÊS LAGOAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

MARCOS ROGÉRIO MINGORANCI

UMA INTRODUÇÃO À TRIGONOMETRIA HIPERBÓLICA E SUA APLICAÇÃO NO ENSINO MÉDIO

TRÊS LAGOAS - MS
2016

Serviço Público Federal
Ministério da Educação
Fundação Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Pólo de Três Lagoas

Uma Introdução à trigonometria hiperbólica e sua aplicação no ensino médio

por

MARCOS ROGÉRIO MINGORANCI

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus de Três Lagoas, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Antonio Carlos Tamarozzi (Orientador)
UFMS/CPTL

E. Opazo

Prof. Dra. Eugenia Brunilda Opazo Uribe
UFMS/CPTL

Prof. Dra. Irene Magalhães Craveiro
UFGD

Julho de 2016

CAMPUS DE TRÊS LAGOAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

UMA INTRODUÇÃO À TRIGONOMETRIA HIPERBÓLICA E SUA APLICAÇÃO NO ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus de Três Lagoas, como parte dos requisitos para obtenção do título de mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Antônio Carlos Tamarozzi

TRÊS LAGOAS - MS
2016

A Deus,

Aos meus pais Donizete e Lourdes,

A minha irmã Simone,

Aos amigos de curso,

Ao meu professor orientador

Antônio Carlos Tamarozzi

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, em primeiro lugar, por ter me dado à oportunidade de desfrutar desta conquista. Agradeço a meus pais, Lourdes e Donizete, minha irmã Simone pelo incentivo, aos meus amigos e companheiros de curso pelo companheirismo, ao meu professor orientador Antônio Carlos Tamarozzi pela orientação, pelos conselhos e pela disposição em ajudar, aos professores ministrantes das aulas pelo conhecimento e atenção dispensada.

“O grande arquitecto do universo
começa agora a parecer como um
matemático puro. ”.

J. H. Jeans[1], 1930.

[1] Sir James Hopwood Jeans (1877 - 1946) foi um físico, astrônomo e matemático britânico com importantes contribuições para a teoria quântica, teoria da radiação e a evolução estelar e o primeiro a propor uma teoria para o estado estacionário.

SUMÁRIO

RESUMO

O trabalho apresenta uma introdução à trigonometria hiperbólica, em analogia com a trigonometria circular. A proposta é apresentar o assunto como complemento à formação de professores e alunos do ensino médio, ressaltando que uma teoria similar pode ser construída com outra figura plana, a hipérbole. Objetivamos, também, explorar o assunto como aplicações de exponenciais, através da obtenção de identidades trigonométricas hiperbólicas. Este assunto tem uma motivação forte na literatura Matemática, pois as funções hiperbólicas descrevem, dentre outras, a modelagem da catenária. Uma curva plana semelhante às que seriam geradas por uma corda suspensa pelas suas extremidades e sujeitas à ação da gravidade.

Palavras – chaves: hiperbólica, catenária, trigonometria, funções trigonométricas.

ABSTRACT

The paper presents an introduction to hyperbolic trigonometry, in analogy with the circular trigonometry. The proposal is to present the subject in addition to teacher training and high school students, noting that a similar theory can be constructed with other flat figure, hyperbole. Also aimed to explore the subject as Exponential applications, by obtaining hyperbolic trigonometric identities. This subject has a strong motivation in mathematics literature, because the hyperbolic functions describe, among others, modeling the catenary. A flat curve similar to those that would be generated by a rope suspended by its ends and subjected to the action of gravity.

Key - words: hyperbolic, catenary, trigonometry, trigonometric functions.

INTRODUÇÃO

O estudo de geometria tem ganhado um destaque maior nos materiais escolares, deixando de ser citado como um conteúdo de final de livros, de bimestres ou ano letivo e passando a ter frentes próprias ou até livros próprios nas escolas. Acontece que, mesmo com esse brilho maior, os alunos nem sempre tem a oportunidade de atingir níveis mais elevados de conhecimento nesse assunto. Quando completo, o estudo de geometria encerra-se na trigonometria circular, não possibilitando espaço a outras vertentes como a trigonometria hiperbólica. Este trabalho, com a utilização da trigonometria hiperbólica, é uma contribuição significativa para a formação de professores e alunos do ensino médio com o objetivo de estender noções trigonométricas e inter-relacionar com outros conceitos matemáticos.

De modo geral, neste trabalho assumimos que o aluno tenha conhecimentos prévios sobre a trigonometria circular, bem como sobre hipérboles e suas equações, pois suas definições, propriedades e fórmulas são essenciais para que possa distinguir e apreciar semelhanças e diferenças entre as duas trigonometrias.

Mas, por que é interessante ao aluno ter acesso a esse conhecimento? De maneira semelhante à circular, a trigonometria hiperbólica é capaz de traçar resultados unindo a geometria e a álgebra, em um belo desenvolvimento matemático, onde podem ser introduzidos identidades e exemplos de funções importantes, bem como exploradas propriedades de exponenciais e logaritmos. Considera-se, também, as aplicações utilizadas principalmente na engenharia civil, como é o caso da catenária, mas também em outros conceitos da física.

O estudo das hiperbólicas se inicia em meados do século XVI quando Gerhardus Kremer, ou Gerhardus Mercator, como era mais conhecido, planificou o globo terrestre a fim de auxiliar os navegantes. Isso ocorreu de forma tão eficaz que atualmente seu trabalho ainda tem colaborado em navegações por todo o mundo.

Muita coisa mudou desde a projeção de Mercator. A dúvida deixada com seu trabalho fez com que outros matemáticos, como Riccati e Lambert, se interessassem pelo assunto, obtivessem fórmulas, propriedades, novas aplicações, etc. Essas aplicações, em sua maioria na engenharia, estão diariamente sob nossos olhos e nos desperta curiosidades que podem ser utilizadas como atrativo para apresentar novas ideias aos alunos.

No primeiro capítulo do trabalho apresentamos uma breve história da trigonometria hiperbólica, desde suas primeiras aplicações até como se tornou extremamente importante nos dias atuais. No capítulo 2, nosso foco é a trigonometria circular, com a parte teórica, inclusive com demonstrações, desde o triângulo retângulo até suas fórmulas de adição de arcos e construção de gráficos. De forma análoga, o capítulo 4 apresenta os mesmos itens da trigonometria circular, porém na trigonometria hiperbólica, após fazer um breve estudo da hipérbole no capítulo 3.

Após a apresentação da parte teórica, o capítulo 5 oferece uma sugestão de como apresentá-lo aos alunos do ensino médio. Claro que não se trata de uma verdade absoluta, pois o público alvo tem suas especificidades e essas variam de região para região, escola para escola, entre turmas e até entre alunos de uma mesma turma, porém, serve como um parâmetro para se iniciar um trabalho.

Em todo o trabalho imagens são disponibilizadas a fim de facilitar o entendimento do leitor. A criação/obtenção dessas imagens foram à partir de sites ou livros que constam na bibliografia ou ainda, quando necessária sua construção, foram utilizados os softwares Geogebra na obtenção de gráficos e Corel Draw na criação de imagens.

De qualquer forma, o objetivo principal do trabalho é reunir a maior quantidade de informações importantes sobre o assunto a fim de ser útil a professores e estudantes interessados diretamente no tema, ou mesmo indiretamente, como recurso para sedimentar os aprendizados clássicos da trigonometria circular.

1. TRIGONOMETRIA HIPERBÓLICA – HISTÓRIA

Em meados do século XVI, mais precisamente em 1569, Gerhardus Kremer (1512 – 1594), ou Gerhardus Mercator, como era mais conhecido, fez a primeira e uma das mais marcantes aplicações da trigonometria hiperbólica: a "Projeção de Mercator".

Essa obra, composta por 18 páginas, tratava-se de uma "planificação" do globo terrestre devidamente adaptada para o uso em navegações. Os meridianos ficaram todos paralelos entre si e, assim como qualquer projeção, há uma deformação que, nesse caso, ocorre nos polos, deixando-os maiores do que realmente são.

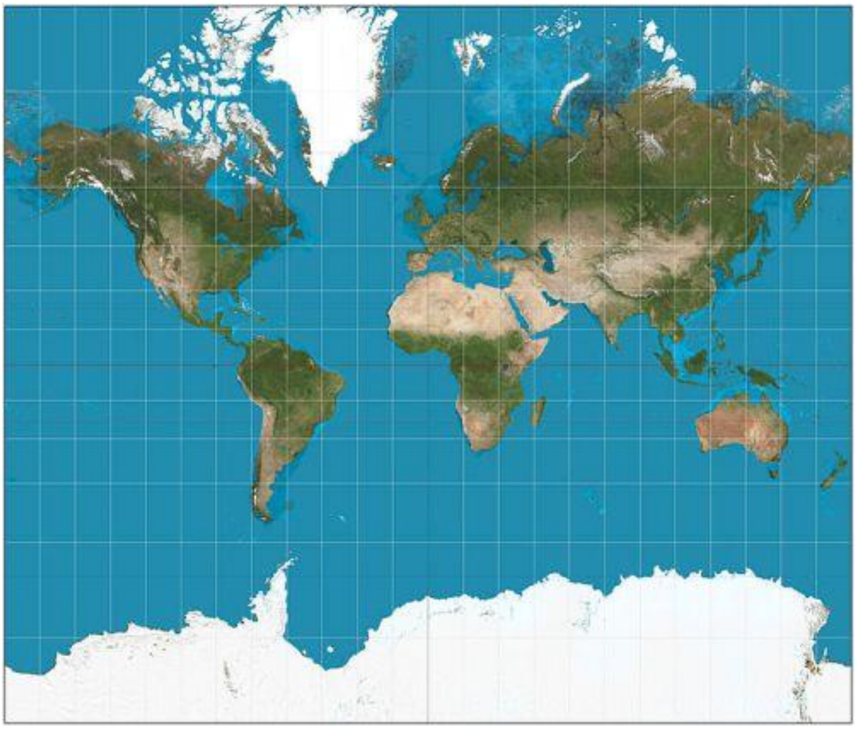

Figura 1 - Projeção de Mercator. Fonte: infoescola.com

De qualquer forma, a projeção de Mercator representou um grande avanço na navegação e é utilizado até hoje em gráficos de profundidade de navegação no mundo.

Mas muita coisa aconteceu até que a trigonometria tivesse a forma que se tem atualmente.

Em meados do século XVIII, Vincenzo Riccati (1707 – 1775) estudou as funções hiperbólicas obtendo as fórmulas de adição e subtração de funções hiperbólicas, análogas às trigonométricas. Riccati foi o primeiro a introduzir siglas para as funções, sendo Sh e Ch utilizadas para seno hiperbólico e cosseno hiperbólico, além de Sc e Cc para a trigonometria circular. As notações $senh\ x$ e $cosh\ x$ surgiram apenas em 1768, com uma publicação do matemático Johann Heinrich Lambert (1728 – 1777), onde se encontra o primeiro desenvolvimento sistemático das funções hiperbólicas. Apesar de ser mais conhecido pelo trabalho sobre π, Lambert deu às funções hiperbólicas o mesmo tratamento dado por Euler às funções trigonométricas, ficando assim associado à trigonometria hiperbólica do mesmo jeito que Euler ficou associado à trigonometria circular.

Com a criação e aperfeiçoamento da ponte pênsil, produção e distribuição de grandes quantidades de energia, surgimento dos telégrafos ou qualquer outra coisa que necessitasse de cabos suspensos, o interesse pela trigonometria hiperbólica também sofreu um aumento exponencial, sendo de grande importância em várias disciplinas e, principalmente, no ramo da engenharia.

O cosseno hiperbólico, por exemplo, é o principal conceito matemático utilizado na obtenção de uma família de curvas denominadas catenária. No que diz respeito à aparência, a catenária trata-se de uma curva que pode ser facilmente obtida a partir de um cabo suspenso pelas suas extremidades, mas fisicamente, a catenária apresenta uma interessante característica: tendo uma força aplicada em qualquer ponto da curva, tanto na parte côncava quanto na parte convexa, essa força é distribuída igualmente por toda a extensão da curva. Essa característica permite que a curva suporte um peso muito maior do que o suportado por uma curva qualquer.

A modelagem da catenária é obtida a partir da função

$$f(x) = a.cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

onde a é um parâmetro obtido por meio das forças exercidas em um ponto específico da curva.

A seguir, algumas imagens de situações que envolvem o estudo da trigonometria hiperbólica. Em todos os casos, para a manutenção da estrutura, é imprescindível a distribuição igualitária da força, que é proporcionada pela catenária.

- **Ponte suspensa por cordas.**

Aparentemente frágil, o cabo é capaz de suportar todo o peso da ponte devido ao seu formato, que nada mais é que parte de uma catenária.

Figura 2 - Ponte Ambassador Bridge é uma ponte pênsil que ligas as cidades de Detroit- EUA e Windsor-CAN. Fonte: site megaengenharia.blogspot.com.

- **Fios e cabos suspensos**

Sabendo que a curva formada pelos fios e cabos seguem uma função hiperbólica, é possível calcular, por exemplo, o custo necessário relacionando a distância entre as torres e o comprimento de fios/cabos que serão utilizados, podendo minimizar os custos para as construções.

Figura 3 - Fios elétricos. Fonte: http://www.fotocommunity.es

- **Fundo da lata de refrigerante/cerveja**

É fácil perceber que o fundo da lata é uma superfície curva. Essa curva é obtida rotacionando uma catenária em torno do seu eixo de simetria. Isso torna a superfície muito mais resistente às forças vindas do interior da lata. Sem esse formato é provável que o fundo da lata sofreria deformações assim que o líquido fosse armazenado.

Figura 4 - Fundo da latinha de refrigerante é um conjunto de catenárias. Fonte: Autor.

- **Iglu**

Diferente de outras construções os blocos de neve não são fixados por algum tipo especial de cola. Apenas a neve é acrescentada aos espaços depois de tudo montado. Como o formato do iglu segue uma catenária, então todos os blocos se auto-sustentam e mantém o formato original.

Figura 5 - Um iglu (casa de neve). Fonte: http://www.frag-floh.de/natur/mensch/was-ist-ein-eskimo

- **Casca de ovo**

Tente quebrar um ovo utilizando os dedos polegar e indicador, aplicando forças apenas nos vértices. É possível quebrar, porém verificará facilmente que a força necessária para tal será muito maior que aquela que parecia ser suficiente. Isso se deve ao fato do formato do ovo seguir duas catenárias rotacionadas em torno do próprio eixo. Dessa forma a força aplicada nos vértices está sendo distribuída para toda a casca do ovo, o que torna a força aplicada em cada ponto muito menor, devido às características da catenária.

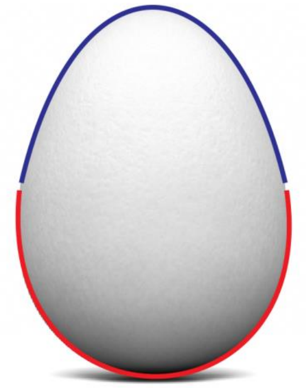

Figura 6 - Ovo de aves, cujo perfil é composto por duas catenárias. Fonte: http://www.dasmariasblog.com/post/71703/como-ovos-e-emagreca-3kg-em-uma-semana

- **Túneis**

No Brasil e no mundo há túneis que passam sob montanhas, rios e até mares. Utilizando o formato da catenária esse túnel é capaz de suportar grandes extensões de terra ou água. Com outro formato essa construção não seria possível.

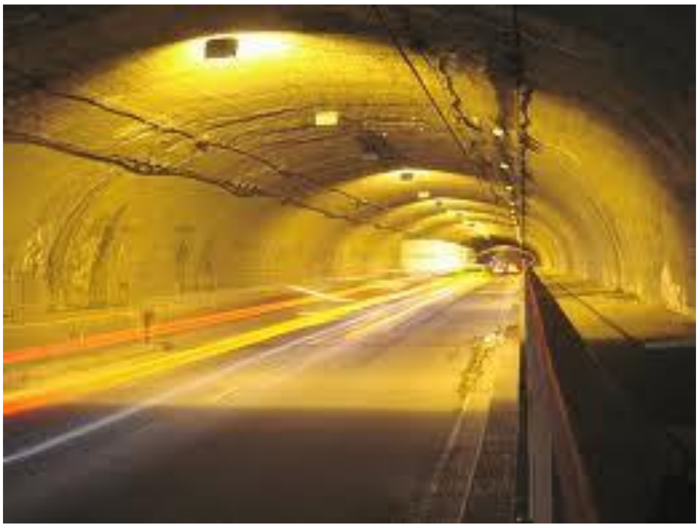

Figura 7 - Túnel com formato de catenária. Fonte: http://matematicacritica.blogspot.com.br/2012_01_01_archive.html

2. TRIGONOMETRIA CIRCULAR

Nas próximas páginas nossa pesquisa se destina à trigonometria circular, pois, apesar do objeto principal do trabalho ser a trigonometria hiperbólica, grande parte das definições, funções e fórmulas da trigonometria hiperbólica são obtidas de forma análoga às da trigonometria circular. As comparações são inevitáveis. Tanto as semelhanças quanto as diferenças entre as duas trigonometrias merecem destaque.

2.1. Círculo Trigonométrico

A trigonometria circular é iniciada com as razões entre os lados de um triângulo retângulo, onde define-se o seno como sendo a razão entre o cateto oposto ao ângulo e a hipotenusa, o cosseno como a razão entre o cateto adjacente ao ângulo e a hipotenusa e, a tangente como a razão entre os catetos oposto e adjacente, respectivamente.

Dessa forma, temos:

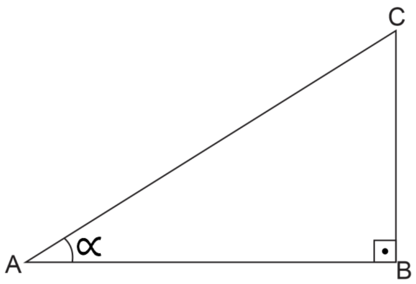

Figura 8 - Triângulo retângulo. Fonte: autor.

$$sen\ \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$$

$$cos\ \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

$$tg\ \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$$

A construção da trigonometria circular consiste, basicamente, em utilizar essas propriedades dos triângulos retângulos em uma circunferência com o centro na origem do sistema de eixos e raio medindo uma unidade. Para analisarmos essas propriedades vamos determinar a equação dessa circunferência, pois será bastante útil no estudo e na obtenção das funções e relações trigonométricas.

Uma circunferência é definida como sendo o conjunto dos infinitos pontos pertencentes a um mesmo plano, que são equidistantes a um ponto fixo, denominado centro da circunferência. Essa distância entre os infinitos pontos e o centro denominamos raio.

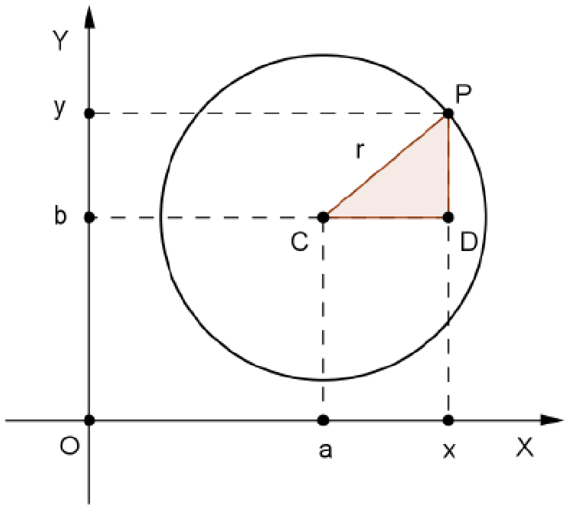

Figura 9 - circunferência de centro C e raio r. Fonte: Autor

Na figura acima o triângulo retângulo PDC nos fornecerá a equação reduzida da circunferência, por meio da aplicação do teorema de Pitágoras. Para isso, observe que (a, b) são as coordenadas do centro C e, as medidas dos lados CD e DP são dadas, respectivamente, por $|x - a|$ e $|y - b|$.

Assim, aplicando o teorema de Pitágoras, obtemos

$$(\overline{PC})^2 = (\overline{CD})^2 + (\overline{DP})^2$$

$$r^2 = (|x - a|)^2 + (|y - b|)^2$$

$$r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2$$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

que é a equação reduzida da circunferência de centro (a, b) e raio r.

Como a circunferência que utilizaremos tem centro na origem e o raio é unitário, temos $a = b = 0$ e $r = 1$.

