

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO MATO GROSSO DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**

MIRIAN JOSÉ DA SILVA

**O USO DA LOUSA DIGITAL E UM ESTUDO SOBRE CIRCUNFERÊNCIA COM
ALUNOS DO 3º ANO DO ENSINO MÉDIO**

Campo Grande - MS

2015

MIRIAN JOSÉ DA SILVA

**O USO DA LOUSA DIGITAL E UM ESTUDO SOBRE CIRCUNFERÊNCIA COM
ALUNOS DO 3º ANO DO ENSINO MÉDIO**

**Dissertação apresentada ao Curso de
Mestrado em Educação Matemática da
Universidade Federal do Mato Grosso do
Sul, como requisito parcial para a
obtenção do título de Mestre em
Educação Matemática.**

Orientadora: Profa. Dra. Suely Scherer

Campo Grande - MS

2015

MIRIAN JOSÉ DA SILVA

**CONSTRUÇÃO DE CONHECIMENTOS SOBRE CÔNICAS COM O USO DA LOUSA
DIGITAL: UMA EXPERIÊNCIA COM ALUNOS DO 3º ANO
DO ENSINO MÉDIO**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Educação Matemática da Universidade Federal do Mato Grosso do Sul como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

BANCA EXAMINADORA:

Profa. Dra. Suely Scherer
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

Profa. Dra. Nielce Meneguelo Lobo da Costa
Universidade Bandeirantes de São Paulo,
UNIBAN - NORTE

Profa. Dra. Marilena Bittar
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

Campo Grande, 02 de março de 2015.

Dedico este trabalho a Deus,
minha fortaleza;
à memória de minha mãe,
meu exemplo de dedicação ao magistério;
e aos meus futuros alunos,
que aspiram por uma educação
coerente com sua época e necessidades.

AGRADECIMENTOS

Agradeço e dedico este trabalho a Deus, criador e sustentador, razão de minha vida.

Também agradeço:

Aos meus pais Dona Cidinha e Pr. Jonathan, meus primeiros professores. Agradeço por me encaminharem aos primeiros ambientes escolares pelos quais passei.

Aos meus irmãos Elton e Denise por estarem “do meu lado” em todos os momentos. Ao esposo Elias.

Ao meu sobrinho Yan por sua companhia e amor incondicional.

À toda a minha família e amigos.

À professora Suely, orientadora desta pesquisa, pelos seus conhecimentos, sua atenção, cuidados e presença em todas as etapas da pesquisa.

À professora Marilena por me acompanhar desde a época de minha graduação e por aceitar fazer parte da Banca. Agradeço pelos seus ensinamentos e por seu exemplo que muito nos inspira a crescer.

À professora Nielce que, mesmo sem me conhecer, aceitou fazer parte da banca, trazendo muitas contribuições para a pesquisa.

Aos colegas de turma: Darlysson, Deise, Jonas, Juliana, Júlio, Márcia, Marcos, Mauro, Maxlei, Neiva, Renan, Rogério, Tatiani, Vanessa e Viviane, pela acolhida e nossa união nos momentos de estudos e debates.

A todos os professores do PPGEdMat que contribuíram com a minha formação.

Aos “irmãos” de pesquisa Vanessa, Jonas, Tatiani, Sérgio e Fred, por estarem ao meu lado nos estudos e na experimentação.

À direção e aos alunos da escola participante, por nos acolherem em seus ambientes durante a experimentação.

Ao ex-chefe Cap. Leôncio, pelas dispensas e substituições durante a etapa do processo seletivo para ingresso ao mestrado.

Aos amigos Reinaldo Santos, Maysa Ferreira da Silva, Maria José Santana Vieira Gonçalves, Clara Ávila Ornelas e Jane Carmem Magalhães, pelo incentivo e exemplo de luta por um projeto de vida.

À Capes pelo financiamento da pesquisa, permitindo-me dedicação exclusiva.

RESUMO

Esta pesquisa teve por objetivo identificar e analisar contribuições do uso da Lousa Digital em um estudo sobre circunferências com uma turma de alunos do 3º ano do Ensino Médio. Para alcançar o objetivo proposto, foi elaborada, desenvolvida e analisada uma proposta de atividades, desenvolvida em dois encontros de cem minutos cada um, a partir da construção de um *smile* com o uso da Lousa Digital e do software *Geogebra*. No primeiro momento, o objetivo foi identificar a relação entre a representação geométrica das circunferências presentes na composição do *smile* e as suas equações, enquanto que, no segundo momento, o objetivo foi estabelecer relações entre a equação de uma circunferência e a sua representação geométrica. O referencial teórico adotado foi o ciclo de ações e a espiral de aprendizagem de José Armando Valente e os estudos sobre aprendizagem cooperativa de Suely Scherer. Consideramos que o uso da Lousa Digital contribuiu para que os alunos pudessem vivenciar o ciclo de ações e a espiral de aprendizagem ao interagirem com o software *Geogebra* e com os colegas de turma, em uma abordagem construcionista. A Lousa Digital, portanto, se constituiu uma tecnologia que contribuiu para a interação entre os alunos, pois favoreceu o envolvimento destes em uma produção comum, em que as proposições individuais foram constituindo uma produção coletiva, em um processo de interação.

Palavras-chave: Tecnologias Digitais. Lousa Digital. Construcionismo. Ciclo de ações. Espiral de aprendizagem. Aprendizagem Cooperativa.

ABSTRACT

This research aimed to identify and analyze the use of Digital whiteboard contributions in a study of circles with a group of students of the 3rd year of high school. To achieve the proposed objective was drafted, developed and analyzed a proposal of activities, with a duration of two stages of 100 minutes each, from the construction of a smile with the use of Digital whiteboard and Geogebra software. At first the goal was to identify the relationship between the geometric representation of the circles present in the smile of the composition and its equations, while in the second phase, the objective was to establish relations between the equation of a circle and its geometric representation. The theoretical framework adopted was the cycle of actions and the José Armando Valente learning spiral, and studies on cooperative learning Suely Scherer. We consider the use of Digital whiteboard contributed to students could experience the cycle of actions and learning spiral to interact with the software Geogebra and his classmates from the use of Digital whiteboard in a constructionist approach. The Digital whiteboard, therefore, constituted a technology which contributed to the interaction between the students, because it favored their involvement in a common production, where the individual propositions were constituting a collective production, in a process of interaction and cooperation.

Keywords: Digital Technologies. Digital whiteboard. Constructionism. Cycle of actions. Learning spiral. Cooperative learning.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Ciclo de ações.....	22
Figura 2: Espiral da aprendizagem.....	25
Figura 3: Representação do raio da circunferência no plano cartesiano....	39
Figura 4: Projetor Multimídia Arthur	45
Figura 5: Receptor <i>Station</i> que deve ser fixado na superfície de projeção.....	46
Figura 6: Alguns acessórios do Arthur:.....	47
Figura 7: Tela que solicita a calibragem.....	48
Figura 8: Representação do <i>smile</i>	51
Figura 9: 1ª tentativa para a representação da boca do <i>smile</i>	59
Figura 10: Representação do contorno do rosto do <i>smile</i>	65
Figura 11: 1ª tentativa de representação do olho esquerdo do <i>smile</i>	68
Figura 12: 2ª tentativa de representação do olho esquerdo do <i>smile</i>	69
Figura 13: Representação do olho direito do <i>smile</i>	71
Figura 14: Representação da boca do <i>smile</i>	73
Figura 15: Representação do contorno da cabeça do <i>smile</i>	78
Figura 16: 1ª tentativa de representação do olho esquerdo do <i>smile</i>	82
Figura 17: 2ª tentativa de representação do olho esquerdo do <i>smile</i>	84
Figura 18: 3ª tentativa de representação do olho esquerdo do <i>smile</i>	85
Figura 19: 4ª tentativa de representação do olho esquerdo do <i>smile</i>	86
Figura 20: 5ª tentativa de representação do olho esquerdo do <i>smile</i>	88
Figura 21: Reta paralela ao eixo y passando pelo ponto $A(x, y)$	91
Figura 22: Representação do segmento de medida " $y - 0$ ".....	92
Figura 23: 1ª tentativa da representação de " $y - 0$ "	93
Figura 24: 2ª tentativa da representação de " $y - 0$ "	94
Figura 25: Triângulo retângulo pelo qual se obtém a equação da circunferência	95
Figura 26: Representação olho direito do <i>smile</i>	97
Figura 27: Representação da boca do <i>smile</i>	98

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	10
2 O USO DE COMPUTADORES E A LOUSA DIGITAL EM SALA DE AULA.....	20
2.1 O CICLO DE AÇÕES E O USO DE COMPUTADORES.....	20
2.2 A LOUSA DIGITAL E A APRENDIZAGEM COOPERATIVA.....	27
3 PROPOSTAS OFICIAIS E O ESTUDO SOBRE CIRCUNFERÊNCIA NA ESCOLA	31
4 METODOLOGIA DA PESQUISA	41
4.1 PROCEDIMENTOS DA PESQUISA	41
4.2 CONTEXTO E PARTICIPANTES DA PESQUISA	43
4.2.1 A Lousa Digital e o Projetor Multimídia Arthur.....	44
4.2.2 Participantes da pesquisa.....	49
4.3 A PROPOSTA DE ATIVIDADES.....	50
5 REPRESENTANDO CIRCUNFERÊNCIAS COM O USO DA LOUSA DIGITAL: UMA EXPERIÊNCIA COM UMA TURMA DE 3º ANO DO ENSINO MÉDIO.....	54
5.1 UM ESTUDO DA EQUAÇÃO DA CIRCUNFERÊNCIA: DO CAMPO GEOMÉTRICO PARA O CAMPO ALGÉBRICO.....	55
5.2 UM ESTUDO DA EQUAÇÃO DA CIRCUNFERÊNCIA: DO CAMPO ALGÉBRICO PARA O CAMPO GEOMÉTRICO.....	75
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	100
REFERÊNCIAS.....	104

1 INTRODUÇÃO

Eu¹ iniciei a minha trajetória como professora de Matemática na década de 1990, em escolas da rede estadual de educação de Campo Grande. No início de carreira tive a oportunidade de presenciar a chegada de inovações tecnológicas no ambiente escolar. Observei que todas as escolas estaduais em Campo Grande possuíam uma antena com conexão para os programas da TV Escola², e televisores acoplados em mobiliários móveis para serem levados para as salas de aulas. Na Sala dos Professores da escola, sempre havia um livreto com a grade de programação mensal da TV escola, muito bem explicada, ilustrada, com detalhes das programações que abordavam diferentes conteúdos para cada disciplina, tanto para o Ensino Fundamental quanto para o Ensino Médio.

Como recém-chegada ao ambiente escolar, com grandes expectativas para o exercício da profissão do magistério, aos poucos fui notando que os professores que tinham mais tempo de atuação não possuíam a mesma disposição para o uso dessas tecnologias.

A esse respeito, Moran (2006) afirma que muitos professores apresentam resistência às mudanças, embora os alunos estejam preparados para usarem multimídias. O autor justifica isso afirmando que as inovações tecnológicas trazem desconforto aos professores acostumados a tecnologias como quadro, giz e livro didático, por isso muitos decidem continuar com a mesma metodologia de ensino, centrada no professor que repassa todas as informações para o aluno.

Segundo Baldino (1993), essa resistência dos professores às mudanças de metodologias para o ensino faz com que eles continuem a induzir a maioria dos alunos a tentar reproduzir, sem sucesso, nas avaliações escritas, o que foi transmitido. E, frente aos baixos rendimentos que apresentam, são tidos como desinteressados, bagunceiros e com um potencial cognitivo reduzido (VASCONCELLOS, 2006).

A inserção de tecnologias, nas escolas em que eu lectionei, vinha acompanhada por discursos em que se expressava o objetivo dos gestores educacionais de promoverem mudanças na Educação. Mas, o que se via era a resistência de muitos

¹ Nesse momento utilizo a primeira pessoa do singular, pois faço o relato de uma experiência pessoal.

² A TV Escola é um canal de televisão do Ministério da Educação que capacita, aperfeiçoa e atualiza educadores da rede pública desde 1996. Sua programação exhibe, nas 24 horas diárias, séries e documentários estrangeiros e produções próprias. Alguns dos programas exibidos pela TV Escola estão disponíveis para download gratuito no Portal Domínio Público. Fonte: <portal.mec.gov.br>.

professores em conhecer as potencialidades de cada tecnologia que surgia em prol da permanência das metodologias tradicionais, gerando entraves à integração dessas tecnologias ao processo de ensino e de aprendizagem.

