FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS – CAMPUS DE TRÊS LAGOAS

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

POLINÔMIOS, EQUAÇÕES ALGÉBRICAS E SUAS RESOLUÇÕES

JOEL MARCELO BECKER

TRÊS LAGOAS – MS

2014

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS – CAMPUS DE TRÊS LAGOAS

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

POLINÔMIOS, EQUAÇÕES ALGÉBRICAS E SUAS RESOLUÇÕES

JOEL MARCELO BECKER

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT do Departamento de Ciências Exatas da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus de Três Lagoas, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Carlos Tamarozzi.

TRÊS LAGOAS – MS

2014

AGRADECIMENTOS

A Deus por me dar forças e coragem para enfrentar as dificuldades.

A esta universidade, principalmente ao corpo docente, pela oportunidade de fazer o curso, pelo empenho e dedicação de todos.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Antonio Carlos Tamarozzi, pela orientação, apoio, confiança e tempo dedicado na revisão desta dissertação.

A minha coorientadora, Profª Dra. Andreia Cristina Ribeiro, pelas sugestões e tempo dedicado na revisão desta dissertação bem como pelas aulas de aritmética ministradas neste curso de Mestrado.

Aos meus pais, pelo amor, incentivo e apoio incondicional em todos os momentos de minha vida.

A minha irmã e ao meu cunhado, pelo carinho e apoio em todos os momentos de minha caminhada.

A minha namorada, por acrescentar razão e beleza em meus dias, por sempre me incentivar com suas palavras de carinho nos momentos em que mais precisei.

Aos meus colegas pela convivência e aprendizado.

A todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

RESUMO

As equações algébricas tem uma importância ímpar no desenvolvimento da álgebra. Neste trabalho são apresentados métodos de resolução das equações cúbicas e quárticas, como também comentários da não solubilidade por radicais das equações de graus maior ou igual a cinco. A fórmula de resolução da equação do terceiro grau trouxe a necessidade de trabalhar com extração de raízes quadradas de números negativos, motivando o surgimento dos números complexos. Embora as expressões para as soluções das equações cúbicas e quárticas sejam pouco práticas, suas descobertas impulsionaram o estudo das equações algébricas e, em consequência, a álgebra. Apresentamos sugestões de metodologias e técnicas de resolução diferenciadas, como contribuição para o ensino de polinômios e equações algébricas no ensino médio.

Palavras-chaves: polinômios, equações algébricas, raízes.

ABSTRACT

Algebraic equations has a singular importance in the development of algebra. In this research, methods of solving the cubic and quartic equations, as well as considerations of non-solubility by radicals of equations of higher degrees or equal to five are presented. The formula for the resolution of the third degree equation has brought the need to work with the extraction of square roots of negative numbers, encouraging the emergence of complex numbers. Although the expressions for the solutions of cubic and quartic equations are impractical, their findings have boosted the study of algebraic equations and therefore the algebra. We present suggestions of methodologies and techniques of differential resolution, as a contribution to the teaching of polynomials and algebraic equations in high school.

Keywords: polynomials, algebraic equations, roots.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Neste trabalho estudamos os métodos clássicos de resolução das equações algébricas de graus 3 e 4, nos quais apresentamos expressões para determinar as raízes das equações cúbica e quártica, expressões estas que são dadas em função dos coeficientes das equações. As operações envolvidas são as operações algébricas fundamentais (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação) além da extração de raízes quadradas e cúbicas. Dado um polinômio $f(x)$ de grau *n*, $n \in \mathbb{N}$, consideremos a equação $f(x)=0$. Resolver esta equação por radicais, é resolvê-la por meio das operações básicas e da extração de raízes.

Métodos para a resolução da equação do primeiro grau já eram conhecidos pelos egípcios em 3500 a.C, enquanto que a fórmula da solução da equação do segundo grau foi estabelecida pelos babilônios, em 1700 a.C. Para a equação do primeiro grau $ax+b=0$ onde $a \neq 0$, temos a solução $x=-\frac{b}{a}$ que pode ser expressa por meio de radicais, de fato, se $-\frac{b}{a} \geq 0$ então $x=-\frac{b}{a}=\sqrt{(-\frac{b}{a})^2}$, enquanto se $-\frac{b}{a}<0$ tem-se $x=-\frac{b}{a}=-\sqrt{(-\frac{b}{a})^2}$. Enquanto a equação do segundo grau $ax^2+bx+c=0$ onde $a \neq 0$, tem solução expressa por $x=\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, mesmo no caso de $b^2-4ac<0$.

A resolução de equações do terceiro e quarto graus também podem ser apresentadas por meio de radicais. Conforme descreve Garbi [7] a descoberta envolveu uma grande disputa entre Girolamo Cardano (1501 – 1576) e Nicolò Fontana (Tartaglia) – (1499 – 1557). Por volta de 1510, Scipione del Ferro, professor de Matemática da Universidade de Bolonha, encontrou uma solução da equação $x^3+px+q=0$. Este não a publicou, mas revelou-a a um de seus alunos, Antonio Maria Fior, que mais tarde tentou levar vantagem em um desafio com Tartaglia. Na época era comum o lançamento de desafios entre sábios, e Fior desafiou Tartaglia. O desafio consistia na resolução de diversos problemas, e Fior pretendia apresentar questões que envolviam equações do terceiro grau, da qual somente ele tinha a solução. Tartaglia encontrou a solução das equações do tipo $x^3+px+q=0$ e também do tipo $x^3+px^2+q=0$, deste segundo tipo de equações, Fior não conhecia a solução e com isso Fior saiu humilhado do desafio.

Ainda segundo Garbi [7], por esta época Cardano estava escrevendo o livro "PRATICA ARITHMETICAE GENERALIS", conhecido como Ars Magna. Cardano pediu a Tartaglia para que lhe revelasse a solução das equações do terceiro grau para que fosse publicado em seu livro, mas, Targaglia não concordou, pois ele mesmo queria publicar sua descoberta. Mais tarde, sob juramentos de que não publicaria a solução, Tartaglia revelou a solução das equações do terceiro grau a Cardano. Ao saber que Scipione del Ferro já havia encontrado tais soluções, Cardano quebrou seus juramentos e publicou a solução das equações do terceiro grau em seu livro Ars Magna em 1945. Cardano publicou também a solução das equações do quarto grau, que seu discípulo Ludovico Ferrari (1522 – 1560) encontrou, como continuidade à solução da equação do terceiro grau. Nas palavras de Garbi [7]: "*No final, a posteridade foi injusta para com o sofrido Tartaglia: a fórmula que ele deduzira e que ensinara ao desleal inimigo, ao invés de receber seu nome, é hoje generalizadamente conhecida como Fórmula de Cardano.*"

Descobertas as fórmulas das equações cúbicas e quárticas, o próximo passo seria descobrir a fórmula da equação do quinto grau. Muitos tentaram, mas sem êxito. Niels Henrik Abel (1802 – 1829) provou por meio da álgebra clássica a insolubilidade dessas equações. Em 1832, Evariste Galois (1811 – 1832) provou a impossibilidade de equações de grau maior ou igual a cinco ter solução por radicais, que foi um dos pilares para o surgimento da álgebra moderna. Galois construiu uma teoria nova, associando a cada polinômio com coeficientes reais uma estrutura chamada Grupo de Galois. Segundo Garbi [7], por várias vezes Galois enviou para a Academia de Ciências seus manuscritos, mas não eram lidos ou eram deixados de lado, por conta do grande grau de dificuldade.

Neste trabalho, no primeiro capítulo é dada a solução da equação cúbica como também a relação entre o sinal do discriminante e os tipos de raízes da cúbica. No segundo capítulo descrevemos os procedimentos para a solução da equação quártica. No terceiro capítulo discutimos a não solubilidade por radicais das equações de graus maior ou igual a cinco, abordando de forma breve e resumida, alguns conceitos da álgebra necessários para o entendimento da impossibilidade da resolução por meio de radicais das equações de grau $n \geq 5$. No quarto capítulo detalhamos de maneira geral as equações algébricas destacando abordagens e aplicações interessantes da teoria, entendendo que muitas delas poderiam ser disponibilizadas para o ensino médio, como facilitador e estimulador da aprendizagem. Neste sentido, organizamos no quinto capítulo um roteiro de sugestões para o estudo dos polinômios e equações algébricas no ensino médio, através de uma sequência didática de conteúdos e discussões, além de exercícios dirigidos.

1. EQUAÇÃO CÚBICA

1.1 – A história

A descoberta da fórmula para a resolução da equação cúbica aconteceu na Itália, no século XVI. Por volta de 1510, Scipione del Ferro encontrou a solução para a equação cúbica $x^3 + px + q = 0$. O mesmo não publicou sua descoberta, mas antes de sua morte a revelou a um de seus alunos, Antonio Maria Fior. Querendo ganhar fama, Fior escolheu Nicolo Fontana, conhecido como Tartaglia, para um desafio matemático. O apelido Tartaglia, que significa gago, se deve aos traumas de sua infância. Mal começou a ser alfabetizado, sua mãe o tirou da escola por não ter condições de pagar. Tartaglia então passou a estudar sozinho em livros que conseguia.

Desafios eram comuns nessa época entre os sábios, e Fior pretendia propor a Tartaglia problemas que envolvessem a resolução da equação cúbica. Tartaglia ficou sabendo das intenções de Fior, e concentrou todas suas atenções para a resolução da equação cúbica. Conforme consta em Garbi [7], Tartaglia relatou: "*mobilizei todo o entusiasmo, a aplicação e a arte de que fui capaz, objetivando encontrar uma regra para a solução daquelas equações, o que consegui a 10 de fevereiro de 1535*". Antes mesmo do desafio, Tartaglia já conhecia a solução das equações do tipo $x^3 + px + q = 0$, o que Fior também conhecia. Mas, Tartaglia foi além. Ele também descobriu a fórmula para a resolução de equações do tipo $x^3 + px^2 + q = 0$, o que não era conhecido por Fior. Dessa forma, o resultado do desafio já é esperado. Enquanto Tartaglia resolveu todos os problemas propostos por Fior, o contrário não ocorreu, pois Fior não soube resolver todos os problemas propostos por Tartaglia.

Por esta época, a história coloca na vida de Tartaglia o matemático Girolamo Cardano. Este ao saber do feito de Tartaglia, pediu que lhe fosse revelado a solução da equação do terceiro grau, para que a mesma fosse publicada em seu livro "PRATICA ARITHMETICAE GENERALIS", conhecido como Ars Magna. Tartaglia não concordou em revelar sua descoberta alegando que ele mesmo a publicaria em seu livro a ser escrito. Passado algum tempo, Tartaglia recebe uma carta assinada por um nobre italiano, convidando-o para visita-lo em Milão. Ao chegar lá se deparou com Cardano, que o implorou, sob juramentos de segredo, pelas fórmulas da resolução da equação cúbica. Cardano jurou que não publicaria, mas que estava curioso para saber a solução. Diante de tais promessas, Tartaglia revelou sua descoberta a Cardano. Porém, em 1545, Cardano quebrou suas promessas e publicou os resultados em Ars Magna. Ele atribuiu os resultados a Tartaglia, embora tenha citado que os mesmos resultados já haviam sido obtidos de forma independente por Scipione del Ferro.

Embora a história tenha sido justa com Tartaglia em seu desafio com Fior, a mesma foi injusta para com Tartaglia em sua relação com Cardano. A fórmula para a resolução da equação do terceiro grau tem por nome *Fórmula de Cardano*.

Veremos a seguir, que quando Tartaglia resolveu equações do tipo $x^3 + px + q = 0$, ele não resolveu somente um caso particular de equação do terceiro grau, mas deu uma fórmula para a resolução de qualquer equação do terceiro grau.

1.2 – Forma reduzida

A forma geral da equação do terceiro grau (ou equação cúbica), na variável *y*, é dada por:

$$ay^3 + by^2 + cy + d = 0 \qquad (1)$$

com $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Fazendo a substituição $y = x + h$, na equação (1) acima, obtemos:

$$a(x+h)^3 + b(x+h)^2 + c(x+h) + d = 0 .$$

Expandindo os binômios, efetuando as multiplicações e agrupando os termos semelhantes, chegamos à expressão:

$$ax^3 + (b+3ah)x^2 + (3ah^2 + 2bh + c)x + (ah^3 + bh^2 + ch + d) = 0 .$$

Com o objetivo de zerar o termo do 2º grau (coeficiente de x^2), façamos $h = -\dfrac{b}{3a}$ e assim, obtemos:

$$ax^3 + (c - \frac{b^2}{3a})x + (\frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d) = 0 .$$

Agora, multiplicando a equação por $\frac{1}{a}$, obtemos a forma reduzida da equação do terceiro grau, dada por:

$$x^3 + px + q = 0 \qquad (2)$$

onde $p = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}$ e $q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}$.

Se soubermos resolver a equação (2), então teremos a solução da equação (1), uma vez que $y = x - \frac{b}{3a}$. Vemos assim que, quando Tartaglia resolveu equações do tipo $x^3 + px + q = 0$, não resolveu apenas um caso particular, mas deu a solução geral das equações do terceiro grau, uma vez que toda equação da forma (1) pode ser transformada na forma (2) e vice-versa.

1.3 – Solução da equação cúbica

Seja a equação cúbica $x^3 + px + q = 0$ e suponhamos que a solução *x* seja composta por duas parcelas *u* e *v*, isto é, $x = u + v$. Dessa forma, temos:

$x^3 = (u+v)^3 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v)$. Logo, $x^3 - 3uv(u+v) - (u^3 + v^3) = 0$ e como $x = u + v$, obtemos a seguinte equação em *x*: $x^3 - 3uvx - (u^3 + v^3) = 0$. Comparando com a equação $x^3 + px + q = 0$ temos, da igualdade de polinômios que $p = -3uv$ e $q = -(u^3 + v^3)$. Portanto, $u^3 + v^3 = -q$ e $uv = -\frac{p}{3}$, ou equivalentemente, $u^3 + v^3 = -q$ e $u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}$.

Assim, temos que u^3 e v^3 são dois números dos quais conhecemos a soma e o produto, e este é um problema clássico que se resolve com equações do segundo grau. De fato, a equação do segundo grau $x^2 - Sx + P = 0$ tem soluções x_1 e x_2 tais que $x_1 + x_2 = S$ e

$x_1 x_2 = P$. Dessa forma, temos que u^3 e v^3 são raízes da equação $x^2 + qx - \frac{p^3}{27} = 0$. Resolvendo-a pela fórmula de resolução de equações do segundo grau temos:

$$x = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Assim, obtemos que $u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ e $v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$. Portanto,

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \text{ e } v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Como $x = u + v$ temos que:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

é uma solução da equação (2), isto é, de $x^3 + px + q = 0$ e

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \frac{b}{3a}$$

é uma solução da equação (1), isto é, de $ay^3 + by^2 + cy + d = 0$.