Então,

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 1^2$$

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 = 1}$$

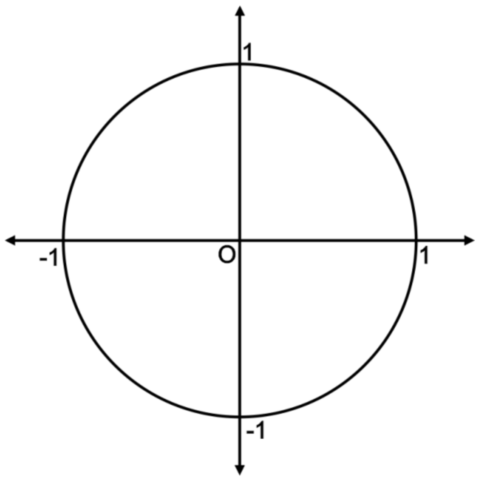

Figura 10 - Circunferência de equação $x^2 + y^2 = 1$. Fonte: Autor.

Cada vez que tomamos um ângulo central nessa circunferência, obtemos também um arco de mesmo valor numérico do ângulo. Esse arco pode ser medido também de acordo com seu comprimento.

Temos que o comprimento de uma circunferência qualquer é calculado por $2\pi r$, onde r é o raio da circunferência. Como temos $r = 1$, então o comprimento será $2.\pi.1$ ou 2π unidades de comprimento. Como aqui tomamos o raio unitário como unidade de medida, então essa circunferência tem $2\pi\ rad$ de comprimento. Daí, concluímos que um arco de $2\pi\ rad$ compreende um ângulo de 360° e, a partir desses dados podemos relacionar qualquer medida de arco com o ângulo central compreendido pelo mesmo.

Além disso, podemos relacionar um ângulo com a área do setor circular determinado por esse ângulo.

Observe que o ângulo central para uma volta completa do círculo trigonométrico mede 2π radianos e que a área do círculo trigonométrico vale πr^2 unidades de área. Como o raio é unitário, então vale π unidades de área.

Podemos estabelecer a seguinte relação para uma volta completa. O ângulo central 2π do círculo trigonométrico corresponde a área πr^2 e o ângulo central α do setor circular corresponde a área do setor As. Resolvendo essa proporção obtemos o valor da área do setor circular As, subentendido pelo ângulo α

$$2\pi \rightarrow \pi r^2$$
$$\alpha \rightarrow As$$

$$As.2\pi = \alpha.\pi r^2$$

$$As = \frac{\alpha.\pi r^2}{2\pi}$$
$$As = \frac{\alpha r^2}{2}$$

Como $r = 1$,

$$As = \frac{\alpha}{2}$$

Portanto, podemos dizer que $As = \frac{\alpha}{2}$ unidades de área.

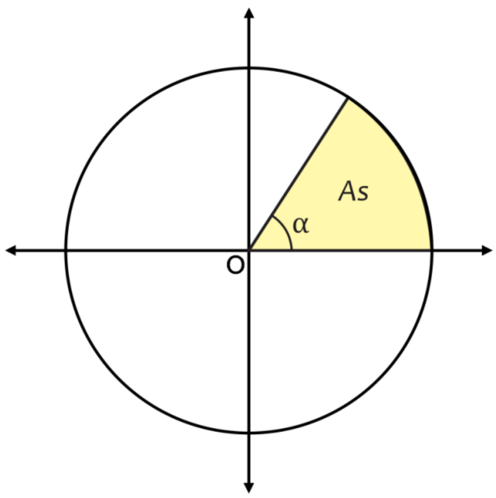

Figura 11 - Ângulo α e a área As do setor circular. Fonte: Autor.

Dessa forma, podemos dizer que um ângulo trigonométrico mede α radianos se o setor circular subtendido por ele for igual a $\frac{\alpha}{2}$ unidades de área. Essa última forma de interpretarmos a medida de um ângulo é de extrema importância, pois é a partir dela que definiremos como obter a medida do ângulo hiperbólico ou argumento hiperbólico.

É importante ressaltar que qualquer circunferência poderia ser utilizada na construção da trigonometria circular. Por convenção, utiliza-se essa circunferência de raio unitário e centro na origem para que as propriedades do triângulo retângulo sejam mais facilmente estudadas e interpretadas. Na figura a seguir, devido à essas propriedades, veremos como interpretar os valores das razões trigonométricas de um ângulo nessa circunferência.

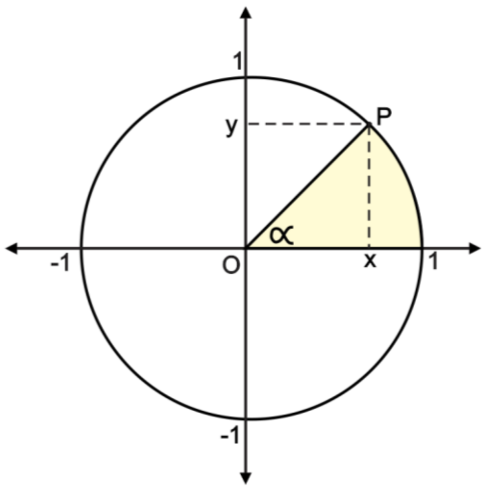

Figura 12 - Ciclo trigonométrico e as razões trigonométricos. Fonte: Autor.

Na figura acima o ângulo α determina um ponto P na circunferência. Ao mesmo tempo, obtemos o triângulo retângulo de hipotenusa $\overline{OP} = 1$ (raio da circunferência). Os catetos adjacente e oposto medem, respectivamente, x unidades e y unidades.

A partir das propriedades do triângulo retângulo, temos:

$$sen\ \alpha = \frac{y}{\overline{OP}} = \frac{y}{1} = y$$

$$cos\ \alpha = \frac{x}{\overline{OP}} = \frac{x}{1} = x$$

$$tg\ \alpha = \frac{y}{x} = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}$$

Dessa forma, podemos também dizer que o ângulo α determina na circunferência um ponto P de coordenadas $(cos\ \alpha, sen\ \alpha)$.

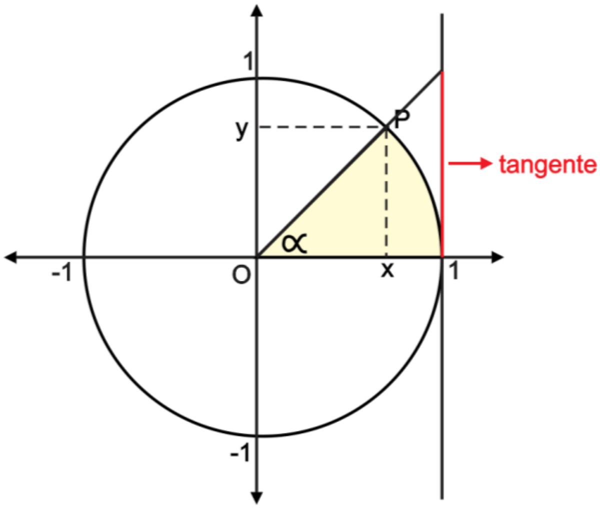

Figura 13 - Tangente no ciclo trigonométrico. Fonte: Autor.

A tangente é representada geometricamente pela reta tangente à circunferência, conforme a figura anterior. Utilizando as propriedades de triângulos semelhantes, é fácil demonstrar que o segmento indicado corresponde à razão entre o seno e o cosseno, conforme foi definido anteriormente.

Observe ainda que $tg\ \alpha$ não está definido para α igual a 90° e 270°, pois temos $cos\ \alpha = 0$ nesses casos e, geometricamente, esses ângulos se encontram sobre o eixo y, paralelo à reta tangente.

Ao trabalhar esses conceitos no ensino fundamental e/ou médio, os ângulos de 30°, 45° e 60° são denominados ângulos notáveis e tem suas razões escritas como:

Ângulos (graus)	30°	45°	60°
Arcos (radianos)	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Agora, após definidas as razões trigonométricas, podemos definir também suas inversas, denominadas cossecante, secante e cotangente, onde:

$$cossec\ \alpha = \frac{1}{sen\ \alpha}$$

$$sec\ \alpha = \frac{1}{cos\ \alpha}$$

$$cotg\ \alpha = \frac{1}{tg\ \alpha} = \frac{cos\ \alpha}{sen\ \alpha}$$

Para obtê-las geometricamente vamos considerar a imagem a seguir (figura 14). Seja s a reta que passa pela origem e tem coeficiente angular igual a tangente de α e r, a reta perpendicular a s e tangente à circunferência. Sejam, também, as retas de equações $y = 1$ e $x = 1$. A reta s determina os pontos K e L nas retas $x = 1$ e $y = 1$, respectivamente. A reta r determina os pontos Q e N nos eixos x e y, respectivamente. M é a intersecção do eixo y com a reta $y = 1$ e P, a intersecção do eixo x com a reta $x = 1$.

Dessa forma:

$$cossec\ \alpha = \overline{ON}$$

$$sec\ \alpha = \overline{OQ}$$

$$tg\ \alpha = \overline{PK}$$

$$cotg\ \alpha = \overline{ML}$$

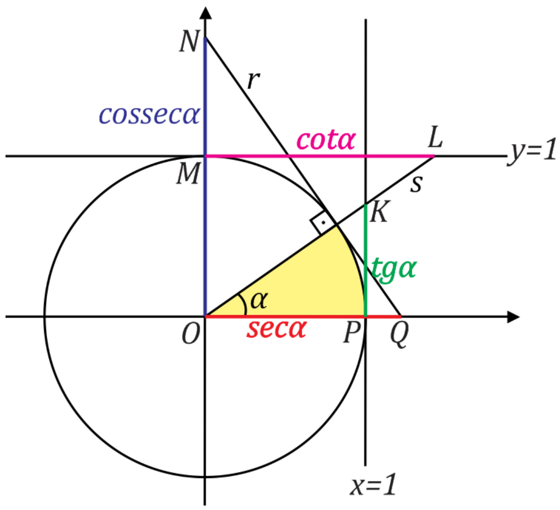

Figura 14 - Cossec, sec, tg e cotg no ciclo trigonométrico. Fonte: Autor.

É fácil observar, tanto algebricamente como geometricamente, que $cossec\alpha$ não está definido para α igual 0°, 180° e 360°, pois nesses casos temos $sen\ \alpha = 0$.

Já $sec\ \alpha$ não está definido para α igual 90° e 180°, visto que $cos\ \alpha = 0$ para esses ângulos e, pelo mesmo raciocínio, $cotg\ \alpha$ não está definido para α igual 0°, 180° e 360°.

2.2. Gráficos das funções seno, cosseno e tangente.

Como a função seno é definida de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, o domínio é o conjunto dos números reais. Como no círculo trigonométrico o raio é unitário, então a imagem da função seno será o intervalo $[-1, 1]$. A função seno é periódica de período 2π.

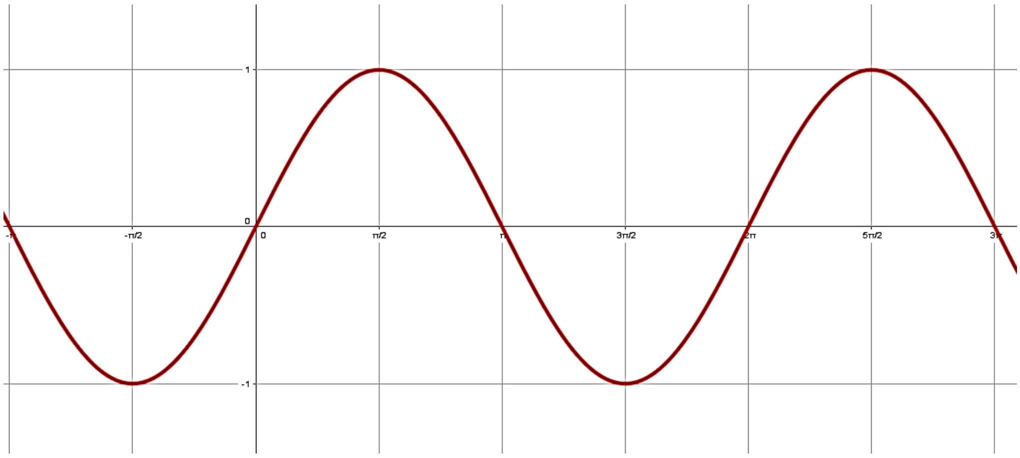

Figura 15 - Gráfico da função seno. Fonte: Autor.

A função cosseno também possui como domínio o conjunto dos números reais, o intervalo $[-1, 1]$ como imagem e é periódica com período 2π.

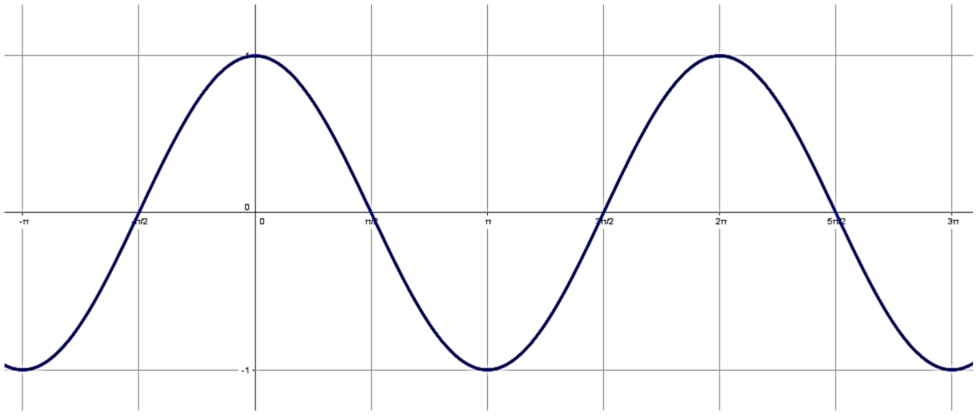

Figura 16 - Gráfico da função cosseno. Fonte: Autor.

A função tangente apresenta alguns detalhes a mais quando comparada às duas anteriores. Como a tangente não está definida para os ângulos de 90°, 270° e seus múltiplos, então existem assíntotas verticais nos arcos do tipo $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ com $k \in Z$. Assim, o domínio não é o conjunto dos números reais. Sua imagem será o intervalo $(-\infty, +\infty)$ ou o conjunto dos números reais e é periódica de período π.

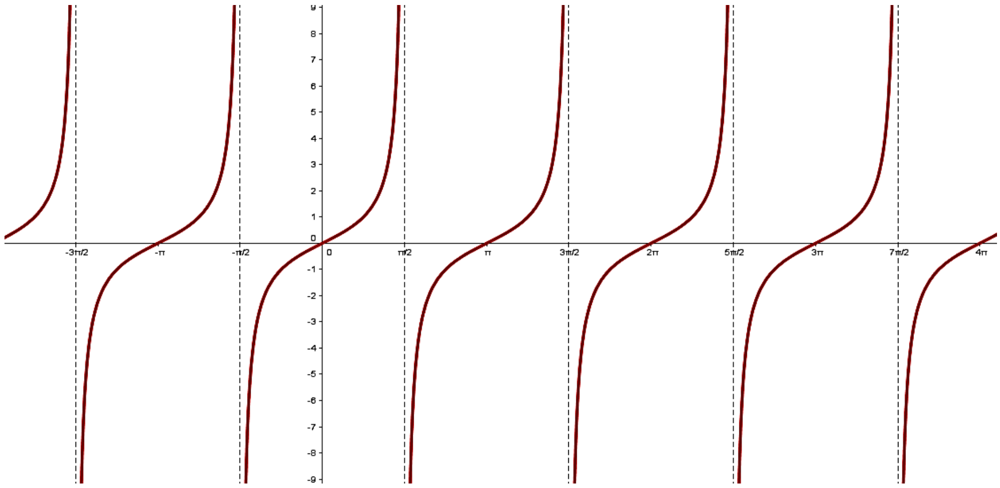

Figura 17 - Gráfico da função tangente. Fonte: Autor.

A seguir apresentamos os gráficos das funções cossecante, secante e cotangente.

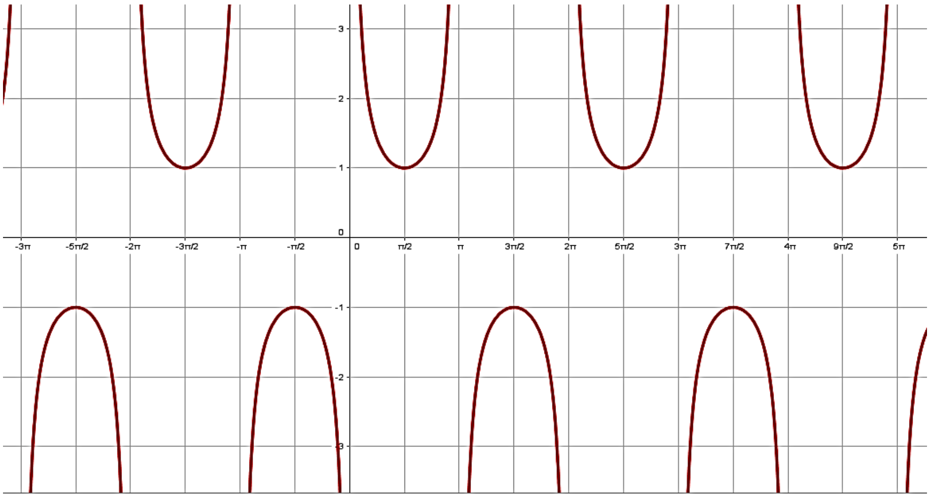

Figura 18 - Gráfico da função cossecante. Fonte: Autor.

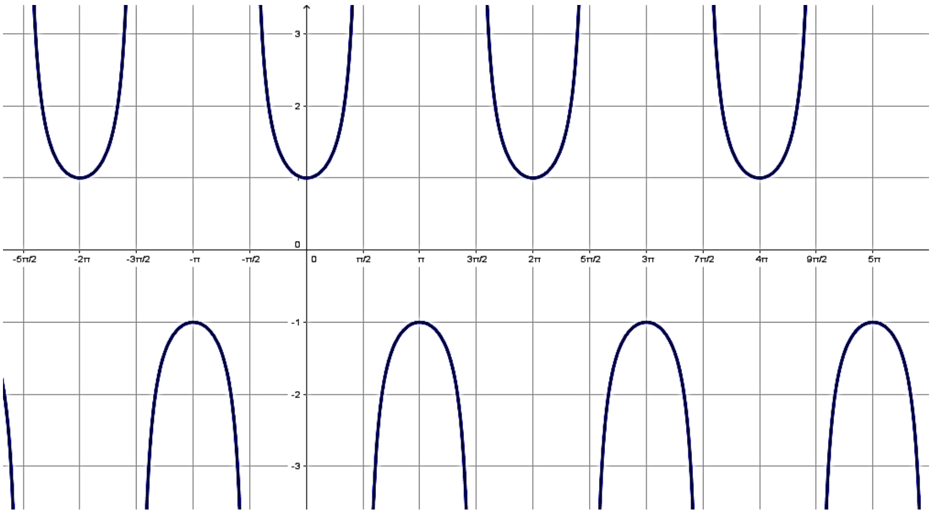

Figura 19 - Gráfico da função secante. Fonte: Autor.

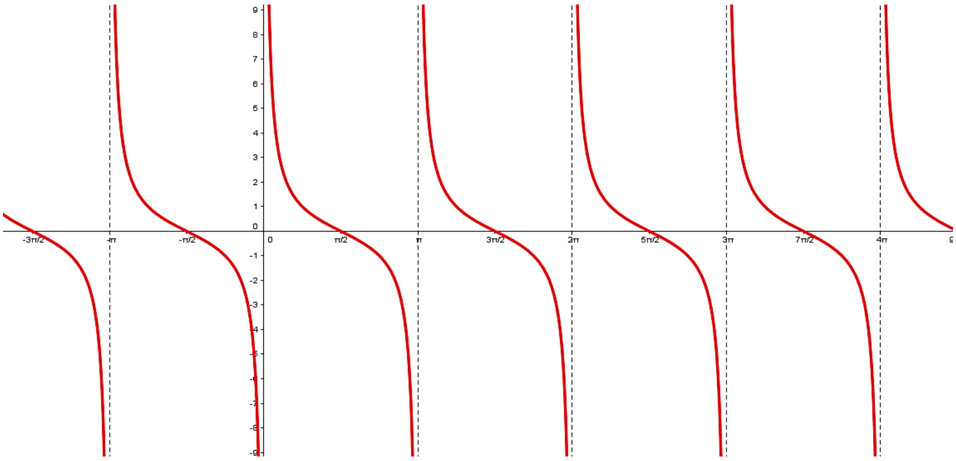

Figura 20 - Função cotangente. Fonte: Autor

2.3. Identidade Fundamental da Trigonometria e Relações obtidas a partir da Identidade Fundamental

Inicialmente, vimos na seção 2.1 que o ângulo α determina na circunferência um ponto P de coordenadas $(cos\ \alpha, sen\ \alpha)$, portanto $x = cos\ \alpha$ e $y = sen\ \alpha$. Como a circunferência é dada pela equação $x^2 + y^2 = 1$, então:

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$cos^2\ \alpha + sen^2\ \alpha = 1$$

ou,

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

Essa relação, conhecida como *Relação Fundamental da Trigonometria* ou *Identidade Fundamental da Trigonometria* é de extrema importância e utilidade para a trigonometria. Por meio dela podemos obter várias outras relações, como veremos a seguir.