Empregamos com cautela os termos “inserção” e “integração” das tecnologias no ambiente escolar. Segundo Bittar *et al.* (2008), há uma diferença nas definições desses dois termos, pois enquanto a inserção das tecnologias ao ambiente escolar traz o sentido da simples presença delas no ambiente escolar, sem que estas modifiquem os processos educativos, a integração das tecnologias no ambiente escolar representa modificações significativas no processo de aprendizagem.

Acreditamos que a verdadeira integração da tecnologia somente acontecerá quando o professor vivenciar o processo e quando a tecnologia representar um meio importante para a aprendizagem. Falamos em integração para distinguir de inserção. Essa última para nós significa o que tem sido feito na maioria das escolas: coloca-se o computador nas escolas, os professores usam, mas sem que isso provoque uma aprendizagem diferente do que se fazia antes e, mais do que isso, o computador fica sendo um instrumento estranho à prática pedagógica, usado em situações incomuns, extraclasse, que não serão avaliadas. Defendemos que o computador deve ser usado e avaliado como um instrumento, como qualquer outro, seja o giz, um material concreto ou outro. E esse uso deve fazer parte das atividades “normais” de aula. (BITTAR *et al.*, 2008, p. 86)

No final da década de 1990, assisti ao momento histórico de inserção dos computadores na escola. Essa chegada foi acompanhada com muita expectativa pelos alunos e pelos professores, pois todos sabiam que algo iria mudar, mas não como e o que mudaria. O tempo passava, e as mudanças esperadas nos processos de ensino e de aprendizagem eram poucas, mesmo com o aumento gradativo do número de computadores e de Laboratórios de Informática.

No ano de 2006, após lecionar em período integral por mais de cinco anos em uma escola rural, voltei a atuar em escolas públicas na área urbana e pude assistir ao investimento dos governos municipal, estadual e federal na implantação de Laboratórios de Informática em todas as escolas públicas. Todos os professores eram obrigados a utilizá-los, independentemente da necessidade e da metodologia de uso.

Essa obrigatoriedade de levar os alunos ao Laboratório de informática, simplesmente porque os laboratórios deveriam funcionar e/ou porque seus responsáveis eram impelidos a apresentar relatórios semanais de seu funcionamento, me incomodava muito, pois era como “fazer o certo da forma errada”. Eu considerava

essa prática equivocada, uma vez que as ações e decisões tomadas pelos responsáveis não traziam mudanças para a aprendizagem dos alunos.

Em 2010, a escola pública onde eu trabalhava investiu na instalação de Lousas Digitais para todas as salas de aulas, do sexto ano do Ensino Fundamental ao terceiro ano do Ensino Médio, totalizando 33 Lousas Digitais. Nessa ocasião, eu lecionava a disciplina “Desenho Geométrico” e utilizava grandes instrumentos de madeira para desenhar na lousa, ou seja, régua, compasso, esquadros e um transferidor de madeira.

No primeiro dia de aula após a instalação das Lousas Digitais, os alunos me questionaram se eu iria desenhar na Lousa Digital. Naquele momento, senti que deveria aprender a fazer desenhos geométricos com o uso do computador, mas ainda não sabia como isso aconteceria. Com o passar do tempo, utilizei slides na Lousa Digital para projetar as construções geométricas feitas, primeiramente, em uma folha de papel, depois digitalizadas e inseridas nos slides. Dessa forma, os alunos “assistiam” as minhas construções e as reproduziam em seus cadernos. O novo recurso tecnológico da Lousa Digital exigiu, naquele momento, uma mudança de procedimentos corriqueiros de minha prática docente.

As Lousas Digitais, porém, estavam sendo utilizadas por mim como tela de projeção, assim como pela maioria dos professores, pois preparávamos aulas em um editor de slides para projetá-las na tela da Lousa Digital. Mais uma vez, observei que essa tecnologia estava sendo subutilizada, ignorando-se o seu singular potencial para as atividades pedagógicas. Naquele ano de 2010 e no ano seguinte, a pouca utilização da Lousa Digital se resumiu apenas à projeção de slides de aulas prontas em sua tela.

Em 2012, ainda na escola pública e decorridos dois anos desde a inserção das Lousas Digitais, uma colega de trabalho, também professora de Matemática, incomodada com o pouco uso da Lousa Digital, teve a iniciativa de organizar um grupo de estudos, trazendo especialistas do Grupo GETECMAT³ da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, para discutirem as possibilidades de uso da Lousa Digital nas aulas de Matemática.

³ O GETECMAT é o Grupo de Estudos de Tecnologia e Educação Matemática do Programa de Pós Graduação em Educação Matemática da UFMS. Esse grupo investiga o uso de tecnologias de informação e comunicação no processo de ensino e de aprendizagem da Matemática, e a formação de professores para o uso destas tecnologias.

A pesquisa de Carvalho S. (2014), membro do Grupo GETECMAT, analisa parte desse processo de formação continuada em serviço para o uso da Lousa Digital em aulas de Matemática.

Nos encontros do grupo, tive a oportunidade de refletir sobre a diferença entre inserir e integrar as tecnologias digitais às aulas de matemática, além da diferença entre trabalhar em uma abordagem instrucionista⁴ ou em uma abordagem construcionista no uso de tecnologias digitais.

O grupo também teve momentos de estudos de questões matemáticas a partir do uso de softwares e *applets*⁵. Neste contexto, desenvolvi atividades colocando-me no lugar do aluno, vivenciando, manipulando, construindo e reconstruindo conceitos matemáticos em grupo, com o uso da Lousa Digital. Avaliei, assim, durante os debates, alguns dos potenciais da Lousa Digital: o de proporcionar oportunidades que privilegiam a interação, o levantamento de conjecturas e a construção do conhecimento em um ambiente de cooperação e colaboração.

Minha participação no GETECMAT me motivou, no final do ano letivo de 2012, a participar do processo seletivo para ingresso no mestrado acadêmico no PPGEduMat com vistas a continuar as reflexões já iniciadas e buscar caminhos que integrem as tecnologias digitais em aulas de matemática para a construção de conhecimentos, em especial a tecnologia da Lousa Digital. O fato de ter sido professora de Desenho Geométrico naqueles últimos seis anos, observando dificuldades que os meus alunos apresentavam no estudo de cônicas com o uso de régua e compasso, motivou-me, junto à professora orientadora desta pesquisa, a investigar o uso da Lousa Digital para o estudo de Geometria Analítica, mais especificamente das circunferências, com alunos do 3º ano do Ensino Médio.

Para levantar⁶ e delinear nossa questão de pesquisa, realizamos a busca por pesquisas relacionadas a essa temática em bancos de teses e dissertações de universidades brasileiras que possuem programas de Pós-Graduação na área de Educação Matemática, além de revistas científicas da área. Observamos que ainda há poucas publicações sobre a aprendizagem em Matemática com o uso da Lousa Digital.

⁴ Discutiremos no segundo capítulo esses conceitos sobre uso de tecnologias digitais em uma abordagem instrucionista e em uma abordagem construcionista.

⁵ *Applets* são pequenas aplicações executadas a partir de uma página html, cuja utilização pode ser simplificada pelo Easy Java Simulations. Fonte: <www.lac.inpe.br/~rafael.santos/Docs/JaVale/applets.pdf>. Acesso em 30 mar. 2014.

⁶ A partir desse momento utilizarei a primeira pessoa do plural, pois a pesquisa foi desenvolvida em parceria com a orientadora.

Uma das pesquisas localizadas foi a de Nakashima (2006), que investigou a interatividade entre professores e alunos durante o desenvolvimento das atividades com a Lousa Digital. A autora aponta que a Lousa Digital transformou uma informação estática em outra com um dinamismo capaz de criar um ambiente de interação e aprendizagem. Relata ainda que os alunos produziram informações juntos, ao invés de só as receberem, destacando assim a interação entre os alunos além da interação do aluno com a atividade intermediada pela Lousa Digital.

Nakashima (2006) ressalta ainda a potencialidade da Lousa Digital como um recurso pedagógico capaz de promover a elaboração de aulas mais dinâmicas, propiciando uma aprendizagem mais participativa e significativa.

Carvalho F. (2011) investigou ações que podem ser mobilizadas pelo professor e pelos alunos ao trabalharem com problemas de Geometria em um ambiente dinâmico e interativo, utilizando, para isso, o software Cabri 3D e a Lousa Digital. Em suas conclusões, o autor afirmou que o software e a Lousa Digital possibilitaram a interação entre os sujeitos.

Através dos toques das mãos nos ícones na tela do computador, foi possível acionar o software Cabri 3D, construir e reconstruir os objetos geométricos, possibilitando assim, maior interação do sujeito com o software, pois ele utiliza o que temos de mais interativo, as mãos. (CARVALHO F., 2011, p. 37)

O autor identificou também dificuldades no uso de diferentes mídias (software Cabri 3D e a Lousa Digital), afirmando serem essas “[...] um rico campo de pesquisa, possibilitando estudos futuros sobre os saberes docentes necessários ao professor para trabalhar com softwares através da Lousa Digital.” (CARVALHO F., 2011, p. 111).

A respeito do movimento de interação entre os alunos, Carvalho S. e Scherer (2012) destacam a possibilidade da aprendizagem cooperativa:

[...] acreditamos que o trabalho em um ambiente de aprendizagem cooperativa, criado com o uso da Lousa Digital, pode favorecer a construção do conhecimento pelo aluno. Isso porque o sujeito tem a oportunidade de agir tanto sobre suas certezas quanto sobre as certezas dos outros, gerando um movimento de constantes interações entre sujeitos, ou seja, são mais pessoas agindo sobre as certezas de cada aluno. (CARVALHO S.; SCHERER, 2012, p. 22).

Esses pesquisadores afirmam que esse movimento de cooperação pode ser favorecido em aula pelo fato de os alunos utilizarem um único computador para todos, sendo a Lousa Digital a “grande tela” desse computador, oportunizando que todos se envolvam em uma mesma atividade, realizada a várias mãos. Nesse processo há o desenvolvimento de uma atividade cuidadosamente elaborada e os alunos são incentivados a se colocarem em um movimento de construção de conhecimento, pois podem explicitar verbalmente o que pensam e articulam mentalmente. De posse de informações verbalizadas pelo diálogo, o restante da turma pode intervir sobre o que um aluno ou o professor propõe.

Em sua pesquisa de mestrado, Carvalho S. (2014) investigou as contribuições de uma ação de formação de professores em serviço para o uso da Lousa Digital em aulas de matemática. Ele acompanhou a elaboração e o desenvolvimento de planejamentos de aulas de professores, analisando reflexões sobre as práticas desenvolvidas. O pesquisador concluiu também que a formação continuada em serviço proposta na pesquisa contribuiu para momentos de reflexão dos professores em relação ao uso da Lousa Digital nas aulas de Matemática. Essas contribuições foram no sentido de integrar a Lousa Digital ao currículo escolar em uma abordagem construcionista.

Quanto às pesquisas sobre o estudo da circunferência, nos pautamos nas que tratam das cônicas de uma forma geral, pois a circunferência é uma das quatro cônicas que se originam da intersecção de um plano com um cone reto. Dessa forma, algumas pesquisas apontam que o conteúdo de cônicas, e em especial a circunferência que é o foco desta pesquisa, tem sido pouco explorado na maioria das escolas públicas, como mencionado por Teukolsky (1994, p. 191):

É especialmente lamentável não se oferecer esse tópico [...] para apreciar sua magia geométrica. [...]. Belo e fascinante em seus muitos aspectos, esse assunto oferece uma rara oportunidade para se mesclar geometria analítica com [...], lugares geométricos, [...], círculos [...] e assim por diante [...].

Da mesma forma, nos estudos de Bordallo (2011) a respeito da história do ensino da Matemática no Brasil dos últimos 120 anos, a pesquisadora observou como o conteúdo de cônicas tem sido apresentado nos programas de ensino, nas diretrizes curriculares nacionais e nos livros didáticos. Ao final de sua investigação, a autora

concluiu que “[...] no ensino atual prevalece o tratamento puramente analítico e focal, totalmente fragmentado.” (BORDALLO, 2011, p. 28).

Para solucionar o problema da fragmentação do ensino das cônicas e de sua compreensão, a pesquisadora sugere que o professor faça uso das tecnologias no processo de ensino e de aprendizagem:

[...] com as novas tecnologias seria muito mais fácil, para os alunos de hoje em dia, visualizar e compreender a demonstração e o significado [...], construindo uma abordagem unificada [...] para o ensino médio atual, capaz de fazer mais sentido aos alunos [...] e de dar ao ensino das cônicas o caráter formativo e cultural que o ensino médio deve ter. (BORDALLO, 2011, p. 28-29).