Esta é a chamada fórmula de Cardano, que não foi descoberta por ele, mas sim por Tartaglia. Podemos chamá-la por *fórmula de Cardano-Tartaglia*. Por simplicidade de notação, denotaremos por Δ o discriminante da equação acima, isto é, $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$. Da mesma forma que o discriminante da equação do segundo grau fornece os tipos de raízes da equação quadrática, veremos adiante, que o sinal do discriminante da equação cúbica nos fornecerá os tipos das raízes da equação cúbica.

Observação: É correto chamarmos Δ de discriminante, uma vez que seu significado é: "que discrimina; discriminador" encontrado em [http://www.dicio.com.br/discriminante/].

Apresentada a fórmula para a resolução de equações do terceiro grau, pensava-se que as mesmas estavam vencidas, que não havia mais nada a descobrir a cerca das mesmas. Mas, logo começaram a surgir raízes quadradas de números negativos, o chamado caso irredutível. Além disso, a fórmula fornecia somente uma raiz da equação como solução. Mas como isso é possível? Se a fórmula de resolução das equações do segundo grau fornecem duas raízes, a fórmula de resolução das equações do terceiro grau deveria fornecer três raízes. Inicia-se assim a investigação que acaba por criar a história dos números complexos.

Supondo agora apresentada a teoria dos números complexos, observemos que tanto *u* como *v* possuem três raízes complexas e para obtermos $x = u + v$ não podemos combinar qualquer dos valores de *u* com qualquer dos valores de *v*, pois eles estão sujeitos ao produto $uv = -\frac{p}{3}$.

Dessa forma, se u_1 é uma das raízes de *u*, as outras duas são $u_2 = u_1 w$ e $u_3 = u_1 w^2$, onde $w = \cos(\frac{2\pi}{3}) + i.sen(\frac{2\pi}{3})$. Assim, se v_1 é o correspondente do valor de *v* tal que $u_1 v_1 = -\frac{p}{3}$, então, combinamos u_2 com v_3 e u_3 com v_2 e o fato que $w^3 = 1$ temos:

$$u_2 v_3 = (u_1 w)(v_1 w^2) = (u_1 v_1) w^3 = (u_1 v_1).1 = u_1 v_1 = -\frac{p}{3}$$

e

$$u_3 v_2 = (u_1 w^2)(v_1 w) = (u_1 v_1) w^3 = (u_1 v_1).1 = u_1 v_1 = -\frac{p}{3}.$$

Assim, as raízes da equação (2) são: $x_1 = u_1 + v_1$, $x_2 = u_2 + v_3$ e $x_3 = u_3 + v_2$, e as raízes da equação (1) são: $y_1 = u_1 + v_1 - \frac{b}{3a}$, $y_2 = u_2 + v_3 - \frac{b}{3a}$ e $y_3 = u_3 + v_2 - \frac{b}{3a}$. Portanto, temos as três raízes da equação cúbica, dadas a partir da fórmula de Cardano-Tartáglia.

Outra maneira de conhecer as outras duas raízes y_2 e y_3, conhecendo uma das raízes, digamos y_1, é utilizando as Relações de Girard. Destas, segue que $y_1 + y_2 + y_3 = -\frac{b}{a}$ e

$y_1y_2y_3=-\dfrac{d}{a}$. Dai, supondo $y_1\neq 0$, $y_2+y_3=-\dfrac{b}{a}-y_1$ e $y_2y_3=-\dfrac{d}{y_1a}$, de onde y_2 e y_3 são dois números dos quais conhecemos a soma e o produto, o que é facilmente resolvido pela fórmula de resolução das equações do segundo grau.

1.4 – Relação entre o sinal do discriminante e os tipos de raízes da cúbica

Vejamos agora a relação entre o sinal do discriminante Δ e os tipos de raízes da equação cúbica $x^3+px+q=0$, com $p,q\in\mathbb{R}$. Sejam x_1, x_2 e x_3 as raízes da equação $x^3+px+q=0$. Segue das Relações de Girard, que:

i) $x_1+x_2+x_3=0$

ii) $x_1x_2x_3=-q$

iii) $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=p$

De (*i*) segue que $x_2+x_3=-x_1$ e dai em (*iii*) obtemos:

$$p=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=x_1(x_2+x_3)+x_2x_3=x_1(-x_1)+x_2x_3=x_2x_3-x_1^{\ 2}.$$

Logo temos $p=x_2x_3-x_1^{\ 2}$ e $q=-x_1x_2x_3$ ou ainda, $p^3=(x_2x_3-x_1^{\ 2})^3$ e $q^2=(-x_1x_2x_3)^2=x_1^2x_2^2x_3^2$. Substituindo em Δ obtemos:

$$\Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\ \Leftrightarrow\ \Delta=\frac{x_1^2x_2^2x_3^2}{4}+\frac{(x_2x_3-x_1^2)^3}{27}.$$

Logo, temos Δ escrito em função das raízes da equação $x^3+px+q=0$.

Observação 1: A cúbica $x^3+px+q=0$ só possui três raízes reais e iguais se, e somente se, $p=q=0$, isto é, se a equação for $x^3=0$. De fato, se $x_1=x_2=x_3$, segue de (i) segue que $3x_1=0$ e, portanto, $x_1=0$.

Observação 2: Se um número complexo $z = \alpha + \beta i$ é raiz de uma equação cúbica, então, o seu conjugado $\bar{z} = \alpha - \beta i$ também é raiz da equação.

Vejamos agora a relação entre o sinal do discriminante Δ e os tipos de raízes da cúbica $x^3 + px + q = 0$.

Caso 1: Três raízes reais, onde duas são iguais.

Suponhamos $x_1 \neq x_2 = x_3 \in \mathbb{R}$. Segue das relações (i) e (ii) que:

$\Delta = \dfrac{x_1^2 x_2^2 x_3^2}{4} + \dfrac{(x_2 x_3 - x_1^2)^3}{27}$. Mas, $x_2 = x_3$, temos $\Delta = \dfrac{x_1^2 x_2^2 x_2^2}{4} + \dfrac{(x_2^2 - x_1^2)^3}{27}$. Ainda, da relação de Girard (i) temos: $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, e daí $x_1 = -x_2 - x_3 = -2x_2$. Segue que

$$\Delta = \frac{(-2x_2)^2 x_2^2 x_2^2}{4} + \frac{(x_2^2 - (-2x_2)^2)^3}{27}.$$

Logo, $\Delta = \dfrac{4x_2^6}{4} + \dfrac{(-3x_2^2)^3}{27} = 0$. Portanto, $\Delta = 0$. Analogamente para $x_1 = x_2 \neq x_3$ e $x_1 = x_3 \neq x_2$.

Portanto, a cúbica $x^3 + px + q = 0$ possui três raízes reais, sendo duas delas idênticas, isto é, uma raiz de multiplicidade 2, quando $\Delta = 0$.

Suponhamos agora que $\Delta = 0$. Então $x = 2\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}}$ é uma raiz real da equação $x^3 + px + q = 0$. Digamos que seja $x_1 = 2\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}}$. Das relações de Girard temos que: $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ e daí $x_2 + x_3 = -x_1$. Ou seja, $x_2 + x_3 = -2\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}}$. Ou ainda, $x_2 + x_3 = \sqrt[3]{4q}$. E $x_1 x_2 x_3 = -q$, ou seja, $x_2 x_3 = \dfrac{-q}{x_1}$. Equivalentemente, $x_2 x_3 = \dfrac{-q}{2\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}}}$. Ou ainda, $x_2 x_3 = \sqrt[3]{\dfrac{q^2}{4}}$.

Então, x_2 e x_3 são raízes da equação do segundo grau $x^2 - x\sqrt[3]{4q} + \sqrt[3]{\dfrac{q^2}{4}} = 0$, cujo discriminante é dado pela expressão $(-\sqrt[3]{4q})^2 - 4.\sqrt[3]{\dfrac{q^2}{4}} = \sqrt[3]{16q^2} - \sqrt[3]{16q^2} = 0$. Ou seja, $x_2 = x_3$ são as duas raízes reais iguais. Dessa forma acabamos de demonstrar o seguinte resultado:

Proposição 1: A cúbica $x^3 + px + q = 0$ possui três raízes reais, sendo duas delas idênticas se, e somente se, $\Delta = 0$.

<u>Caso 2: Três raízes reais e distintas.</u>

Sejam x_1, x_2 e x_3 as raízes da equação $x^3 + px + q = 0$ e suponhamos x_1, x_2 e x_3 reais e distintas duas a duas. Temos: $x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow -x_1 = x_2 + x_3 \Rightarrow x_1^2 = (x_2 + x_3)^2$. Então, $\Delta = \dfrac{x_1^2 x_2^2 x_3^2}{4} + \dfrac{(x_2x_3 - x_1^2)^3}{27}$. Logo, $\Delta = \dfrac{(x_2 + x_3)^2.(x_2x_3)^2}{4} + \dfrac{(x_2x_3 - (x_2 + x_3)^2)^3}{27}$. Sejam $\alpha = x_2x_3$ e $\beta = x_2 + x_3$. Então, $\Delta = \dfrac{\beta^2\alpha^2}{4} + \dfrac{(\alpha - \beta^2)^3}{27}$, e daí, $\Delta = \dfrac{\alpha^2\beta^2}{4} + \dfrac{\alpha^3 - 3\alpha^2\beta^2 + 3\alpha\beta^4 - \beta^6}{27}$. Portanto, Δ pode ser escrito na forma:

$$\Delta = \frac{1}{108}.(4\alpha^3 + 15\alpha^2\beta^2 + 12\alpha\beta^4 - 4\beta^6).$$

Note que $\beta^2 - 2\alpha = (x_2 + x_3)^2 - 2x_2x_3 = x_2^2 + x_3^2 > 0$, pois $x_2 \neq x_3$. Fazendo $\beta^2 - 2\alpha = \gamma > 0$ ($\beta^2 = \gamma + 2\alpha$) teremos:

$$\Delta = \frac{1}{108}.(4\alpha^3 + 15\alpha^2(\gamma + 2\alpha) + 12\alpha(\gamma + 2\alpha)^2 - 4(\gamma + 2\alpha)^3).$$

Efetuando os produtos e agrupando os termos semelhantes, obtemos a expressão:

$$\Delta = \frac{1}{108}.(50\alpha^3 + 15\alpha^2\gamma - 12\alpha\gamma^2 - 4\gamma^3).$$

Podemos escrever ainda,

$$\Delta = \frac{50}{108}.(\alpha^3 + \frac{15}{50}\alpha^2\gamma - \frac{12}{50}\alpha\gamma^2 - \frac{4}{50}\gamma^3).$$

Fatorando a expressão que está entre parênteses, obtemos:

$$\Delta = \frac{50}{108}.(\alpha + \frac{2}{5}\gamma)^2.(\alpha - \frac{1}{2}\gamma).$$

Vejamos o que acontece com o sinal de $\alpha - \frac{1}{2}\gamma$.

Afirmação: $\alpha - \frac{1}{2}\gamma < 0$.

De fato, se fosse $\alpha - \frac{1}{2}\gamma \geq 0$ teríamos $\alpha \geq \frac{1}{2}\gamma$ e dai $\gamma \leq 2\alpha$. Como $\gamma = \beta^2 - 2\alpha$ teríamos $\beta^2 - 2\alpha \leq 2\alpha$ e, portanto, $\beta^2 \leq 4\alpha$. Mas $\beta = x_2 + x_3$ e $\alpha = x_2x_3$, assim $(x_2 + x_3)^2 \leq 4x_2x_3$ e, portanto, $(x_2 - x_3)^2 \leq 0$. Mais ainda, como $x_2 \neq x_3$, teríamos $(x_2 - x_3)^2 < 0$, uma contradição. Portanto, segue que $\alpha - \frac{1}{2}\gamma < 0$.

O fator $(\alpha + \frac{2}{5}\gamma)^2$ é não negativo, isto é, $(\alpha + \frac{2}{5}\gamma)^2 \geq 0$. E mais ainda, afirmamos que $(\alpha + \frac{2}{5}\gamma)^2 > 0$. De fato, vejamos que não ocorre $\alpha + \frac{2}{5}\gamma = 0$. Se fosse $\alpha + \frac{2}{5}\gamma = 0$ teríamos $\alpha = -\frac{2}{5}\gamma$ e daí $5\alpha = -2\gamma$. Como $\gamma = \beta^2 - 2\alpha$, teríamos $5\alpha = -2(\beta^2 - 2\alpha)$ e, portanto, $\alpha = -2\beta^2$. Então, $x_2x_3 = -2(x_2 + x_3)^2$ e daí $2x_2^2 + 5x_2x_3 + 2x_3^2 = 0$. Resolvendo a equação na variável x_2, temos:

$$x_2 = \frac{-5x_3 \pm \sqrt{(5x_3)^2 - 4.2.2x_3^2}}{2.2} \iff x_2 = \frac{-5x_3 \pm 3x_3}{4} \iff x_2 = -\frac{1}{2}x_3, \text{ ou } x_2 = -2x_3.$$

Mas sabemos que, $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Dai, se $x_2 = -2x_3$, então, teremos que $x_1 + x_2 + x_3 = x_1 + (-2x_3) + x_3 = x_1 - x_3 = 0$ e dai $x_1 = x_3$, o que é uma contradição.

Se $x_2 = -\frac{1}{2}x_3$, então $x_1 + x_2 + x_3 = x_1 + (-\frac{1}{2}x_3) + x_3 = x_1 + \frac{1}{2}x_3 = 0$ e daí $x_1 = -\frac{1}{2}x_3$ e, portanto, $x_1 = x_2$, o que também é uma contradição.

Portanto, sempre temos $\alpha+\frac{2}{5}\gamma\neq 0$, e assim, sempre $(\alpha+\frac{2}{5}\gamma)^2>0$. Como $\alpha-\frac{1}{2}\gamma<0$, concluímos que $\Delta<0$. Assim acabamos de demonstrar que a cúbica $x^3+px+q=0$ possui três raízes reais e distintas se $\Delta<0$.

Caso 3: Duas raízes complexas e uma real.

Sejam $x_1=\alpha+\beta i$, $x_2=\alpha-\beta i$ e $x_3\in\mathbb{R}$, as raízes da equação $x^3+px+q=0$.

De $x_2+x_2+x_3=0$ vem que $\alpha+\beta i+\alpha-\beta i+x_3=0$, ou seja, $x_3+2\alpha=0$, ou seja, $x_3=-2\alpha$. Temos também da teoria dos números complexos, que $x_1.x_2=(\alpha+\beta i).(\alpha-\beta i)=\alpha^2+\beta^2$. De $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=p$ vem que $x_1x_2+x_3.(x_1+x_2)=\alpha^2+\beta^2+x_3.2\alpha=p$ e, assim, $\alpha^2+\beta^2+(-2\alpha).2\alpha=p$, e, portanto, $p=\beta^2-3\alpha^2$. Daí, $\frac{p^3}{27}=\frac{(\beta^2-3\alpha^2)^3}{27}$. De $x_1x_2x_3=-q$ vem que $x_1x_2x_3=(\alpha^2+\beta^2).(-2\alpha)=-q$ e, portanto, $\frac{q^2}{4}=\frac{[(\alpha^2+\beta^2).(-2\alpha)]^2}{4}=\alpha^2.(\alpha^2+\beta^2)^2$.