Dividindo a relação fundamental por $sen^2\alpha$, com $sen^2\alpha \neq 0$, obtemos:

$$\frac{sen^2\alpha}{sen^2\alpha} + \frac{cos^2\alpha}{sen^2\alpha} = \frac{1}{sen^2\alpha}$$

$$1 + cotg^2\ \alpha = cossec^2\alpha$$

$$cossec^2\ \alpha = cotg^2\ \alpha + 1$$

Dividindo a relação fundamental por $cos^2\alpha$, com $cos^2\alpha \neq 0$, obtemos:

$$\frac{sen^2\alpha}{cos^2\alpha} + \frac{cos^2\alpha}{cos^2\alpha} = \frac{1}{cos^2\alpha}$$

$$tg^2\ \alpha + 1 = sec^2\alpha$$

$$sec^2\ \alpha = tg^2\ \alpha + 1$$

2.4. Adição e subtração de arcos

As demonstrações desse capítulo são muito importantes tanto para os alunos como para o professor. É muito comum os alunos confundirem a adição de arcos com a adição dos senos de dois arcos, principalmente quando estão tendo seus primeiros contatos com o assunto e as demonstrações colaboram bastante no esclarecimento dessas dúvidas.

Para as adições de arcos temos as seguintes fórmulas:

- $\boldsymbol{cos(\alpha + \beta) = cos\ \alpha . cos\ \beta - sen\ \alpha . sen\ \beta}$
- $\boldsymbol{cos(\alpha - \beta) = cos\ \alpha . cos\ \beta + sen\ \alpha . sen\ \beta}$
- $\boldsymbol{sen(\alpha + \beta) = sen\ \alpha . cos\ \beta + sen\ \beta . \cos\alpha}$
- $\boldsymbol{sen(\alpha - \beta) = sen\ \alpha . cos\ \beta - sen\ \beta . cos\ \alpha}$
- $\boldsymbol{tg(\alpha + \beta) = \frac{tg\ \alpha + tg\ \beta}{1 - tg\ \alpha . tg\ \beta}}$
- $\boldsymbol{tg(\alpha - \beta) = \frac{tg\ \alpha - tg\ \beta}{1 + tg\ \alpha . tg\ \beta}}$

Demonstraremos cada uma dessas fórmulas. Para isso, vamos observar a imagem a seguir:

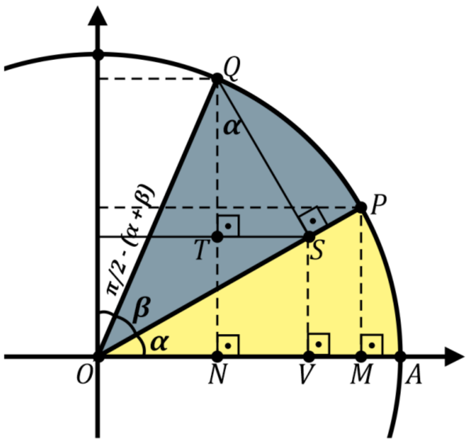

Figura 21 - Demonstração - adição e subtração de arcos. Fonte: Autor.

Na figura 21, o arco $\widehat{AP}$ é a determinado pelo ângulo α, $\widehat{PQ}$ é determinação de β e $\widehat{AQ}$ é determinação de $(\alpha + \beta)$.

Observando as construções geométricas no círculo trigonométrico acima, podemos deduzir que os triângulos OMP, OVS e QTS são retângulos e semelhantes. Então, podemos construir algumas relações:

$$(1) \quad \overline{OM} = cos\ \alpha$$

$$(2) \quad \overline{OS} = cos\ \beta$$

$$(3) \quad \overline{MP} = sen\ \alpha$$

$$(4) \quad \overline{SQ} = sen\ \beta$$

$$(5) \quad \overline{ON} = cos(\alpha + \beta)$$

$$(6) \quad \overline{NQ} = sen\ (\alpha + \beta)$$

$$(7) \quad \overline{OP} = \overline{OQ} = 1\ (raio)$$

Como $\Delta OVS \sim \Delta OMP$,

$$\frac{\overline{OV}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{OS}}{\overline{OP}}$$

Substituindo as relações (1), (2) e (7) na igualdade acima, temos:

$$\frac{\overline{OV}}{cos\ \alpha} = \frac{cos\ \beta}{1}$$

$$(8) \quad \overline{OV} = cos\ \alpha . cos\ \beta$$

Como $\Delta QTS \sim \Delta OMP$,

$$\frac{\overline{TS}}{\overline{MP}} = \frac{\overline{SQ}}{\overline{OP}}$$

Substituindo as relações (3), (4) e (7) na igualdade acima, temos:

$$\frac{\overline{TS}}{sen\ \alpha} = \frac{sen\ \beta}{1}$$

$$(9) \quad \overline{TS} = sen\ \alpha . sen\ \beta$$

Conhecendo essas relações, já podemos provar que

$$cos(\alpha + \beta) = cos\ \alpha . cos\ \beta - sen\ \alpha . sen\ \beta$$

Da igualdade (5) temos que:

$$cos(\alpha + \beta) = \overline{ON}$$

Mas, $\overline{ON} = \overline{OV} - \overline{NV}$, então:

$$cos(\alpha + \beta) = \overline{OV} - \overline{NV}$$

Além disso, pela figura, observe que $\overline{NV} = \overline{TS}$ e substituindo as igualdades (8) e (9), podemos concluir que:

$cos(\alpha + \beta) = \overline{OV} - \overline{TS}$, e

$$(10) \quad \boldsymbol{cos(\alpha + \beta) = cos\,\alpha . cos\,\beta - sen\,\alpha . sen\,\beta}$$

Para demonstrar que $cos(\alpha - \beta) = cos\,\alpha . cos\,\beta + sen\,\alpha . sen\,\beta$ devemos lembrar que $cos\,\beta = \cos(-\beta)$ e $sen(-\beta) = -sen\,\beta$.

A partir da igualdade (10), observe que:

$$cos(\alpha + \beta) = cos\,\alpha . cos\,\beta - sen\,\alpha . sen\,\beta$$

$$cos(\alpha - \beta) = \cos\big(\alpha + (-\beta)\big) = cos\,\alpha . \cos(-\beta) - sen\,\alpha . sen(-\beta)$$

Substituindo os valores de $\cos(-\beta)$ e $sen\,(-\beta)$ chegamos em:

$$(11) \quad \boldsymbol{cos(\alpha - \beta) = cos\,\alpha . cos\,\beta + sen\,\alpha . sen\,\beta}$$

Se dois ângulos α e β são complementares, então $sen\,\alpha = cos\,\beta$. Ou ainda

$$(12) \quad sen\,\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$(12) \quad cos\,\alpha = sen\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

Assim, temos que:

$$sen(\alpha + \beta) = cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right)$$

$$sen(\alpha + \beta) = cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta\right) = cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right)$$

Aplicando a relação (11)

$$sen(\alpha + \beta) = cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) = cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) . cos\,\beta + sen\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) . sen\,\beta$$

Das relações em (12)

$$sen(\alpha+\beta) = sen\ \alpha.cos\ \beta + cos\ \alpha.sen\ \beta$$

ou, equivalente a

$$(13) \quad \boldsymbol{sen(\alpha+\beta) = sen\ \alpha.cos\ \beta + sen\ \beta.cos\ \alpha}$$

Se quisermos determinar $sen(\alpha-\beta)$, podemos escrever a relação acima como:

$$sen(\alpha-\beta) = sen\big(\alpha+(-\beta)\big) = sen\ \alpha.\cos(-\beta) + sen(-\beta).cos\ \alpha$$

No entanto,

$sen(-\beta) = -sen\ \beta$ e $cos(-\beta) = cos\ \beta$

e substituindo, concluímos que:

$$sen(\alpha-\beta) = sen\ \alpha.cos\ \beta + (-sen\beta).cos\ \alpha$$

$$(14) \quad \boldsymbol{sen(\alpha-\beta) = sen\ \alpha.cos\ \beta - sen\ \beta.cos\ \alpha}$$

Utilizando as relações (10), (11), (13) e (14) podemos encontrar as fórmulas de adição e subtração de arcos para a tangente, como veremos a seguir:

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{sen(\alpha+\beta)}{cos(\alpha+\beta)} = \frac{sen\ \alpha.cos\ \beta + sen\ \beta.cos\ \alpha}{cos\ \alpha.cos\ \beta - sen\ \alpha.sen\ \beta}$$

Dividindo o numerador e o denominador por $cos\alpha.cos\beta$

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{\frac{sen\ \alpha . cos\ \beta + sen\ \beta . cos\ \alpha}{cos\ \alpha . cos\ \beta}}{\frac{cos\ \alpha . cos\ \beta - sen\ \alpha . sen\ \beta}{cos\ \alpha . cos\ \beta}} = \frac{\frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} + \frac{sen\ \beta}{cos\ \beta}}{1 - \frac{sen\ \alpha . sen\ \beta}{cos\ \alpha . cos\ \beta}}$$

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{\frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} + \frac{sen\ \beta}{cos\ \beta}}{1 - \frac{sen\ \alpha . sen\ \beta}{cos\ \alpha . cos\ \beta}} = \frac{tg\ \alpha + tg\ \beta}{1 - tg\ \alpha . tg\ \beta}$$

$$(15) \quad \boldsymbol{tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\ \alpha + tg\ \beta}{1 - tg\ \alpha . tg\ \beta}}$$

Para a $tg(\alpha-\beta)$, façamos:

$$tg(\alpha-\beta) = \frac{sen(\alpha-\beta)}{cos(\alpha-\beta)} = \frac{sen\ \alpha . cos\ \beta - sen\ \beta . cos\ \alpha}{cos\ \alpha . cos\ \beta + sen\ \alpha . sen\ \beta}$$

Dividindo o numerador e o denominador por $cos\alpha . cos\beta$

$$tg(\alpha-\beta) = \frac{\frac{sen\ \alpha . cos\ \beta - sen\ \beta . cos\ \alpha}{cos\ \alpha . cos\ \beta}}{\frac{cos\ \alpha . cos\ \beta + sen\ \alpha . sen\ \beta}{cos\ \alpha . cos\ \beta}} = \frac{\frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} - \frac{sen\ \beta}{cos\ \beta}}{1 + \frac{sen\ \alpha . sen\ \beta}{cos\ \alpha . cos\ \beta}}$$

$$tg(\alpha-\beta) = \frac{\frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} - \frac{sen\ \beta}{cos\ \beta}}{1 + \frac{sen\ \alpha . sen\ \beta}{cos\ \alpha . cos\ \beta}} = \frac{tg\ \alpha - tg\ \beta}{1 + tg\ \alpha . tg\ \beta}$$

$$(16) \quad \boldsymbol{tg(\alpha - \beta) = \frac{tg\ \alpha - tg\ \beta}{1 + tg\ \alpha . tg\ \beta}}$$

2.5. Fórmulas para arco duplo, arco triplo e bissecção de arcos

Em qualquer um dos casos, para obtermos a fórmula de arco duplo, basta que consideremos $\alpha = \beta$. Assim,

$$sen(2\alpha) = sen(\alpha + \alpha) = sen\ \alpha . cos\ \alpha + sen\ \alpha . cos\ \alpha = 2 . sen\ \alpha . cos\ \alpha$$

Então,

$$(17) \quad \boldsymbol{sen(2\alpha) = 2 . sen\ \alpha . cos\ \alpha}$$

Analogamente,

$$cos(2\alpha) = cos(\alpha + \alpha) = cos\ \alpha . cos\ \alpha - sen\ \alpha . sen\ \alpha = cos^2\alpha - sen^2\alpha$$

$$(18) \quad \boldsymbol{cos(2\alpha) = cos^2\alpha - sen^2\alpha}$$

Agora,

$$tg(2\alpha) = tg(\alpha + \alpha) = \frac{tg\ \alpha + tg\ \alpha}{1 - tg\ \alpha . tg\ \alpha} = \frac{2 . tg\ \alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

$$(19) \quad \boldsymbol{tg(2\alpha) = \frac{2 . tg\ \alpha}{1 - tg^2\alpha}}$$

Conhecendo as fórmulas de arco duplo, as fórmulas de arco triplo são facilmente obtidas.

$$sen(3\alpha) = sen(2\alpha + \alpha) = sen(2\alpha).cos\ \alpha + sen\ \alpha.cos(2\alpha)$$

Substituindo as igualdades (17) e (18)

$$sen(3\alpha) = sen(2\alpha + \alpha) = 2.sen\ \alpha.cos\ \alpha.cos\ \alpha + sen\ \alpha.(cos^2\alpha - sen^2\alpha)$$
$$sen(3\alpha) = 2.sen\ \alpha.cos^2\alpha + sen\ \alpha.cos^2\alpha - sen^3\alpha$$
$$sen(3\alpha) = 3.sen\ \alpha.cos^2\alpha - sen^3\alpha$$

Para que $sen(3\alpha)$ fique apenas em função de $sen\alpha$, vamos retomar a identidade fundamental:

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

$$cos^2\alpha = 1 - sen^2\alpha$$

Então,

$$sen(3\alpha) = 3.sen\ \alpha.(1 - sen^2\alpha) - sen^3\alpha$$

$$sen(3\alpha) = 3.sen\ \alpha. - 3sen^3\alpha - sen^3\alpha$$

$$(20) \quad \boldsymbol{sen(3\alpha) = 3.sen\ \alpha. - 4sen^3\alpha}$$

Para obtermos $\cos(3\alpha)$, temos:

$$cos(3\alpha) = cos(2\alpha + \alpha) = cos(2\alpha)\,.cos\ \alpha - sen(2\alpha).sen\ \alpha$$

Substituindo as igualdades (17) e (18)

$$cos(3\alpha) = (cos^2\alpha - sen^2\alpha).cos\ \alpha - 2.sen\ \alpha.cos\ \alpha.sen\ \alpha$$

$$cos(3\alpha) = cos^3\alpha - sen^2\alpha.cos\ \alpha - 2.sen^2\alpha.cos\ \alpha$$

$$cos(3\alpha) = cos^3\alpha - 3sen^2\alpha.cos\ \alpha$$

Como $sen^2\alpha = 1 - cos^2\alpha$, temos:

$$cos(3\alpha) = cos^3\alpha - 3.(1 - cos^2\alpha).cos\ \alpha$$

$$cos(3\alpha) = cos^3\alpha - 3.cos\ \alpha + 3cos^3\alpha$$

$$(21)\quad \boldsymbol{cos(3\alpha) = 4.cos^3\alpha - 3.cos\ \alpha}$$

Veremos, agora, como obter $tg(3\alpha)$. Para essa demonstração vimos, na obtenção dos arcos triplos de seno e cosseno que:

I) $sen(3\alpha) = 3.sen\ \alpha.cos^2\alpha - sen^3\alpha$

II) $cos(3\alpha) = cos^3\alpha - 3sen^2\alpha.cos\ \alpha$

$$tg(3\alpha) = \frac{sen(3\alpha)}{cos(3\alpha)} = \frac{3.sen\ \alpha.cos^2\alpha - sen^3\alpha}{cos^3\alpha - 3.sen^2\alpha.cos\ \alpha}$$

Dividindo o numerador e o denominador por $cos^3\alpha$

$$tg(3\alpha) = \frac{\frac{3.sen\ \alpha.cos^2\alpha - sen^3\alpha}{cos^3\alpha}}{\frac{cos^3\alpha - 3.sen^2\alpha.cos\ \alpha}{cos^3\alpha}} = \frac{\frac{3.sen\ \alpha}{cos\ \alpha} - \frac{sen^3\alpha}{cos^3\alpha}}{1 - \frac{3.sen^2\alpha}{cos^2\alpha}} = \frac{3.tg\ \alpha - tg^3\alpha}{1 - 3.tg^2\alpha}$$

$$(22) \quad \boldsymbol{tg(3\alpha) = \frac{3.tg\,\alpha - tg^3\alpha}{1 - 3.tg^2\alpha}}$$

As fórmulas da bissecção de arcos, também conhecidas como arco metade ou semiarco, são facilmente encontradas a partir das fórmulas que já demonstramos e da identidade fundamental, como veremos agora.

Vamos, primeiro, obter a expressão para $cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

Como a identidade fundamental vale para qualquer ângulo, então:

$$sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1$$

Tendo em vista que,

$$\alpha = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}$$

Podemos escrever $cos\alpha$ como:

$$cos\,\alpha = cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Da relação fundamental, temos que

$$sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1 - cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Então,

$$cos\ \alpha = cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \left(1 - cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)$$

$$cos\ \alpha = cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1 + cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$cos\ \alpha = 2.cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1$$

Trabalhando com essa expressão, chegamos que:

$$(23) \quad \boldsymbol{cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + cos\ \alpha}{2}}}$$

Para determinarmos o seno do arco metade, o raciocínio é análogo.

$$(24) \quad \boldsymbol{sen\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - cos\ \alpha}{2}}}$$

Concluindo o capítulo, para obtermos a tangente do arco metade, basta tomarmos:

$$tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

Substituindo as expressões (23) e (24) e realizando as operações, obtemos:

$$(25) \quad \boldsymbol{tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - cos\alpha}{1 + cos\alpha}}}$$

2.6. Transformação de soma em produto (Prostaférese)

Essas seguintes fórmulas são rapidamente encontradas a partir das fórmulas de adição e subtração de arcos.

(I) $sen(\alpha + \beta) = sen\ \alpha . cos\ \beta + sen\ \beta . cos\ \alpha$

(II) $sen(\alpha - \beta) = sen\ \alpha . cos\ \beta - sen\ \beta . cos\ \alpha$

(III) $cos(\alpha + \beta) = cos\ \alpha . cos\ \beta - sen\ \alpha . sen\ \beta$

(IV) $cos(\alpha - \beta) = cos\ \alpha . cos\ \beta + sen\ \alpha . sen\ \beta$

Em todos os casos vamos considerar $\alpha + \beta = x$ e $\alpha - \beta = y$, o que implica que:

$$(V) \quad \alpha = \frac{x + y}{2}$$

$$(VI) \quad \beta = \frac{x - y}{2}$$

Fazendo $(I) + (II)$ e substituindo (V) e (VI), chegamos em:

$$(26) \quad \boldsymbol{sen\ x + sen\ y = 2 . sen\left(\frac{x + y}{2}\right) . cos\left(\frac{x - y}{2}\right)}$$

Fazendo $(I) - (II)$ e substituindo (V) e (VI), chega-se em:

$$(27) \quad \boldsymbol{sen\ x - sen\ y = 2 . sen\left(\frac{x - y}{2}\right) . cos\left(\frac{x + y}{2}\right)}$$

Fazendo $(III) + (IV)$ e substituindo (V) e (VI), chega-se em:

$$(28) \quad \boldsymbol{cos\ x + cos\ y = 2 . cos\left(\frac{x + y}{2}\right) . cos\left(\frac{x - y}{2}\right)}$$

Fazendo $(III) - (IV)$ e substituindo (V) e (VI), chega-se em:

$$(29) \quad \boldsymbol{\cos x - \cos y = -2.sen\left(\frac{x+y}{2}\right).sen\left(\frac{x-y}{2}\right)}$$

Finalmente,

$$tgx + tgy = \frac{sen\,x}{cos\,x} + \frac{sen\,y}{cos\,y} = \frac{sen\,x.\cos y + sen\,y.\cos x}{cos\,x.\cos y} = \frac{sen(x+y)}{cos\,x.\cos y}$$

$$(30) \quad \boldsymbol{tg\,x + tg\,y = \frac{sen(x+y)}{cos\,x.\cos y}}$$

e, de forma análoga,

$$(31) \quad \boldsymbol{tg\,x - tg\,y = \frac{sen(x-y)}{cos\,x.\cos y}}$$

3. ESTUDO DA HIPÉRBOLE

3.1. Definição de hipérbole

Assim como foi feito para a trigonometria circular, faremos agora uma abordagem similar para a trigonometria hiperbólica, foco da pesquisa. Considere dois pontos fixos F_1 e F_2 de um plano, tais que a distância entre estes pontos seja igual a $2c$, com $c > 0$.