Nesse sentido, buscamos também por pesquisas que investigassem o uso de softwares de Geometria Dinâmica⁷ como o *GeoGebra*⁸ e o *Cabri-Geomètre*⁹ para o ensino de cônicas e circunferências, como os estudos de Macena (2007) e Silva (2011). A pesquisa de Macena (2007) sugere a busca de atividades que instiguem o aluno a relacionar o estudo da geometria das circunferências com o cotidiano deles, problematizando, usando diferentes representações, explorando propriedades e conceitos de lugares geométricos.

Silva (2011) investigou a forma de utilizar tecnologias e atividades diversificadas daquelas propostas pelo Caderno do Professor¹⁰ sobre o tema cônicas com base nos materiais da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo. Essas propostas foram elaboradas pelo pesquisador e apresentadas aos professores do Estado de São Paulo sob a forma de uma oficina intitulada “Oficinas Didáticas de Educação Matemática e Tecnologias: Lugares Geométricos”.

⁷ A Geometria Dinâmica é uma proposta para o estudo da Geometria a partir de *softwares* interativos, com representações dinâmicas e manipuláveis nas telas dos computadores, na forma de figuras, diagramas, sons etc.

⁸ O GeoGebra é um software de geometria dinâmica gratuito e multi-plataforma para todos os níveis de ensino que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo em um único sistema. Ele tem recebido vários prêmios na Europa e EUA. Fonte: www.GeoGebra.org/cms/pt_BR/info/13-what-is-GeoGebra

⁹ Software de geometria dinâmica produzido pela companhia francesa Cabrilog que pode ser utilizado por professores de matemática no estudo da Geometria Plana.

¹⁰ Por meio do programa São Paulo Faz Escola, os educadores que atuam nas unidades da rede estadual de ensino recebem o Caderno do Professor para auxiliar os docentes no preparo das aulas e direcioná-los quanto ao desenvolvimento de atividades com os alunos dentro das disciplinas de matemática, língua portuguesa, história, filosofia, química, física, biologia sociologia, inglês, geografia e educação física. Fonte: <<http://www.educacao.sp.gov.br/caderno-professor>>.

Ao elaborar a sequência de atividades para as oficinas, foco de sua pesquisa, Silva (2011) propôs o uso de diferentes materiais como dobraduras e o software GeoGebra. Em suas considerações finais, o autor apontou contribuições do uso desse software em suas oficinas, afirmando que este permitiu o levantamento de conjecturas pelos participantes, favorecendo o debate sobre o objeto matemático.

A relevância do uso de softwares de geometria dinâmica também é discutida por Gravina (1996):

[...] os programas [...], como Cabri-Géomètre e Geoplan, constituem ferramentas poderosas na superação dos obstáculos inerentes ao aprendizado. Nestes ambientes conceitos geométricos são **construídos** [...]; a habilidade em perceber representações diferentes de uma mesma configuração se desenvolve; controle sobre configurações geométricas levam a descoberta de propriedades novas e interessantes. Quanto às atitudes dos alunos frente ao processo de aprender: **experimentam; criam estratégias; fazem conjecturas; argumentam e deduzem propriedades matemáticas**. A partir de manipulação concreta, “o desenho em movimento”, passa para manipulação abstrata atingindo **níveis mentais superiores** da dedução e rigor, e desta forma entendem a natureza do raciocínio matemático. (GRAVINA, 1996, grifo nosso).

Podemos observar que muitos softwares de geometria dinâmica apresentam potencialidades para o estudo da Geometria Analítica, atendendo à necessidade de um estudo integrado entre Geometria e Álgebra, como apontam Macena (2007), Silva (2011) e Carvalho F. (2011). Desenvolvemos assim, a presente pesquisa para investigar um estudo sobre circunferências com o uso do GeoGebra e a Lousa Digital.

A esse respeito, podemos mencionar Paula (2011) que em sua pesquisa analisou como graduandos em um curso de Licenciatura em Matemática mobilizam e articulam conceitos de Geometria Plana e Álgebra em estudos de Geometria Analítica. Para alcançar seu objetivo, o pesquisador fez a escolha do software GrafEq¹¹ e seus resultados evidenciaram que:

[...] um trabalho que explore a Geometria Analítica em estreita relação com a Álgebra e a Geometria, levando os alunos a praticarem transformações do tipo tratamento e conversões deve levar a uma melhor apreensão dos objetos da Geometria Analítica. (PAULA, 2011, p. 167).

¹¹ O software GrafEq trabalha com equações e inequações em coordenadas cartesianas e polares. Assim é possível esboçar curvas e regiões no plano cartesiano.

Nesse contexto, apresentamos a questão norteadora desta pesquisa: *Quais as contribuições do uso da Lousa Digital com o software Geogebra para um estudo sobre circunferências no terceiro ano do Ensino Médio?*

O objetivo geral da pesquisa é *identificar e analisar contribuições do uso da Lousa Digital com o software Geogebra para um estudo sobre circunferências no terceiro ano do Ensino Médio*. Para alcançarmos esse objetivo geral, estabelecemos os seguintes objetivos específicos:

- Analisar ações e produções dos alunos ao usarem a Lousa Digital em um estudo sobre circunferências.
- Analisar o processo de interação entre sujeitos ao realizarem um estudo sobre circunferências com o uso da Lousa Digital.

A pesquisa se constituiu a partir do desenvolvimento de uma proposta de atividades desenvolvida com um grupo de alunos do 3º ano do Ensino Médio, em uma escola pública do município de Campo Grande - MS. Essa proposta foi organizada, desenvolvida e analisada pela pesquisadora, em parceria com a orientadora, a partir dos estudos sobre o construcionismo (PAPERT, 2008), do ciclo de ações e espiral de aprendizagem de Valente (1999, 2005) e dos estudos de Scherer (2005) sobre a cooperação.

A dissertação está organizada em seis capítulos. Neste primeiro capítulo apresentamos a introdução da pesquisa com a contextualização da questão norteadora, o objetivo geral e os objetivos específicos. No segundo capítulo é apresentado o referencial teórico que se constitui dos estudos de Papert (2008) sobre a abordagem construcionista no uso de computadores, do ciclo de ações e da espiral de aprendizagem dos estudos de Valente (2005) e dos estudos de Scherer (2005) sobre aprendizagem cooperativa.

No terceiro capítulo apresentamos estudos sobre o ensino do conteúdo de circunferência, bem como a forma como esse ensino é recomendado pelos Parâmetros curriculares Nacionais para o Ensino Médio (1999), nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006), no Guia no Programa Nacional do Livro Didático (2012) e no Referencial Curricular da Educação Básica da Rede Estadual de Ensino/MS: Ensino Médio (2012). No quarto capítulo, apresenta-se a metodologia da pesquisa, a estrutura da Lousa Digital e do Projetor Arthur, os participantes da pesquisa e a proposta de atividades para a experimentação. No quinto capítulo apresentamos a análise de dados

coletados na experimentação, a partir de duas categorias: “Lousa Digital e o Ciclo de Ações” e “Interação entre sujeitos”. No sexto capítulo são apresentadas as considerações finais sobre a pesquisa desenvolvida.

2 O USO DE COMPUTADORES E A LOUSA DIGITAL EM SALA DE AULA

Neste capítulo apresentaremos o referencial teórico da pesquisa sobre a abordagem construcionista no uso de computadores, pois quando os computadores são inseridos nos ambientes escolares, a forma como esses serão usados pode caracterizar a transmissão de informações ou a construção de conhecimentos. Nesse sentido, apresentaremos os estudos de Papert (2008) sobre a abordagem construcionista no uso de computadores na educação.

Apresentaremos também os estudos de Valente (2005) sobre o ciclo de ações e a espiral de aprendizagem vivenciados pelo aprendiz durante o desenvolvimento de uma atividade com o uso de computadores.

Como a tecnologia digital escolhida nesta pesquisa é a Lousa Digital, que se constitui em uma grande tela à frente de todos os alunos para o desenvolvimento da mesma atividade, discutiremos as possibilidades da aprendizagem cooperativa a partir dos estudos de Scherer (2005).

2.1 O CICLO DE AÇÕES E O USO DE COMPUTADORES

Os estudos de Papert (2008) sobre o uso de computadores na educação tratam de duas abordagens, a instrucionista e a construcionista. Sobre o instrucionismo, Papert (2008, p.134) afirma que:

Com a palavra instrucionismo, minha intenção é expressar algo bastante diferente de pedagogia, ou a arte de ensinar. Ela deve ser lida em um nível mais ideológico ou programático, expressando a crença de que o caminho para uma melhor aprendizagem deve ser o aperfeiçoamento da instrução – ora, se a Escola é menos que perfeita, então é sabido o que fazer: ensinar o melhor.

Diante disso, a abordagem instrucionista ou o *instrucionismo* é definido por Papert (2008) como uma abordagem que privilegia a transmissão de informações, ou seja, a instrução programada com o uso de computadores. Essa abordagem é vivenciada por professores cuja epistemologia se pauta em conhecimentos que são transmitidos.

A abordagem construcionista, ou o construcionismo proposto por Papert, é um processo de construção de conhecimentos no qual o computador é o instrumento

usado para interação entre o sujeito e o objeto do conhecimento. Sobre esse processo, Papert (2008, p. 134) afirma que:

Ele não põe em dúvida o valor da instrução como tal, pois isso seria uma tolice: mesmo a afirmativa (endossada, quando não originada, por Piaget) de que cada ato de ensino priva a criança de uma oportunidade para a descoberta, não é um imperativo categórico contra ensinar, mas um lembrete expresso em uma maneira paradoxal para manter o ensino sob controle.

Dessa forma, a instrução tem sua importância para Papert apenas quando se fizer necessária, ou seja, desde que não interferir na construção do conhecimento do aluno, mas a favoreça. Podemos exemplificar essa situação quando o professor utiliza um software desconhecido pelo aluno é necessário que sejam fornecidas algumas informações sobre o uso do software para que ele possa desenvolver a atividade. Essas instruções estão restritas ao uso do software e não respondem à problemática ou tarefa proposta pelo professor.

É nesse sentido que na abordagem construcionista o papel do professor é o de acompanhar, desafiar o aluno para a resolução de problemas, instigando-o a pensar, favorecendo o seu processo de construção do conhecimento, incentivando-o e oportunizando que ele possa “colocar a mão na massa” ao usar o computador, oferecendo-lhe apenas informações que não lhe tirem a possibilidade de pensar, refletir e encontrar respostas para o problema proposto pelo professor ou formulado pelo aluno.

As indagações do aluno durante o seu processo de construção de conhecimentos devem ser cuidadosamente encaminhadas pelo professor, pois nessa abordagem privilegia-se não dar respostas prontas e sim apontar caminhos para que os alunos cheguem sozinhos a elas. É nesse cenário de não dar respostas, mas encaminhar o aluno a construí-las que Papert (2008, p. 134) afirma:

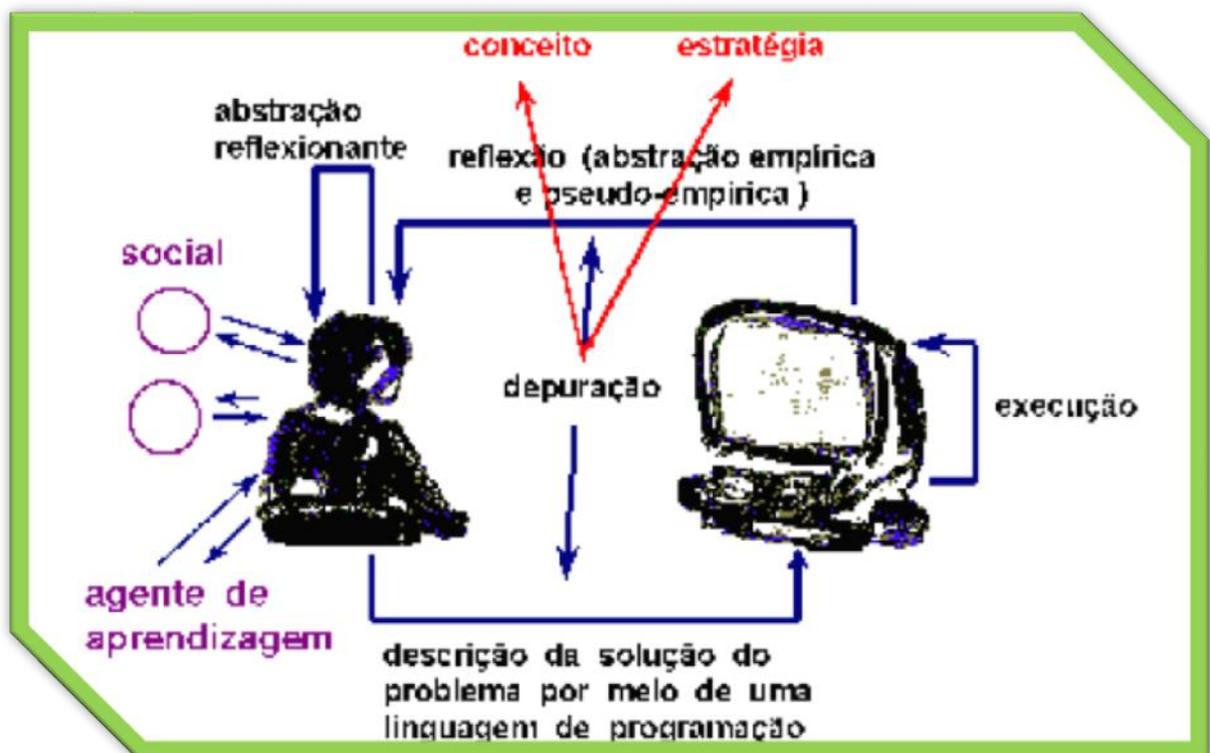
A atitude construcionista no ensino não é, em absoluto, dispensável por ser minimalista – a meta a ensinar de forma a produzir a maior aprendizagem a partir do mínimo de ensino. Evidentemente, não se pode atingir isso apenas reduzindo a quantidade de ensino, enquanto se deixa todo o resto inalterado. A outra mudança principal e necessária assemelha-se a um provérbio africano: se um homem tem fome, você pode dar-lhe um peixe, mas é melhor dar-lhe uma vara e ensiná-lo a pescar.