Daí, $\Delta=\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}=\frac{(\beta^2-3\alpha^2)^3}{27}+\alpha^2.(\alpha^2+\beta^2)^2$. Logo,

$$\Delta=\frac{\beta^6-9\beta^4\alpha^2+27\beta^2\alpha^4-27\alpha^6}{27}+\alpha^6+2\alpha^4\beta^2+\alpha^2\beta^4\ ,$$

e, portanto,

$$\Delta=\frac{\beta^6}{27}+3\alpha^4\beta^2+\frac{2}{3}\alpha^2\beta^4.$$

Se $\beta=0$, teremos que $\Delta=0$, e teremos três raízes reais, sendo duas delas iguais, conforme visto no caso 1. Aqui teríamos $x_1=x_2=\alpha, x_3\in\mathbb{R}$. Supondo $\beta\neq 0$, temos $3\alpha^4\beta^2+\frac{2}{3}\alpha^2\beta^4\geq 0$ e $\frac{\beta^6}{27}>0$. Portanto, temos que $\Delta>0$. Portanto, segue o resultado:

Proposição 2: A equação $x^3+px+q=0$ possui duas raízes complexas e uma raiz real se, e somente se, $\Delta>0$.

1.5 – Detalhando um pouco mais o caso do discriminante negativo

Quando $\Delta < 0$ teremos: $u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}$ e $v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}$. Escrevendo esses números na forma trigonométrica,

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta} = -\frac{q}{2} + i.\sqrt{-\Delta} = \ |u^3|.(\cos\theta + i.sen\theta)$$

$$v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta} = -\frac{q}{2} - i.\sqrt{-\Delta} = \ |v^3|.(\cos\phi + i.sen\phi)$$

Como u^3 e v^3 são complexos e conjugados, os módulos de u^3 e v^3 são iguais, logo,

$$|u^3| \ = \ |v^3| \ = \sqrt{(-\frac{q}{2})^2 + (\sqrt{-\Delta})^2} = \sqrt{\frac{q^2}{4} - \Delta} = \sqrt{-\frac{p^3}{27}}$$

enquanto os argumentos são simétricos e, portanto, temos $\cos\theta = \cos\phi$ e $\theta = \arccos(\frac{-q/2}{\sqrt{-p^3/27}}) = \arccos(-\frac{q}{2}.\sqrt{-\frac{27}{p^3}})$.

Dai,

$$u = \sqrt[3]{u^3} = \sqrt[3]{\sqrt{-p^3/27}}.[\cos(\frac{\theta}{3} + \frac{2k\pi}{3}) + i.sen(\frac{\theta}{3} + \frac{2k\pi}{3})]$$

e

$$v = \sqrt[3]{v^3} = \sqrt[3]{\sqrt{-p^3/27}}.[\cos(\frac{\theta}{3} + \frac{2k\pi}{3}) - i.sen(\frac{\theta}{3} + \frac{2k\pi}{3})]\text{, para } k = 0,1,2\,.$$

Ou ainda,

$$u = \sqrt[3]{u^3} = \sqrt{-p/3}\ .[\cos(\frac{\theta}{3} + \frac{2k\pi}{3}) + i.sen(\frac{\theta}{3} + \frac{2k\pi}{3})]$$

e

$$v=\sqrt[3]{v^3}=\sqrt{-p/3}.[\cos(\frac{\theta}{3}+\frac{2k\pi}{3})-i.sen(\frac{\theta}{3}+\frac{2k\pi}{3})]\text{, para } k=0,1,2.$$

Para $k=0$ obtemos:

$$u_1=\sqrt{-p/3}.[\cos(\frac{\theta}{3})+i.sen(\frac{\theta}{3})] \text{ e } v_1=\sqrt{-p/3}.[\cos(\frac{\theta}{3})-i.sen(\frac{\theta}{3})].$$

Assim,

$$u_1+v_1=2.\sqrt{-\frac{p}{3}}.\cos(\frac{\theta}{3})=2.\sqrt{-\frac{p}{3}}.\cos(\frac{1}{3}\arccos(-\frac{q}{2}.\sqrt{-\frac{27}{p^3}})).$$

Note que $u_1+v_1\in\mathbb{R}$.

Para $k=1$ obtemos:

$$u_2=\sqrt{-p/3}.[\cos(\frac{\theta}{3}+\frac{2\pi}{3})+i.sen(\frac{\theta}{3}+\frac{2\pi}{3})]$$

e

$$v_2=\sqrt{-p/3}.[\cos(\frac{\theta}{3}+\frac{2\pi}{3})-i.sen(\frac{\theta}{3}+\frac{2\pi}{3})]\text{. Assim,}$$

$$u_2+v_2=2.\sqrt{-\frac{p}{3}}.\cos(\frac{\theta}{3}+\frac{2\pi}{3})=2.\sqrt{-\frac{p}{3}}.\cos(\frac{1}{3}\arccos(-\frac{q}{2}.\sqrt{-\frac{27}{p^3}})+\frac{2\pi}{3}).$$

Note que $u_2+v_2\in\mathbb{R}$.

Para $k=2$ obtemos:

$$u_3=\sqrt{-p/3}.[\cos(\frac{\theta}{3}+\frac{4\pi}{3})+i.sen(\frac{\theta}{3}+\frac{4\pi}{3})]$$

e

$$v_3=\sqrt{-p/3}.[\cos(\frac{\theta}{3}+\frac{4\pi}{3})-i.sen(\frac{\theta}{3}+\frac{4\pi}{3})].$$

Assim,

$$u_3 + v_3 = 2.\sqrt{-\frac{p}{3}}.\cos(\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}) = 2.\sqrt{-\frac{p}{3}}.\cos(\frac{1}{3}\arccos(-\frac{q}{2}.\sqrt{-\frac{27}{p^3}}) + \frac{4\pi}{3}) .$$

Note que $u_3 + v_3 \in \mathbb{R}$.

Estas são as três raízes da equação $x^3 + px + q = 0$ e são todas reais. Os fatos expostos acima juntamente com o que expomos no caso 2 garantem que a equação $x^3 + px + q = 0$ possui três raízes reais e distintas se, e somente se, $\Delta < 0$. Assim acabamos de demonstrar o seguinte resultado:

Proposição 3: A cúbica $x^3 + px + q = 0$ possui três raízes reais e distintas se, e somente se, $\Delta < 0$.

1.6 – Exemplos numéricos

Vamos aplicar os métodos desenvolvidos nesta seção para alguns casos particulares.

Exemplo 1: Na equação $y^3 - y^2 - y + 1 = 0$ fazemos $y = x - \frac{b}{3a} = x + \frac{1}{3}$.

Assim, obtemos: $(x + \frac{1}{3})^3 - (x + \frac{1}{3})^2 - (x + \frac{1}{3}) + 1 = 0$. Resolvendo as potências e agrupando os termos semelhantes obtemos: $x^3 - \frac{4}{3}x + \frac{16}{27} = 0$. Logo, $p = -\frac{4}{3}$ e $q = \frac{16}{27}$. Assim, temos:

$$\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{(16/27)^2}{4} + \frac{(-4/3)^3}{27} = 0.$$

Portanto, como $\Delta = 0$ teremos três raízes reais, sendo duas iguais, ou seja, temos uma raiz de multiplicidade 2. Resolvendo,

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}=\sqrt[3]{\frac{-16/27}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-16/27}{2}}=-\frac{4}{3}\ .$$

Logo, $x_1=-\frac{4}{3}$ é uma das raízes da equação $x^3-\frac{4}{3}x+\frac{16}{27}=0$. Sendo x_2 e x_3 as outras raízes, temos das relações de Girard, que: $x_1+x_2+x_3=0$, ou seja, $x_2+x_3=\frac{4}{3}$ e $x_1.x_2.x_3=-\frac{16}{27}$, ou seja, $x_2.x_3=\frac{4}{9}$. Portanto, x_2 e x_3 são as raízes da equação $x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}=0$. Mas, $x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}=(x-\frac{2}{3})^2$ e, portanto, $x_2=x_3=\frac{2}{3}$.

Portanto, as raízes da equação $y^3-y^2-y+1=0$ são: $y_1=x_1+\frac{1}{3}=-\frac{4}{3}+\frac{1}{3}=-1$ e $y_2=y_3=x_2+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1$. O conjunto solução da equação $y^3-y^2-y+1=0$ é o conjunto $S=\{-1,1\}$.

Exemplo 2: Na equação $y^3-6y^2+11y-6=0$ fazemos a substituição $y=x+2$, desenvolvemos as potências e agrupamos os termos semelhantes, obtendo a equação $x^3-x=0$. É claro que temos a relação $x^3-x=x(x-1)(x+1)$, e, portanto as raízes são 0, 1 e – 1. Mas vamos resolver a equação aplicando a fórmula de Cardano-Tartágila. Temos, $p=-1$ e $q=0$. Dai, $\Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=\frac{0^2}{4}+\frac{(-1)^3}{27}=-\frac{1}{27}$ e temos $\Delta<0$ e, portanto, temos três raízes reais e distintas.

Resolvendo,

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}=\sqrt[3]{0+\sqrt{-\frac{1}{27}}}+\sqrt[3]{0-\sqrt{-\frac{1}{27}}}\ .$$

Sejam $u=0+i.\sqrt{\frac{1}{27}}$ e $v=0-i.\sqrt{\frac{1}{27}}$. Temos que $|u|\ =\ |v|\ =\sqrt{\frac{1}{27}}$ e

$$\theta=\arccos(-\frac{q}{2}.\sqrt{-\frac{27}{p^3}})=\arccos(0)=\frac{\pi}{2}.$$

Daí,

$$\sqrt[3]{u}=\sqrt{\frac{1}{3}}.(\cos(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3})+i.sen(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}))$$

e

$$\sqrt[3]{v}=\sqrt{\frac{1}{3}}.(\cos(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3})-i.sen(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}))\text{, para } k=0,1,2\,.$$

Para $k=0$ temos:

$$\sqrt[3]{u}=\sqrt{\frac{1}{3}}.(\cos(\frac{\pi}{6})+i.sen(\frac{\pi}{6}))\text{ e, }\sqrt[3]{v}=\sqrt{\frac{1}{3}}.(\cos(\frac{\pi}{6})-i.sen(\frac{\pi}{6}))\,.$$

Daí,

$$x_1=\sqrt[3]{u}+\sqrt[3]{v}=2\sqrt{\frac{1}{3}}.\cos(\frac{\pi}{6})=\frac{2}{\sqrt{3}}.\frac{\sqrt{3}}{2}=1\text{ e, portanto, }y_1=x_1+2=3\,.$$

Para $k=1$ temos:

$$\sqrt[3]{u}=\sqrt{\frac{1}{3}}.(\cos(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3})+i.sen(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}))$$

e

$$\sqrt[3]{v}=\sqrt{\frac{1}{3}}.(\cos(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3})-i.sen(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}))\,.$$

Daí,

$$x_2=\sqrt[3]{u}+\sqrt[3]{v}=2\sqrt{\frac{1}{3}}.\cos(\frac{5\pi}{6})=\frac{2}{\sqrt{3}}.(-\frac{\sqrt{3}}{2})=-1\text{ e, portanto, }y_2=x_2+2=1\,.$$

Para $k=2$ temos:

$$\sqrt[3]{u}=\sqrt{\frac{1}{3}}.(\cos(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3})+i.sen(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}))$$

e

$$\sqrt[3]{v} = \sqrt{\frac{1}{3}}.(\cos(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}) - i.sen(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}))\ .$$

Daí,

$$x_3 = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v} = 2\sqrt{\frac{1}{3}}.\cos(\frac{3\pi}{2}) = \frac{2}{\sqrt{3}}.0 = 0 \text{ e, portanto, } y_3 = x_3 + 2 = 2.$$

O conjunto solução da equação $y^3 - 6y^2 + 11y - 6 = 0$ é $S = \{1, 2, 3\}$.

Exemplo 3: Considere a equação $y^3 - 6y^2 + 10y - 8 = 0$. Fazendo a substituição $y = x + 2$, resolvendo as potências e agrupando os termos semelhantes, obtemos a equação: $x^3 - 2x - 4 = 0$. Logo, $p = -2$ e $q = -4$. Daí, $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{(-4)^2}{4} + \frac{(-2)^3}{27} = \frac{100}{27}$. Assim, vemos que $\Delta > 0$ e, portanto, a equação possui uma raiz real e duas raízes complexas e conjugadas.

Resolvendo,

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} = \sqrt[3]{2 + \sqrt{\frac{100}{27}}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{\frac{100}{27}}}\ .$$

Olhando para a equação $x^3 - 2x - 4 = 0$ percebemos que $x = 2$ é raiz. Dessa forma temos que $\sqrt[3]{2 + \sqrt{\frac{100}{27}}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{\frac{100}{27}}} = 2$. Mas, esse fato não é fácil de verificar algebricamente. Foi Rafael Bombelli (1526 – 1572) quem analisou completamente os tipos particulares de equação cúbica, em seu trabalho Álgebra (1572). Abaixo descrevemos em linguagem atual o procedimento de Bombelli para esse exemplo.

Fazemos $\sqrt[3]{2 + \sqrt{\frac{100}{27}}} = a + \sqrt{b}$ (I) e $\sqrt[3]{2 - \sqrt{\frac{100}{27}}} = a - \sqrt{b}$ (II). Daí, fazendo $(I).(II)$ obtemos a relação: $a^2 - b = \frac{2}{3}$. Ainda, fazendo $(I)^3 + (II)^3$ obtemos a relação $a^3 + 3ab = 2$. Logo os valores de a e b satisfazem o sistema de equações $a^2 - b = \frac{2}{3}$ (III) e

$a^3+3ab=2$ (IV). Agora, de (III) vem que $b=a^2-\frac{2}{3}$ (V) e daí substituindo em (IV) obtemos a equação $4a^3-2a-2=0$ (VI). Uma raiz desta última equação é $a=1$. Daí, substituindo em (V) vem que $b=\frac{1}{3}$. Portanto, $x=(1+\sqrt{\frac{1}{3}})+(1-\sqrt{\frac{1}{3}})=2$ é uma raiz da equação $x^3-2x-4=0$.

O trabalho de Bombelli foi de grande importância, pois os números complexos surgiram ou começaram a ser utilizados a partir dele. Assim, foram lançadas as bases para o desenvolvimento da teoria dos números complexos.

Daí, sabendo que $x=2$ é uma raiz da equação $x^3-2x-4=0$ e fatorando a expressão x^3-2x-4 temos: $x^3-2x-4=(x-2).(x^2+2x+2)$. Portanto, $x^3-2x-4=0$ se, e somente se, $x-2=0$ ou $x^2+2x+2=0$. Resolvendo a equação $x^2+2x+2=0$ obtemos:

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{-4}}{2}=\frac{-2\pm 2i}{2}=-1\pm i\ .$$

Portanto, as raízes da equação $y^3-6y^2+10y-8=0$ são: $y_1=2+2=4$, $y_2=-1+i+2=1+i$ e $y_3=-1-i+2=1-i$. O conjunto solução da equação $y^3-6y^2+10y-8=0$ é $S=\{4,1+i,1-i\}$.