Denomina-se ***hipérbole***, a curva plana cujo módulo da diferença das distâncias de cada um de seus pontos P à estes pontos fixos F_1 e F_2 é igual a um valor constante $2a$, onde a $< c$.

Assim, temos por definição, que:

$|d(P,F_1) - d(P,F_2)| = 2a$

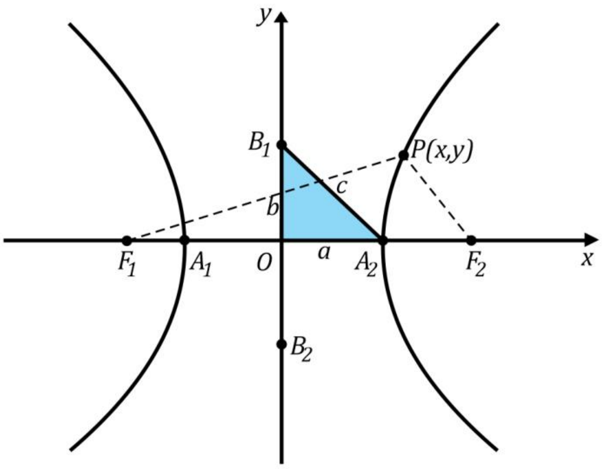

Figura 22 - Hipérbole de origem no centro e eixo transverso horizontal. Fonte: Autor

Os pontos F_1 e F_2 são denominados *focos* e a distancia $d(F_1,F_2)$ é conhecida como *distancia focal da hipérbole*, com medida $2c$.

O quociente $\dfrac{c}{a}$ é conhecido como *excentricidade* da hipérbole e está diretamente relacionada à concavidade da hipérbole. Observe que a excentricidade é sempre maior que a unidade, pois por definição temos que $a < c$.

O segmento de extremidades em A_1 e A_2 é *denominado eixo real ou eixo transverso* da hipérbole e mede $2a$, enquanto que o segmento de extremos B_1 e B_2 é denominado *eixo não transverso ou eixo conjugado* da hipérbole e mede $2b$. Observe na figura acima que é válida a relação: $c^2 = a^2 + b^2$.

Toda hipérbole possui duas assíntotas oblíquas. Essas assíntotas são as retas de equações $y = \dfrac{b}{a}x$ e $y = -\dfrac{b}{a}x$

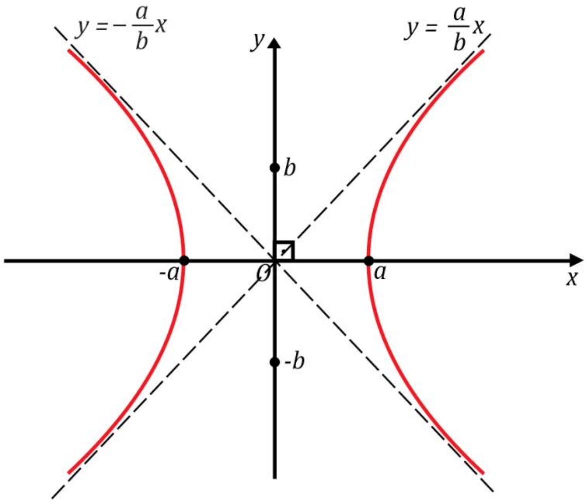

Figura 23 - Hipérbole e suas assíntotas. Fonte: Autor.

De fato,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1$$

$$y^2 = b^2.\left(\frac{x^2 - a^2}{a^2}\right)$$

$$|y| = \frac{b}{a}.\sqrt{x^2 - a^2} \leq \frac{b}{a}.\sqrt{x^2} = \frac{b}{a}.|x|$$

$$-\frac{b}{a}.|x| \leq y \leq \frac{b}{a}.|x|$$

Podemos, ainda, definir a hipérbole de forma geométrica seccionando um cone com um plano. Método esse que define, além da hipérbole, a parábola e a elipse. A hipérbole é obtida quando a secção ocorre de forma que o plano esteja paralelo ao eixo do cone.

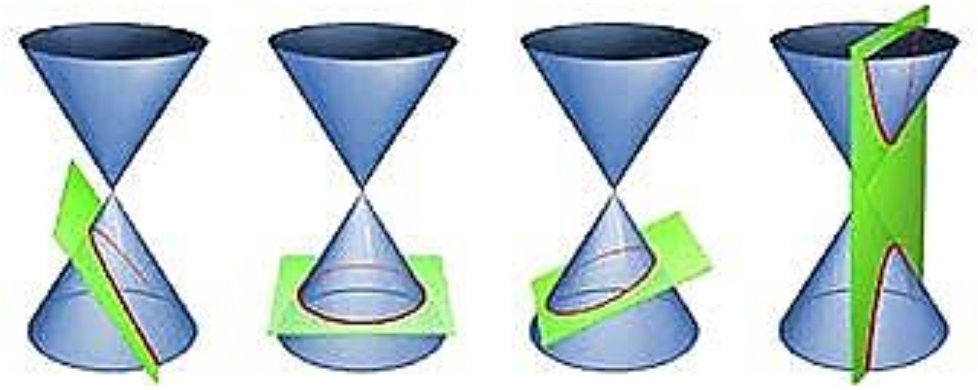

Figura 24 - Obtenção geométrica da parábola, circunferência, elipse e hipérbole, respectivamente. Fonte: Educagratis.org.

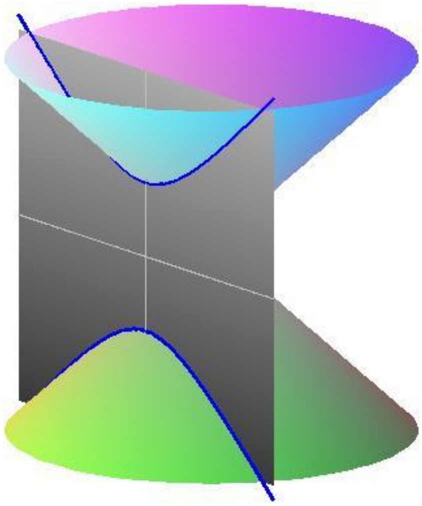

Figura 25 - Determinação geométrica da hipérbole. Fonte: http://www.pensevestibular.com.br/wp-content/uploads/2010/11/coneehiperbole.jpg?81dcbe

3.1.1. Equação da hipérbole

Para estudos futuros desse trabalho vamos precisar da equação algébrica reduzida da hipérbole. Essa equação é deduzida a partir da própria definição geométrica de hipérbole.

Vimos que um ponto P pertence à hipérbole se $|d(P,F_1) - d(P,F_2)| = 2a$.

1° caso: o eixo focal está sobre o eixo das abcissas.

Tomando um sistema ortogonal, com o centro C da hipérbole na origem do sistema, temos que:

$A_1A_2 \subset x$ e $B_1B_2 \subset y$

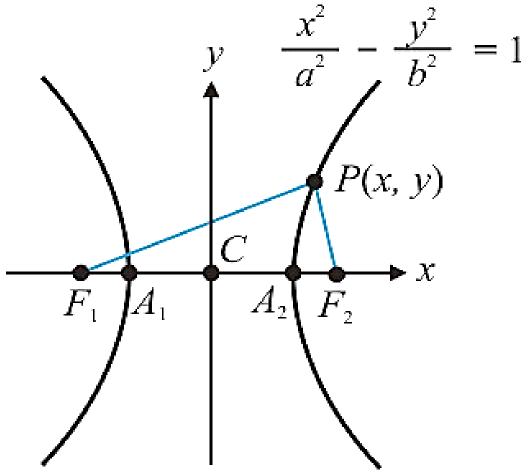

Figura 26 - Hipérbole de eixo real sobre o eixo das abcissas. Fonte: http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2011/05/equacao-da-hiperbole.html

Seja um ponto $P(x, y)$ da hipérbole, cujos focos são os pontos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$. Por definição temos que:

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$$

Em coordenadas:

$$\left|\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}\right| = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 2a$$

Quadramos ambos os lados:

$$(x+c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + y^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2 + 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$4cx - 4a^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Quadramos novamente ambos os lados:

$$(cx - a^2)^2 = a^2(x-c)^2 + a^2y^2$$

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

Mas, $c^2 - a^2 = b^2$, daí:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

Dividindo ambos os lados por a^2b^2, resulta em:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Que é a equação da hipérbole.

2° caso: o eixo focal está sobre o eixo das abcissas.

Tomando um sistema ortogonal, com o centro *C* da hipérbole na origem do sistema, temos que:

$A_1A_2 \subset y$ e $B_1B_2 \subset x$

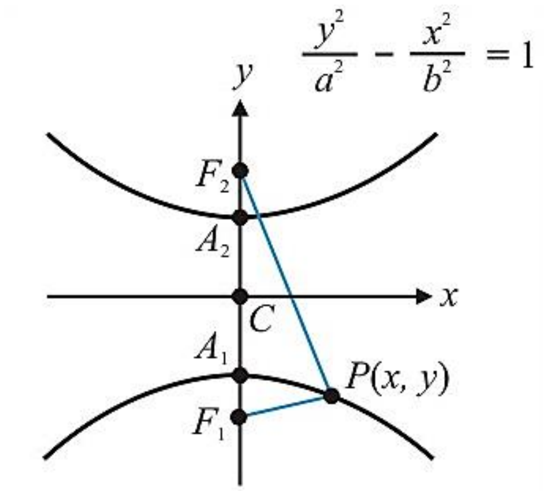

Figura 27 - Hipérbole de eixo real sobre o eixo das ordenadas. Fonte: http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2011/05/equacao-da-hiperbole.html

Analogamente ao primeiro caso, chegamos à equação da hipérbole:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Observe que, por processos de translação, podemos obter a equação de qualquer hipérbole, desde que esta possua seu eixo real vertical ou horizontal.

Para uma hipérbole de eixo real vertical com centro de coordenadas $C = (x_c, y_c)$, a equação é dada por $\frac{(x - x_C)^2}{a^2} - \frac{(y - y_C)^2}{b^2} = 1.$

Se a hipérbole tem centro em $C = (x_c, y_c)$, porém o eixo real for horizontal, então temos a equação $\frac{(y - y_C)^2}{a^2} - \frac{(x - x_C)^2}{b^2} = 1.$

Para nosso estudo, vamos considerar a hipérbole unitária, isto é, a hipérbole de equação $x^2 - y^2 = 1$, cujo gráfico está representado a seguir.

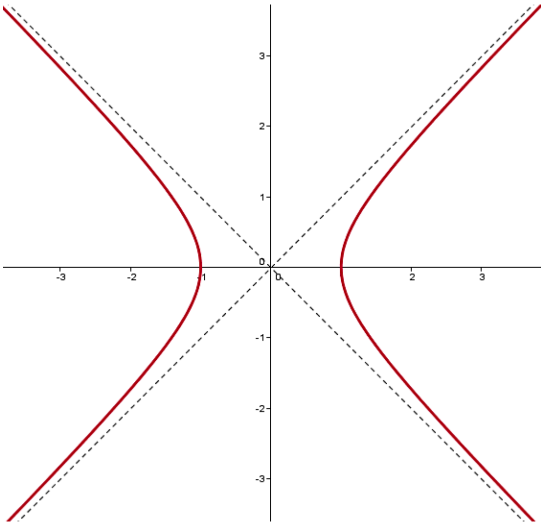

Figura 28 - Gráfico da hipérbole $x^2 - y^2 = 1$. Fonte: Autor.

Observe que as retas $y = x$ e $y = -x$ são assíntotas da hipérbole e o semieixo transverso tem medida igual a 2, já que a distância do centro a cada um dos vértices tem medida $a = 1$.

4. A TRIGONOMETRIA NA HIPÉRBOLE

Nosso objetivo é construir a trigonometria na hipérbole de maneira similar ao que apresentamos na trigonometria circular. Veremos que a semelhança é muito grande, desde a definição inicial do argumento na hipérbole até as definições de funções hiperbólicas e suas inversas.

Na trigonometria tradicional (circular), as funções seno, cosseno e tangente são obtidas inicialmente em triângulos retângulos e, a seguir, ampliadas para a circunferência de raio unitário e centro na origem do plano cartesiano, ou seja, uma circunferência de equação $x^2 + y^2 = 1$.

Em nosso estudo de funções hiperbólicas, o triângulo retângulo continua sendo a base da trigonometria, mas ampliaremos essas ideias para uma hipérbole unitária de centro em $(0, 0)$, isto é, a hipérbole de equação $x^2 - y^2 = 1$, cujas propriedades e elementos foram estudados no capítulo anterior.

4.1. Definição do argumento

Nosso objetivo nesta seção é definir ângulo hiperbólico fazendo uma analogia com o ângulo do círculo trigonométrico. Sabemos que a medida do ângulo central do círculo trigonométrico é igual à medida do arco circular por ele subtendido, mas existe outra maneira de encontrarmos a medida do ângulo trigonométrico através do cálculo da área do seu setor circular.

Vimos do capítulo 2, item 2.1 que um ângulo trigonométrico mede α radianos se o setor circular subtendido por ele for igual a $\frac{\alpha}{2}$ unidades de área.

De forma análoga, definimos ângulo hiperbólico como sendo o dobro do valor numérico da área do setor hiperbólico subtendido por ele. Se a área do setor hiperbólico mede $\frac{\theta}{2}$ unidades de área, o ângulo hiperbólico medirá θ.

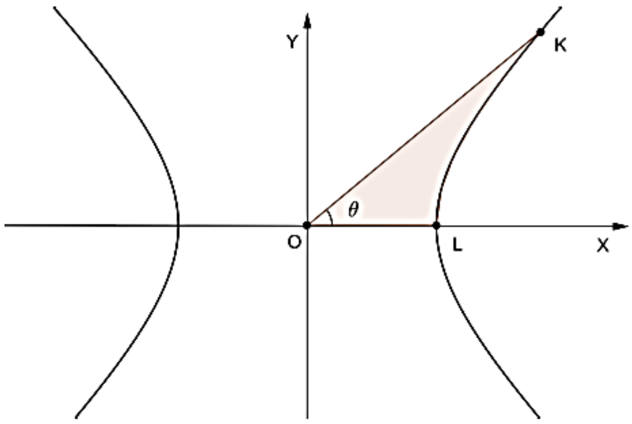

Figura 29 - Hipérbole equilátera de equação $x^2 - y^2 = 1$. Fonte: Autor

Definição 4.1.1. *Um ponto K sobre a hipérbole $x^2 - y^2 = 1$ define um setor hiperbólico LOK e um ângulo $L\hat{O}K$. Dizemos que o ângulo hiperbólico $L\hat{O}K$ mede θ se a área do setor hiperbólico LOK medir $\frac{\theta}{2}$ unidades de área.*

Normalmente, a área de uma figura não é um número negativo, mas às vezes é conveniente usar áreas orientadas, ou seja, providas de sinal + ou - (ELON LAGES – A matemática do Ensino Médio- 2006, pág. 197).

Definiremos a área orientada do setor hiperbólico que está acima do eixo x com sinal positivo e, a área orientada do setor hiperbólico que está abaixo do eixo x, com sinal negativo. Se observarmos o ponto K poderemos tirar as seguintes conclusões:

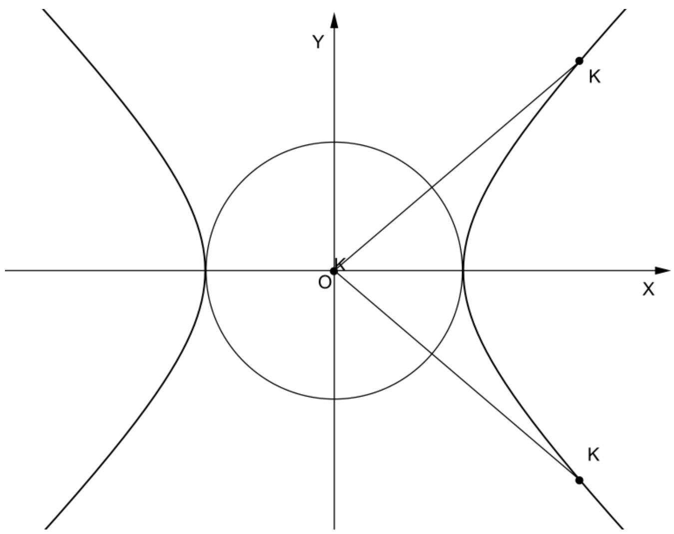

Figura 30 - Área orientada. Fonte: Autor.

I) Se o ponto K está acima do eixo das abscissas, a área do setor hiperbólico terá sinal positivo e, consequentemente, o ângulo hiperbólico definido por ele, também.

II) Se o ponto K está abaixo do eixo das abscissas, a área do setor hiperbólico terá sinal negativo e, consequentemente, o ângulo hiperbólico definido por ele também terá.

Assim, um ângulo hiperbólico, tendo medida $\pm\frac{1}{2}A(OLK)$, assumirá valores entre $(-\infty, +\infty)$.

Ainda observando a figura acima, repare que na circunferência esse mesmo ângulo estaria no intervalo $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$, porém essa unidade de medida não é utilizada na trigonometria hiperbólica.

4.2. Definição das funções hiperbólicas em paralelo às circulares

As funções hiperbólicas são definidas, de modo geral, da mesma maneira que as funções circulares, sendo que, as primeiras, são definidas a partir de uma hipérbole equilátera, enquanto que as circulares, a partir de um círculo de raio unitário.

Definidas as principais funções trigonométricas (no capítulo 2), a seguir definiremos as principais funções hiperbólicas. Para tal, consideremos a hipérbole equilátera de equação $x^2 - y^2 = 1$.

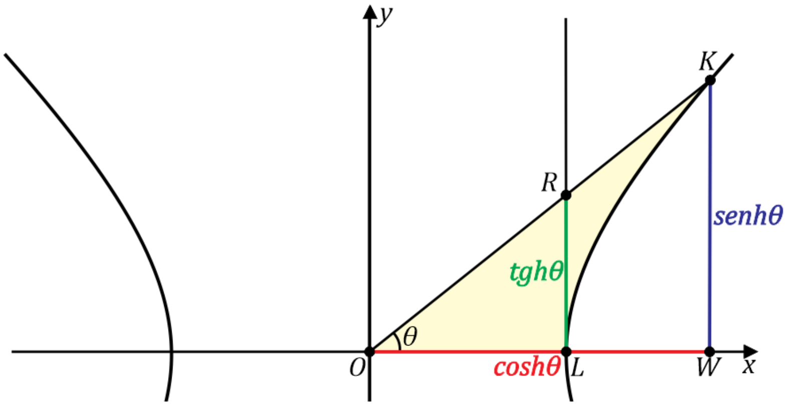

Figura 31 - Hipérbole de equação $x^2 - y^2 = 1$. Fonte: o Autor.

Seja K um ponto sobre a hipérbole equilátera de modo que o setor hiperbólico LOK tenha área medindo $\frac{\theta}{2}$ unidades de área. É importante lembrar que θ é uma forma equivalente do ângulo, embora estejam em unidades distintas. Enquanto um é dado em radianos, o outro é dado em unidades de área. Podemos dizer, então, que o ângulo $L\hat{O}K$ tem θ unidades de área. Seja, ainda, LR a reta tangente à hipérbole no ponto L.

A projeção ortogonal do segmento OK sobre o eixo y determina o seno hiperbólico do ângulo hiperbólico θ. Essa projeção tem medida igual à medida do segmento WK. A projeção ortogonal do segmento OK sobre o eixo x representa o cosseno hiperbólico do ângulo hiperbólico θ, e a distância do ponto L ao ponto R, na reta LR, representa a tangente hiperbólica do ângulo hiperbólico θ. Definimos aqui, então, o seno hiperbólico, cosseno hiperbólico e tangente hiperbólica do argumento θ.