Nessa perspectiva, Papert (2008) destaca que é melhor ensinar o aluno a pensar, pois assim não se sentirá dependente de um professor toda vez que se confrontar com uma nova situação, desenvolvendo, desta forma, sua autonomia.

A abordagem construcionista no uso de computadores contribui para a constituição de um ambiente favorável à construção de conhecimentos. Nesse contexto, os estudos de Valente (2005) detalham esse processo de construção de conhecimentos ao propor o ciclo de ações e a espiral de aprendizagem vivenciadas pelo aluno durante o desenvolvimento de atividades com o uso de computadores.

O ciclo de ações é desenvolvido pelo aprendiz em quatro fases, segundo Valente (2005): descrição, execução, reflexão e depuração. Essas ações são desenvolvidas pelo aprendiz durante o uso de computadores para o desenvolvimento de atividades propostas pelo professor ou formuladas por ele. Procura-se com o Ciclo de Ações analisar como o conhecimento é construído pelo aluno durante o desenvolvimento de uma atividade com o uso de computadores. A Figura 1 representa, de forma esquemática, esse ciclo de ações.

Figura 1 – Ciclo de Ações



Fonte: Valente (2005, p. 54)

A primeira ação a ser vivenciada pelo aprendiz durante o Ciclo de Ações é a *descrição*. Nessa etapa, o aprendiz “ensina o computador” a executar uma tarefa, ou seja, descreve uma solução para o problema em uma linguagem de programação ou usando comandos do software, para que este a execute. Em nossa pesquisa, a ação de descrição do ciclo de ações desenvolvida pelos alunos participantes constituiu-se na escolha de comandos disponíveis na linguagem do software Geogebra que atendessem às conjecturas, hipóteses ou estratégias para a solução do problema. Dessa forma, não caracterizamos a ação de descrição como programação, embora o software permita isso.

A segunda ação é a *execução* desenvolvida pelo computador que, ao receber os comandos do aluno, executa-os e entrega uma resposta ao aprendiz. O aprendiz pode dar-se por satisfeito caso a resposta apresentada pelo computador atenda ao que ele esperava ao realizar a descrição, ou não, e, neste caso, pode passar a vivenciar ações de reflexão e depuração.

Na ação de reflexão o aluno pode vivenciar abstrações dos tipos empírica, pseudoempírica ou reflexionante. A abstração empírica se constitui, em um nível inicial de abstração, na retirada de informações das características físicas do objeto em estudo, como a sua cor, sua forma e textura, antes mesmo de qualquer ação do sujeito sobre ele. Piaget (1973, p. 5) descreve o nível da abstração empírica da seguinte forma:

Designaremos por “abstração empírica” (*empirique*) a que se apoia sobre os objetos físicos ou sobre os aspectos materiais da própria ação, tais como movimentos, empurrões, etc. Observemos desde logo que, mesmo sob suas formas mais elementares, este tipo de abstração não poderia consistir em puras “leituras”, pois para abstrair a partir de um objeto qualquer propriedade, como seu peso ou sua cor, é necessário utilizar de saída instrumentos de assimilação (estabelecimento de relações, significações, etc.), oriundos de “esquemas” (*schèmes*) sensório-motores ou conceptuais não fornecidos por este objeto, porém, construídos anteriormente pelo sujeito. [...].

As abstrações pseudoempíricas são aquelas em que o sujeito faz leituras do objeto a partir de suas características materiais como na abstração empírica, porém, as propriedades constatadas no objeto resultam de atividades do sujeito, de suas coordenações mentais, deduzindo algumas propriedades implícitas, resultantes de suas ações sobre o objeto. São abstrações que exigem algum conhecimento ou ação do sujeito, como comparação, relação, atribuição de significados, etc.

Nesse nível de abstração pseudoempírica extrai-se algum conhecimento da ação e do objeto. Esse conhecimento é um movimento endógeno, próprio de cada aluno, necessário para novas abstrações e conhecimentos em patamares superiores.

Na abstração reflexionante o aluno transfere para um patamar superior do pensamento tudo que foi abstraído nos patamares inferiores da atividade, todas as atividades cognitivas até então desenvolvidas. Nesse nível o sujeito age reflexivamente sobre as ações realizadas sobre o objeto, culminando assim em uma dinâmica de passagem para níveis mentais cada vez mais superiores. Segundo Valente (2005, p. 53):

A abstração reflexiva permite a projeção daquilo que é extraído de um nível mais baixo para um nível cognitivo mais elevado ou a reorganização desse conhecimento em termos de conhecimento prévio (abstração sobre as próprias ideias do aluno).

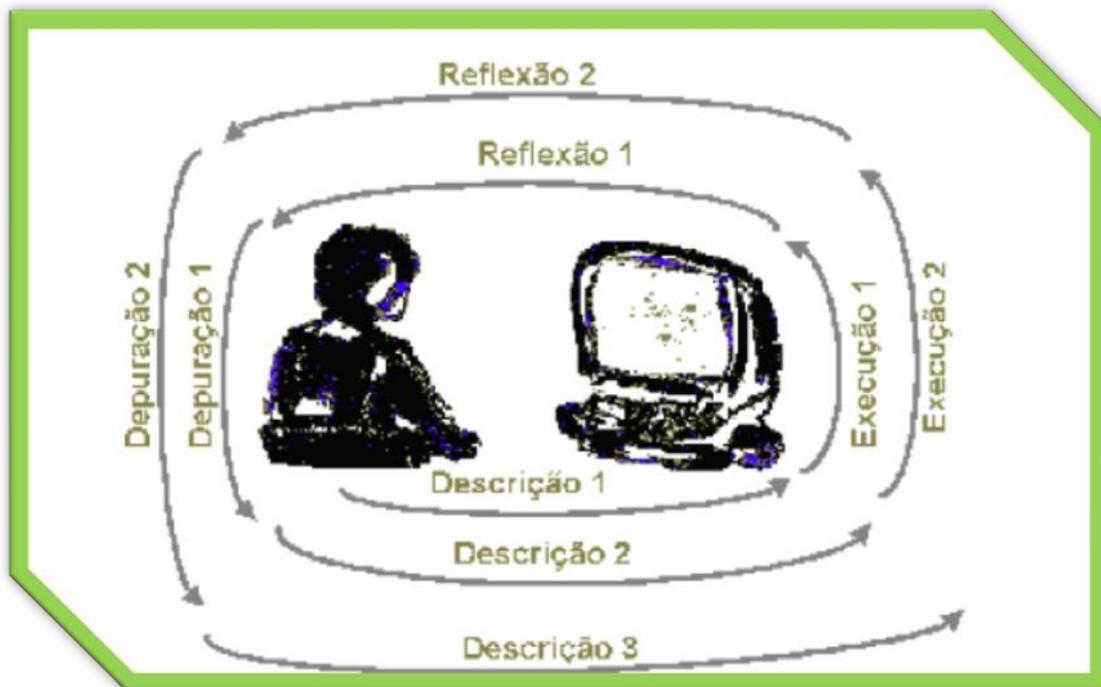
Segundo Becker (1993), na abstração reflexionante estão presentes dois componentes: o reflexionamento e a reflexão. A ação de transferência ou transposição para patamares superiores daquilo que estava em patamares inferiores é denominada reflexionamento. Os elementos que foram transferidos devem ser reorganizados ou reconstruídos. O sujeito pode ou não organizar o que está posto no novo patamar. A essa reorganização no patamar superior de tudo o que foi abstraído do patamar inferior, frente às novas informações sobre o objeto que lhe causaram desequilíbrios cognitivos, é denominada de reflexão e se caracteriza pelo movimento de busca por um novo equilíbrio cognitivo.

Essas abstrações podem ser vivenciadas durante a ação de reflexão no ciclo de ações. A fase da depuração consiste na etapa em que o aprendiz analisa os resultados obtidos pela descrição realizada, retirando o que não considera “adequado” para a resolução do problema, acrescentando informações novas e realizando uma nova descrição.

Valente (2005) aponta que essa depuração é oriunda de erros nos conceitos envolvidos na atividade ou nas estratégias usadas na realização da atividade. A etapa da depuração só acontece quando o resultado que surge na tela do computador, oriundo da descrição anterior, não atende ao que o aprendiz esperava para resolver o problema, necessitando assim de uma nova descrição.

A nova descrição dá origem a um novo ciclo de ações, ou seja, nova descrição – execução – reflexão – depuração. Valente (2005) afirma que a melhor forma para representar o movimento contínuo dos ciclos é com a representação de uma espiral ascendente, pois a cada novo ciclo o conhecimento do aprendiz está em um patamar superior em relação ao conhecimento apresentado no ciclo anterior. A Figura 2 representa a ideia de espiral de aprendizagem.

Figura 2 – Espiral da Aprendizagem



Fonte: Valente (2005)

A vivência do ciclo de ações pode ocorrer simultaneamente ou em ordem diferente das apontadas pelas setas na Figura 1. Segundo Valente (2005, p.71):

Na realidade, durante uma ação, o aprendiz pode estar pensando ou mesmo já executando uma outra. Por exemplo, durante a execução, à medida que o resultado vai sendo produzido, ele pode estar refletindo e pensando nas alterações a serem feitas. [...]. Do mesmo modo, tanto as ações cíclicas quanto a espiral da aprendizagem, estão acontecendo também simultaneamente, uma alimentando a outra.

A vivência do ciclo de ações sofre interferências do professor e do meio social, conforme esquema da Figura 1. O meio social é constituído pelos colegas, pais, familiares do aluno, os quais lhe fornecem informações ou levantam questões e ideias

para a resolução de uma tarefa. O meio social, portanto, constitui a história de vida do aprendiz.

Quanto ao papel do professor no ciclo, podemos resgatar essa relação com estudos de Scherer (2005), quando ela discute a necessidade de o professor proporcionar atividades que despertem no aluno o interesse pela atividade, pois “o sujeito age e aprende quando se sente desafiado, quando sente alguma necessidade, quando está interessado ou intrigado com algo, quando está disposto, [...]” (SCHERER, 2005, p. 87). Dessa forma, é papel do professor conhecer sua turma a tal ponto que esse conhecimento lhe favoreça a elaboração de atividades e a proposição de questionamentos que atendam às necessidades e interesses dos alunos, criando oportunidades para contextualizar ou dar sentido ao estudo do objeto matemático.

Este momento inicial de apresentação da proposta da atividade ao aluno constitui uma etapa importante para a aprendizagem, pois favorece a vivência de uma situação favorável à aprendizagem, apontada por Valente (2005) como essencial para que o aluno se mobilize para “colocar a mão na massa”, construindo um perfil crítico, criativo e autônomo. Ao propor a atividade ao aluno, o professor não deve apontar ou induzi-lo a trilhar um determinado caminho para a sua resolução, cabendo unicamente ao aluno a escolha de estratégias e uso de conceitos para resolver o problema. O papel do professor é acompanhar o aluno, orientá-lo em todo o processo para refletir sobre suas escolhas, buscar novas informações, encaminhando questões e informações que contribuam para a construção de conhecimento do aluno.

No momento inicial do ciclo, o aluno pode agir sem a preocupação de justificar ou explicar porque agiu daquela forma, pois o foco é apenas a ação, um momento operacional. Cabe ao professor propor questionamentos a fim de levá-lo a justificar suas ações e construir conhecimentos. Dessa forma, o aluno inicia um momento de (re) organização das operações mentais sobre os conhecimentos matemáticos, podendo vivenciar a construção de conhecimento em patamares superiores, levantando conjecturas e validando hipóteses.