2. EQUAÇÃO QUÁRTICA

2.1 – A história

A solução das equações quárticas, ou equações do 4º grau, foram descobertas por Ludovico Ferrari (1522 – 1560). Ferrari, nascido em Bolonha, de família muito humilde, aos 15 anos foi trabalhar como servo na residência de Cardano, o qual percebendo sua notável inteligência o promoveu a seu secretário. Cardano tinha um desafio a resolver que envolvia a equação $x^4+6x^2-60x+36=0$ e após inúmeras tentativas sem êxito, passou a questão para que Ferrari resolvesse. E Ferrari não só resolveu a questão como encontrou um método de resolução para as equações do 4º grau em geral. O método encontrado por Ferrari foi publicado em Ars Magna, em continuidade à solução das equações do 3º grau. O método de Ferrari consiste em reescrever a equação de modo a se obter quadrados perfeitos e assim reduzir o problema a resolução de equações do 2º grau.

2.2 – Forma reduzida

A forma geral (ou canônica) da equação do quarto grau, na variável *y*, é dada por:

$$ay^4+by^3+cy^2+dy+e=0, \tag{1}$$

com $a,b,c,d,e\in\mathbb{R}$ e $a\neq 0$. Fazendo a substituição $y=x+h$, obtemos:

$$a(x+h)^4+b(x+h)^3+c(x+h)^2+d(x+h)+e=0.$$

Desenvolvendo os produtos e agrupando os fatores semelhantes em *x*, obtemos:

$$ax^4+(4ah+b)x^3+(6ah^2+3bh+c)x^2+(4ah^3+3bh^2+2ch+d)x+(ah^4+bh^3+ch^2+dh+e)=0$$

Multiplicando a equação por $\frac{1}{a}$, obtemos:

$$x^4+(4h+\frac{b}{a})x^3+(6h^2+\frac{3bh}{a}+\frac{c}{a})x^2+(4h^3+\frac{3bh^2}{a}+\frac{2ch}{a}+\frac{d}{a})x+(h^4+\frac{bh^3}{a}+\frac{ch^2}{a}+\frac{dh}{a}+\frac{e}{a})=0.$$

Com o objetivo de zerar o coeficiente do termo do terceiro grau, isto é, $4h+\frac{b}{a}=0$, fazemos $h=-\frac{b}{4a}$. Assim, chegamos à equação reduzida do quarto grau, sem o termo de x^3,

$$x^4+Ax^2+Bx+C=0, \qquad (2)$$

onde seus coeficientes são dados por:

$$A=\frac{c}{a}-\frac{3b^2}{8a^2},\ B=\frac{d}{a}-\frac{bc}{2a^2}+\frac{b^3}{8a^3} \text{ e } C=\frac{e}{a}-\frac{3b^4}{256a^4}+\frac{b^2c}{16a^3}-\frac{bd}{4a^2}.$$

2.3 – Solução da equação quártica

Na equação $x^4+Ax^2+Bx+C=0$ somamos e subtraímos $2sx^2+s^2$ ao seu primeiro membro, o que leva à

$$x^4+Ax^2+Bx+C+2sx^2+s^2-2sx^2-s^2=0.$$

Daí, agrupamos a expressão em duas somas da seguinte forma:

$$(x^4+2sx^2+s^2)+(Ax^2+Bx+C-2sx^2-s^2)=0.$$

Temos que x^2 é fator comum em duas parcelas no segundo parênteses, assim reescrevemos:

$$(x^4+2sx^2+s^2)+((A-2s)x^2+Bx+C-s^2)=0.$$

Observamos que $x^4+2sx^2+s^2=(x^2+s)^2$, reescrevemos a expressão da seguinte forma:

$$(x^2+s)^2-((2s-A)x^2-Bx-C+s^2)=0.$$

O objetivo agora é obter $(2s-A)x^2-Bx-C+s^2$ como um produto de fatores lineares, isto é,

$(2s-A)x^2-Bx-C+s^2=(2s-A)(x-x_+)(x-x_-)$, onde x_+ e x_- são as soluções da equação do segundo grau $(2s-A)x^2-Bx-C+s^2=0$.

Temos, $x=\dfrac{B\pm\sqrt{B^2-4(2s-A)(s^2-C)}}{2(2s-A)}$, de onde vem que,

$$x_+=\frac{B+\sqrt{B^2-4(2s-A)(s^2-C)}}{2(2s-A)} \text{ e } x_-=\frac{B-\sqrt{B^2-4(2s-A)(s^2-C)}}{2(2s-A)}.$$

Se fizermos $B^2-4(2s-A)(s^2-C)=0$, teremos que $x_+=x_-=\dfrac{B}{2(2s-A)}$. Dessa forma o termo $(2s-A)x^2-Bx-C+s^2$ se transforma em um trinômio quadrado perfeito. Para que isso aconteça, devemos ter

$$B^2-4(2s-A)(s^2-C)=0,$$

ou seja,

$$8s^3-4As^2-8Cs+(4AC-B^2)=0,$$

que é uma cúbica em *s*, equação esta que já sabemos resolver. Sendo $x_+=x_-=\dfrac{B}{2(2s-A)}$ temos que

$$(2s-A)x^2-Bx-C+s^2=(2s-A)(x-\frac{B}{2(2s-A)})^2.$$

Daí a equação

$$(x^2+s)^2-((2s-A)x^2-Bx-C+s^2)=0,$$

pode ser escrita na forma

$$(x^2+s)^2-(2s-A)(x-\frac{B}{2(2s-A)})^2=0\ ,$$

ou equivalentemente,

$$(x^2+s)^2-(\sqrt{2s-A})^2.(x-\frac{B}{2(2s-A)})^2=0.$$

Ainda, podemos escrever

$$(x^2+s)^2-(x\sqrt{2s-A}-\frac{B\sqrt{2s-A}}{2(2s-A)})^2=0 \text{ ou } (x^2+s)^2-(x\sqrt{2s-A}-\frac{B}{2\sqrt{2s-A}})^2=0.$$

Portanto, a equação pode ser escrita na forma,

$$(x^2+s+x\sqrt{2s-A}-\frac{B}{2\sqrt{2s-A}}).(x^2+s-x\sqrt{2s-A}+\frac{B}{2\sqrt{2s-A}})=0.$$

Portanto,

$$x^2+s+x\sqrt{2s-A}-\frac{B}{2\sqrt{2s-A}}=0, \text{ ou } x^2+s-x\sqrt{2s-A}+\frac{B}{2\sqrt{2s-A}}=0.$$

As raízes da primeira equação verificam a equação do segundo grau em *U*;

$$U^2+U\sqrt{2s-A}+(s-\frac{B}{2\sqrt{2s-A}})=0.$$

E as raízes da segunda equação verificam a equação do segundo grau em *V*;

$$V^2-V\sqrt{2s-A}+(s+\frac{B}{2\sqrt{2s-A}})=0.$$

Assim, temos que as soluções da equação reduzida do quarto grau (2) são as soluções das equações:

$$U^2+U\sqrt{2s-A}+(s-\frac{B}{2\sqrt{2s-A}})=0 \text{ e } V^2-V\sqrt{2s-A}+(s+\frac{B}{2\sqrt{2s-A}})=0.$$

Assim, para resolvermos a equação do quarto grau $x^4+Ax^2+Bx+C=0$ precisamos resolver as duas equações do segundo grau acima, onde *s* é uma solução da cúbica $8s^3-4As^2-8Cs+(4AC-B^2)=0$.

As soluções da quártica reduzida são:

$$x_1=U_+=-\frac{1}{2}\sqrt{2s-A}+\frac{1}{2}\sqrt{-A-2s+\frac{2B}{\sqrt{2s-A}}}$$

$$x_2 = U_- = -\frac{1}{2}\sqrt{2s-A} - \frac{1}{2}\sqrt{-A-2s+\frac{2B}{\sqrt{2s-A}}}$$

$$x_3 = V_+ = \frac{1}{2}\sqrt{2s-A} + \frac{1}{2}\sqrt{-A-2s-\frac{2B}{\sqrt{2s-A}}}$$

$$x_4 = V_- = \frac{1}{2}\sqrt{2s-A} - \frac{1}{2}\sqrt{-A-2s-\frac{2B}{\sqrt{2s-A}}}$$

em que s é uma solução da equação cúbica auxiliar

$$8s^3 - 4As^2 - 8Cs + (4AC - B^2) = 0 .$$

As soluções da equação geral do quarto grau inicial $ay^4 + by^3 + cy^2 + dy + e = 0$ são dadas por:

$$y_i = x_i - \frac{b}{4a}, \text{ para } i \in \{1,2,3,4\} .$$

2.4 – Exemplo numérico

Consideremos a equação algébrica $x^4 - 15x^2 - 10x + 24 = 0$. Note que esta equação já está na forma reduzida. Aplicando o método de Ferrari, somamos e subtraímos $2sx^2 + s^2$ no primeiro membro da equação, obtendo assim a equação:

$$x^4 - 15x^2 - 10x + 24 + 2sx^2 + s^2 - 2sx^2 - s^2 = 0 .$$

Reorganizando os termos, obtemos a equação:

$$x^4 + 2sx^2 + s^2 = (2s+15)x^2 + 10x + s^2 - 24 .$$

Notemos que o primeiro membro da equação é um quadrado perfeito, pois $x^4 + 2sx^2 + s^2 = (x^2 + s)^2$. Quanto ao segundo membro da equação, $(2s+15)x^2 + 10x + s^2 - 24$ vamos escrevê-lo como um produto de fatores lineares, de forma que o mesmo seja um quadrado perfeito. Para que isso aconteça, devemos ter $10^2 - 4.(2s+15).(s^2 - 24) = 0$. Esta última equação é equivalente à equação $2s^3 + 15s^2 - 48s - 385 = 0$. Observando a equação vemos que $s = 5$ é solução da mesma. Substituindo $s = 5$ na equação

$x^4+2sx^2+s^2=(2s+15)x^2+10x+s^2-24$, obtemos a equação $x^4+10x^2+25=25x^2+10x+1$, e esta possui os dois membros sendo quadrados perfeitos, isto é, $(x^2+5)^2=(5x+1)^2$.

Extraindo a raiz quadrada nos dois lados da equação, teremos $|x^2+5| = |5x+1|$, ou equivalentemente, $x^2+5=5x+1$ ou $x^2+5=-(5x+1)$. Resolvendo as duas equações do segundo grau, obtemos a solução da equação do quarto grau dada, cujo conjunto solução é dado por $S=\{-2,-3,1,4\}$.

3. EQUAÇÕES ALGÉBRICAS DE GRAU $n \geq 5$

Até o ano de 1545, ano em que Cardano publicou seu livro Ars Magna, as equações até grau 4 tinham suas soluções por meio de radicais. As equações de graus 1, 2 e 3 apresentavam fórmulas para suas resoluções e embora a equação de grau 4 não apresentava uma fórmula, a mesma era manipulada algebricamente até chegar à equação do segundo grau, logo ela também é solúvel por radicais.

Naturalmente, o próximo passo seria encontrar uma fórmula, ou técnicas de manipulação para encontrar a solução da equação do quinto grau. Aplicando a mesma técnica que foi aplicada nas equações de terceiro e quarto graus, é possível escrever a equação completa do quinto grau na sua forma reduzida sem o termo de quarto grau, isto é, a equação $ay^5 + by^4 + cy^3 + dy^2 + ey + f = 0$ pode ser escrita na sua forma reduzida $x^5 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$, fazendo a substituição $y = x - \frac{b}{5a}$. De um modo geral, toda equação polinomial de grau *n* na variável *y*, $a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + ... + a_3 y^3 + a_2 y^2 + a_1 y + a_0 = 0$ pode ser escrita como uma equação de grau *n*, na variável *x* sem o termo de grau $n-1$, bastando fazer a substituição $y = x - \frac{a_{n-1}}{na_n}$.

Por aproximadamente dois séculos e meio, vários matemáticos se dedicaram na busca pela solução da equação do quinto grau, mas nenhum obteve êxito. Euler, por volta de 1750, tentou reduzir a solução da equação do quinto grau para uma equação quártica, mas não obteve sucesso, como também, Lagrange, por volta de 1780. Após muitas tentativas sem êxito, não tendo sido encontrada nenhuma solução por meio de radicais para equações de grau superior a cinco, era natural que alguns estudiosos pensassem na possibilidade de tais equações não terem soluções por meio de radicais. No final do século XVIII, Ruffini (1765 – 1822), deu uma prova sem muito rigor matemático da impossibilidade de resolver equações de graus maiores ou iguais a cinco por meio de radicais.

No início do século XIX nascem dois gênios da matemática. Niels Henrik Abel (1802 – 1829) e Évariste Galois (1811 – 1832). Segundo Garbi [7], a vida de Abel foi curta e muito sofrida. Passou por muitas dificuldades econômicas e tinha uma saúde precária. Em 1823, Abel acreditava ter encontrado a fórmula para a resolução das equações do quinto grau. Seus professores não encontraram nenhum erro no processo e enviaram para o matemático

Ferdinand Degen, para que opinasse. Este também não identificou nenhum erro, mas, pediu para Abel maiores informações. Ao explicar, o próprio Abel descobriu que sua solução estava incorreta. A partir desse momento a obsessão de Abel para resolver as equações do quinto grau só aumentaram.

No final do ano de 1823, Abel finalmente demonstrou de um modo geral que é impossível resolver equações do quinto grau utilizando apenas as operações algébricas. Abel publicou seu trabalho em francês, buscando atingir a melhor comunidade matemática da época, que se encontrava em Paris. Dessa forma Abel provou o resultado de Ruffini.

Galois dá uma resposta final sobre a questão de solubilidade por radicais de equações algébricas. Este desenvolveu uma nova teoria que, não apenas provou a insolubilidade por radicais das equações algébricas de grau maior ou igual a cinco, mas contribuiu para muitas outras áreas da Álgebra. Para melhor entendermos alguns resultados da solubilidade por radicais dada por Galois, faremos agora alguns comentários que são pré-requisitos para tal estudo.

3.1 – Teoria dos grupos

Dado G um conjunto não vazio e uma operação $*: G\times G \to G$, dizemos que G é um *grupo* se $*$ satisfaz as seguintes condições:

i) Associatividade, isto é, $a*(b*c)=(a*b)*c,\ \forall a,b,c \in G$;

ii) Existe um elemento neutro, isto é, $\exists\ e \in G$ tal que $a*e=a=e*a,\ \forall a \in G$;

iii) Todo elemento possui um elemento inverso, isto é, $\forall a \in G,\ \exists\ b \in G$ tal que $a*b=b*a=e$.