O ponto K tem coordenadas $x = \overline{OW} = cosh\,\theta$ e $y = \overline{WK} = senh\,\theta$. Portanto, podemos definir:

$$senh\,\theta = \overline{WK}$$
$$cosh\,\theta = \overline{OW}$$

Como $K = (x, y)$ pertence à hipérbole, então:

$$x^2 - y^2 = 1$$

$$(cosh\,\theta)^2 - (senh\,\theta)^2 = 1$$

ou,

$$(26) \quad \boldsymbol{cosh^2\theta - senh^2\theta = 1}$$

(Conhecida como Relação fundamental da trigonometria hiperbólica)

Ainda na figura 31 temos, pelo caso AA, que $\Delta OLR \sim \Delta OWK$.

$$\frac{\overline{LR}}{\overline{OL}} = \frac{\overline{WK}}{\overline{OW}}$$

Como $\overline{OL} = 1$, obtemos:

$$(27) \quad \boldsymbol{tgh\,\theta = \frac{senh\,\theta}{cosh\,\theta}}$$

Analogamente à trigonometria circular, são definidos $sech\,\theta = \dfrac{1}{cosh\,\theta}$, $cossech\,\theta = \dfrac{1}{senh\,\theta}$ e $cotgh\,\theta = \dfrac{cosh\,\theta}{senh\,\theta}$.

Sabemos que $cosh^2\theta - senh^2\theta = 1$. Dividindo ambos os membros por $cosh^2\theta$, temos:

$$\frac{cosh^2\theta}{cosh^2\theta} - \frac{senh^2\theta}{cosh^2\theta} = \frac{1}{cosh^2\theta}$$

$$(28) \quad \boldsymbol{1 - tgh^2\theta = sech^2\theta}$$

Dividindo, agora, $cosh^2\theta - senh^2\theta = 1$ por $senh^2\theta$, temos:

$$\frac{cosh^2\theta}{senh^2\theta} - \frac{senh^2\theta}{senh^2\theta} = \frac{1}{senh^2\theta}$$

$$(29) \quad \boldsymbol{coth^2\theta - 1 = cossech^2\theta}$$

Observe que demos às funções hiperbólicas o mesmo tratamento dado às funções trigonométricas.

4.3. Parametrização de senh e cosh

Nesta seção vamos relacionar as funções hiperbólicas com as exponenciais e com as logarítmicas. Para tal, utilizaremos as definições de área e logaritmo natural, estudadas em Cálculo Diferencial e Integral. Apesar de algumas dessas noções não serem estudadas no ensino médio, seu resultado será de extrema importância para novas definições que estudaremos a seguir. Algumas fórmulas só serão possíveis de serem deduzidas depois dessa parametrização que apresentamos agora.

Nosso primeiro passo é comparar o gráfico da curva definida por $y = \frac{1}{2x}$ e a hipérbole equilátera de equação $x^2 - y^2 = 1$. Vamos analisar, inicialmente, as áreas de OLK e $FBLK$ na figura 32 abaixo e concluir que são iguais.

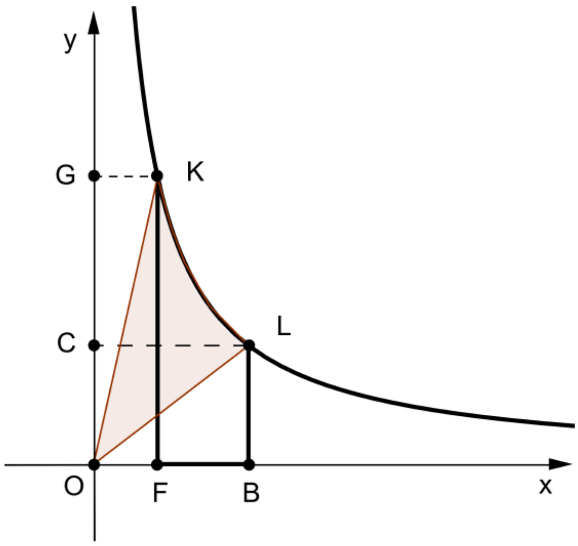

Figura 32 - Curva $y = \frac{1}{2x}$. Fonte: Autor,

Tomemos o plano cartesiano xy e nele traçamos a curva $y = \frac{1}{2x}$. Fazendo uma rotação de $\frac{\pi}{4}$, no sentido anti-horário, no sistema xy obteremos um novo sistema cartesiano XY e a hipérbole equilátera $X^2 - Y^2 = 1$, que passa a representar a curva $y = \frac{1}{2x}$ nesse novo sistema de eixos. Essa rotação de $\frac{\pi}{4}$ no sistema xy a fim de se obter o novo sistema XY, em álgebra linear, é o que chamamos de *mudança de base*.

Vamos demonstrar, então, que a curva $y = \frac{1}{2x}$ no plano xy é representada pela hipérbole equilátera $X^2 - Y^2 = 1$, no plano XY.

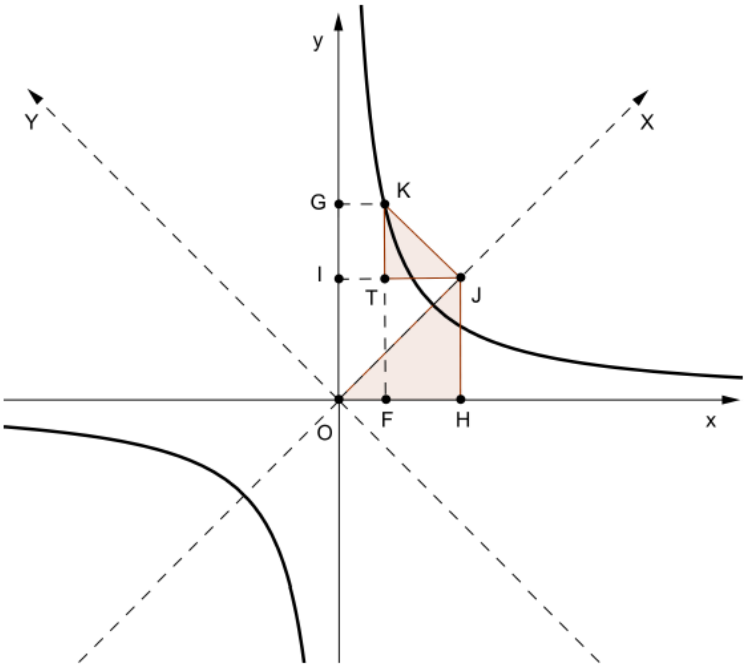

Figura 33 - Curva $y = \frac{1}{2x}$ e o sistema XY. Fonte: Autor.

Seja K um ponto qualquer sobre a curva. Suas coordenadas, em xy e em XY, serão $x = \overline{OF}$, $y = \overline{OG}$, $X = \overline{OJ}$ e $Y = \overline{KJ}$.

Como $\overline{HJ} = \overline{OI}$, pelo triângulo retângulo JHO, temos:

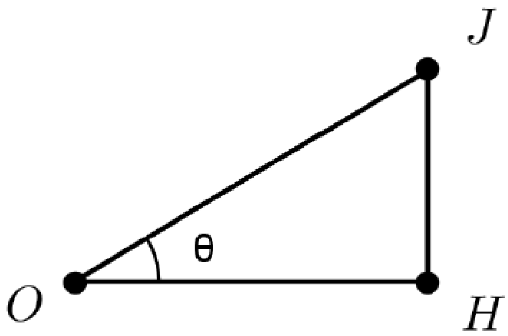

Figura 34 - Triângulo retângulo JHO, com $\theta = \frac{\pi}{4}$. Fonte: Autor

$$sen\ \theta = \frac{\overline{HJ}}{\overline{OJ}}$$

$$\overline{OI} = \overline{OJ}.sen\ \theta = \overline{OJ}.sen\frac{\pi}{4}$$

$$cos\ \theta = \frac{\overline{OH}}{\overline{OJ}}$$

$$\overline{OH} = \overline{OJ}.cos\ \theta = \overline{OJ}.cos\frac{\pi}{4}$$

Sabendo que $\overline{TJ} = \overline{FH}$ e $\overline{KT} = \overline{IG}$. Pelo triângulo retângulo KTJ, temos:

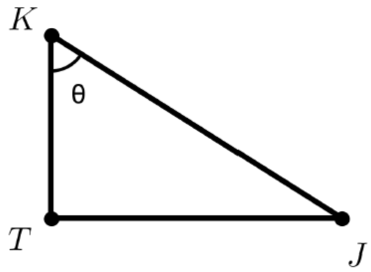

Figura 35 - Triângulo retângulo KTJ, com $\theta = \frac{\pi}{4}$. Fonte: Autor

$$sen\ \theta = \frac{\overline{FH}}{\overline{KJ}}$$

$$\overline{FH} = \overline{KJ}.sen\ \theta = \overline{KJ}.sen\frac{\pi}{4}$$

$$cos\ \theta = \frac{\overline{IG}}{\overline{KJ}}$$

$$\overline{IG} = \overline{KJ}.cos\ \theta = \overline{KJ}.cos\frac{\pi}{4}$$

Pela figura 33,

$$x = \overline{OF} = \overline{OH} - \overline{FH}$$

então,

$$x = \overline{OF} = \overline{OH} - \overline{FH} = \overline{OJ}.cos\frac{\pi}{4} - \overline{KJ}.sen\frac{\pi}{4}$$

Fazendo $X = \overline{OJ}$ e $Y = \overline{KJ}$, obtemos:

$$x = \overline{OF} = \overline{OH} - \overline{FH} = \overline{OJ}.cos\frac{\pi}{4} - \overline{KJ}.sen\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.(X - Y)$$

Do mesmo modo, temos que

$$y = \overline{OG} = \overline{OI} + \overline{IG}$$

então,

$$y = \overline{OG} = \overline{OI} + \overline{IG} = \overline{OJ}.sen\frac{\pi}{4} + \overline{KJ}.cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.(X + Y)$$

Logo,

$$y = \frac{1}{2x}$$

$$\frac{1}{2} = xy$$

$$\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.(X - Y).\frac{\sqrt{2}}{2}.(X + Y)$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.(X^2 - Y^2)$$

$$X^2 - Y^2 = 1$$

Portanto, a curva $y = \frac{1}{2x}$ corresponde à hipérbole $x^2 - y^2 = 1$.

Tomemos, agora, dois pontos K e W na curva $y = \frac{1}{2x}$, no sistema xy (veja figura 36).

O ponto K terá coordenadas $x = \overline{OF}$ e $y = \overline{OG}$ e W terá coordenadas $x = \overline{OR}$ e $y = \overline{OS}$.

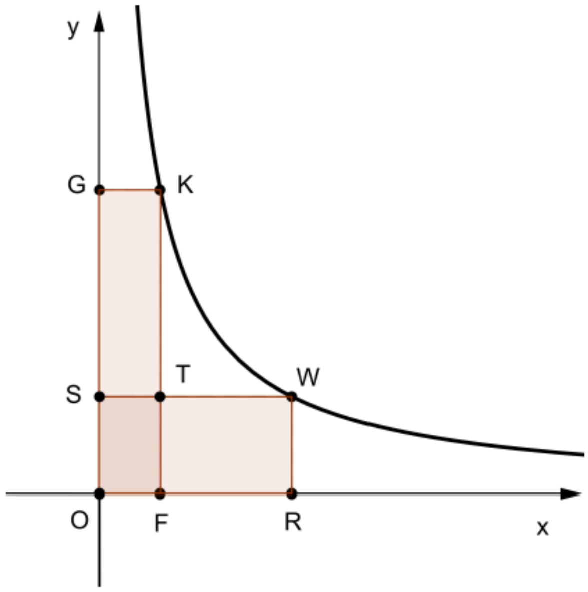

Figura 36 - Curva $y = \frac{1}{2x}$. Fonte: Autor

A área do retângulo $OFKG$ é dada por:

$$A_{OFKG} = \overline{OF}.\overline{OG} = xy = \frac{1}{2}$$

A área do retângulo $ORWS$ é dada por:

$$A_{ORWS} = \overline{OR}.\overline{OS} = xy = \frac{1}{2}$$

Logo,

$$A_{OFKG} = A_{ORWS}$$

Logo,

$$A_{STKG} = A_{FRWT}$$

Para que possamos calcular a área do setor hiperbólico OLK, rotacionaremos a figura em $\frac{\pi}{4}$ tomando a hipérbole equilátera $X^2 - Y^2 = 1$.

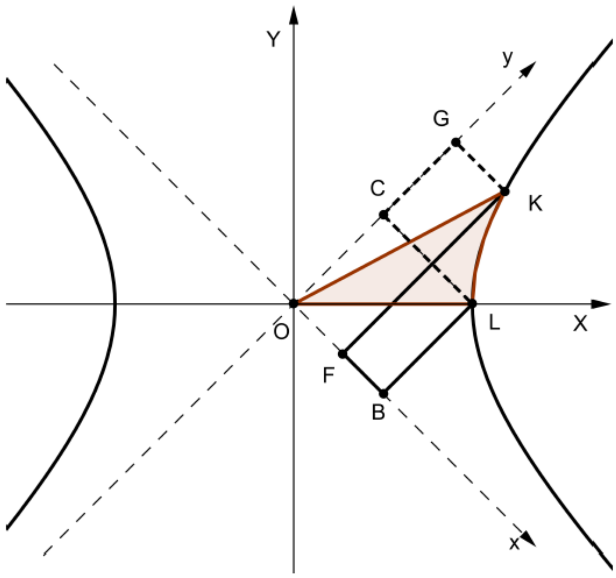

Figura 37 - Curva $X^2 - Y^2 = 1$. Fonte: Autor

Observe que:

$$A_{OFK} = \frac{1}{2} A_{OFKG} = \frac{1}{2} A_{OBLC} = A_{OBL}$$

$$A_{OBLK} = A_{OFK} + A_{FBLK} = A_{OLK} + A_{OBL}$$

Mas,

$$A_{OFK} = A_{OBL}$$

Então,

$$A_{OLK} = A_{FBLK}$$

Com raciocínio análogo, concluímos que:

$$A_{OLK} = A_{GCLK} = A_{FBLK}$$

Como podemos notar, para calcular a área do setor hiperbólico OLK, basta que calculemos a área de $FBLK$ e agora sim, podemos parametrizar as funções senh e cosh.

Definição 4.3.1.: *O logaritmo natural de x é denotado por ln x e definido pela integral*

$$lnx = \left| \int_1^x \frac{1}{t} dt \right|$$

Voltando aos eixos x, y e à curva $y = \dfrac{1}{2x}$ (figura 37), a área $FBLK$ é a região plana limitada superiormente pelo gráfico da curva $y = \dfrac{1}{2x}$, inferiormente pela reta $y = 0$ e lateralmente pelas retas $x = FK$ e $x = BL$.

Então:

$$A_{FBLK} = \frac{1}{2} ln|x| = \int_{FK}^{BL} \frac{1}{2x} dx =$$

$$= \frac{1}{2}. |lnBL - lnFK| =$$

$$= \frac{1}{2} \left| ln \frac{BL}{FK} \right| =$$

A partir daí podemos fazer a seguinte análise:

Se K estiver à esquerda de L, então:

$A_{FBLK} = \dfrac{1}{2} . ln \dfrac{BL}{FK}$ e $A_{GCLK} = \dfrac{1}{2} . ln \dfrac{GK}{CL}$

E se K estiver à direita de L, então:

$A_{FBLK} = \dfrac{1}{2} . ln \dfrac{FK}{BL}$ e $A_{GCLK} = \dfrac{1}{2} . ln \dfrac{CL}{GK}$

Seja o ponto K sobre a hipérbole $X^2 - Y^2 = 1$ de tal forma que a área do setor hiperbólico gerado por ele seja $\frac{\theta}{2}$ unidades de área. Dessa forma, $L\hat{O}K$ será igual a θ.

No plano XY o ponto K tem coordenadas $X = \overline{OW} = cosh\,\theta$ e $Y = \overline{WK} = senh\,\theta$ e, no plano xy tem coordenadas $x = \overline{OF}$ e $y = \overline{OG}$.

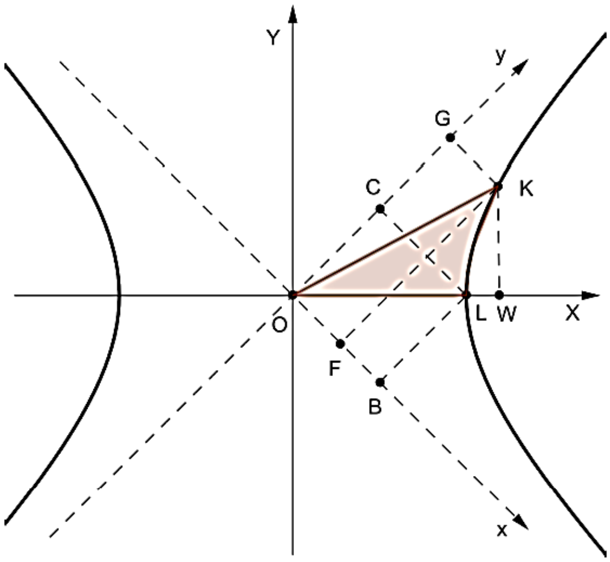

Figura 38 – Hipérbole $X^2 - Y^2 = 1$. Fonte: Autor

Das igualdades obtidas na seção 3.3, temos:

$$\overline{OF} = x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y) = \frac{\sqrt{2}}{2}(cosh\,\theta - senh\,\theta)$$

$$\overline{OG} = y = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y) = \frac{\sqrt{2}}{2}(cosh\,\theta + senh\,\theta)$$

Dadas as coordenadas do ponto L, ou seja, $X = 1, Y = 0$ e $x = \overline{OB}, y = \overline{OC}$, e lembrando que $\overline{OB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\overline{OC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, obtemos:

$$A_{FBLK} = \frac{1}{2}.ln\frac{OB}{OF} = \frac{1}{2}ln\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}(cosh\,\theta - senh\,\theta)} = -\frac{1}{2}ln(cosh\,\theta - senh\,\theta)$$

e,

$$A_{GCLK} = \frac{1}{2}ln\frac{OG}{OC} = \frac{1}{2}ln\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(cosh\,\theta + senh\,\theta)}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2}ln(cosh\,\theta + senh\,\theta)$$

Já vimos que o ângulo hiperbólico é igual ao dobro do valor numérico da área do setor hiperbólico, então $A_{OLK} = \frac{\theta}{2}$. Como $A_{OLK} = A_{FBLK}$, temos:

$$\frac{\theta}{2} = -\frac{1}{2}ln(cosh\,\theta - senh\,\theta)$$

E como $A_{OLK} = A_{GCLK}$, temos:

$$\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}ln(cosh\,\theta + senh\,\theta)$$

suprimindo o termo $\frac{1}{2}$ e aplicando a exponencial em ambos os membros, obtemos

$$e^{-\theta} = cosh\,\theta - senh\,\theta$$

$$e^{\theta} = cosh\,\theta + senh\,\theta$$

Somando as duas equações, temos:

$$cosh\,\theta = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2}$$

E subtraindo, obtemos:

$$senh\,\theta = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}$$

A partir daí, observemos que:

$$senh(-\theta) = \frac{e^{-\theta} - e^{-(-\theta)}}{2} = \frac{e^{-\theta} - e^{\theta}}{2} = -\left(\frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}\right) = -senh\,\theta$$

$$cosh(-\theta) = \frac{e^{-\theta} + e^{-(-\theta)}}{2} = \frac{e^{-\theta} + e^{\theta}}{2} = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2} = cosh\,\theta$$

$$tgh\,\theta = \frac{senh\,\theta}{cosh\,\theta} = \frac{\frac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2}}{\frac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2}} = \frac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{e^{\theta}+e^{-\theta}} = \frac{e^{-\theta}(e^{2\theta}-1)}{e^{-\theta}(e^{2\theta}+1)} = \frac{e^{2\theta}-1}{e^{2\theta}+1}$$

$$cotgh\,\theta = \frac{1}{tgh\,\theta} = \frac{e^{2\theta}+1}{e^{2\theta}-1}$$

$$sech\,\theta = \frac{1}{cosh\,\theta} = \frac{2}{e^{\theta} + e^{-\theta}}$$

$$cossech\,\theta = \frac{1}{senh\,\theta} = \frac{2}{e^{\theta} - e^{-\theta}}$$

Podemos, também, utilizar a forma parametrizada de $senh\,\theta$ e $cosh\,\theta$ para verificar a relação fundamental da trigonometria hiperbólica:

$$cosh^2\theta - senh^2\theta =$$

$$= \left(\frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{(e^{2\theta} + 2.e^{\theta}.e^{-\theta} + e^{-2\theta})}{4} - \frac{\left(e^{2\theta} - 2.e^{\theta}.e^{-\theta} + e^{-2\theta}\right)}{4} =$$

$$= \frac{e^{2\theta} + 2.e^{0} + e^{-2\theta} - e^{2\theta} + 2.e^{0} - e^{-2\theta}}{4} =$$

$$= \frac{e^{2\theta} - e^{2\theta} + e^{-2\theta} - e^{-2\theta} - e^{2\theta} + 2.1 + 2.1}{4} =$$

$$= \frac{2.1 + 2.1}{4} =$$

$$= 1$$

Então,

$$cosh^2\theta - senh^2\theta = 1$$

4.4. Adição e subtração de arcos

Definidos e parametrizados senh e cosh podemos iniciar o estudo das fórmulas de adição e subtração de arcos. As primeiras fórmulas serão obtidas utilizando as formas parametrizadas de senh e cosh, porém a maior parte das fórmulas serão provadas com a parametrização apenas num capítulo à parte, haja vista que se enquadra na forma com que esse tema será estudado e aplicado ao ensino médio.