É importante que o professor atente para os indícios de organização interna do aluno, indícios estes expressos no diálogo com o aluno, nas representações visualizadas no software ou *applet*. Esses indícios podem conter informações importantes sobre a compreensão de conceitos e estratégias usadas pelo aluno. De

posse dessas informações, o professor poderá intervir de forma a manter o ciclo de ações e alimentar a espiral de aprendizagem do aluno.

Com base nessas informações, o professor ainda poderá gerenciar momentos de diálogo entre os alunos, momentos de aprendizagem cooperativa, favorecendo a organização interna das estruturas cognitivas de cada aluno e do grupo como um todo, possibilitando que os alunos formalizem conceitos.

A partir desse estudo sobre o ciclo de ações, elaboramos uma proposta de atividades que pudesse favorecer os alunos a vivenciarem o ciclo de ações com o uso da Lousa Digital e do software Geogebra.

Como usamos a Lousa Digital na pesquisa, no próximo subcapítulo apresentamos estudos sobre a aprendizagem cooperativa que pode ser vivenciada com o uso da Lousa Digital.

2.2 A LOUSA DIGITAL E A APRENDIZAGEM COOPERATIVA

Segundo Carvalho (2014, p. 27) “[...] o uso da Lousa Digital pode favorecer a criação de um ambiente no qual o aluno é ativo na construção do seu conhecimento em interação com seus colegas”.

Nesse contexto, Scherer (2005), com base nos estudos piagetianos sobre cooperação, discute a aprendizagem cooperativa a partir da interação entre sujeitos que tem por objetivo a busca por uma resposta a um problema que desafiou o grupo. Segundo Piaget, para que o sujeito aprenda é necessário ele se sentir desestabilizado em suas certezas, sentindo a necessidade de algo que restabeleça seu equilíbrio cognitivo naquele momento. Dessa forma, o sujeito só aprende quando se sente intrigado com algo, quando seus esquemas mentais não dão conta de resolver o novo problema que lhe foi proposto.

Nesse sentido, Scherer (2005) afirma que o ambiente favorável para esse movimento de aprendizagem deve ser dialógico, desafiador e questionador para que cause desequilíbrios. O professor, então, deve questionar de forma a causar desequilíbrios cognitivos nos alunos, fazendo-os falar, envolver-se em movimentos de aprendizagem cooperativa, e, neste sentido, o uso da Lousa Digital pode favorecer esse processo.

Com base nos estudos de Piaget (1977), Scherer (2005) apresenta três condições para o processo de aprendizagem cooperativa. A primeira condição diz respeito aos conhecimentos que os participantes possuem sobre o objeto em estudo, pois estes devem favorecer as compreensões e significações de todos nas interações. A segunda condição diz respeito à necessidade de cada sujeito justificar a proposição que reconhecem como válida, na interação com o outro, sem contradições. A terceira proposição expressa a necessidade de uma reciprocidade na comunicação, ou seja, todos devem agir para a manutenção do diálogo com vista a um entendimento comum.

Além dessas três condições, Scherer (2005, p. 91) discute outras condições essenciais para o processo de aprendizagem cooperativa:

[...] nessa relação de cooperação com o outro, busca-se seduzi-lo ao invés de submetê-lo a nossa opinião, na qual cada um aceita ou incorpora o outro domínio como parte sua, passando para este sem negar a si mesmo. Esta ação é diferente de simplesmente tolerar o outro e sua ideia, pois tolerância é uma negação postergada, é considerar que o outro está equivocado.

É nesse sentido que Scherer (2005, p. 92) atribui importância ao papel do professor como gestor de um grupo de discussão sobre um objeto do conhecimento:

O educador ou educadora que atenta a estas questões, tem elementos para articular os debates tanto em ambientes presenciais quanto em ambientes virtuais. Ainda assim, deve atentar para não ter a falsa ideia de equilíbrio nas discussões do grupo, coagindo os educandos a “pensarem” como ele ou ela. Se isso acontecer, não há cooperação, pois não há operação conjunta, nem construção de consenso, apenas consentimento, que causa a falsa ideia de uma conclusão comum, um falso equilíbrio.

A dinamicidade do movimento de cooperação pode favorecer a desestruturação de certezas e desorganizações nas estruturas mentais e cognitivas dos envolvidos. Ou seja, nenhum sujeito sai do movimento de cooperação da mesma forma que entrou, pois o debate favorece a dinâmica dos desequilíbrios cognitivos individuais e busca o restabelecimento de novas certezas, de novas estruturas mentais. Sobre esse aspecto do movimento de cooperação, Piaget (1978, p. 35) afirma:

[...] Mas, se a interação entre o sujeito e o objeto os modifica, é [...] evidente que cada interação entre sujeitos individuais modificará os sujeitos uns em relação aos outros. Cada relação social constitui, por conseguinte, uma totalidade nela mesma, produtiva de características novas e transformando o indivíduo em sua estrutura mental.

Quanto ao movimento de cooperação, as proposições de cada sujeito em interação com o outro, segundo Scherer (2005, p. 93), fundamentada nos estudos de Piaget, podem ser:

[...] proposições iguais, quando uma corresponde à outra; proposições diferentes, que necessitam de um acordo entre os envolvidos na busca de uma afirmação comum, que justifique a diferença entre os pontos de vista; e ainda podemos ter proposições complementares.

É nos momentos de cooperação externa, ou seja, entre os sujeitos, que ocorre a cooperação interna, pois ao ouvir a proposição do outro, as operações mentais do sujeito que comunica a sua proposição agem sobre as operações mentais dos outros que o ouvem e a confrontam com a sua própria proposição.

Dessa forma, constitui-se um movimento de coordenação interna, reflexão, tomada de consciência, uma vez que todos estão em busca do equilíbrio de suas próprias coordenações mentais frente às coordenações mentais do grupo expressas no diálogo.

Scherer (2005) pontua que as coordenações externas são desenvolvidas pelo grupo enquanto que as coordenações internas são próprias de cada sujeito. Assim, o professor deve atentar para que as coordenações externas sejam desenvolvidas pelo grupo e não por ele, gerando assim uma falsa cooperação. Nos processos de interação é importante ainda discutir que a cooperação é diferente da colaboração. Scherer (2005, pp. 95-96) afirma que:

[...] A cooperação é diferente da colaboração, pois colaborar é operar isoladamente sobre um objeto em estudo, sem criar com o outro, sem buscar um entendimento comum; colaborar é operar paralelamente a operação do outro. [...], é possível afirmar que a colaboração é operação "solitária" na ação, não envolve operações para ações de reciprocidade, complementaridade ou correspondência com a de outros.

Dessa forma, os sujeitos envolvidos na ação de cooperação precisam estar conscientes de que precisam expor suas proposições e justificá-las com o objetivo de que estas interfiram nas proposições dos colegas, e que estes estejam abertos para o diálogo na busca de um consenso, promovendo cooperações externas e internas.

Esta pesquisa procura investigar como, com o uso da Lousa Digital, se pode favorecer o movimento de cooperação em uma sala de aula ao desenvolver atividades nas quais todos tenham acesso ao que cada aluno e professor propõem, visualizando e

manipulando as execuções do computador a partir de descrições ou uso de comandos do software na Lousa Digital.

3 PROPOSTAS OFICIAIS E O ESTUDO SOBRE CIRCUNFERÊNCIA NA ESCOLA

Neste capítulo apresentamos orientações apresentadas nos documentos educacionais oficiais sobre o uso de tecnologias digitais na sala de aula, bem como sobre a Geometria Analítica.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) foram elaborados em 1999 durante as reformas na área educacional, pois visavam atender às necessidades educacionais da nova sociedade que se estabelecia a partir de mudanças econômicas e tecnológicas da época.

Dessa forma, o currículo para o Ensino Médio, segundo consta nos PCNEM (1999), deve ser proposto de forma a privilegiar:

[...] a formação geral, em oposição à formação específica; o desenvolvimento de capacidades de pesquisar, buscar informações, analisá-las e selecioná-las; a capacidade de aprender, criar, formular, ao invés do simples exercício de memorização. (BRASIL, 1999, p. 16)

A respeito da influência dos avanços tecnológicos na Educação, nesse documento afirma-se que:

A denominada “revolução informática” promove mudanças radicais na área do conhecimento, que passa a ocupar um lugar central nos processos de desenvolvimento, em geral. É possível afirmar, que nas próximas décadas, a educação vá se transformar mais rapidamente do que em muitas outras, em função de uma nova compreensão teórica sobre o papel da escola, estimulada pela incorporação das novas tecnologias. (BRASIL, 1999, p. 15)

Segundo consta nos PCNEM (1999), “uma sociedade da informação crescentemente globalizada” requer uma educação:

[...] voltada para o desenvolvimento das capacidades de comunicação, de resolver problemas, de tomar decisões, de fazer inferências, de criar, de aperfeiçoar conhecimentos e valores, de trabalhar **cooperativamente**¹². (BRASIL, 1999, p. 251, grifo nosso)

As orientações apresentadas no documento desafiam o professor a encaminhar seu trabalho pedagógico com o uso de tecnologias levando em consideração que as

¹² O termo “trabalhar cooperativamente” utilizado nos PCNEM traz o sentido de trabalhar em equipe, não mostrando, portanto, o mesmo sentido apresentado nos estudos de Scherer (2005), adotados nesta pesquisa.

tecnologias digitais podem favorecer um movimento de aprendizagem não mais individualista e solitário, mas de forma cooperativa. A esse respeito destacamos que:

O trabalho ganha então uma nova exigência, que é a de aprender continuamente em um processo **não mais solitário**. O indivíduo, imerso em um mar de informações, se liga a outras pessoas, que, **juntas**, complementar-se-ão em um **exercício coletivo** de memória, imaginação, percepção, raciocínios e competências para a produção [...]. (BRASIL, 1999, p.252, grifos nossos).

Quanto ao uso de computadores em aulas de matemática, no documento aponta-se que:

Exigirá do **ensino de Matemática** um redirecionamento sob uma perspectiva curricular que favoreça o desenvolvimento de habilidades e procedimentos com os quais o indivíduo possa se reconhecer e se orientar nesse mundo do conhecimento em constante movimento. [...]. Para isso, habilidades como selecionar informações, analisar as informações obtidas e, a partir disso, tomar decisões exigirão linguagem, procedimentos e formas de pensar **matemáticos** que devem ser desenvolvidos ao longo do Ensino Médio. (BRASIL, 1999, p. 252, grifos nossos).

Com vistas a desenvolver essas habilidades, nos PCNEM (1999) orienta-se que durante o processo de ensino, mesmo que de forma gradativa, o professor apresente problemas cuja resolução favoreça que o aluno busque regularidades, elabore conjecturas e desenvolva a capacidade de argumentação ao justificá-las, pois esses elementos são essenciais para a formalização de conceitos matemáticos.

É nesse sentido que os PCNEM (1999) apresentam a abordagem direcionada à Geometria Analítica, ou seja, como um novo instrumento para resolver um problema de Geometria que está à disposição do aluno caso ele assim o queira. Para tanto, o aluno deve primeiramente analisar as características e dados do problema. Seguidamente, ele opta por um caminho geométrico ou algébrico para a sua resolução, sendo que esta transição entre os dois campos da Matemática lhe seja profundamente conhecida, a ponto de torná-lo apto a justificá-la verbalmente, ou por escrito, sempre que necessário.

Nos PCNEM (1999, p. 129) orienta-se, ainda, que durante as aulas de matemática os alunos se expressem verbalmente, pois “o debate e o diálogo, as perguntas que desmontam as frases feitas, a pesquisa, entre outros, seriam formas de auxiliar o aluno a construir um ponto de vista articulado sobre o objeto em estudo”.

A ênfase das orientações dos PCNEM (1999) é dada, portanto, ao trabalho docente que tem como objetivo favorecer a compreensão do aluno a respeito da

correspondência entre as representações algébrica e geométrica dos entes geométricos. Essa compreensão deve prevalecer sobre uma simples memorização de equações.

O estudo sobre a circunferência tem sua importância evidenciada entre os conteúdos da geometria analítica, bem como a análise de uso de metodologias que favoreçam o processo de aprendizagem. Nos PCNEM (1999, p. 129) orienta-se que esse estudo não seja fragmentado, isolado, mas que seja articulado com outros conteúdos, de forma interdisciplinar.

Além das orientações apresentadas nos PCNEM (1999), destacamos alguns parâmetros apresentados no documento oficial denominado “Orientações Curriculares para o Ensino Médio” (OCEM), publicado em 2006, sobre o ensino de Geometria Analítica no Ensino Médio, com ênfase no subtema circunferência.