Dizemos que o grupo G é *abeliano* ou *comutativo* se valer:

iv) Comutatividade, isto é, $a*b=b*a,\ \forall a,b \in G$.

Podemos observar facilmente que na estrutura de um grupo temos:

1) O elemento neutro é único.

2) O elemento inverso é único.

Sejam S um conjunto não vazio e $\circ$ a operação de composição de funções. Consideremos o conjunto $G=\{f:S\to S: f \text{ bijetiva}\}$. Dessa forma, G é um grupo, chamado de *grupo das Permutações do conjunto S*. Se $S=\{1,2,3,...,n\}$ denotamos esse grupo por S_n. O número de elementos de S_n é $n!$. Observemos que, para $n\geq 3$ o grupo S_n não é abeliano.

Sejam G um grupo e H um subconjunto não vazio de G. Dizemos que H é um *subgrupo* de G, e denotamos por $H\leq G$, se H for um grupo com a mesma operação de G. Uma condição necessária e suficiente para que H seja um subgrupo de G é que H seja não vazio e para todo $a,b\in H$ deve-se ter que $ab^{-1}\in H$.

Na sequência deste capítulo que segue consideraremos sempre G um grupo e H um subgrupo de G.

Dado um elemento $x\in G$, o conjunto $Hx=\{hx/h\in H\}$ é chamado de *classe lateral à direita de H em G*, e o conjunto de todas as classes laterais a direita de H em G, denotado por $\frac{G}{H}$, isto é, $\frac{G}{H}=\{Hx/x\in G\}$, é chamado de conjunto quociente.

Sendo G um grupo finito representamos por $|G|$ a *ordem de G*, sendo definido como o número $|G|$ de elementos do grupo G. Um resultado importante é enunciado no seguinte:

Teorema (Lagrange): Se G é um grupo finito e H é um subgrupo de G, então $|H|$ é um divisor de $|G|$.

A demonstração deste importante teorema pode ser encontrada em [8].

3.2 – Subgrupos normais e grupos solúveis

Dizemos que elementos $x,y\in G$ são conjugados se existe $g\in G$ tal que $y=g^{-1}xg$. Denotaremos $x^g=g^{-1}xg$. A classe $C_x=\{x^g/g\in G\}$ é chamada de *classe de conjugação* determinada pelo elemento $x\in G$. Sendo H um subgrupo de G, definimos o conjunto $H^g=\{h^g=g^{-1}hg/h\in H\}$, o qual é também um subgrupo de G. Dizemos que um subgrupo H de G é normal em G se $H^g\subset H$, $\forall g\in G$. Para representar que H é um subgrupo normal de G usamos a notação $H\lhd G$.

Os subgrupos triviais de *G*, $\{e\}$ e *G*, são sempre subgrupos normais de *G*. Se *G* é um grupo abeliano, então qualquer subgrupo *H* de *G* é normal em *G*.

Dizemos que um grupo *G* é um *grupo simples* se os únicos subgrupos normais de *G* são os triviais. Dessa forma temos que os únicos grupos simples abelianos são os grupos cíclicos de ordem prima.

Para definirmos *grupo quociente*, consideremos *G* um grupo e *N* um subgrupo normal de *G*. Graças à normalidade de *N*, definimos de modo natural, a operação $NxNy = Nxy$ no conjunto quociente $\frac{G}{N}$. Pode-se mostrar que $\frac{G}{N}$ é um grupo com esta operação, onde o elemento neutro é Ne, onde *e* é o elemento neutro do grupo *G*, e o inverso do elemento Nx é Nx^{-1}, pois $NxNx^{-1} = Nxx^{-1} = Ne$.

Um grupo *G* é dito *solúvel* se existem subgrupos $\{e\} = G_0, G_1, ..., G_{n-1}, G_n = G$ de *G* de modo que $G_{i-1} \triangleleft G_i$ para todo $i \in \{1, 2, ..., n\}$ e $\frac{G_i}{G_{i-1}}$ é abeliano para todo $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Assim temos, $\{e\} = G_0 \le G_1 \le ... \le G_{n-1} \le G_n = G$, chamada série normal de *G*. Um resultado que nos interessa neste trabalho é que pode-se mostrar que o grupo S_n para $n \ge 5$, não é solúvel.

3.3 – Grupos isomorfos

Sejam *G* e *J* grupos e consideremos a aplicação $f : G \to J$. Dizemos que *f* é um *homomorfismo* se, para quaisquer $x, y \in G$, valer $f(xy) = f(x)f(y)$. Se *f* for um homomorfismo bijetivo, dizemos que *f* é um *isomorfismo*. Se existir um isomorfismo de *G* em *J*, dizemos que *G* e *J* são grupos *isomorfos* e denotamos por $G \simeq J$. Um isomorfismo $f : G \to G$ é dito um *automorfismo de G* e o conjunto de todos os automorfismos de *G* é denotado por *Aut G*. Observemos que sendo *G* um grupo, o conjunto *Aut G* também é um grupo com a operação de composição de funções.

3.4 – Extensões de corpos e grupo de Galois

Dados um conjunto não vazio K e duas operações $+, \cdot : K \times K \to K$ dizemos que o terno $(K, +, \cdot)$ é um corpo se, e somente se, $(K, +)$ e $(K^*, \cdot)$ forem grupos abelianos e a operação $\cdot$ for distributiva em relação à operação $+$.

Sejam K e F dois corpos. Analogamente ao caso de grupos, uma aplicação $f : K \to F$ é dito um *homomorfismo* de K em F se, para quaisquer $x, y \in K$, valer $f(x+y) = f(x) + f(y)$ e $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$. Se f for um homomorfismo bijetivo, dizemos que f é um *isomorfismo*. Se existir um isomorfismo de K em F, dizemos que K e F são *isomorfos* e denotamos por $K \simeq F$. Um isomorfismo $f : K \to K$ é dito um *automorfismo de K* e o conjunto de todos os automorfismos de K é denotado por *Aut K*.

Dado um corpo F, dizemos que K é uma *extensão* de F, e denotamos por $K \supset F$, se F for um subcorpo de K. Sendo K uma extensão de F podemos ver K como um espaço vetorial sobre F, onde os vetores são elementos de K e os escalares são os elementos de F. Dessa forma podemos falar em base e dimensão de uma extensão. Por exemplo, $\mathbb{C}$ é uma extensão de $\mathbb{R}$ de dimensão 2, onde o conjunto $\{1, i\}$ é uma base de $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$, e $\mathbb{R}$ é uma extensão infinita de $\mathbb{Q}$.

Dada uma extensão $K \supset F$ do corpo F, temos um processo para criar corpos intermediários entre F e K. Se $A \subset K$ for um subconjunto qualquer de K, a adjunção $K(A)$ é o menor subcorpo de K contendo F e A. O caso mais simples é quando A for um conjunto unitário, ou seja, quando se tem a adjunção de um único elemento. Por exemplo, o conjunto $\mathbb{Q}[\sqrt{2}\,] = \{a + b\sqrt{2} \,/\, a, b \in \mathbb{Q}\}$ é uma extensão do corpo $\mathbb{Q}$ dos números racionais, sendo um corpo intermediário entre $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$, e o menor subcorpo de $\mathbb{R}$ contendo $\mathbb{Q}$ e $\sqrt{2}$. Analogamente o conjunto $\mathbb{Q}[\,i\,] = \{a + bi \,/\, a, b \in \mathbb{Q}\}$ é uma extensão do corpo $\mathbb{Q}$ dos números racionais.

Uma extensão K de F é dita uma *extensão algébrica* se todo elemento $\alpha \in K$ for raiz de um polinômio com coeficientes em F.

Seja $K \supset F$ uma extensão do corpo *F*. Consideremos o automorfismo $f : K \to K$ do corpo *K*. Se a restrição de *f* ao corpo *F* for a identidade, isto é, $f(x) = x$ para todo elemento $x \in F$, dizemos que *f* é um *F-automorfismo de K*.

Exemplo: Seja $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \supset \mathbb{Q}$ a extensão do corpo dos números racionais e consideremos a aplicação φ: $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \to \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ definida por $\varphi(a+b\sqrt{2}) = a-b\sqrt{2}$. Temos que se *x* for um número racional, $\varphi(x) = \varphi(x+0\sqrt{2}) = x-0\sqrt{2} = x$. Logo a restrição de φ ao corpo $\mathbb{Q}$ é a identidade. Além disso, φ é um automorfismo. De fato, dados $a+b\sqrt{2}$, $c+d\sqrt{2}$ $\in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ temos:

$$\varphi((a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})) = \varphi((ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}) = (ac+2bd)-(ad+bc)\sqrt{2}.$$

Por outro lado,

$$\varphi(a+b\sqrt{2})\varphi(c+d\sqrt{2}) = (a-b\sqrt{2})(c-d\sqrt{2}) = (ac+2bd)-(ad+bc)\sqrt{2}.$$

Ainda,

$$\varphi((a+b\sqrt{2})+(c+d\sqrt{2})) = \varphi((a+c)+(b+d)\sqrt{2}) = (a+c)-(b+d)\sqrt{2} = (a-b\sqrt{2})+(c-d\sqrt{2}) =$$
$$= \varphi(a+b\sqrt{2})+\varphi(c+d\sqrt{2}).$$

A verificação de que φ é bijetivo é imediato. Portanto, φ é um $\mathbb{Q}$*-automorfismo de* $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

Seja *F* um corpo. Definimos $F[x] = \{a_0 + a_1x + ... + a_nx^n \,/\, a_i \in F,\ n \in \mathbb{N}\}$, isto é, $F[x]$ é o conjunto de todos os polinômios, na variável *x*, com coeficientes em *F*. Seja $f(x) \in F[x]$ um polinômio não constante. Dizemos que uma extensão *K* de *F* é um *corpo de decomposição* (ou *corpo de raízes*) de $f(x)$ sobre *F*, se todas as raízes de $f(x)$ estão em *K* e todo subcorpo intermediário *E* tal que $F \subset E \subset K$ não tem essa propriedade. Em outras palavras, *K* é um corpo de raízes de $f(x)$ se $f(x)$ pode ser decomposto em fatores lineares do primeiro grau, $f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_n)$, em $F(x)$, e para todo corpo intermediário $F \subset E \subset K$, $f(x)$ não tem uma decomposição desse tipo. Dizemos que um polinômio irredutível $f(x) \in F[x]$ é *separável* quando não tem raízes múltiplas em qualquer corpo de decomposição.

Seja $K \supset F$ uma extensão do corpo *F*. Consideremos o conjunto de todos os *F-automorfismos de K*, que denotaremos por *G*(*K*;*F*). Pode-se mostrar que este conjunto, munido da operação de composição de funções, tem estrutura de grupo, denominado *grupo de Galois*. No caso de $K \supset \mathbb{Q}$ ser uma extensão de $\mathbb{Q}$, *K* contendo todas as raízes de um polinômio $f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$ com coeficientes em $\mathbb{Q}$, um automorfismo $\varphi : K \to K$ que fixa $\mathbb{Q}$, isto é, um $\mathbb{Q}$-*automorfismo*, leva uma raiz *r* de *f* em outra raiz de *f*. De fato, como *r* é raiz de *f*, temos $a_0 + a_1 r + ... + a_n r^n = 0$. Aplicando φ em ambos os membros da igualdade temos $\varphi(a_0 + a_1 r + ... + a_n r^n) = \varphi(0) = 0$. Daí, $\varphi(a_0) + \varphi(a_1 r) + ... + \varphi(a_n r^n) = 0$. Como φ é um $\mathbb{Q}$-*automorfismo* temos que $a_0 + a_1\varphi(r) + ... + a_n\varphi(r)^n = 0$, ou seja, $\varphi(r)$ é raiz de *f*. Portanto, a restrição de φ ao conjunto $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ induz uma função deste conjunto sobre ele mesmo. Além disso, essa função é injetiva, pois φ é um automorfismo. Como o conjunto é finito, segue que φ é sobrejetiva e, portanto, φ é uma bijeção do conjunto $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ sobre ele mesmo, ou então uma permutação do conjunto. Como as raízes distintas de um polinômio de grau *n* são no máximo *n*, vemos que a aplicação φ apenas alterna (ou permuta) as raízes de *f*, por isto é natural esperar a validade do seguinte:

Teorema: Seja *K* o corpo das raízes de um polinômio separável $f(x) \in F[x]$ que tem *m* raízes distintas. Então *G*(*K*;*F*) é isomorfo a um subgrupo de S_m.

A partir deste resultado, Galois pode vincular a existência de uma extensão de corpos com elementos expressos por radicais à solubilidade de um grupo, o *grupo de Galois* *G*($\mathbb{Q}$;*K*). Em particular, para um polinômio de grau 5, *G*($\mathbb{Q}$;*K*)$\simeq S_5$, o que mostra que polinômios de grau maior ou igual a cinco não tem raízes expressas por radicais, pois o grupo S_n, $n \geq 5$, não é solúvel.

4. UM POUCO MAIS SOBRE EQUAÇÕES ALGÉBRICAS E POLINÔMIOS

Quando estudam Matemática, a grande maioria dos alunos, se não sua totalidade, buscam logo uma aplicação imediata dos conteúdos estudados. Este não é o único caminho a ser seguido, pois mesmo um conteúdo essencialmente abstrato, como polinômios e equações algébricas, permite aplicações em vários contextos do dia a dia, visto que qualquer problema que possa ser resolvido através de números estará, direta ou indiretamente, ligado a uma equação algébrica.

Analisando as sete competências esperadas para o domínio da matemática apontadas pelo ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio, podemos notar que o conteúdo de polinômios não se enquadra diretamente em nenhuma delas. Dessa forma, não sendo prioridade para o ingresso em faculdades e universidades, muitas escolas aboliram esse conteúdo importante de suas estruturas curriculares. O reflexo maior incide sobre a formação deficiente dos alunos que ingressarem em cursos de graduação ligados as ciências exatas, mas não somente este, pois o desenvolvimento lógico-dedutivo propiciado pela matemática fica aflorado quando se explora sua forma abstrata. Os polinômios tem uma importância ímpar no desenvolvimento da álgebra e, em consequência, no desenvolvimento de competências imprescindíveis para a formação matemática. A sua exclusão do ensino médio também exclui o estudo de ferramentas e técnicas que exercem peso diferenciado na abstração e os processos lógico-dedutivos, tornando incompleta construção e generalização do conhecimento requerido.

O problema de calcular as raízes de equações algébricas sempre foi objeto de estudos dos matemáticos ao longo dos séculos e como vimos ao longo deste trabalho, o desenvolvimento da álgebra deve muito a esses estudos. Porém, um fato importante que devemos destacar aqui é o de dar a devida importância de saber resolver uma equação algébrica e a finalidade de sua resolução, ou seja, por que encontrar os zeros de uma equação algébrica ou de um polinômio? Qual é o significado dos zeros de uma equação polinomial? Não podemos deixar que as fórmulas sejam incorporadas por nossos alunos de modo a se tornarem um procedimento mecânico, ou simplesmente, um algoritmo vazio de significado. Uma metodologia a ser aplicada ao ensinar a resolução de equações do segundo grau, por exemplo, é o de, primeiramente, ensiná-los a resolver uma equação do segundo grau por fatoração. Somente depois de aprendidos o procedimento de fatoração ajudá-los a deduzir a fórmula. Nota-se que muitos alunos resolvem a equação quadrática simplificada $ax^2+bx=0$ utilizando a fórmula de resolução de equações do segundo grau, o que mostra a ausência completa de significados, onde basta substituir as letras por números para encontrar as raízes da equação.