Nesse capítulo, demonstraremos que:

- $\boldsymbol{senh(\beta + \theta) = senh\,\beta.cosh\,\theta + senh\,\theta.\cosh\beta}$
- $\boldsymbol{senh(\beta - \theta) = senh\,\beta.cosh\,\theta - senh\,\theta.\cosh\beta}$
- $\boldsymbol{cosh(\beta + \theta) = cosh\,\beta.cosh\,\theta + senh\,\beta.senh\,\theta}$
- $\boldsymbol{cosh(\beta - \theta) = cosh\,\beta.cosh\,\theta - senh\,\beta.senh\,\theta}$
- $\boldsymbol{tgh(\beta + \theta) = \frac{tgh\,\beta + tgh\,\theta}{1 + tgh\,\beta.tgh\,\theta}}$
- $\boldsymbol{tgh(\beta - \theta) = \frac{tgh\,\beta - tgh\,\theta}{1 - tgh\,\beta.tgh\,\theta}}$

No final do capítulo 3, item 3.3 vimos que

$$(30) \quad e^{-\alpha} = cosh\,\alpha - senh\,\alpha$$

$$(31) \quad e^{\alpha} = cosh\,\alpha + senh\,\alpha$$

Em $senh\,\alpha = \frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2}$, tomemos $\alpha = \beta + \theta$; Logo:

$$senh(\beta+\theta) = \frac{e^{(\beta+\theta)} - e^{-(\beta+\theta)}}{2} = \frac{e^{\beta}.e^{\theta} - e^{-\beta}.e^{-\theta}}{2}$$

Utilizando as igualdades (30) e (31) e substituindo, obtemos:

$$senh(\beta+\theta) =$$
$$\frac{(cosh\,\beta + senh\,\beta).(cosh\,\theta + senh\,\theta) - (cosh\,\beta - senh\,\beta).(cosh\,\theta - senh\,\theta)}{2} =$$

Efetuando os devidos produtos e reduzindo os termos semelhantes,

$$senh(\beta+\theta) = \frac{2.senh\,\beta.cosh\,\theta + 2.senh\,\theta.cosh\,\beta}{2}$$

$$(32) \quad \boldsymbol{senh(\beta+\theta) = senh\,\beta.cosh\,\theta + senh\,\theta.cosh\,\beta}$$

Como $senh(-\theta) = -senh\,\theta$ e $cosh(-\theta) = cosh\,\theta$ e, utilizando a fórmula da adição de arcos, obtemos:

$$senh(\beta-\theta) = senh\big(\beta+(-\theta)\big) = senh\,\beta.cosh(-\theta) + senh(-\theta).cosh\,\beta$$

$$senh(\beta-\theta) = senh\,\beta.cosh\,\theta + (-senh\theta).cosh\,\beta$$

$$(33) \quad \boldsymbol{senh(\beta-\theta) = senh\,\beta.cosh\,\theta - senh\,\theta.cosh\,\beta}$$

Para a adição e subtração de arcos na função $cosh$ o procedimento é análogo ao de $senh$, temos:

$$cosh\,\alpha = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}$$

Tomando $\alpha = \beta + \theta$

$$cosh(\beta + \theta) = \frac{e^{(\beta+\theta)} + e^{-(\beta+\theta)}}{2} = \frac{e^{\beta}.e^{\theta} + e^{-\beta}.e^{-\theta}}{2}$$

Utilizando as igualdades (30) e (31) e substituindo, obtemos:

$$cosh(\beta + \theta) =$$

$$\frac{(cosh\,\beta + senh\,\beta).(cosh\,\theta + senh\,\theta) + (cosh\,\beta - senh\,\beta).(cosh\,\theta - senh\,\theta)}{2} =$$

Efetuando os devidos produtos e reduzindo os termos semelhantes,

$$cosh(\beta + \theta) = \frac{2.cosh\,\beta.cosh\,\theta + 2.senh\,\beta.senh\,\theta}{2}$$

$$(34) \quad \boldsymbol{cosh(\beta + \theta) = cosh\,\beta.cosh\,\theta + senh\,\beta.senh\,\theta}$$

Para a subtração de arcos,

$$cosh(\beta - \theta) = cosh\big(\beta + (-\theta)\big) = cosh\,\beta.cosh(-\theta) + senh\,\beta.senh(-\theta)$$

$$cosh(\beta - \theta) = cosh\,\beta.cosh\,\theta + senh\,\beta.(-senh\,\theta)$$

$$(35) \quad \boldsymbol{cosh(\beta - \theta) = cosh\,\beta.cosh\,\theta - senh\,\beta.senh\,\theta}$$

Utilizando as igualdades (32), (33), (34) e (35) podemos obter as fórmulas para adição e subtração de arcos para tgh.

$$tgh(\beta+\theta)=\frac{senh(\beta+\theta)}{cosh(\beta+\theta)}=\frac{senh\,\beta.cosh\,\theta+senh\,\theta.cosh\,\beta}{cosh\,\beta.cosh\,\theta+senh\,\beta.senh\,\theta}$$

Dividindo numerador e denominador por $cosh\,\beta.cosh\,\theta$,

$$tgh(\beta+\theta)=\frac{\frac{senh\,\beta.cosh\,\theta}{cosh\,\beta.cosh\,\theta}+\frac{senh\,\theta.cosh\,\beta}{cosh\,\beta.cosh\,\theta}}{\frac{cosh\,\beta.cosh\,\theta}{cosh\,\beta.cosh\,\theta}+\frac{senh\,\beta.senh\,\theta}{cosh\,\beta.cosh\,\theta}}$$

$$tgh(\beta+\theta)=\frac{\frac{senh\,\beta}{cosh\,\beta}+\frac{senh\,\theta}{cosh\,\theta}}{1+\frac{senh\,\beta.senh\,\theta}{cosh\,\beta.cosh\,\theta}}$$

$$(36)\ \boldsymbol{tgh(\beta+\theta)==\frac{tgh\,\beta+tgh\,\theta}{1+tgh\,\beta.tgh\,\theta}}$$

Demonstrando a subtração de arcos,

$$tgh(\beta-\theta)=\frac{senh(\beta-\theta)}{cosh(\beta-\theta)}=\frac{senh\,\beta.cosh\,\theta-senh\,\theta.cosh\,\beta}{cosh\,\beta.cosh\,\theta-senh\,\beta.senh\,\theta}$$

Dividindo numerador e denominador por $cosh\,\beta.cosh\,\theta$,

$$tgh(\beta-\theta)=\frac{\frac{senh\,\beta.cosh\,\theta}{cosh\,\beta.cosh\,\theta}-\frac{senh\,\theta.cosh\,\beta}{cosh\,\beta.cosh\,\theta}}{\frac{cosh\,\beta.cosh\,\theta}{cosh\,\beta.cosh\,\theta}-\frac{senh\,\beta.senh\,\theta}{cosh\,\beta.cosh\,\theta}}$$

$$tgh(\beta-\theta)=\frac{\frac{senh\,\beta}{cosh\,\beta}-\frac{senh\,\theta}{cosh\,\theta}}{1-\frac{senh\,\beta.senh\,\theta}{cosh\,\beta.cosh\,\theta}}$$

$$(37)\ \boldsymbol{tgh(\beta-\theta)=\frac{tgh\,\beta-tgh\,\theta}{1-tgh\,\beta.tgh\,\theta}}$$

4.5. Fórmulas para arco duplo, arco triplo e bissecção de arcos

Conhecidas as fórmulas de adição e subtração de arcos, obtemos as fórmulas de arco duplo e arco triplo.

Para obtermos as fórmulas de arco duplo, tomemos $\alpha=\beta$. Assim, da igualdade (32),

$$senh(2\alpha)=senh(\alpha+\alpha)=senh\,\alpha.cosh\,\alpha+senh\,\alpha.cosh\,\alpha$$

$$(38)\quad \boldsymbol{senh(2\alpha)=2.senh\,\alpha.cosh\,\alpha}$$

Pela igualdade (34),

$$cosh\,2\alpha=cosh(\alpha+\alpha)=cosh\,\alpha.cosh\,\alpha+senh\,\alpha.senh\,\alpha$$

$$cosh\,2\alpha=cosh^2\alpha+senh^2\alpha$$

Como $cosh^2\alpha-senh^2\alpha=1$,

$$cosh^2\alpha=1+senh^2\alpha$$

ou

$$senh^2\alpha = cosh^2\alpha - 1$$

Substituindo $cosh^2\alpha$ chegamos em

$$(39) \quad \boldsymbol{cosh\, 2\alpha = 1 + 2.senh^2\alpha}$$

E substituindo $senh^2\alpha$ obtemos

$$(40) \quad \boldsymbol{cosh\, 2\alpha = 2.cosh^2\alpha - 1}$$

Fórmula da tangente do arco duplo:

$$tgh\, 2\alpha = tgh(\alpha + \alpha) = \frac{tgh\,\alpha + tgh\,\alpha}{1 + tgh\,\alpha.tgh\,\alpha}$$

$$(41) \quad \boldsymbol{tgh\, 2\alpha = \frac{2.tgh\,\alpha}{1 + tgh^2\alpha}}$$

Para as fórmulas de arco triplo, basta tomarmos $3\alpha = 2\alpha + \alpha$.

$$senh\, 3\alpha = senh(2\alpha + \alpha) = senh\, 2\alpha\, .cosh\,\alpha \; + \; senh\,\alpha.cosh\, 2\alpha$$

Substituindo $senh\, 2\alpha$ por $2.senh\,\alpha.cosh\,\alpha$ e $cosh\, 2\alpha\, por\, 1 + 2senh^2\alpha$, temos,

$$senh\, 3\alpha = (2senh\,\alpha.cosh\,\alpha)\, cosh\,\alpha \; + \; senh\,\alpha\,(1 + 2.senh^2\alpha)$$

$$senh\, 3\alpha = 2.senh\,\alpha.cosh^2\alpha + senh\,\alpha + 2.senh^3\alpha$$

Substituindo $cosh^2\alpha$ por $1 + senh^2\alpha$, temos

$$senh\, 3\alpha = 2.senh\,\alpha.(1 + senh^2\alpha) + senh\,\alpha + 2.senh^3\alpha$$

$$senh\ 3\alpha = 2.senh\ \alpha + 2.senh^3\alpha + senh\ \alpha + 2.senh^3\alpha$$

$$(42) \quad \boldsymbol{senh\ 3\alpha = 4.senh^3\alpha + 3.senh\ \alpha}$$

Para $cosh\ 3\alpha$,

$$cosh\ 3\alpha = cosh(2\alpha + \alpha) = cosh\ 2\alpha.cosh\ \alpha + senh\ 2\alpha.senh\ \alpha$$

Substituindo $cosh\ 2\alpha$ por $2.cosh^2\alpha - 1$ e $senh\ 2\alpha$ por $2.senh\ \alpha.cosh\ \alpha$. temos,

$$cosh\ 3\alpha = (2.cosh^2\alpha - 1).cosh\ \alpha + (2.senh\ \alpha.cosh\ \alpha).senh\ \alpha$$

$$cosh\ 3\alpha = 2.cosh^3\alpha - cosh\ \alpha + 2.senh^2\alpha.cosh\ \alpha$$

Substituindo $senh^2\alpha$ por $cosh^2\alpha - 1$:

$$cosh\ 3\alpha\ =\ 2\ cosh^3\ \alpha\ -\ cosh\ \alpha\ +\ 2\ (cosh^2\ \alpha - 1)\ cosh\ \alpha$$

$$cosh\ 3\alpha\ =\ 2\ cosh^3\ \alpha\ -\ cosh\ \alpha\ +\ 2\ cosh^3\ \alpha - 2\ cosh\ \alpha$$

$$(43) \quad \boldsymbol{cosh\ 3\alpha = 4.cosh^3\alpha + 3.cosh\ \alpha}$$

Finalizando o capítulo, vamos obter as fórmulas para bissecção de arcos (arco metade).

Da igualdade (39) e usando $\alpha = \dfrac{\beta}{2}$, temos:

$$cosh\ 2\left(\frac{\beta}{2}\right) = 1 + 2.senh^2\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

$$cosh\ \beta = 1 + 2.senh^2\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

Fazendo as operações necessárias,

$$(44) \quad \boldsymbol{senh\left(\frac{\beta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{cosh\,\beta - 1}{2}}}$$

Analogamente, pela igualdade (40).

$$cosh\,2\left(\frac{\beta}{2}\right) = 2.cosh^2\left(\frac{\beta}{2}\right) - 1$$

$$cosh\,\beta = 2.cosh^2\left(\frac{\beta}{2}\right) - 1$$

Após as operações básicas,

$$(45) \quad \boldsymbol{cosh\left(\frac{\beta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{cosh\,\beta + 1}{2}}}$$

Considerando que $tgh\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{senh\left(\frac{\beta}{2}\right)}{cosh\left(\frac{\beta}{2}\right)}$ e substituindo as igualdades (44) e (45),

$$(46) \quad \boldsymbol{tgh\left(\frac{\beta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{cosh\,\beta - 1}{cosh\,\beta + 1}}}$$

4.6. Transformação de soma em produto (prostaférese)

Na obtenção dessas transformações de soma em produto, vamos retomar as fórmulas (32), (33), (34) e (35).

$$(32) \quad senh(\beta + \theta) = senh\,\beta.cosh\,\theta + senh\,\theta.cosh\,\beta$$

$$(33) \quad senh(\beta - \theta) = senh\,\beta.cosh\,\theta - senh\,\theta.cosh\,\beta$$

$$(34) \quad cosh(\beta + \theta) = cosh\,\beta.cosh\,\theta + senh\,\beta.senh\,\theta$$

$$(35) \quad cosh(\beta - \theta) = cosh\,\beta.cosh\,\theta - senh\,\beta.senh\,\theta$$

Somando as igualdades (32) e (33),

$$senh(\beta + \theta) + senh(\beta - \theta) = 2.senh\,\beta.cosh\,\theta$$

Subtraindo (33) de (32),

$$senh(\beta + \theta) - senh(\beta - \theta) = 2.senh\,\theta.cosh\,\beta$$

Somando (34) e (35),

$$cosh(\beta + \theta) + cosh(\beta - \theta) = 2.cosh\,\alpha.cosh\,\beta$$

Subtraindo (35) de (34),

$$cosh(\beta + \theta) - cosh(\beta - \theta) = 2.senh\,\alpha.senh\,\beta$$

Para todos esses casos, vamos considerar

$$\begin{cases} \beta + \theta = \alpha \\ \beta - \theta = \gamma \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, chegamos que

$$\beta = \frac{\alpha+\gamma}{2} \text{ e } \theta = \frac{\alpha-\gamma}{2}$$

e substituindo nas igualdades anteriores obtemos as fórmulas:

$$(47) \quad senh\,\alpha + senh\,\gamma = 2.senh\left(\frac{\alpha + \gamma}{2}\right).cosh\left(\frac{\alpha - \gamma}{2}\right)$$

$$(48) \quad senh\,\alpha - senh\,\gamma = 2.senh\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right).cosh\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)$$

$$(49) \quad cosh\,\alpha + cosh\,\gamma = 2.cosh\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right).cosh\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)$$

$$(50) \quad cosh\,\alpha - cosh\,\gamma = 2.senh\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right).senh\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)$$

4.7. Funções Hiperbólicas e seus gráficos

De acordo com o que já vimos, as funções hiperbólicas podem ser definidas, a partir da extensão real de ângulo hiperbólico. As parametrizações obtidas para o seno e cosseno hiperbólico, confirmam que de fato podemos considerar as funções $senh\ x$ e $cosh\ x$, definidas em toda reta. A função seno hiperbólico é uma função ímpar, onde o domínio é o conjunto dos números reais, assim como o conjunto imagem. A função cosseno hiperbólico é uma função par, definida em $\mathbb{R}$, como o domínio sendo o conjunto dos números reais e a imagem, o intervalo $[1, +\infty)$.

Existem inúmeros métodos de se obter os gráficos das funções seno hiperbólico e cosseno hiperbólico. Um desses métodos consiste em esboçar, separadamente, os gráficos das funções exponenciais $y = \frac{e^x}{2}$ e $y = \frac{e^{-x}}{2}$ e somam-se ou subtraem-se as coordenadas y correspondentes. Esse método é chamado de adição de ordenadas. Nossa abordagem será diferente. Esboçaremos o gráfico a partir do comportamento da função, fazendo uso das propriedades da derivada primeira, derivada segunda e limites no infinito. O conceito de derivada está ligado ao problema de traçar uma reta tangente a uma curva. A integral, por sua vez, está ligada ao problema de determinar áreas de uma figura qualquer.

Na seção 4.8. apresentamos algumas derivadas e antiderivadas que serão úteis para a construção dos gráficos.

Considere a relação que representa a função do seno hiperbólico:

$$senh = \left\{(x, y): y = senh\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right\}$$

1. $senh(0) = 0$

2. $senh(-x) = -senh$ (x). Então $y = senh\,(x)$ é uma função ímpar. Logo, se conhecermos seu gráfico para $x > 0$, basta tomarmos o simétrico em relação à origem para completa-lo para $x < 0$.

3. $\frac{d}{dx}\big(senh\, x\big) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = cosh\, x > 0$ para todo x (como veremos logo a seguir), ou seja, como a primeira derivada é maior que zero para todos os valores do domínio, a função $y = senh\, x$ é dita estritamente crescente. Lembrando que a primeira derivada está relacionada ao crescimento ou decrescimento da função.

4. $\frac{d^2}{dx^2}\big(senh\, x\big) = senh\, x$. A segunda derivada nos fornece a concavidade da função. Se $x > 0$, então $senh\, x > 0$ e, se $x < 0$, então $senh\, x < 0$, portanto $y = senh\, x$ é côncavo para cima quando $x > 0$ e côncavo para baixo quando $x < 0$, e 0 é o ponto de inflexão.

5. $lim_{x \to \infty} senh\, x = lim_{x \to \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = +\infty$ e $lim_{x \to -\infty} senh\, x = lim_{x \to -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\infty$ ou seja, a imagem da função $y = senh\, x$ é todo o intervalo $(-\infty, +\infty)$.

6. Como $e^x > 0$ e $e^{-x} > 0$ para todo x, então $-e^{-x} < e^x - e^{-x} < e^x$. Logo $-\frac{e^{-x}}{2} < senh\,x < \frac{e^x}{2}$.

7. $lim_{x\to\infty}(senh\,x - \frac{e^x}{2}) = lim_{x\to\infty}(-\frac{e^{-x}}{2}) = 0^-$ e $lim_{x\to-\infty}(senh\,x + \frac{e^{-x}}{2}) = lim_{x\to-\infty}(\frac{e^{-x}}{2}) = 0^+$.

Pelas propriedades observadas, temos que: $senh\,x$ se aproxima de $\frac{e^x}{2}$ quando x cresce, vindo por baixo, e se aproxima de $-\frac{e^{-x}}{2}$ quando x decresce, vindo por cima.

O gráfico a seguir representa as funções $y = senh\,x$, $y = \frac{e^x}{2}$ e $y = -\frac{e^x}{2}$.