Para o estudo da Geometria Analítica há o reconhecimento de que é possível um trabalho articulado entre Geometria e Álgebra:

O trabalho com a Geometria Analítica permite a **articulação entre Geometria e Álgebra**. Para que essa articulação seja significativa para o aluno, o professor deve trabalhar as duas vias: o entendimento de figuras geométricas via equações, e o entendimento de equações, via figuras geométricas. A simples apresentação de equações sem explicações fundadas em raciocínios lógicos deve ser abandonada pelo professor. Memorizações excessivas devem ser evitadas; não vale a pena o aluno memorizar a fórmula da distância de um ponto a uma reta, já que esse cálculo, quando necessário, pode ser feito com conhecimento básico de Geometria Analítica (retas perpendiculares e distância entre dois pontos). (BRASIL, 2006, p. 77, grifo nosso).

Dessa forma, o trabalho pedagógico com a Geometria Analítica, a partir da articulação entre a Álgebra e a Geometria, favorece o entendimento do significado geométrico de uma equação, assim como a representação de um gráfico no plano cartesiano por uma equação.

O estudo da circunferência faz parte dos conteúdos da Geometria Analítica. De acordo com as OCEM (2006), a função da Geometria Analítica é oferecer um tratamento algébrico para a geometria. Dessa forma, o aluno tem a oportunidade de resolver problemas de geometria de forma algébrica, ou seja, por intermédio de equações ou inequações.

A respeito do estudo da equação e de seu significado, o documento afirma que:

O entendimento do significado de uma equação e de seu conjunto de soluções não é imediato, e isso é natural, pois esse significado não é explícito quando simplesmente se escreve uma equação. [...] Essas equações devem ser

deduzidas, e não simplesmente apresentadas aos alunos, para que, então, se tornem significativas, [...]. As relações [...] devem ser construídas pelos alunos [...]. (BRASIL, 2006, p. 77).

É nesse sentido que ressaltamos o papel do professor em propor atividades que tratem da Geometria Analítica de forma a desafiar seus alunos para buscar relações entre as representações algébrica e geométrica de equação. Dessa maneira, eles terão a oportunidade de levantar conjecturas e testar suas hipóteses.

Além das orientações apresentadas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais, Ensino Médio (1999) e no texto das Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006), a respeito do estudo da Geometria Analítica, analisamos o Guia do Plano Nacional para o Livro Didático - PNLD (BRASIL, 2012), buscando orientações encaminhadas aos professores, na escolha do livro didático, relacionadas ao estudo da Geometria Analítica.

O Guia do PNLD (2012) apresenta a resenha das sete coleções aprovadas com o objetivo de contribuir com os professores do Ensino Médio em sua escolha do livro didático a ser adquirido por suas escolas. Nessas resenhas são apresentadas as características de cada uma das sete obras aprovadas, além de textos que podem auxiliar ao professor no uso posterior da coleção escolhida por ele.

No Guia do PNLD (2012) é afirmado que o ensino da Matemática deve capacitar os alunos para algumas ações, dentre elas destacamos as que se relacionam à nossa pesquisa:

- **Planejar** ações e **projetar soluções** para problemas novos, que exijam iniciativa e criatividade;
- Compreender e transmitir ideias matemáticas, por escrito ou oralmente, desenvolvendo a capacidade de **argumentação**;
- Saber empregar os conceitos e procedimentos algébricos, incluindo o uso do conceito de função e de suas várias **representações** (gráficos, tabelas, fórmulas etc.) e a utilização das **equações**;
- **Reconhecer regularidades** e conhecer as **propriedades** das figuras geométricas **planas** e **sólidas**, relacionando-as com os objetos de uso comum e com as **representações gráficas e algébricas** dessas figuras, desenvolvendo progressivamente o pensamento geométrico;
- **Estabelecer relações** entre os conhecimentos nos campos de números e operações, funções, **equações algébricas, geometria analítica, geometria**, estatística e probabilidade, para resolver problemas, **passando de um desses quadros para outro**, a fim de enriquecer a interpretação do problema, encarando-o sob vários pontos de vista. (BRASIL, 2012, p. 18, grifos nossos).

Dessa forma, salientamos, com base no quinto item citado anteriormente, que no Guia do PNL D (2012) há a preocupação em articular os campos da matemática, dentre eles os campos algébrico e geométrico, em consonância com a nossa pesquisa.

Ao estudarmos as resenhas das sete obras apresentadas pelo Guia, verificamos que a abordagem dos conteúdos presentes nas coleções, foram distribuídas em seis campos da Matemática: Números e Operações, Funções, Equações Algébricas, Estatística e Probabilidade, Geometria Analítica e Geometria. Os critérios apresentados pelo Guia do PNL D/2012 para a avaliação dos livros didáticos decorrem de princípios orientados pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, que dizem respeito às finalidades do Ensino Médio como etapa da vida escolar voltadas à consolidação, aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental, assim como uma etapa de preparação para que o aluno continue aprendendo, com autonomia.

Dessa forma, realizamos um nosso estudo sobre as resenhas apresentadas pelo Guia, atentando, portanto, ao campo Geometria Analítica, objeto de nossa pesquisa. Apresentamos brevemente, a avaliação desenvolvida pelo Guia em relação ao estudo da Geometria Analítica nas coleções aprovadas.

Segundo o Guia, na coleção CONEXÕES COM A MATEMÁTICA, de Juliane Matsubara Barroso, “a abordagem de pontos, retas, circunferências [...] no plano cartesiano é satisfatória” (BRASIL, 2012, p. 57), apesar da ênfase no uso de fórmulas e algoritmos.

Sobre a coleção MATEMÁTICA – CONTEXTO & APLICAÇÕES, de Luiz Roberto Dante, afirma-se: “O estudo da geometria analítica é feito adequadamente, com boas ilustrações e exercícios bem escolhidos” (BRASIL, 2012, p. 67).

Na coleção intitulada MATEMÁTICA, de Manoel Paiva, o estudo da Geometria Analítica é “em geral, adequado, embora, por vezes, com ênfase em regras e fórmulas, sem atividades de descobertas e de exploração”, (BRASIL, 2012, p. 74). A respeito da metodologia de ensino, o Guia avalia que “as explanações teóricas são acompanhadas de exemplos e de aplicação do que é exposto no livro e a autonomia do aluno na construção do seu conhecimento é limitada. Nesse modelo, o pensamento crítico deixa de ser incentivado, há pouco espaço para a formulação de hipóteses e para uma aprendizagem mais significativa.” (BRASIL, 2012, p. 75).

A avaliação apresentada no Guia do PNLD/2012, a respeito do estudo da circunferência na coleção MATEMÁTICA CIÊNCIA E APLICAÇÕES, de David Degenszain *et al.*, salienta que:

[...] a abordagem das equações da reta e da circunferência é muito detalhada e fragmentada em um grande número de situações particulares . Apesar disso, o estudo das cônicas, por exemplo, inclui deduções cuidadosas das equações dessas curvas, tanto com centro na origem como fora da origem. As elipses são relacionadas, de forma apropriada, às orbitas dos planetas. (BRASIL, 2014, p. 82).

Na resenha da coleção MATEMÁTICA ENSINO MÉDIO, de Maria Ignez Diniz e Kátia Stocco Smole, o Guia menciona que:

São focalizadas, no plano cartesiano, as representações de pontos, retas, circunferências de pontos, retas, circunferências e cônicas e suas relações com as figuras geométricas planas. O tratamento é, no geral, correto, mas pouco articulado com as funções afim e quadrática. [...]. (BRASIL, 2012, p. 96).

Ainda a respeito dessa coleção, no Guia avalia-se que “a **interação** entre os alunos é favorecida em diversas atividades, [...]. Há bastante incentivo à formulação de problemas e à **verificação de processos e resultados.**” (BRASIL, 2012, p. 97, grifos nossos).

Na coleção denominada NOVO OLHAR – MATEMÁTICA, de Joamir Souza, apresenta a seguinte avaliação sobre o campo da Geometria Analítica:

O estudo de pontos e retas em um sistema cartesiano ortogonal de coordenadas é feito de maneira abrangente e detalhada. Também são adequadas as conexões entre equação da reta e função afim [...]. No entanto, na abordagem da equação da reta prevalece a fragmentação em casos particulares, o que não favorece a formação de conceitos unificadores. As cônicas são introduzidas como seções de cones por planos, com o apoio de atividades práticas. (BRASIL, 2012, p. 103).

Assim como nas obras já citadas, na coleção MATEMÁTICA CIÊNCIA, LINGUAGEM E TECNOLOGIA, de Jackson Ribeiro, segundo consta no Guia, “o estudo da reta e da circunferência é detalhado, mas fragmentado. Apesar disso, o uso do método de completar quadrados para encontrar o centro e o raio da circunferência é elogiável.” (BRASIL, 2014, p. 90).

Além dos documentos oficiais já citados, apresentamos também as orientações publicadas no Referencial Curricular da Educação Básica da Rede Estadual de Ensino/MS: Ensino Médio, sobre o estudo da circunferência.

A respeito do estudo da Matemática, no Referencial Curricular da Educação Básica da Rede Estadual de Ensino/MS: Ensino Médio (2012) defende-se que a escola deve proporcionar uma formação que possibilite ao aluno a oportunidade de

[...] comunicação, **argumentação**, confronto e compreensão de situações-problema, **escolhas e proposições**; enfim, para que tomem gosto pelo conhecimento e aprendam a aprender [...], não há mais espaço, no ambiente escolar, para o mero transmissor e comunicador de conteúdos, assim como não se pode admitir a postura passiva do aluno que busca conhecimentos prontos do professor a serem digeridos. (MS, 2012, p. 159, grifos nossos).

Assim, destacamos que a orientação apresentada nesse documento almeja um estudo da Matemática que oportunize ao aluno construir seus próprios conhecimentos. O uso de tecnologias também é incentivado por esse Referencial Curricular:

São vários os recursos didáticos que podemos utilizar bem como os **meios tecnológicos aplicados à educação**, pois nos dias de hoje o aluno precisa saber buscar a informação de que necessita, realizando consultas na Internet para oportunizar aos estudantes a chance de **construir seu próprio conhecimento**, por meio da **interação com o objeto**, o que os estimulam a pensar, a alcançar níveis mais elevados de **abstração**, a **refletir**, a **criar estratégias**, manipular conceitos, [...]. (MS, 2012, p. 159, grifos nossos).

Essas orientações contribuem para nossa pesquisa em relação à elaboração de uma proposta de atividades que favoreça ao aluno interagir com o objeto do conhecimento, colocando a “mão na massa”, observando suas propriedades, abstraído, refletindo e transferindo conhecimentos para patamares superiores do pensamento.

Mediante essas orientações dos documentos oficiais, propomos, nesta pesquisa, atividades para o estudo da circunferência a partir da relação entre representações geométricas de circunferências e suas equações, em um movimento de diálogo e cooperação.

Acrescentamos, ainda, conhecimentos sobre circunferência e algumas de suas propriedades conforme o livro didático adotado pela escola, aprovado pelo PNL (2012), a coleção MATEMÁTICA CIÊNCIA, LINGUAGEM E TECNOLOGIA, de Jackson Ribeiro.

Ao analisarmos como o livro apresenta o estudo da circunferência, identificamos que há um capítulo inteiro que trata do tema, dividido em cinco tópicos. Na “Introdução” o estudo da circunferência se inicia com a contextualização do tema a partir de um

equipamento de irrigação utilizado por grandes fazendeiros. Esse equipamento é constituído por um cano vertical, preso ao chão por uma plataforma. Esse cano extrai a água de um poço construído em sua base. Preso ao topo desse cano vertical há um cano horizontal, com vários orifícios, que distribui a água por toda a plantação em movimentos cíclicos. Os jatos de água desses orifícios, ao longo do cano horizontal, realizam no solo traçados que se assemelham a circunferências concêntricas. A visão aérea desse equipamento se assemelha a uma circunferência, tendo o cano vertical como seu centro, o cano horizontal como seu raio e os traçados da água no solo como a representação de uma circunferência.

No segundo tópico, intitulado “Equação da circunferência”, o autor apresenta sua definição e suas equações. Para ele, a definição de circunferência é:

Circunferência é o conjunto de todos os pontos de um plano que estão a uma mesma distância não nula de um ponto fixo, denominado centro. Cada segmento de reta que une o centro da circunferência e um de seus pontos é chamado raio (r). (RIBEIRO 2010, p. 220).