Um dos objetivos de ensinar a fatorar uma equação do segundo grau é que escrevendo a equação $ax^2+bx+c=0$ na forma $a(x-x_1).(x-x_2)=0$, onde x_1 e x_2 são as raízes da equação, este processo pode ser generalizado para equações de graus superiores. Além disso, no momento em que um aluno se deparar com uma equação do segundo grau incompleta, do tipo $ax^2+bx=0$ ou $ax^2+c=0$, o mesmo poderá dar as raízes de um modo mais simples e rápido, sem a necessidade de ficar aplicando a fórmula. Os processos de construção da fatoração da equação do segundo grau devem ter uma abordagem explícita, e devem ser acessíveis a todos os alunos. Estes processos se tornarão os alicerces dessa abordagem no momento em que generalizarmos para equações polinomiais de graus superiores. Segundo Eisenberg [21], os polinômios são onipresentes em matemática, e é importante que os alunos os dominem com segurança.

No que diz respeito à fatoração de polinômios, temos resultados importantes como o teorema do resto que diz: “O resto da divisão de um polinômio $p(x)$ por $x-a$ é igual a $p(a)$”. Como consequência pode ser enunciado o seguinte resultado conhecido como teorema do fator: “Um polinômio $p(x)$ é divisível por $x-a$ se, e somente se, a é uma raiz de $p(x)$”. Ou seja, se um polinômio $p(x)$ é divisível por $x-a$, então existe um polinômio $q(x)$, com grau uma unidade menor que o grau de $p(x)$, de modo que $p(x)=(x-a).q(x)$.

Num primeiro momento os alunos compreendem o fato de a ser uma raiz de $p(x)$ se, e somente se, $x-a$ é um fator de $p(x)$. Porém a dificuldade encontrada se dá no momento de construir o polinômio $q(x)$. Este momento é muito oportuno para a apresentação do Algoritmo de Briot-Ruffini, como alternativa eficiente para o algoritmo da divisão. É momento apropriado também para relacionar divisão de polinômios com divisão de números inteiros, isto é, podemos discutir a divisão de polinômios fazendo uma analogia à aritmética dos números inteiros. Com efeito, podemos observar que os polinômios da forma $x-a$ fazem papel semelhante ao dos números primos na aritmética, tendo em vista que tem apenas os divisores triviais (polinômios constantes e ele próprio). Dessa forma, os alunos são estimulados a procurar analogias aritméticas para outras atividades algébricas, o que pode facilitar a compreensão e a consolidação das estruturas algébricas na formação matemática dos alunos.

A possibilidade de fatoração de um polinômio é garantida pelo Teorema Fundamental da Álgebra, demonstrado em 1799 por Carl F. Gauss. Este diz: “Todo polinômio $p(x)$ de grau maior ou igual a um possui pelo menos uma raiz complexa (real ou não)”. Assim, sendo *a* uma raiz do polinômio $p(x)$, temos que $p(x)=(x-a).q(x)$. Fazendo um processo análogo, buscamos uma raiz do polinômio $q(x)$, e sendo *b* uma raiz de $q(x)$, podemos escrever $p(x)=(x-a).(x-b).q_1(x)$. Dessa forma temos que *b* é também uma raiz de $p(x)$. Sendo $p(x)$ um polinômio de grau *n*, este processo pode ser repetido *n* vezes. Assim, se $p(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+...+a_2x^2+a_1x+a_0$ e $x_1, x_2, ..., x_n$, são as raízes de $p(x)$ temos que $p(x)=a_n(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)$. Logo, todo polinômio de grau *n* possui exatamente *n* raízes complexas.

É conhecido também da teoria dos números complexos que, se um número complexo da forma $a+bi$ é raiz de um polinômio, então, o conjugado $a-bi$ também é raiz. Como consequência, temos que todo polinômio de grau ímpar possui pelo menos uma raiz real. No polinômio $p(x)=a_n(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)$, agrupando as raízes complexas conjugadas, podemos escrever o polinômio $p(x)$ com todos os coeficientes reais, a menos que a_n seja complexo. De fato, temos que o produto $(x-(a+bi)).(x-(a-bi))$ pode ser escrito da seguinte forma:

$$(x-(a+bi)).(x-(a-bi)) = ((x-a)-bi)((x-a)+bi) = (x-a)^2+b^2.$$

Já vimos nos capítulos anteriores que as equações do terceiro e quarto graus possuem soluções por radicais, isto é, podemos resolvê-las através das operações algébricas fundamentais. Já para as equações graus cinco e superiores não há solução por radicais. Porém, na resolução das equações solúveis por radicais de graus três e quatro, muitas vezes não são interessantes os métodos acima expostos. Existem métodos mais práticos e mais simples para a resolução de muitos casos. Vejamos um exemplo:

Consideremos a equação $y^3 - 6y^2 + 10y - 8 = 0$, a qual fazendo a substituição $y = x + 2$ se transforma em $x^3 - 2x - 4 = 0$. Resolvendo pela fórmula de Cardano-Tartáglia obtemos a solução $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{\frac{100}{27}}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{\frac{100}{27}}}$. Porém, sabemos que $x = 2$ é raiz da equação $x^3 - 2x - 4 = 0$. Portanto segue que $\sqrt[3]{2 + \sqrt{\frac{100}{27}}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{\frac{100}{27}}} = 2$. Esta última igualdade não é fácil de ser verificada. No entanto, a fórmula de Cardano-Tartáglia nos apresenta a solução correta, mesmo que seja de um modo diferente e não simples. A partir daí, sabendo que $x = 2$ é raiz da equação $x^3 - 2x - 4 = 0$ e como $y = x + 2$, concluímos que $y = 4$ é solução da equação $y^3 - 6y^2 + 10y - 8 = 0$.

A verificação de que $y = 4$ é solução da equação $y^3 - 6y^2 + 10y - 8 = 0$ poderia ser feita de um modo mais simples e prático. Observe que 4 é um divisor de – 8. Enunciamos abaixo o teorema que relaciona a existência de raízes racionais de uma equação algébrica com coeficientes inteiros, observando que toda equação algébrica de coeficientes racionais pode ser transformada numa outra com coeficientes inteiros.

4.1 – Teorema das raízes racionais

Se um número racional $\frac{p}{q}$, com p e q primos entre si, é raiz da equação polinomial de coeficientes inteiros $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$, então p é um divisor de a_0 e q é um divisor de a_n.

Para a demonstração deste teorema, consideremos a equação algébrica $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ de coeficientes inteiros. Seja também o número racional $\frac{p}{q}$, com p e q primos entre si, e suponhamos que $\frac{p}{q}$ seja raiz da equação. Então,

$$a_n (\frac{p}{q})^n + a_{n-1}(\frac{p}{q})^{n-1} + ... + a_2 (\frac{p}{q})^2 + a_1 (\frac{p}{q}) + a_0 = 0.$$

Multiplicando a última igualdade por q^n tem-se:

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + ... + a_2 p^2 q^{n-2} + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0.$$

Dai, somando $-a_0 q^n$ em ambos os membros da equação acima, obtemos:

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + ... + a_2 p^2 q^{n-2} + a_1 p q^{n-1} = -a_0 q^n.$$

No primeiro membro da igualdade acima *p* é fator comum, daí:

$$p(a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q + ... + a_2 p q^{n-2} + a_1 q^{n-1}) = -a_0 q^n.$$

Agora, multiplicando a equação por $\frac{1}{p}$, obtemos:

$$a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q + ... + a_2 p q^{n-2} + a_1 q^{n-1} = \frac{-a_0 q^n}{p}.$$

O lado esquerdo da equação acima é um número inteiro, logo o lado direito também deve ser um número inteiro. Ainda, como *p* e *q* são primos entre si, segue que *p* divide a_0.

Por outro lado, na equação $a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + ... + a_2 p^2 q^{n-2} + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0$, somando $-a_n p^n$ em ambos os lados da igualdade, obtemos:

$$a_{n-1} p^{n-1} q + ... + a_2 p^2 q^{n-2} + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = -a_n p^n.$$

No primeiro membro da igualdade acima, *q* é fator comum, daí:

$$q(a_{n-1} p^{n-1} + ... + a_2 p^2 q^{n-3} + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1}) = -a_n p^n.$$

Agora, multiplicando a equação por $\frac{1}{q}$, obtemos:

$$a_{n-1} p^{n-1} + ... + a_2 p^2 q^{n-3} + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1} = \frac{-a_n p^n}{q}.$$

Novamente o primeiro membro da equação é um número inteiro, e, portanto, o segundo membro também deve ser um número inteiro. Como *p* e *q* são primos entre si, segue que *q* divide a_n.

$\square$

Um polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ é dito mônico quando $a_n = 1$, ou seja, o coeficiente de maior grau é 1. Segue do teorema acima que as raízes de um polinômio mônico são inteiras. De fato, sendo $a_n = 1$, temos que *q* é um divisor de 1. Logo $q = \pm 1$. Portanto, $\frac{p}{q}$ é um número inteiro. Segue ainda que toda raiz inteira de uma equação polinomial de coeficientes inteiros é divisor do termo independente.

Provados os resultados acima, voltamos à equação $y^3 - 6y^2 + 10y - 8 = 0$. Pelo teorema acima, nesse caso temos que *p* é um divisor de – 8 e *q* é um divisor de 1. As possíveis raízes racionais (nesse caso inteiras) da equação $y^3 - 6y^2 + 10y - 8 = 0$ pertencem ao conjunto $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\}$. Testando os valores, vemos que $y = 4$ é raiz da equação. Se testarmos os outros valores, veremos que eles não são raízes da equação. Logo, as outras raízes são irracionais ou complexas. Aplicando o Algoritmo de Briot-Ruffini, obtemos a fatoração $y^3 - 6y^2 + 10y - 8 = (y-4)(y^2 - 2y + 2)$. Portanto, $y^3 - 6y^2 + 10y - 8 = 0$ se, e somente se, $(y-4)(y^2 - 2y + 2) = 0$. Equivalentemente, $y - 4 = 0$ ou $y^2 - 2y + 2 = 0$. Resolvendo a equação $y^2 - 2y + 2 = 0$ obtemos as raízes $y = 1 \pm i$, e desta forma, o conjunto solução da equação $y^3 - 6y^2 + 10y - 8 = 0$ é $S = \{4, 1 \pm i\}$.

A partir dos resultados apresentados acima, podemos ver que muitas vezes é mais fácil resolver uma equação algébrica testando os possíveis valores para uma raiz, e depois fatorando o polinômio para determinar uma equação de grau inferior ao grau da equação dada, mas que possui as mesmas raízes.

O Teorema das raízes racionais fornece um teste conclusivo para saber se uma equação algébrica tem raízes racionais ou não. Para esta verificação, pode-se construir uma tabela com os quocientes possíveis dos valores de a_0 e a_n, e em seguida testá-los na equação.

Outro fato importante da fatoração de polinômios diz respeito à soma e produto das raízes de uma equação. Por exemplo, na equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$ de raízes x_1 e x_2, temos que:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2) = 0,$$

Como $a \neq 0$, multiplicando a equação acima por $\frac{1}{a}$ e usando a igualdade de polinômios, obtemos as conhecidas fórmulas da soma e produto das raízes da equação do segundo grau que são $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e $x_1x_2 = \frac{c}{a}$.

Esse processo é facilmente generalizado para equações de graus superiores e muitos exercícios interessantes podem ser resolvidos utilizando-se dessas relações, como por exemplo, exercícios que envolvem progressões aritméticas e geométricas. Estas abordagens reforçam a análise que fizemos no início do capítulo de que polinômios é um tópico importante para a formação matemática do indivíduo, e haja vista a riqueza de técnicas e o relacionamento com outros conceitos, até mesmo fora da matemática.

4.2 – Mais sobre raízes racionais e irracionais

O Teorema das raízes racionais pode ser aplicado em alguns casos particulares para a verificação da racionalidade ou irracionalidade de alguns números reais, como descrito no artigo da revista RPM 43 [19], páginas 16, 17 e 18. A seguir reproduzimos algumas destas aplicações.

Seja a um número natural tal que $\sqrt[n]{a}$ não é exata e consideremos a equação algébrica $x^n - a = 0$. Pelo teorema das raízes racionais, temos que se um número racional $\frac{p}{q}$ é raiz da equação algébrica $x^n - a = 0$, então p é um divisor de a e q é um divisor de 1. Dessa forma teremos que $\frac{p}{q}$ é um número inteiro, pois $q \in \{\pm 1\}$. Mas como $\sqrt[n]{a}$ não é exata, temos que não existe nenhum inteiro r tal que $r^n = a$. Dessa forma, segue que a equação $x^n - a = 0$ não admite raízes racionais. Mas $\sqrt[n]{a}$ é uma raiz da equação $x^n - a = 0$. Portanto $\sqrt[n]{a}$ é um número irracional.

Consideremos como exemplo a equação $x^5 - 2 = 0$. As possíveis raízes racionais (neste caso inteiras) desta equação são os números do conjunto $A = \{-1, 1, -2, 2\}$. Substituindo os valores do conjunto A temos que nenhum destes valores satisfaz a equação $x^5 - 2 = 0$. Como $x = \sqrt[5]{2}$ satisfaz a equação e a mesma não possui nenhuma raiz racional, concluímos que $x = \sqrt[5]{2}$ é um número irracional.

Sabemos dos números complexos, que se um número complexo $\alpha + \beta i$ é raiz de uma equação algébrica, então o seu conjugado $\alpha - \beta i$ também é raiz. Fato semelhante ocorre com os números irracionais da forma $a + b\sqrt{c}$ e seu respectivo "conjugado" $a - b\sqrt{c}$. Enunciamos abaixo o teorema que trata deste fato:

Teorema: Se o número irracional $a + b\sqrt{c}$, onde a e b são números racionais e c é um número natural que não é um quadrado perfeito, é raiz da equação algébrica $p(x) = 0$, onde os coeficientes de $p(x)$ são números racionais, então, $a-b\sqrt{c}$ também é raiz da equação algébrica $p(x)=0$.