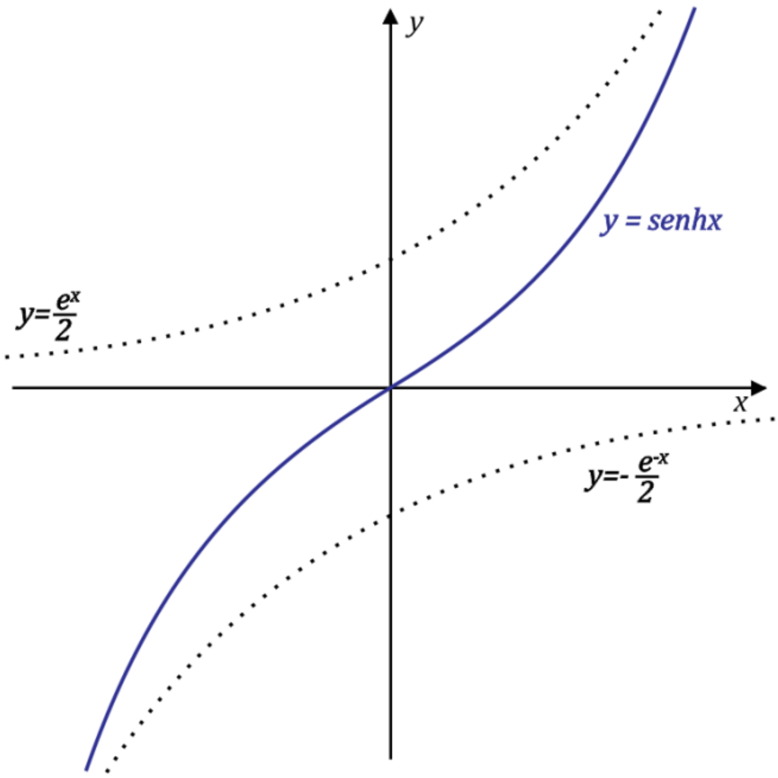

Figura 39 - Seno Hiperbólico. Fonte: Autor.

Considere a relação que representa a função cosseno hiperbólico:

$$cosh = \left\{(x, y): y = cosh\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\right\}$$

Temos:

1. $cosh(0) = 1$

2. $cosh(-x) = cosh(x)$, isto é, $y = cosh\,x$ é uma função par. Assim, o gráfico é simétrico em relação ao eixo y.

3. $\frac{d}{dx}\left(cosh\,x\right) = senh\,x > 0$, se $x > 0$ e $\frac{d}{dx}\left(cosh\,x\right) = senh\,x < 0$ se $x < 0$, portanto, $y = cosh\,x$ é decrescente se $x < 0$, crescente se $x > 0$ e tem um mínimo global em $x = 0$. Logo, $cosh\,x \geq 1$.

4. $\frac{d^2}{dx^2}\left(cosh\,x\right) = cosh\,x \geq 1$, e logo $y = cosh\,x$ é sempre côncavo para cima.

5. $lim_{x\to+\infty} cosh\,x = lim_{x\to-\infty} cosh\,x = +\infty$, ou seja, a imagem da função $y = cosh\,x$ é o intervalo $[-1, +\infty)$.

6. Como $e^x > 0$ e $e^{-x} > 0$ para todo x, então $-e^{-x} < e^x - e^{-x} < e^x$. Logo $-\frac{e^{-x}}{2} < senh\,x < \frac{e^x}{2}$.

7. $lim_{x\to\infty}(cosh\,x - \frac{e^x}{2}) = lim_{x\to\infty}(\frac{e^{-x}}{2}) = 0^+$ e $lim_{x\to-\infty}(cosh\,x - \frac{e^{-x}}{2}) = lim_{x\to-\infty}(\frac{e^x}{2}) = 0^+$.

Pelas propriedades observadas, temos que: $cosh\, x$ se aproxima de $\frac{e^x}{2}$ quando x cresce e se aproxima de $-\frac{e^{-x}}{2}$ quando x decresce, mas é sempre maior que ambas.

O gráfico a seguir representa as funções $y = cosh\, x$, $y = \frac{e^x}{2}$ e $y = -\frac{e^x}{2}$.

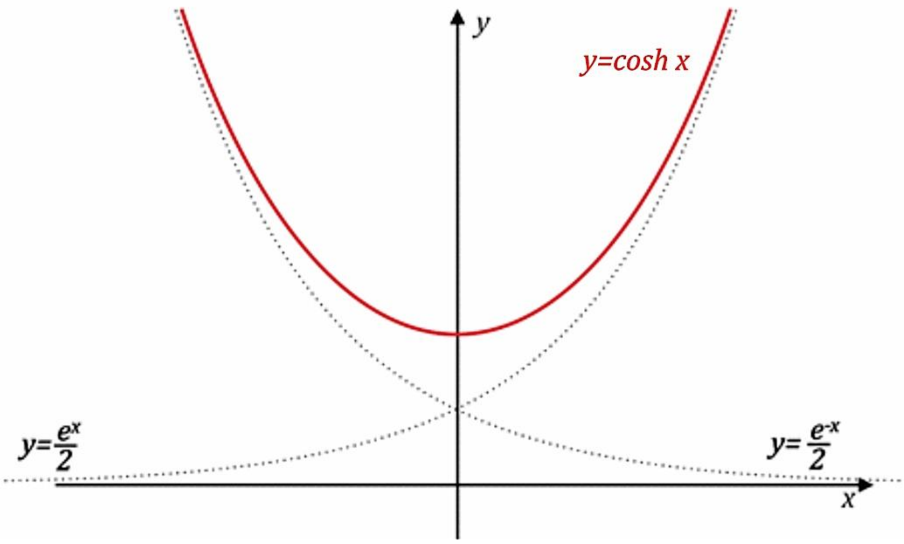

Figura 40 - Cosseno Hiperbólico. Fonte: Autor

Tomemos agora a forma parametrizada da tangente hiperbólica e seja $f(x) = tgh\, x$. Queremos esboçar o gráfico de $f(x)$.

$$f(x) = tgh\, x = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

Observe que como $e^{2x} + 1 \neq 0,\ \forall x \in R$, então $D(f) = R$.

Assíntotas horizontais e verticais

$lim_{x\to-\infty} tgh(x) = lim_{x\to-\infty} \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \frac{0-1}{0+1} = -1$. Então $y = -1$ é assíntota horizontal.

$$lim_{x\to+\infty}tgh(x) = lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\overrightarrow{R. deL'Hôpital} = lim_{x\to+\infty}\frac{(e^{2x}-1)^2}{(e^{2x}+1)^2} =$$

$lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{2x}}{2e^{2x}} = lim_{x\to+\infty}1 = 1$. Então $y = 1$ é assíntota horizontal.

Como a função é contínua em R, então não existe assíntota vertical.

Observe que, para $x = 0$, temos $tgh\ 0 = 0$ e para $y = 0$, temos $x = 0$. Então o ponto $(0{,}0)$ é ponto de intersecção do gráfico com os eixos x e y.Como a derivada primeira de $f(x)$ determina onde $f(x)$ é crescente e/ou decrescente, então:

$$[tgh\ x]' = sech^2(x)$$

$$[tgh\ x]' = \left(\frac{2}{e^{\theta} + e^{-\theta}}\right)^2$$

$$[tgh\ x]' = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2}$$

Portanto, como $\frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} > 0$ para todo x, então $f(x) = tgh\ x$ é crescente no intervalo $(-\infty; +\infty)$.

Precisamos determinar a derivada segunda de $f(x)$.

$$f"(x) = \left[\frac{4e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2}\right]'$$

$$f"(x) = \frac{8e^{2x}.(1 - e^{2x})}{(e^{2x} + 1)^3}$$

Observe que $8e^{2x} > 0$ e $(e^{2x} + 1)^3 > 0$ para todo x, então basta que analisemos $(1 - e^{2x})$.

$$1 - e^{2x} < 0\ \leftrightarrow x > 0$$

e

$$1 - e^{2x} > 0 \leftrightarrow x < 0$$

A função apresenta concavidade voltada para cima quando $x < 0$ e concavidade voltada para baixo quando $x > 0$, e $(0,0)$ é ponto de inflexão, pois $f(0) = tgh(0) = 0$.

Utilizando essas informações já podemos esboçar o gráfico de $f(x) = tgh\ x$.

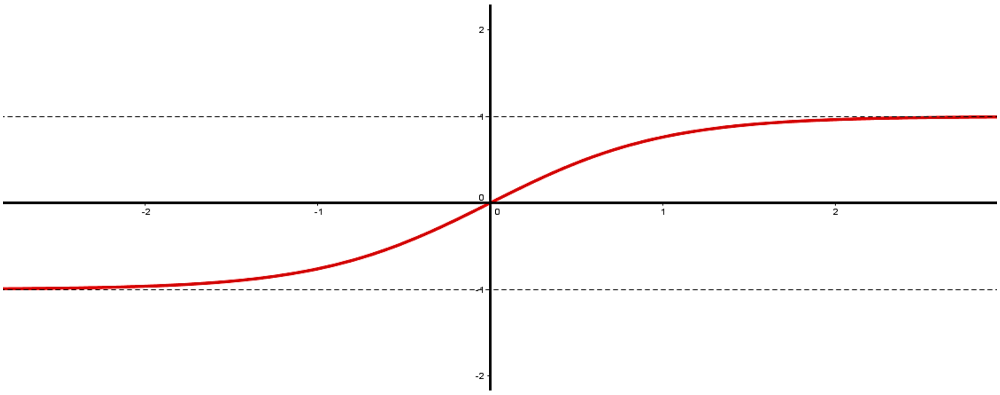

Figura 41 - Gráfico de $\mathrm{f(x)=tgh(x)}$. Fonte: Autor.

A seguir, os gráficos de $sech$, $cosh$ e $cotgh$.

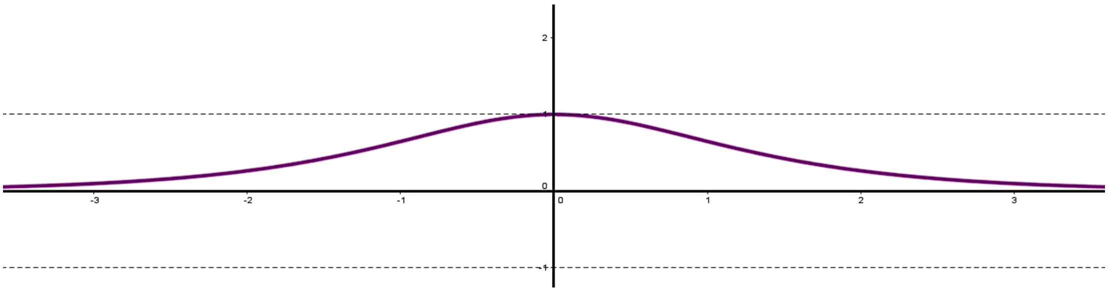

Figura 42 - gráfico de $sech$. Fonte: Autor.

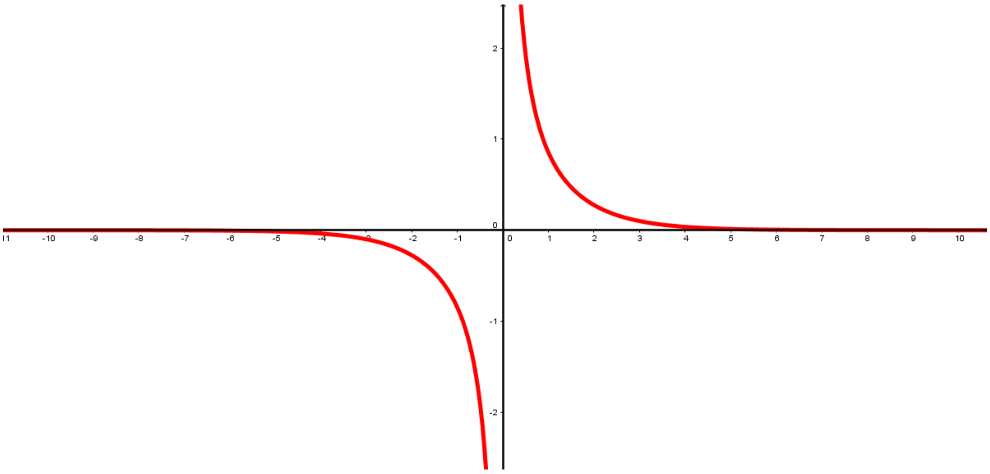

Figura 43 - Gráfico de $cossech$. Fonte: Autor

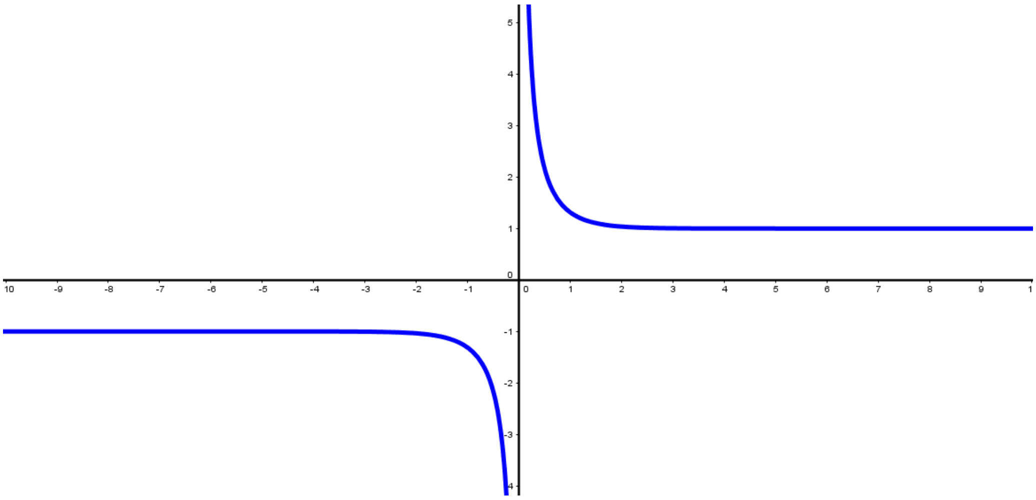

Figura 44 - Gráfico de cotgh. Fonte: Autor.

4.8. Formulário de derivadas e antiderivadas das funções hiperbólicas

4.8.1 Formulário de derivadas

- $\dfrac{d}{dx}(senh\, x) = cosh\, x$

- $\dfrac{d}{dx}(cosh\, x) = senh\, x$

- $\frac{d^2}{dx^2}(senh\, x) = senh\, x$

- $\frac{d^2}{dx^2}(cosh\, x) = cosh\, x$

- $\frac{d}{dx}(tgh\, x) = sech^2 x$

- $\frac{d}{dx}(cotgh\, x) = -cossech^2 x$

- $\frac{d}{dx}(sech\, x) = -sech\, x. tgh\, x$

- $\frac{d}{dx}(cossech\, x) = -cossech\, x. cotgh\, x$

Demonstrações:

- $\frac{d}{dx}(senh\, x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = cosh\, x$

  $\blacksquare$

- $\frac{d}{dx}(cosh\, x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = senh\, x$

  $\blacksquare$

- $\frac{d}{dx}(tgh\, x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{senh\, x}{cosh\, x}\right) = \frac{cosh^2 x - senh^2 x}{cosh^2 x} = \frac{1}{cosh^2 x} = sech^2 x$

  $\blacksquare$

- $\frac{d}{dx}(cotgh\,x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{tgh\,x}\right) = -\frac{sech^2x}{tgh^2x} = -cossech^2x$

■

- $\frac{d}{dx}(sech\,x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{cosh\,x}\right) = -\frac{senh\,x}{cosh^2x} = -sech\,x.tgh\,x$

■

- $\frac{d}{dx}(cossech\,x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{senh\,x}\right) = -\frac{cosh\,x}{senh^2x} = -cossech\,x.cotgh\,x$

■

4.8.2 Formulário de antiderivadas

- $\int senh\,xdx = cosh\,x + C$
- $\int cosh\,xdx = senh\,x + C$
- $\int sech^2xdx = tghx + C$
- $\int cossech^2xdx = -cotgh\,x + C$
- $\int sech\,x.tgh\,xdx = -sech\,x + C$
- $\int cossech\,x.cotgh\,xdx = -cossech\,x + C$

Demonstrações

- $\int senh\, xdx = cosh\, x + C$

$$\int \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) dx = \int \frac{1}{2} e^x dx - \int \frac{1}{2} e^{-x} dx$$
$$= \frac{1}{2}\int e^x dx - \frac{1}{2}\int e^{-x} dx = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = cosh\, x + c$$

■

- $\int cosh\, xdx = senh\, x + C$

$$\int \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) dx = \int \frac{1}{2} e^x dx + \int \frac{1}{2} e^{-x} dx$$
$$= \frac{1}{2}\int e^x dx + \frac{1}{2}\int e^{-x} dx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = senh\, x + c$$

■

- As demais demonstrações são desenvolvidas de maneira análoga.

5. APRESENTAÇÃO DAS FUNÇÕES HIPERBÓLICAS NO ENSINO MÉDIO

Durante o ensino médio, mais precisamente no 2° ano, os alunos têm acesso à trigonometria circular, estudo da hipérbole – inclusive a unitária, bem como à exponenciais, operações com exponenciais, estudo de funções, etc.

É fato que boa parte das demonstrações aqui utilizadas não são possíveis de serem trabalhadas com os alunos. Essas destinam-se, exclusivamente, à professores ou interessados no assunto, mas uma parte substancial das definições, conceitos podem ser aplicadas direta ou indiretamente.

Após os alunos conhecerem a trigonometria circular, suas propriedades e fórmulas, a forma de se medir um ângulo em função da área do setor a ele submetido deve ser apresentada para que se possa mostrar como definir a medida de um ângulo hiperbólico. A partir daí pode se apresentar as definições básicas da trigonometria hiperbólica a partir da trigonometria circular.

Alguns comentários sobre o processo de parametrização das funções seno hiperbólico e cosseno hiperbólico podem ser feitos, mas o essencial é que os alunos compreendam que essas funções podem ser escritas utilizando um parâmetro, que foi apresentado como uma medida de ângulo hiperbólico. Parte do conteúdo utilizado na obtenção dessa forma parametrizada, como mudança de base e aplicação de integrais, ainda não é conhecido pelo aluno do ensino médio e mostrar seu desenvolvimento por completo pode causar um desconforto desnecessário nos alunos. O professor pode comentar levemente sobre esses conteúdos a fim de que o aluno saiba da existência dos mesmos e sinta-se interessado em conhecê-los futuramente.

Com a forma parametrizada inicia-se a prática dos alunos, propriamente dita. Considerando que $senh\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ e $cosh\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, o trabalha apresenta dezenas de fórmulas, definições e identidades trigonométricas que os alunos podem verificar a veracidade utilizando esses parâmetros. Procedemos desta forma na página 65 quando mostramos que $cosh^2 x - senh^2 x = 1$, ou ainda na obtenção das fórmulas de adição de arcos. Para essas atividades o aluno deverá pôr em prática as propriedades entre potências de mesma base e a expansão de alguns produtos notáveis, por exemplo.

Na seção 4.4 obtemos a fórmula do seno hiperbólico para adição de arcos e, logo abaixo, há uma sugestão de como o aluno pode verificar a veracidade dessa fórmula apenas utilizando as formas parametrizadas e conteúdos já conhecidos.

Verificação da fórmula do seno hiperbólico da adição de arcos:

$$senh(\alpha+\beta) = senh\,\alpha . cosh\,\beta \;+\; senh\,\beta .\; cosh\,\alpha$$

Pela definição de seno hiperbólico temos que

$$senh\,(\alpha+\beta) = \frac{e^{\alpha+\beta} - e^{-\alpha-\beta}}{2}$$

Trabalhando com o segundo membro da igualdade:

$$senh\,\alpha . cosh\,\beta + \; senh\,\beta .\; cosh\,\alpha =$$

$$\left(\frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2}\right) . \left(\frac{e^{\beta} + e^{-\beta}}{2}\right) + \left(\frac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{2}\right) . \left(\frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}\right) =$$

$$\frac{e^{\alpha} . e^{\beta} + e^{\alpha} . e^{-\beta} - e^{-\alpha} . e^{\beta} - e^{-\alpha} . e^{-\beta} + e^{\alpha} . e^{\beta} + e^{-\alpha} . e^{\beta} - e^{\alpha} . e^{-\beta} - e^{-\alpha} . e^{-\beta}}{4} =$$

$$\frac{2 . e^{\alpha} . e^{\beta} - 2e^{-\alpha} . e^{-\beta}}{4} =$$

$$\frac{e^{\alpha} . e^{\beta} - e^{-\alpha} . e^{-\beta}}{2} =$$

$$senh(\alpha+\beta)$$

Uma outra sugestão de abordagem para explorar o tema é o estudo qualitativo das funções hiperbólicas: estudo da paridade, periodicidade, construção de gráficos de cada uma das funções.