Dada essa definição, Ribeiro (2010) apresenta a figura de uma circunferência em um plano cartesiano, em malha quadriculada, destacando as coordenadas do centro da circunferência $C(a,b)$ e de um ponto $P(x,y)$ qualquer da circunferência. A figura também destaca o raio como distância do ponto C ao ponto P , ou seja, $d(C, P) = r$. Apresenta-se, então, que “a distância do ponto P ao centro C dessa circunferência é dada por $d(C,P) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$, obtendo-se a igualdade $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$. Essa equação é chamada equação reduzida da circunferência.

Em seguida à apresentação da equação reduzida da circunferência, o autor apresenta sua equação geral:

Essa equação é chamada equação reduzida da circunferência. Outra maneira de escrevê-la é $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \rightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2 \rightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$. Essa equação é chamada equação normal ou equação geral da circunferência. (RIBEIRO, 2010, p. 220).

Ao final dessa apresentação das equações, Ribeiro exemplifica:

Exemplo 1: A circunferência de centro $C(1,2)$ e raio 5 tem equação $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$. Nesse caso, o ponto $A(4, 6)$, por exemplo, pertence à circunferência, pois: $(4-1)^2 + (6-2)^2 = 25$. Já o ponto $B(2, 3)$, por exemplo,

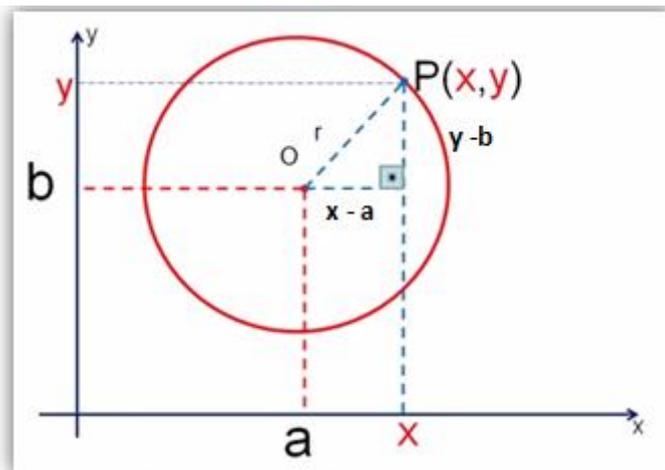
não pertence à circunferência, pois $(2 - 1)^2 + (3 - 2)^2 \neq 25$. (RIBEIRO, 2010, p. 220).

Após os exemplos, o autor introduz uma seção intitulada “Exercícios Resolvidos”, na qual há cinco itens, seguida da seção “Exercícios Propostos” composta de quinze itens.

Na sequência, os três tópicos do estudo da circunferência são intitulados “Posições relativas entre ponto e circunferência”, “Posições relativas entre reta e circunferência” e “Posições relativas entre duas circunferências”. Esses tópicos não fazem parte dos objetivos de nossa pesquisa, assim não serão detalhados aqui.

Apesar de os documentos oficiais apresentados nesta pesquisa recomendarem que o estudo algébrico seja articulado com o estudo geométrico, a coleção não explora a relação entre a equação reduzida da circunferência e a sua representação geométrica a partir da representação do raio no plano cartesiano. Isso poderia ser exemplificado no uso do Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo apresentado na figura 3, tendo a hipotenusa como raio da circunferência e os catetos como segmentos de retas paralelas aos eixos x e y , passando pelos pontos P e O , respectivamente. No entanto, realizamos esse estudo na experimentação desta pesquisa.

Figura 3: Representação do raio da circunferência no plano cartesiano



Fonte: Dados da Pesquisa

Usando o Teorema de Pitágoras para determinar o valor de r , obtemos a equação reduzida da circunferência de centro (a,b) , $r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$. Para a representação algébrica, consideramos centro $O(a,b)$ da circunferência, um ponto

qualquer $P(x, y)$ da circunferência e uma distância r . A distância r entre o centro $O(a, b)$ da circunferência e um de seus pontos $P(x, y)$ é constante e, a partir da Figura 3, pode-se afirmar que é representada pela expressão algébrica $d(P, O) = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$. Essa distância é denominada raio da circunferência, e essa expressão algébrica apresenta a equação reduzida da circunferência, podendo ser escrita como $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Dessa forma, a medida do raio r é apresentada como a distância entre o centro $O(a, b)$ e um ponto $P(x, y)$ qualquer da circunferência. Podemos observar o triângulo retângulo representado a partir das distâncias entre as abscissas $(x - a)$ e entre as ordenadas $(y - b)$ dos pontos O e P . Observa-se que a distância entre os pontos O e P (r) é a hipotenusa do triângulo retângulo obtido, cuja medida pode ser calculada usando o Teorema de Pitágoras, ou seja, pela expressão $r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2$. Como (x, y) são coordenadas de qualquer ponto da circunferência, essa é a equação da circunferência.

A forma como o autor Ribeiro (2010) propõe o estudo da circunferência apresenta a determinação da distância entre dois pontos do plano como uma condição necessária para se chegar à sua equação reduzida.

Nesta pesquisa, a equação da circunferência foi explorada antes do estudo sobre distância entre dois pontos de um plano, sendo discutida a partir da representação geométrica do triângulo retângulo apresentado na figura 3 e o uso do Teorema de Pitágoras.

A equação geral da circunferência é apresentada no livro didático adotado pela escola após a sua equação reduzida, pois é demonstrado o desenvolvimento dos produtos notáveis presentes na equação reduzida. Dessa forma, são propostos exercícios em que é dada a equação geral da circunferência e solicitado que o aluno apresente a equação reduzida.

No próximo capítulo expomos a metodologia desta pesquisa, ou seja, o caminho metodológico, os participantes e a proposta de atividade elaborada para alcançarmos o objetivo.

4 METODOLOGIA DA PESQUISA

Esta pesquisa é de abordagem qualitativa. Este tipo de investigação, conforme definem Bogdan e Biklen (1994), tem cinco características. A primeira delas é considerar o ambiente natural como fonte direta da pesquisa. Nesta pesquisa, o ambiente natural investigado foi uma turma de 3º ano do Ensino Médio de uma escola pública do estado de Mato Grosso do Sul.

A segunda característica é o seu caráter descritivo. Dessa forma, buscamos analisar um estudo com a Lousa Digital com esses alunos, descrevendo e investigando o processo.

A terceira característica é que os investigadores se interessam mais pelo processo do que pelos resultados. Esse é um ponto relevante nesta pesquisa, pois nosso objetivo foi o de analisar um estudo com o uso da Lousa Digital. A quarta característica apresentada pelos autores sedimenta-se na perspectiva de que a análise dos dados seja desenvolvida de forma a priorizar as questões mais importantes. Nesse sentido, buscamos analisar os dados a fim de compreender como ocorreu a aprendizagem em um movimento de cooperação, com o uso da Lousa.

Por fim, a quinta característica está na importância que se dá à construção de significados pelos participantes da pesquisa. Nesta pesquisa nos interessamos em favorecer a construção de significados do objeto matemático pelos alunos, a partir do uso da Lousa Digital, em interação com os colegas.

Para a realização desta pesquisa de abordagem qualitativa, desenvolvemos os procedimentos anunciados a seguir.

4.1 PROCEDIMENTOS DA PESQUISA

O caminho metodológico desta pesquisa iniciou com a escolha da questão a ser investigada e a definição do objetivo geral e dos objetivos específicos. Após essas definições, foram realizados estudos do referencial teórico. Também foram realizados estudos sobre o objeto matemático desta pesquisa, a circunferência. Na busca por compreender como é proposto o ensino de circunferência na escola, estudamos as orientações presentes em alguns documentos oficiais: os Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino Médio (1999), as Orientações Curriculares para o Ensino

Médio (2006), o Guia do PNLD (2012) e o Referencial Curricular da Rede Estadual de Ensino de Mato Grosso do Sul – Ensino Médio, os quais nos auxiliaram na elaboração e desenvolvimento da proposta de atividades.

Após o estudo dos aportes teóricos e do objeto matemático, elaboramos uma proposta de atividades pautada na abordagem construcionista, que foi desenvolvida para o estudo da circunferência com uso da Lousa Digital e do software GeoGebra. A escolha pelo GeoGebra se justifica por ser um software livre e online, que permite o estudo articulado entre Geometria e Álgebra. A elaboração da proposta de atividades na abordagem construcionista está descrita no subcapítulo 4.

Com a proposta de atividade elaborada, o passo seguinte foi entrar em contato com algumas escolas públicas da cidade de Campo Grande- MS que tinham a Lousa Digital a fim de obter autorização para realizar a pesquisa em uma turma de 3º ano do Ensino Médio. A condição de ser o 3º ano do Ensino Médio advém do fato que o estudo de circunferência está previsto nesta turma no Referencial Curricular da Rede Estadual de Ensino de Mato Grosso do Sul – Ensino Médio. Esses contatos ocorreram ora via telefone, ora presencialmente.

Durante os contatos presenciais com as escolas, tivemos a informação de que a tecnologia da Lousa Digital chegou às escolas da rede estadual de ensino em 2013, provenientes de um investimento realizado pelo MEC para todas as escolas estaduais de Mato Grosso do Sul. Essas escolas ainda não utilizavam a referida tecnologia em suas atividades, e os professores justificaram o não uso pelo fato de não saberem como utilizar em suas aulas e terem medo de estragar. Desta maneira, a Lousa ficava depositada em um armário na sala dos diretores, como medida de segurança contra extravio ou danos.

A busca e a definição de uma escola e uma turma para participação na pesquisa foi permeada por dificuldades, as quais são descritas com mais detalhes no subcapítulo 4.2.2.

Definida a escola e a turma, fizemos uma visita inicial, na qual conhecemos o professor regente e acompanhamos uma aula de matemática com a turma de alunos que participou da pesquisa, a fim de conhecer seu ambiente. A caracterização desses sujeitos será apresentada no subcapítulo 4.2.

Ainda na primeira visita à escola, entramos em contato com o professor responsável pelo laboratório de informática para conhecer a Lousa Digital pertencente

à escola e compreender os procedimentos de agendamento para seu uso. Dessa forma, foram definidos os dias em que ocorreria a experimentação.

A experimentação foi desenvolvida em dois encontros, com duração de 100 minutos cada. Cada encontro representou duas aulas consecutivas, desenvolvidas durante o período letivo, em horário regular de aula, durante o final do terceiro bimestre do ano letivo de 2014. A coleta de dados foi feita por filmagem dos encontros e registros das produções dos alunos na Lousa Digital.

É importante mencionar que a procura por uma escola para desenvolver a experimentação foi difícil. Uma das dificuldades que destacamos é que alguns professores regentes, que foram convidados a participar da pesquisa, alegaram que não poderiam ceder espaço em suas aulas, pois tinham que “dar o conteúdo para as avaliações” e tinham poucas aulas semanais (3 aulas semanais) ou tinham que “aplicar provas”, pois o calendário escolar estava “apertado”. Outro motivo recorrente que apresentavam para não participarem da pesquisa foi o “atraso com o conteúdo”, devido aos dias sem aulas em razão das paralisações, reuniões pedagógicas, jogos da Copa do Mundo, feriados, e provas do MEC como Prova Brasil e SAREMS.

Na experimentação a pesquisadora assumiu o papel de professora da turma, com o consentimento do professor regente.

Após a experimentação, e de posse dos dados transcritos, definimos duas categorias de análise a partir do referencial teórico da pesquisa. A primeira categoria foi intitulada como “Lousa Digital e o ciclo de ações”, em que trazemos a análise da possibilidade de ativação e manutenção do ciclo de ações de alunos com o uso da Lousa Digital e, na segunda categoria, “Interação entre sujeitos”, analisamos o processo de interação entre sujeitos ao usarem a Lousa Digital.

4.2 CONTEXTO E PARTICIPANTES DA PESQUISA

Neste subcapítulo apresentamos características da Lousa Digital utilizada na experimentação, bem como informações sobre a escola e os alunos participantes da pesquisa.

4.2.1 Lousa Digital e o Projetor Multimídia Arthur

A Lousa Digital utilizada nesta pesquisa faz parte do primeiro lote de cem mil Lousas Digitais adquiridas pelo Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE)¹³ em 2012. Segundo texto da Ata de compra¹⁴, ela é denominada como Solução de Lousa Digital.

Apesar dos diferentes modelos de Lousa Digital existentes, o modelo de Lousa Digital utilizado e mencionado nesta pesquisa é o denominado Solução de Lousa Digital, adquirido pelo FNDE, que funciona com o auxílio do projetor multimídia Arthur. Apesar da intenção original da proposta ser usar a Lousa Digital juntamente com o Arthur, é possível utilizá-la com o auxílio de um computador de mesa simples ou um *notebook*, bastando, para isso, a instalação do programa da Lousa Digital nesses equipamentos.