Demonstração: Consideremos o polinômio $f(x)=(x-a-b\sqrt{c}).(x-a+b\sqrt{c})$. Equivalentemente, podemos escrever $f(x)=(x-a)^2-b^2c$, que é um polinômio do segundo grau na variável *x*. Notamos assim, que os coeficientes de *f* são números racionais. Efetuando a divisão de *p* por *f*, obtemos o quociente *q* e o resto *r* tais que $p(x)=f(x).q(x)+r(x)$. Como o grau do polinômio *f* é 2, podemos escrever $r(x)=ux+v$. Observando que $a+b\sqrt{c}$ é raiz de *p*, temos que $p(a+b\sqrt{c})=0$. Dessa forma,

$$p(a+b\sqrt{c})=f(a+b\sqrt{c}).q(a+b\sqrt{c})+r(a+b\sqrt{c})=r(a+b\sqrt{c})=0,$$

pois $f(a+b\sqrt{c})=0$. Daí, $r(a+b\sqrt{c})=u.(a+b\sqrt{c})+v=0$. Logo, temos $ua+ub\sqrt{c}+v=0$. Desta última igualdade devemos ter $u=v=0$, pois caso contrário, teríamos $\sqrt{c}=\dfrac{-v-ua}{ub}$. Dessa forma, $\sqrt{c}$ seria um número racional, contrariando nossa hipótese.

$\square$

Como exemplo numérico para o último teorema, consideremos que $x_1=5+\sqrt{2}$ seja raiz de um polinômio *f* de coeficientes inteiros. Então, pelo teorema acima temos que $x_2=5-\sqrt{2}$ também é raiz de *f*. Dessa forma temos que x_1 e x_2 são raízes do polinômio $g(x)=[x-(5+\sqrt{2})].[x-(5-\sqrt{2})]$. Observamos que $g(x)=[(x-5)-\sqrt{2}].[(x-5)+\sqrt{2}]$ ou equivalentemente $g(x)=(x-5)^2-(\sqrt{2})^2$. Portanto, temos que $g(x)=x^2-10x+23$ é um polinômio que possui as raízes $x_1=5+\sqrt{2}$ e $x_2=5-\sqrt{2}$. Observamos que tanto x_1 como x_2 são números irracionais, pois se testarmos os divisores de 23 no polinômio *g* veremos que nenhum destes é raiz do mesmo.

4.3 – Equações binômias e equações trinômias

Estudaremos agora mais dois casos particulares de equações. Estas são conhecidas por equações binômias e equações trinômias. Nestes casos, podemos considerar os coeficientes sendo números complexos, não necessariamente números reais.

Chamamos de *equação binômia* toda equação que pode ser reduzida a forma $ax^n + b = 0$, com $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$. Para resolver esta equação basta isolar x^n e aplicar o processo de radiciação em $\mathbb{C}$. Ou seja,

$$ax^n + b = 0 \Rightarrow x^n = -\frac{b}{a} \Rightarrow x = \sqrt[n]{-\frac{b}{a}}.$$

Dessa forma, uma equação binômia de grau n terá exatamente n raízes complexas.

Chamamos de *equação trinômia* toda equação que pode ser reduzida a forma $ax^{2n} + bx^n + c = 0$, com $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$. Para resolver uma equação trinômia fazemos a substituição $x^n = y$ e obtemos as raízes y_1 e y_2 da equação $ay^2 + by + c = 0$. Em seguida resolvemos as equações $x^n = y_1$ e $x^n = y_2$, obtendo as $2n$ raízes da equação original.

Como exemplo de equação binômia, vamos determinar as raízes da equação $2x^3 - 16 = 0$. A equação dada é equivalente a $x^3 = 8$, ou ainda $x = \sqrt[3]{8}$. Logo, vamos determinar as raízes cúbicas de $z = 8$. Temos que $z = 8(\cos 0 + i.sen 0)$. Portanto, $\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{8}(\cos(0 + k\frac{2\pi}{3}) + i.sen(0 + k\frac{2\pi}{3}))$, ou seja, $\sqrt[3]{z} = 2(\cos(k\frac{2\pi}{3}) + i.sen(k\frac{2\pi}{3}))$, para $k = 0,1,2$. Substituindo os valores de k obtemos as três raízes da equação, que são $x_1 = 2$ (para $k = 0$), $x_2 = 1 - i\sqrt{3}$ (para $k = 1$) e $x_3 = -1 - i\sqrt{3}$ (para $k = 2$). Portanto as três raízes da equação $2x^3 - 16 = 0$ são dadas pelo conjunto $S = \{2, 1 - i\sqrt{3}, -1 - i\sqrt{3}\}$.

Como exemplo de equação trinômia, vamos determinar as raízes da equação $x^6 + 26x^3 - 27 = 0$. Fazendo a substituição $x^3 = y$ obtemos a equação $y^2 + 26y - 27 = 0$. Resolvendo a equação em y obtemos $y_1 = 1$ e $y_2 = -27$. Agora, devemos resolver as equações $x^3 = 1$ e $x^3 = -27$.

Para a equação $x^3 = 1$ devemos encontrar as raízes cúbicas de $z = 1$. Temos que $z = 1(\cos 0 + i.sen 0)$. Dai $\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{1}(\cos(0 + k\frac{2\pi}{3}) + i.sen(0 + k\frac{2\pi}{3}))$, para $k = 0,1,2$.

Substituindo os valores de *k* obtemos as raízes $x_1 = 1$ (para $k = 0$), $x_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (para $k = 1$) e $x_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (para $k = 2$).

Para a equação $x^3 = -27$ devemos encontrar as raízes cúbicas de $w = -27$. Temos que $w = 27(\cos\pi + i.sen\pi)$. Dai $\sqrt[3]{w} = \sqrt[3]{27}(\cos(\pi + k\frac{2\pi}{3}) + i.sen(\pi + k\frac{2\pi}{3}))$, para $k = 0,1,2$. Temos, $x_4 = \frac{3}{2} + i.\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (para $k = 0$), $x_5 = -3$ (para $k = 1$) e $x_6 = \frac{3}{2} - i.\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (para $k = 2$).

Portanto, as seis raízes da equação $x^6 + 26x^3 - 27 = 0$ são dadas pelo conjunto $S = \{-3, 1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}\}$.

4.4 – Um polinômio de grau ímpar especial

Reproduzimos agora uma propriedade de um polinômio de grau ímpar especial descrito na RPM 81 [22], páginas 29 e 30. O polinômio

$$p(x) = x^n + bx^{n-1} + x^{n-2} + bx^{n-3} + ... + x^3 + bx^2 + x + b,$$

onde *n* é um natural ímpar e *b* é um número real não nulo. Podemos escrever

$$p(x) = (x+b)(x^{n-1} + x^{n-3} + ... + x^2 + 1),$$

com *n* natural ímpar e *b* real não nulo. Dessa forma, segue que $x = -b$ é a única raiz real de $p(x)$, pois a expressão $x^{n-1} + x^{n-3} + ... + x^2 + 1$ representa uma soma de potências pares de *x*, logo sempre positiva.

Para um estudo das raízes complexas de $x^{n-1} + x^{n-3} + ... + x^2 + 1 = 0$, onde *n* é um natural ímpar, notemos que, para qualquer *p* natural e qualquer *y* real, vale a identidade:

$$y^{p+1} - 1 = (y-1)(y^p + y^{p-1} + ... + y^2 + y + 1).$$

Se, temos que:

$$y^p + y^{p-1} + ... + y^2 + y + 1 = \frac{y^{p+1} - 1}{y - 1}.$$

Dai, segue que, $y^p + y^{p-1} + ... + y^2 + y + 1 = 0$ se, e somente se, $y^{p+1} - 1 = 0$. Fazendo $y = x^2$, obtemos que $x^{2p} + x^{2p-2} + ... + x^4 + x^2 + 1 = 0$ se, e somente se, $x^{2p+2} - 1 = 0$, para $x^2 \neq 1$. Dessa forma, temos que as raízes complexas de $x^{2p} + x^{2p-2} + ... + x^4 + x^2 + 1 = 0$ são as $2p$ raízes complexas de ordem $2p+2$ da unidade, diferentes de 1 e – 1.

Como exemplo, consideremos a equação $x^5 + 3x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 3 = 0$, que pode ser escrita na forma $(x+3)(x^4 + x^2 + 1) = 0$. Temos que $x = -3$ é a única raiz real desta equação, sendo as demais complexas. As raízes de $x^4 + x^2 + 1 = 0$ são as raízes de ordem 6 da unidade diferentes de 1 e – 1, que são dadas por $x = \cos(\frac{k\pi}{3}) + i.sen(\frac{k\pi}{3})$, para $k \in \{1, 2, 4, 5\}$.

5. SUGESTÃO DIDÁTICA

Apresentaremos agora uma sugestão de uma sequência didática para a apresentação dos estudos de polinômios no ensino médio.

i) Definição de polinômios: definir de maneira natural o que é um polinômio ou uma função polinomial. Falar dos coeficientes dando ênfase ao coeficiente independente e ao coeficiente dominante. Definir polinômio mônico.

ii) Polinômio nulo, polinômio constante e igualdade de polinômios: trabalhar com os polinômios nulo e constantes e com a igualdade de polinômios de forma com que os alunos exercitem as operações básicas e resolvam sistemas de equações, entre outros. Um polinômio é chamado *nulo* (ou *identicamente nulo*) quando todos os seus coeficientes são iguais à zero. Um polinômio é chamado de *polinômio constante* quando é formado apenas por um número complexo. Dois polinômios $p(x)$ e $q(x)$ são iguais quando assumem valores numéricos iguais para todo valor complexo comum atribuído à variável. Para que $p(x)$ e $q(x)$ sejam iguais é necessário e suficiente que os coeficientes dos termos semelhantes de $p(x)$ e $q(x)$ sejam iguais.

iii) Valor numérico e raiz de um polinômio: dar o significado de valor numérico de um polinômio assim como o da raiz. O valor numérico de um polinômio $p(x)$ em $x=\alpha$ é dado por $p(\alpha)$. Se $p(\alpha)=0$ dizemos que α é raiz do polinômio $p(x)$.

iv) Grau de um polinômio: definir grau de um polinômio não nulo. Se $p(x)\neq 0$, o grau de $p(x)$ é o maior expoente da variável *x* com coeficiente não nulo. Não se define grau do polinômio nulo.

v) Operações com polinômios: dados dois polinômios $p(x)$ e $q(x)$, temos que: a *soma* dos polinômios $p(x)$ e $q(x)$ é dada efetuando-se a soma dos coeficientes dos termos semelhantes de $p(x)$ e $q(x)$. A *diferença* entre os polinômios $p(x)$ e $q(x)$ é dada pela soma do primeiro polinômio com o oposto do segundo, isto é, $p(x)-q(x)=p(x)+[-q(x)]$. O produto de dois polinômios $p(x)$ e $q(x)$ é obtido multiplicando-se cada termo de $p(x)$ por todos os termos de $q(x)$ e reduzindo-se os termos semelhantes. E finalmente, a *divisão*: dividir $p(x)$ por $d(x)\neq 0$ é encontrar dois polinômios

$q(x)$ e $r(x)$ de modo que se tenha $p(x) = q(x).d(x) + R(x)$, com $gr(r) < gr(d)$ ou $r(x) = 0$. Quando $r(x) = 0$ dizemos que a divisão é exata.

vi) Divisão por binômios do primeiro grau da forma $x - a$: nesta seção, trabalhar com o dispositivo de Briot-Ruffini, fazendo com que os alunos comparem a divisão pelo dispositivo e pelo método da chave. O dispositivo de Briot-Ruffini permite efetuar divisões de polinômios quaisquer por polinômios do tipo $x - a$ de uma maneira muito simples e rápida.

vii) Teorema do resto e teorema do fator: mostrar aos alunos que em muitos casos não é necessário efetuar a divisão para saber o resto da divisão de dois polinômios, no caso na divisão de um polinômio por um binômio do primeiro grau. Nesse caso, ao dividir um polinômio $p(x)$ por $x - a$ tem-se que o resto $r(x)$ é uma constante, pois o grau do resto deve ser sempre menor que o grau do divisor. Assim, pode-se mostrar facilmente que $r(x) = p(a)$. Ainda, se *a* for uma raiz de $p(x)$ teremos que o resto $p(a) = 0$, dai conclui-se que $x - a$ é um fator de $p(x)$.

viii) Divisões sucessivas: trabalhar com a divisão de polinômios por $x - a$ e $x - b$, onde $a \neq b$. Um polinômio $p(x)$ é divisível por $x - a$ e também por $x - b$, com $a \neq b$, se, e somente se, $p(x)$ é divisível pelo produto $(x - a)(x - b)$.

Após trabalhar todos os conceitos de polinômios, o próximo passo é trabalhar com as equações algébricas. As fórmulas das equações do terceiro grau, assim, como o processo de resolução das equações do quarto grau apresentados neste trabalho são trabalhosas e não muito simples. Não recomendamos suas apresentações no ensino médio, observando também que o tempo seria insuficiente.

ix) Definição de equações algébricas: toda equação redutível à forma $p(x) = 0$, sendo $p(x)$ um polinômio de grau maior ou igual a um, é uma *equação algébrica*.

x) Raiz de uma equação algébrica: trabalhar com o cálculo das raízes de uma equação algébrica. As raízes da equação algébrica $p(x) = 0$ são as mesmas que as raízes do polinômio $p(x)$ e em mesmo número que o grau do polinômio $p(x)$, podendo alguma das raízes aparecer mais de uma vez. Ressaltar que os alunos já trabalham com tipos particulares de equações algébricas desde o ensino fundamental, ou seja, equações do primeiro e segundo graus.

xi) Teorema Fundamental da Álgebra: toda equação algébrica $p(x) = 0$, com grau de $p(x)$ maior ou igual a um, admite pelo menos uma raiz complexa. Dessa forma, sendo α uma raiz da equação $p(x)=0$, temos que existe um polinômio $q(x)$ de modo que se tenha $p(x)=(x-\alpha)q(x)=0$.

xii) Teorema da decomposição: mostrar que uma consequência do teorema fundamental da álgebra é que toda equação algébrica de grau *n* possui exatamente *n* raízes complexas, podendo ser iguais ou não. Assim, se $p(x)=a_n x^n+...+a_1 x+a_0$ é um polinômio de grau *n* maior ou igual a um e $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ são as raízes de $p(x)=0$, então $p(x)=a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_n)$.

xiii) Multiplicidade de uma raiz: sabendo que uma equação algébrica de grau *n* tem exatamente *n* raízes, mostrar que estas não são necessariamente diferentes, ou seja, podem existir raízes repetidas. Uma raiz α de uma equação algébrica $p(x)=0$ é uma *raiz de multiplicidade m*, com *m* natural não nulo, quando $p(x)=(x-\alpha)^m.q(x)$ e $q(\alpha)\neq 0$.

xiv) Raízes racionais: trabalhar com o teorema da pesquisa de raízes racionais, fazendo com que os alunos pesquisem as possíveis raízes. Dessa forma estarão trabalhando com divisores de número inteiro como também com princípios de combinatória. Este teorema foi trabalhado no capítulo anterior.

xv) Raízes complexas não reais: mostrar que as raízes complexas não reais de uma equação algébrica ocorrem sempre aos pares e concluir que toda equação algébrica de grau ímpar possui pelo menos uma raiz real. O fato de um número complexo da forma $a+bi$ ser raiz de um polinômio, então os eu conjugado $a-bi$ também é raiz traz como consequência que todo polinômio de grau ímpar possui pelo menos uma raiz real. Assim, no polinômio $p(x)=a_n(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)$, agrupando as raízes complexas conjugadas, podemos escrever o polinômio $p(x)$ com todos os coeficientes reais, a menos que a_n seja complexo conforme abordado no capítulo anterior.

xvi) Raízes irracionais: dentro do possível, trabalhar com as raízes irracionais conjugadas, conforme abordado no capítulo anterior.

xvii) Relações de Girard: toda equação de grau *n* de grau maior ou igual a um, dada na forma $p(x)=a_n x^n+...+a_1 x+a_0$ e raízes $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$, observam-se as seguintes relações:

- $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n=-\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$
- $\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+...+\alpha_{n-1}\alpha_n=\dfrac{a_{n-2}}{a_n}$

- $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + ... + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$

- $\alpha_1\alpha_2...\alpha_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$.