Observemos que é perfeitamente factível uma visualização intuitiva dos esboços dos gráficos das funções hiperbólicas, sem a utilização das ferramentas do cálculo diferencial e integral. Nesse processo desenvolve-se a ideia de paridade, obtenção de alguns pontos do gráfico pelo método da adição de ordenadas, aproximações de outras funções quando x cresce ou decresce e limitações (por exemplo $senh\, x$ está entre duas funções exponenciais e, por consequência, o seu gráfico está "espremido" entre elas).

Ao final da seção 4.3 verificamos a paridade das funções $senh$ e $cosh$. Esse desenvolvimento será retomado de forma didática a seguir como sugestão de como apresentar ao aluno.

Discutir a paridade das funções $f(x) = senh\, x$ e $g(x) = cosh\, x$.

$$f(x) = senh\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Por outro lado,

$$f(-x) = senh\,(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -f(x)$$

Como $f(-x) = -f(x)$ ou ainda $f(x) = -f(-x)$, concluímos que $f(x)$ é uma função ímpar.

Fazendo a mesma análise para $g(x)$, temos:

$$g(x) = cosh\ x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Por outro lado,

$$g(-x) = cosh\ (-x) = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = g(x)$$

Como $g(x) = g(-x)$, concluímos que $g(x)$ é uma função par.

Um detalhe útil para o esboço dos gráficos é verificar que, tanto $f(x)$ como $g(x)$ podem ser obtidas a partir das funções $h(x) = \frac{e^x}{2}$ e $l(x) = -\frac{e^{-x}}{2}$, onde:

$$f(x) = h(x) + l(x) \text{ e } g(x) = h(x) - l(x).$$

Tomando que $e \cong 2{,}71$, vamos esboçar os gráficos de $h(x)$ e $l(x)$, cujas informações usaremos na construção do gráfico de $f(x)$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\frac{e^x}{2}$	$\frac{e^{-3}}{2}$	$\frac{e^{-2}}{2}$	$\frac{e^{-1}}{2}$	$\frac{e^{0}}{2}$	$\frac{e^{1}}{2}$	$\frac{e^{2}}{2}$	$\frac{e^{3}}{2}$
$h(x)$	0,024	0,067	0,183	0,5	1,36	3,7	10,042

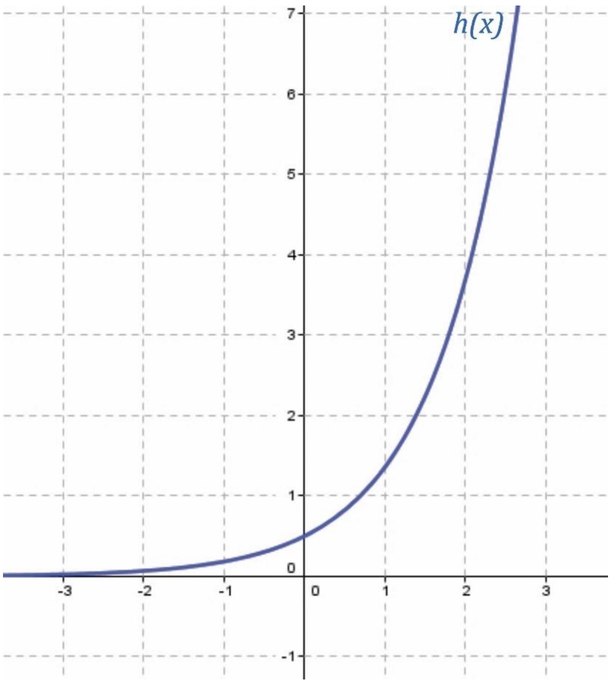

Figura 45: Gráfico de g(x). Fonte: Autor

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$-\frac{e^{-x}}{2}$	$\frac{e^{3}}{2}$	$\frac{e^{2}}{2}$	$\frac{e^{1}}{2}$	$\frac{e^{0}}{2}$	$\frac{e^{-1}}{2}$	$\frac{e^{-2}}{2}$	$\frac{e^{-3}}{2}$
$l(x)$	-10,042	-3,7	-1,36	- 0,5	-0,183	-0,067	-0,024

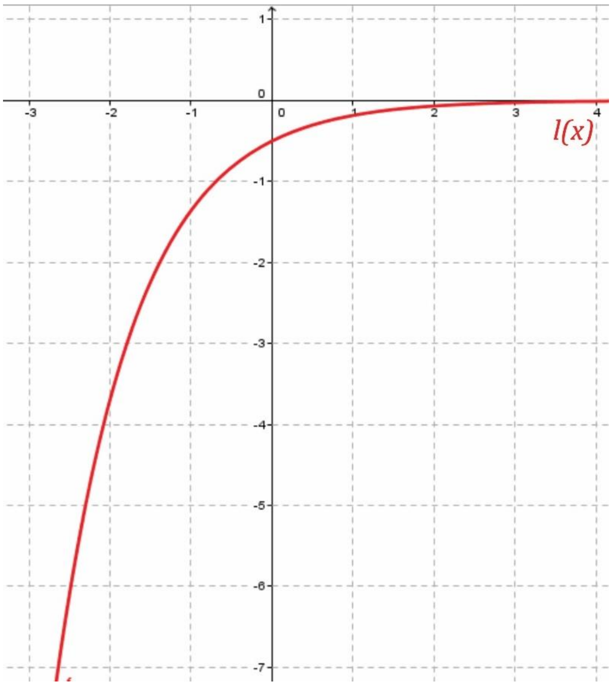

Figura 46: Gráfico de l(x). Fonte: Autor

Utilizando o método da adição de ordenadas e considerando que $f(x) = h(x) + l(x)$, montamos a tabela de ordenadas a seguir e podemos esboçar o gráfico de $f(x)$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-10,018	-3,633	-1,177	0	1,177	3,633	10,018

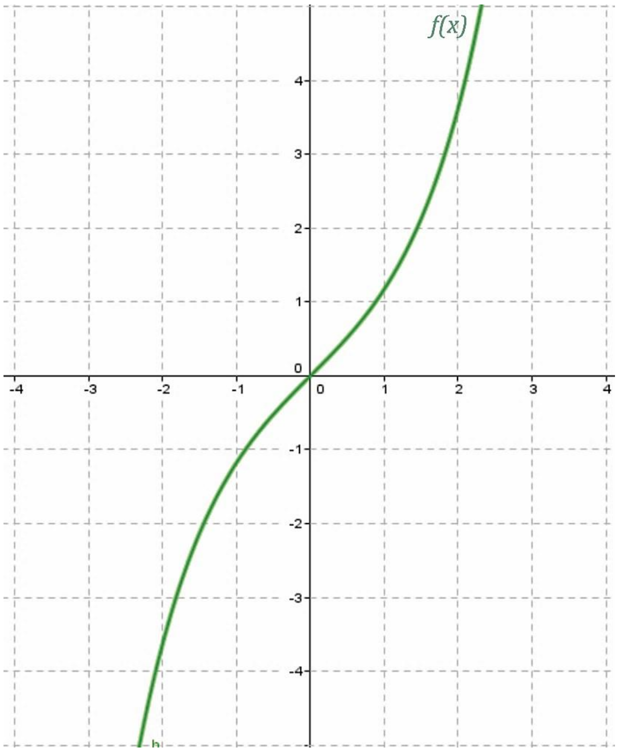

Figura 47: Gráfico de $\mathrm{f}(\mathrm{x})$. Fonte: Autor

Isso permite observar que $f(0) = 0$ e obter os conjuntos domínio e imagem de f, sendo ambos o conjunto dos números reais.

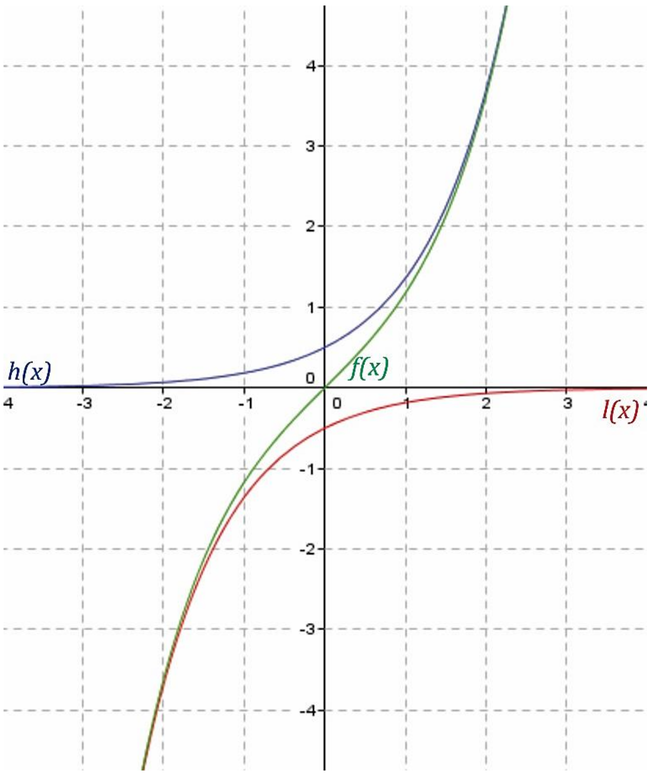

Figura 48: Gráficos de $\mathrm{f}(\mathrm{x})$, $\mathrm{h}(\mathrm{x})$ e $\mathrm{l}(\mathrm{x})$. Fonte: Autor

Na figura 48 podemos observar que a função $f(x)$ se aproxima da função $h(x)$ à medida que x cresce, e se aproxima de $l(x)$ à medida que x decresce. Sendo assim, a curva que representa a função $senh\, x$ estará sempre compreendida entre as funções exponenciais $h(x)$ e $l(x)$. É possível verificar esse fato algebricamente, como faremos a seguir:

Como $e^x > 0$ e $e^{-x} > 0$ para todo x, então:

$$-e^{-x} < e^x - e^{-x} < e^x$$

$$-\frac{e^{-x}}{2} < \frac{e^x - e^{-x}}{2} < \frac{e^x}{2}$$

$$l(x) < f(x) < h(x)$$

Como $g(x) = h(x) - l(x)$, podemos esboçar o gráfico da função $g(x) = cosh\, x$ fazendo as mesmas análises que fizemos para $f(x)$.

Já vimos que $g(x)$ é uma função par, então $g(-x) = g(x)$, que implica que o eixo das ordenadas é eixo de simetria no gráfico de $g(x)$.

Assim como fizemos para $f(x)$, vamos montar a tabela com alguns pontos utilizando o método de adição de ordenadas. Já que $g(x) = h(x) - l(x)$, obtemos:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g(x)$	10,066	3,767	1,54	1	1,54	3,767	10,066

Temos $\frac{e^x}{2} > 0, \forall\, x \in R$, logo

$$\frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2} = cosh\, x > \frac{e^{-x}}{2}, \forall\, x \in R.$$

Similarmente, como $\frac{e^{-x}}{2} > 0,\ \forall\, x \in R$,

$$\frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2} = \cosh x > \frac{e^x}{2}, \forall\, x \in R.$$

e, por consequência, $g(x) > h(x)$ e $g(x) > -l(x)$. Concluímos, então, que a curva da função $g(x) = cosh\, x$ estará sempre acima das curvas definidas pelas funções exponenciais $h(x)$ e $-l(x)$.

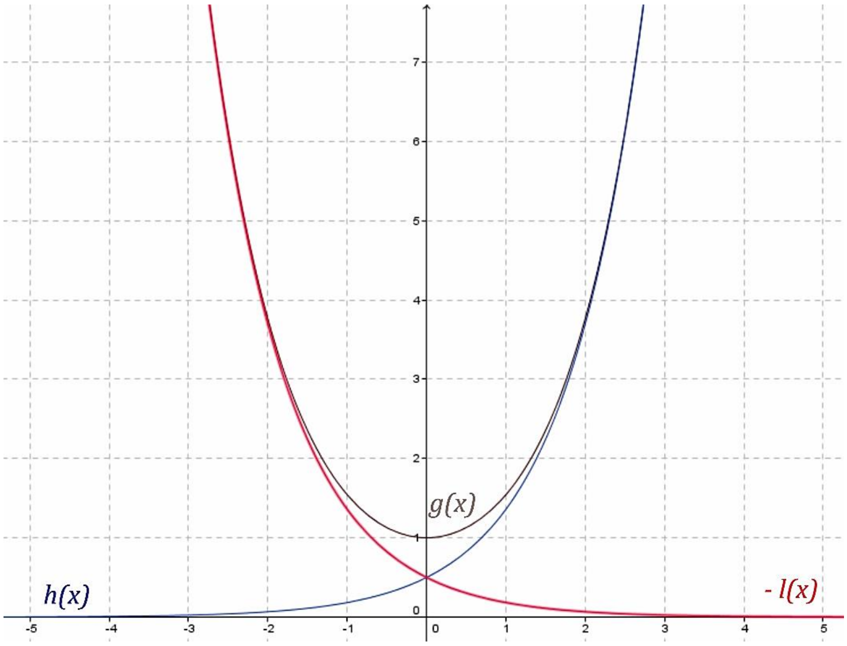

Figura 49: Gráficos de $\mathrm{h(x)}$, $\mathrm{g(x)}$ e $\mathrm{-l(x)}$. Fonte: Autor

Após o esboço do gráfico é fácil perceber que o domínio de g é conjunto dos números reais, enquanto que a imagem de g é o intervalo $[1, +\infty)$.

A analogia com a trigonometria circular deve sempre ser enfatizada e apostamos ser este o principal recurso para a trigonometria hiperbólica apresentar-se de maneira significativa aos alunos. Desta forma, os conteúdos devem ser inseridos em paralelo, ressaltando a similaridade entre os mesmos, ou quando não, a adaptação mínima. Neste sentido é recomendável as comparações entre: equações fundamentais, adição e subtração de arcos, relações trigonométricas, paridade das funções e imagens de $x = 0$. Por outro lado, ressalta-se também a divergência no comportamento dos gráficos, enquanto as circulares são periódicas, as funções hiperbólicas não desfrutam desta propriedade. Essa comparação entre as trigonometrias gera interesses e dúvidas nos alunos e uma discussão para entender o porquê dessas divergências trará grandes benefícios e conhecimento.

Ao final desta sequência de estudos, o aluno terá conhecimento de conceitos básicos de trigonometria hiperbólica e esse conceito pode, inclusive, ser ampliado com exemplos mais simples sobre a catenária, já que está diretamente relacionado com a forma parametrizada da função cosseno hiperbólico.

Uma vez que os alunos já fizeram, em anos anteriores, o estudo da parábola, poderão comparar os gráficos e verificar que, apesar de visualmente parecidas, não se tratam da mesma família de curvas.

Dispondo de um tempo limitado para o assunto, muitos aspectos aqui levantados podem ser desenvolvidos, a partir da apresentação direta das parametrizações de $senh\, x$ e $cosh\, x$. Consideramos a seguinte sequência didática para apresentação do assunto: “Vamos definir funções seno e cosseno com comportamentos parecidos ao da trigonometria que estudamos, mas com algumas diferenças, por isso faremos uma distinção desde seus nomes, serão chamados $senh\, x$ e $cosh\, x$ e definidos por

$$senh\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{e} \qquad cosh\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Observamos que estas funções satisfazem uma identidade

$$cosh^2 x - senh^2 x = 1,$$

ou seja, são pontos de uma hipérbole. Por esta razão, $senh\, x$ e $cosh\, x$ são ditas funções hiperbólicas, enquanto que $sen\, x$ e $cos\, x$ são funções circulares. Podemos definir, para esta nova trigonometria, tangente e as demais funções trigonométricas paralelas às que já conhecemos...”. Mostra-se, a partir daí, as diferenças e as múltiplas semelhanças entre as trigonometrias e o desenvolvimento proposto nos demais parágrafos deste capítulo.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A elaboração do trabalho foi feita de forma que um aluno, professor ou qualquer interessado no conteúdo possa utilizar esse trabalho como uma ferramenta útil para obter informações necessárias para um entendimento substancial do assunto. Por isso, foram apresentados conteúdos clássicos, como trigonometria circular e características da hipérbole, e seguiu-se com as propriedades, definições e demonstrações da trigonometria hiperbólica a fim de se obter informações gerais, mas precisas sobre o tema.

É fato que esse estudo de trigonometria hiperbólica é impossível de ser apresentado de forma completa aos alunos do ensino básico, haja vista que várias de suas demonstrações exigem conhecimentos que, em geral, são acessíveis no ensino superior específico, mas isso, no entanto, não está impedido que noções básicas sejam apresentadas, estudadas, aplicadas e relacionadas com outros conceitos matemáticos.

Neste sentido, concluímos o trabalho apresentando uma sugestão de abordagem do conteúdo aos alunos do ensino médio, que objetiva explorar as manipulações algébricas, advindas de aplicações das propriedades de exponenciais, visualização intuitiva dos gráficos e sobretudo ressaltar as semelhanças entre as trigonometrias, circular e hiperbólica, em todos seus aspectos.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

SIMMONS, G. F. Cálculo com geometria analítica. V. 1. Tradução SeijiHariki; Revisão técnica Rodney Carlos Bassanezi, Silvio de Alencastro Pregnolatto. São Paulo: Pearson MakronBooks, 1987. P. 611.

Teoria de hipérbole. Disponível em: <http://www.dmm.im.ufrj.br/projeto/rived/modulo_hiperbole/introteohiperbole.htm> Acesso em 12 de setembro de 2015.

Geometria Analítica, Hipérbole. Disponível em: < https://www.algosobre.com.br/matematica/geometria-analitica-hiperbole.html> Acesso em 14 de setembro de 2015.

A Equação da Hipérbole. Disponível em: < http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2011/05/equacao-da-hiperbole.html> Acesso em 14 de setembro de 2015.

Projeção de Mercator. Disponível em: < http://www.infoescola.com/cartografia/projecao-de-mercator/> Acesso em 20 de abril de 2016.

Funções Hiperbólicas. Disponível em: < http://www.ebah.com.br/content/ABAAAAX8sAK/funcoes-hiperbolicas> Acesso em 2 de outubro de 2016.

Funções Hiperbólicas. Disponível em: < http://www.uff.br/webmat/Calc1_LivroOnLine/Cap25_Calc1.html> Acesso em 2 de outubro de 2016.

Geometria Analítica – 07 – Cônicas - Elipse. Disponível em: < http://www.ebah.com.br/content/ABAAAgOYkAF/geometria-analitica-07-conicas-elipse> Acesso em 20 de setembro de 2015.

LIMA, Elon L. **A Matemática do Ensino Médio: volume 1, 6ª ed.** Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LIMA, Elon L. Números e Funções Reais. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

VASCONCELOS, Jerry Gleison Salgueiro Fidanza. **Funções Hiperbólicas: História, Conceito e Aplicação**. 74 f. Dissertação de Mestrado em Educação em Matemática. Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2013.

TALAVERA, Leda Maria Bastoni. **Parábola e Catenária: história e aplicações**. 42 f. Dissertação de Mestrado em ensino de Ciências e Matemática. Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010.

LEITHOLD, L.. **O cálculo com Geometria Analítica Vol. 2, 2° ed.** São Paulo: Editora Harba, 1994. 848p.

BOYER, C.B. História da Matemática. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1974.
. Tópicos de história da matemática para a sala de aula: cálculo. Tradução Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992.

EVES, H. Introdução à História da Matemática, tradução: Hygino H. Domingues, São Paulo: Editora da Unicamp, 2004.

BRAZ, Fernanda M. **História da Geometria Hiperbólica**. 34 f. Dissertação de Mestrado em Educação em Matemática. Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2009.

SANTOS, Admilson Alves dos. **TRIGONOMETRIA HIPERBÓLICA: uma abordagem elementar**. 152 f. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática-SBM e Universidade Federal de Roraima-UFRR, Boa Vista, 2014.

BARROS, Humberto Gullo de. **Trigonometria: fórmulas de adição e subtração de arcos**. 152 f. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática-SBM e Pontifícia Universidade Católia-PUC-Rio, Rio de Janeiro, 2014.

FREITAS, Maria do Bom Conselho da S. B.. **As Funções Hiperbólicas e Suas Aplicações**. 61 f. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática-SBM e CCEN - UFPB, João Pessoa - PB, 2015.