Ressaltar que relações acima são dadas pela soma das combinações uma a uma, duas a duas, três a três e assim sucessivamente até o produto de todas as raízes da equação com a alternância dos sinais. Pode-se retornar ao conceito de soma e produto das equações do segundo grau. Neste tópico recomendamos trabalhar exercícios que envolvem outros conteúdos da matemática, como progressões aritméticas e geométricas, raízes inversas, entre outros.

xviii) Equações binômias e trinômias: trabalhar com as equações binômias e trinômias, retomando o conceito de radiciação de números complexos da forma como abordada no capítulo anterior.

Lista de exercícios

1. Determine os valores de *a* e *b* para que o polinômio $p(x)=(3a-b)x^2+(4a-2)x+5$ tenha grau zero.

2. O polinômio $p(x)=x^3+ax^2+bx$, em que *a* e *b* são números reais, tem restos 2 e 4 quando dividido por $x-2$ e $x-1$, respectivamente. Determine o valor de *a*. (Resposta: -6)

3. Se $\dfrac{x}{x^2-3x+2}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x-2}$ é verdadeira para todo *x* real, $x\neq 1$ e $x\neq 2$, determinar o valor de $a.b$. (Resposta: -2)

4. Determine o grau mínimo de uma equação algébrica de coeficientes reais que admita as raízes -2 de multiplicidade 2, 5 de multiplicidade 1 e $-2+i$ de multiplicidade 2. (Resposta: grau 7)

5. A divisão de um polinômio $f(x)$ por $(x-1)(x-2)$ tem resto igual a $x+1$. Se os restos das divisões de $f(x)$ por $x-1$ e $x-2$ são, respectivamente, os números reais *a* e *b*, determine o valor de a^2+b^2. (Resposta: 13)

6. Seja *x* um número real positivo. O volume de um paralelepípedo reto-retângulo é dado, em função de *x*, pelo polinômio $x^3+7x^2+14x+8$. Se uma aresta do paralelepípedo mede $x+1$, determine a área da face perpendicular a essa aresta. (Resposta: x^2+6x+8)

7. $p(x)$ é um polinômio de grau $n\neq 2$ e tal que $p(1)=2$ e $p(2)=1$. Sejam $d(x)=(x-2)(x-1)$ e $q(x)$ o quociente da divisão de $p(x)$ por $d(x)$.

a) Determine o resto da divisão de $p(x)$ por $d(x)$. (Resposta: $-x+3$)

b) Sabendo que o termo independente de $p(x)$ é igual a 8, determine o termo independente de $q(x)$. (Resposta: $\dfrac{5}{2}$)

8. Considerando as proposições sobre polinômios, assinale V para a(s) verdadeira(s) e F para a(s) falsa(s).

( ) Sejam $f(x)$ e $g(x)$ polinômios não nulos tais que $f(2)=g(2)=0$. Se $r(x)$ é o resto da divisão de $f(x)$ por $g(x)$, então $r(2)=0$. (Resposta: V)

( ) O polinômio x^3+3x+2 tem uma raiz inteira. (Resposta: F)

(   ) Se $f(x)$ e $g(x)$ são polinômios de grau 3, então o grau do produto $f(x).g(x)$ é 9. (Resposta: F)

9. Dividind0-se um polinômio $p(x)$ por $(x-1)^2$, obtém-se um resto que, dividido por $x-1$ dá resto 3. Ache $p(1)$. (Resposta: 3)

10. Sabe-se que 1, 2 e 3 são raízes de um polinômio $p(x)$ do terceiro grau e que $p(0)=1$. Determine $p(10)$. (Resposta: -84)

11. Considere a equação algébrica $x^2-2=0$.

a) O teorema das raízes racionais pode ser aplicado a essa equação? Por quê? Em caso afirmativo faça a pesquisa das possíveis raízes racionais.

b) Verifique se $\sqrt{2}$ é raiz dessa equação.

c) O que você pode concluir a respeito do número $\sqrt{2}$?

12. Considere a equação algébrica $4x^7+12x^6+7x^5-3x^4-2x^3=0$.

a) É possível você usar todos os divisores do termo independente de *x*? Por quê?

b) Que procedimento você pode usar para resolver equações deste tipo?

c) Resolva a equação, em $\mathbb{C}$, e indique a multiplicidade de cada raiz.

13. Sabendo que as raízes da equação $0{,}1x^3+3{,}5x^2+35x+100=0$ são distintas entre si e estão em progressão geométrica, resolver esta equação em $\mathbb{C}$. (Resposta: $-5,-10,-20$)

14. As raízes da equação $x^3+3x^2-22x-24=0$ formam uma progressão aritmética. Encontre-as. (Resposta: $-6,-1,4$)

15. Encontrar as raízes inteiras da equação $x^3-4x^2+25x-100=0$ e depois resolvê-la em $\mathbb{C}$.

16. Sabendo que a equação $\begin{vmatrix} 3-x & 1 & -1 \\ 1 & 3-x & -1 \\ 3 & 3 & -1-x \end{vmatrix}=0$ tem uma raiz dupla, resolva-a em $\mathbb{C}$.

17. (Unicamp)

a) Qual o valor de λ na equação $z^3 - 5z^2 + 8z - \lambda = 0$ de modo que $z = 3$ seja uma raiz dessa equação?

b) Para esse valor de λ, ache as três raízes z_1, z_2 e z_3 dessa equação.

c) Ache o volume do sólido obtido quando a região triangular cujos vértices são os pontos z_1, z_2 e z_3 gira em torno da reta de equação $x = 1$. (*Observação: este sólido será a união de dois cones e o volume do cone é dado pela fórmula* $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$).

18. Se x_1, x_2 e x_3 são as raízes da equação $3x^2 + 2x^2 - 7x + 2 = 0$, determine a soma dos inversos dessas raízes.

19. (UFSCar) Sendo z_1 e z_2 as raízes não reais da equação algébrica $x^3 + 5x^2 + 2x + 10 = 0$, o produto $z_1 z_2$ resulta em um número:

a) Natural
b) Inteiro negativo
c) Racional não inteiro
d) Irracional
e) Complexo não real

20. Resolver a equação $x^5 + 10x^4 - 6x^3 - 176x^2 + 133x + 294 = 0$, em $\mathbb{C}$, sendo -7 raiz dupla e 2 raiz simples dessa equação.

21. Seja a equação $\frac{4x^2 + 13x - 9}{x^3 + 2x^2 - 3x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+3}$, em que *A*, *B* e *C* são número reais, $x \neq 0$, $x \neq 1$, e $x \neq -3$. Determine os valores reais de *A*, *B* e *C*.

22. Determine a condição necessária e suficiente para que a expressão $\frac{a_1 x^2 + b_1 x + c_1}{a_2 x^2 + b_2 x + c_2}$, em que $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ são números reais não nulos, assuma um valor que não dependa de *x*.

23. Determine a condição para que $ax^2 + bx + c$ seja um polinômio quadrado perfeito.

24. Demonstre que, se *f* e *g* são polinômios divisíveis por *h*, então o resto *r* da divisão de *f* por *g* também é divisível por *h*.

25. Os coeficientes $a_0, a_1, ..., a_n$ do polinômio $p(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$ formam, nessa ordem, uma PG de razão $\frac{1}{2}$. Então, qual é o resto da divisão de $p(x)$ por $x + 2$?

26. Determine o resto e o quociente das seguintes divisões:

a) $x^n - a^n$ por $x - a$;

b) $x^n + a^n$ por $x - a$;

c) $x^n - a^n$ por $x + a$;

d) $x^n + a^n$ por $x + a$.

27. Seja $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$. Elevando ambos os membros ao cubo, teremos $x^3 = 4 - 3x$. Seja $p(x) = x^3 + 3x - 4$. Como $p(1) = 0$, temos que $p(x)$ é divisível por $x - 1$ e, portanto, $p(x) = (x-1).q(x)$, onde $q(x)$ é um polinômio.

a) Mostre que $q(x)$ possui como zeros somente números complexos não reais e, portanto, que o número $x = 1$ é o único zero real de $p(x)$.

b) Mostre que $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ é um número inteiro.

28. Resolver a equação $4x^3 - 13x^2 - 13x + 4 = 0$, sabendo que duas de suas raízes são números inversos.

29. A equação $x^2 + mx + n = 0$, com *m* e *n* coeficientes reais, admite $5 - 2i$ como raiz. Qual é a outra raiz que essa equação possui? Quais são os valores de *m* e *n*?

30. Cortando-se quadrados em cada canto de uma folha de papel com dimensões 20 *cm* por 10 *cm*, e dobrando-se, obtemos uma caixa retangular sem tampa. Qual deve ser o lado do quadrado a ser recortado para que o volume da caixa seja igual a 288 cm^3?

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os trabalhos desenvolvidos por matemáticos como Tartaglia, Ferrari, Abel, Galois, entre outros na busca incessante por soluções das equações algébricas promoveu o desenvolvimento da Álgebra moderna que conhecemos hoje. Procuramos situar os desenvolvimentos destes trabalhos no contexto histórico, bem como descrever os procedimentos utilizados nas soluções, sendo a tônica principal do trabalho a discussão da solubilidade de equações algébricas por radicais.

Neste sentido, apenas as soluções para equações algébricas até grau 4, podem ser explicitadas em fórmulas envolvendo radicais. Procuramos descrever as ideias principais deste resultado profundo desenvolvido por Galois, com ênfase no interessante entrelaçado das teorias dos Grupos e Corpos.

A teoria dos polinômios e equações algébricas constitui um material rico para a formação Matemática escolar, pois explora e generaliza técnicas importantes da aritmética, bem como possibilita descrever aplicações interessantes. Desta forma, neste trabalho apresentamos resultados, abordagens e sugestões que podem constituir um apoio ao professor para incentivar e estimular os alunos ao seu estudo.

REFERÊNCAIS BIBLIOGRÁFICAS

[1] BASTOS, Gervasio G. *Resoluções de equações algébricas por radicais.* Disponível em: <http://www.bienasbm.ufba.br/M30.pdf>. Acesso em: 29 out. 2013.

[2] BOYER, Carl B. *História da matemática.* Tradução de Elza F. Gomide; Edgard Blucher. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1974.

[3] CRUZ, Karina Branco da. *Introdução à teoria de Galois.* 2013. Disponível em: <http://www.dm.ufscar.br/dm/attachments/article/5/359343_A.pdf>. Acesso em: 21 jan. 2014.

[4] ENDLER, Otto. *Solução de equações por radicais em característica "p" maior ou menor que zero.* 1987. Disponível em: <http://matematicauniversitaria.ime.usp.br/Conteudo/n05/n05_Artigo02.pdf>. Acesso em: 21 jan. 2014.

[5] EVES, Howard. *Introdução à história da matemática.* Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

[6] FUNÇÕES polinomiais: uma visão analítica. Disponível em: <http://www.im.ufrj.br/dmm/projeto/projetoc/precalculo/sala/conteudo/capitulos/cap111s4.html>. Acesso em: 05 fev. 2014.

[7] GARBI, Gilberto G. *O Romance das equações algébricas*. 4. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.

[8] GONÇALVES, Adilson. *Introdução à álgebra*. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

[9] IEZZI, Gelson. *Fundamentos de matemática elementar.* v. 6, 7. São Paulo: Atual, 2005.

[10] KNUDSEN, Carlos A. A teoria das equações algébricas. *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, n. 07, p. 26-31, 1985.

[11] KOERICH, Aline Casagrande. *Um estudo sobre polinômios e sua abordagem no ensino.* 2000. 73 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de Sanca Catarina, Florianópolis, 2000. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/94973/Aline_Casagrande_Koerch.PDF?sequence=1>. Acesso em: 30 jan. 2014.

[12] MILIES, César P. A emergência dos números complexos. *Revista do Professor de Matemática, São Paulo*, n. 24, p. 05-15, 1993.

[13] MILIES, César P. A solução de Tartáglia para a equação do terceiro grau. *Revista do Professor de Matemática,* São Paulo, n. 25, p. 15-22, 1994.

[14] MOREIRA, Carlos G. T. de A. Uma solução das equações do 3º e 4º graus. *Revista do Professor de Matemática,* São Paulo, n. 25, p. 23-28, 1994.

[15] MORO, Marcelo Oliveira de. *Um estudo sobre polinômios.* 2000. 42 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2000. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/97159/Marcelo_Moro.PDF?sequence=1>. Acesso em: 22 jan. 2014

[16] SANTOS, Sérgio Ricardo dos. *As equações polinomiais do 3º ao 4º graus:* sua história e suas soluções. 2013. 78 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2013. Disponível em: <sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/458/2011_00347_SERGIO_RICARDO_DOS_SANTOS.pdf?sequence=1>. Acesso em: 22 jan. 2014.

[17] SODRÉ, Ulysses. *Ensino médio:* método de Tartaglia para obter raízes de equação do 3º grau. 2005. Disponível em: <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/medio/polinom/tartaglia.htm>. Acesso em: 01 out. 2013

[18] SCHUVAAB, Jair Luis. *Resolução de equações algébricas até quarto grau:* uma abordagem histórica. 2013. 38 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2013. Disponível em: <http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/343/2011_00209_JAIR_LUIS_SCHUVAAB.pdf?sequence=1>. Acesso em: 22 jan. 2014

[19] TAMAROZZI, Antonio C. Identificando números irracionais através de polinômios. *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, n. 42, p. 16-18, 2000.

[20] TAVARES, Américo. *Equações cúbicas e quárticas.* 2010. Disponível em: <http://problemasteoremas.wordpress.com/2010/07/28/equacoes-cubicas-e-quarticas>. Acesso em: 30 set. 2013.

[21] COXFORD, Arthur F. SHULTE, Alberto P. (Organizadores), *As ideias da álgebra*, traduzido por Hygino H. Domingues. EISENBERG, Theodore; DREYFUS, Tommy. *Os polinômios no currículo da escola média*. São Paulo: Atual, 1994.

[22] ESQUEF, Rosa M. A.; SENISE, Camilla. Um polinômio especial. *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, n. 81, p. 29-30, 2013.