O projetor multimídia Arthur foi desenvolvido pelo Proinfo¹⁵, programa do Ministério da Educação (MEC), em parceria com as Universidades Federais de Santa Catarina e de Pernambuco. O que motivou sua criação foi unir em uma só tecnologia computador, projetor, multimídias para reprodução de CD e DVD, internet e Lousa Digital. Esse conjunto de tecnologias facilita o manuseio e uma melhor mobilidade para o uso em sala de aula.

Dentre as características do projetor Arthur, a que mais se destaca é o seu baixo custo quando comparado à soma de cada uma das tecnologias de seus componentes. Seu peso, em média, é igual a quatro quilos e seu design já passou por algumas modificações desde seu lançamento para atender às solicitações e necessidades apresentadas pelos professores, tornando-o mais prático e leve para ser transportado para a sala de aula.

O Arthur possui a linguagem computacional Linux, que é a linguagem adotada pela rede pública estadual de educação do Estado do Mato Grosso do Sul, mas

¹³ As ações do Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação tem o objetivo de alcançar melhoria e uma educação com mais qualidade a todos, em especial à Educação Básica da rede pública. Os repasses de dinheiro são divididos em constitucionais, automáticos e voluntários (convênios).

¹⁴ A ata de compra do primeiro lote de Soluções de Lousa Digital foi elaborada em 11/04/2012 e seu comprador foi o FNDE.

¹⁵ O Programa Nacional de Tecnologia Educacional (ProInfo) é um programa educacional criado pela Portaria nº 522/MEC, de 9 de abril de 1997, regulamentado pelo Decreto 6.300, de 12 de dezembro de 2007, para promover o uso pedagógico de Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) na rede pública de ensino fundamental e médio.

também foi desenvolvido para atender à linguagem Windows, pois busca favorecer os professores que preparam suas aulas em seus computadores particulares com Windows para as projetarem no Projetor Multimídia Arthur.

O Projetor Multimídia Arthur foi lançado em 2007 pelo Proinfo, elaborado de forma a utilizar materiais e tecnologias que contribuam com medidas de sustentabilidade, como material reciclável, menos gasto de energia e menos emissão de elementos nocivos ao ser humano e ao meio ambiente. Cada aparelho foi cuidadosamente catalogado para que se saiba precisamente sua origem e destino, bem como cada um dos periféricos que o acompanham.

Na Figura 4 apresentamos o projetor multimídia Arthur, do qual a Lousa Digital é um periférico. O Arthur foi inserido inicialmente nas escolas públicas do Brasil com o objetivo de substituir o computador e o projetor (ele possui os dois equipamentos em um). A Lousa Digital foi inserida posteriormente nas escolas públicas da rede estadual de educação do estado de Mato Grosso do Sul, mais especificamente no ano de 2013.

Figura 4 - Projetor Multimídia Arthur



Fonte: Dados da pesquisa

A Lousa Digital possui um CD para sua instalação no Arthur, procedimento que deve ser feito apenas na primeira vez de uso. Feitos os procedimentos para que o Arthur faça a projeção da imagem, deve-se escolher uma superfície rígida e lisa para que a imagem projetada seja sensível ao toque da ponta de uma caneta. Essa tecnologia que apresenta sensibilidade “na tela” é denominada de *Touch Screen*¹⁶ e

¹⁶ O termo *Touch Screen* tem origem inglesa e significa “tela sensível ao toque”.

possibilita a interação com o conteúdo disponibilizado no computador próprio do Arthur, ou em outro que seja conectado a ele.

Para o funcionamento efetivo dessa tecnologia é preciso que a “tela” em que a Lousa Digital funcionará seja calibrada¹⁷, e isso é feito com toques aleatórios em diferentes pontos da superfície em que essa é projetada. Quando a tela está calibrada, a ponta da caneta atua na superfície de projeção da mesma maneira como o *mouse* funciona para o computador.

A Lousa Digital disponível na maioria das escolas, inclusive na escola em que foi desenvolvida a experimentação da pesquisa, possui um kit com duas canetas, um sensor com formato de um bloco retangular, um transmissor *bluetooth*, que fica dentro do computador interativo e fitas adesivas. Esse kit é o que compõe a Lousa Digital e, ao ser instalado no projetor Arthur, a superfície da projeção torna-se a Lousa Digital, sensível aos toques com a caneta.

Para a instalação da Lousa, escolhe-se primeiro uma superfície na parede para a projeção. Ao lado da superfície escolhida, fixa-se o receptor com uma fita adesiva. Esse periférico é denominado de *Receptor Station*, conforme a Figura 5.

Figura 5: Receptor Station

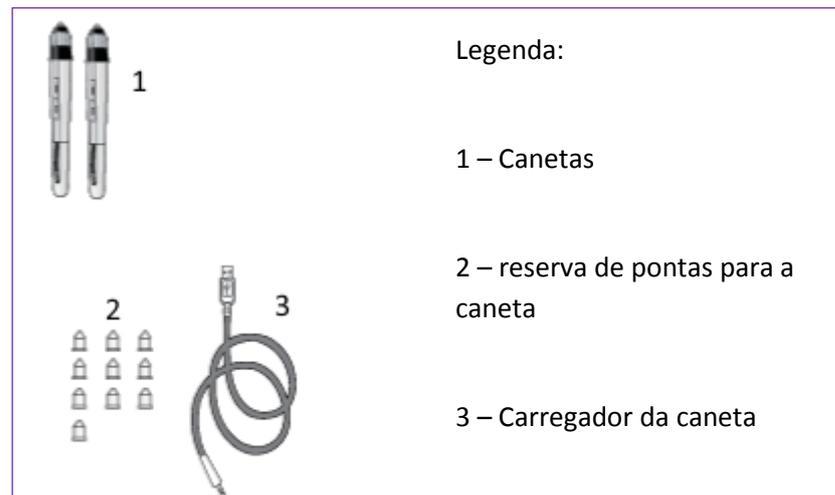


Fonte: Manual do usuário do sistema de Lousa Interativa Portátil uBoard

¹⁷ A ação de calibração da superfície de projeção se deve à necessidade de se estabelecer, na área de projeção, pontos de referência pré-estabelecidos pelo software da Lousa Digital, mostrados quando se clica no botão “calibrar”. O usuário clica com a caneta nesses pontos, informando ao computador onde está cada um. Isso permite que o software ajuste o foco da câmera e defina a área útil da tela utilizando um modelo matemático de proporção entre a resolução da câmera e a resolução da projeção em pixels.

Dessa forma, a partir da instalação desse receptor, é possível calibrar a superfície de projeção para que esta se torne sensível ao toque da caneta. A caneta deve ter a ponta acoplada, a qual dará o sinal emitido pelo Arthur, por isso deve ser cuidadosamente carregada antes da aula. A Figura 6 reproduz a caneta, sua ponta e seu carregador.

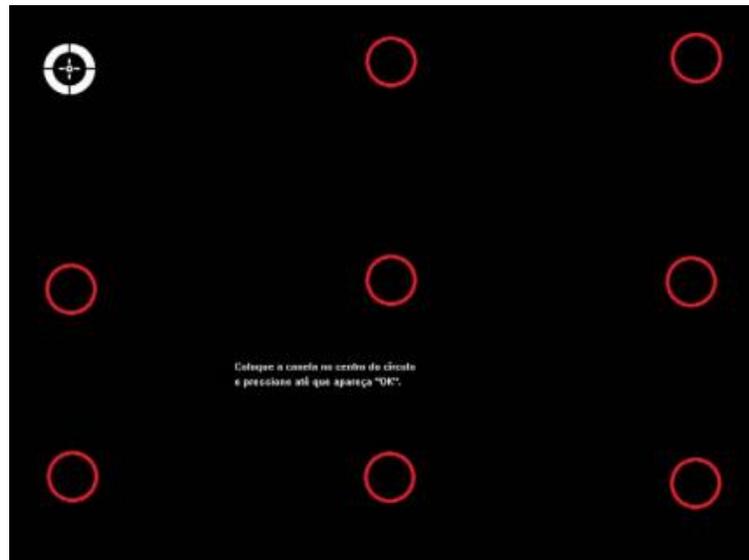
Figura 6: Alguns acessórios do Arthur



Fonte: Manual do usuário do sistema de Lousa Interativa Portátil *uBoard*

Ao ligar a Lousa Digital, automaticamente aparece na imagem projetada uma solicitação para calibragem. Essa calibragem é feita com a caneta que deve tocar o centro de nove círculos que aparecem na superfície de projeção. A Figura 7 apresenta esses círculos para a calibragem, com uma mensagem “Coloque a caneta no centro do círculo até que apareça a mensagem ok”.

.Figura 7: Tela que solicita a calibragem



Fonte: Manual do usuário do sistema de Lousa Interativa Portátil *uBoard*

Após a calibragem, a superfície de projeção se constitui sensível ao toque da caneta. Na caneta há dois botões que correspondem aos dois botões do mouse. Dessa maneira, pode-se abandonar completamente o teclado e o mouse enquanto se manipula a Lousa Digital, pois a caneta possui todos os recursos necessários para a digitação ao acionar o teclado virtual, favorecendo o acesso a todos os recursos de um computador.

A Lousa Digital possui recursos próprios, como a possibilidade de escrever sobre a tela que está sendo projetada, fazendo anotações sobre a superfície de projeção. O acesso do Arthur à internet permite que, ao final da aula, essas anotações possam ser salvas e enviadas aos alunos por e-mail. Outro potencial são os pacotes de sites e programas educacionais já inseridos no Arthur, de fácil acesso, como programas educacionais do MEC, bibliotecas virtuais e softwares como o Geogebra, utilizado nesta pesquisa.

O grande diferencial da Lousa Digital em relação às outras tecnologias digitais está no fato de essa ser uma grande tela de computador que pode ser vista por todos. Nesse sentido, todos têm acesso à atividade que nela está sendo desenvolvida, favorecendo que a mesma seja feita “a muitas mãos”, em um movimento de diálogo.

4.2.2 Participantes da pesquisa

Os participantes da pesquisa são alunos de uma turma do terceiro ano do Ensino Médio, de uma escola pública da Rede Estadual de Educação do Mato Grosso do Sul, localizada na cidade de Campo Grande – MS. Ao todo havia 32 alunos matriculados com idade entre 17 e 18 anos. Desses, 15 participaram dos dois encontros da experimentação. Assim, utilizamos na análise os dados obtidos desses 15 alunos, que consideramos os participantes da pesquisa.

Não obtivemos informações sobre a ausência dos alunos matriculados nos dois encontros. Quanto aos 05 alunos que participaram do primeiro encontro, mas se ausentaram no segundo encontro, não temos a participação deles nas discussões propostas pela professora no primeiro encontro, pois assumiram a postura de acompanhar silenciosamente as proposições dos outros colegas.

A escolha da escola participante ocorreu dentre as escolas estaduais do Município que atendessem ao Ensino Médio em situação regular. Qualquer escola da rede estadual de educação poderia ser participante da pesquisa, desde que aceitasse o desenvolvimento da proposta de atividades. Assim, entramos em contato com diferentes escolas e diversos professores de matemática, fizemos a proposta da pesquisa e estudamos a possibilidade de sua participação ou não na experimentação. Muitas escolas, por diferentes motivos, apresentaram impedimento, mas uma escola estadual aceitou prontamente o nosso convite, e assim estabelecemos o planejamento dos dias e horários para a experimentação.

Na conversa inicial com a direção, tomamos conhecimento que a escola é caracterizada como Escola de Educação Integral, com carga horária de oito horas por dia para os alunos. As atividades escolares diárias iniciam-se com o ensino regular no período matutino seguido de atividades extracurriculares no período vespertino. Os alunos almoçam na própria escola e no período vespertino participam de um projeto de estudo denominado Curso Estadual Preparatório para o Ingresso no Ensino Superior (CIES), denominado também como “cursinho”, que prepara simultaneamente para o Enem e o vestibular.

O Programa que direciona o Ensino Médio da escola participante da pesquisa é chamado Ensino Médio Inovador, o qual valoriza ações que envolvam a capacitação pedagógica de seus gestores e a formação continuada de seus docentes. Atribuimos a

esse Programa o motivo de termos obtido a pronta autorização para o desenvolvimento de nossa proposta de atividades na escola, pois é de interesse dela oferecer ações diferenciadas para os alunos do Ensino Médio, em especial para turmas do terceiro ano.

Segundo dados coletados na Secretaria de Educação do Estado de Mato Grosso do Sul, há nove escolas com esse perfil em todo o Estado, atendendo a oito de seus municípios. Em Campo Grande há duas dessas nove escolas, sendo que foi em uma delas que desenvolvemos a pesquisa.

Em conversa com o professor da turma, para coleta de informações sobre a turma, ele afirmou que o estudo da Geometria Analítica ainda não havia sido desenvolvido no momento anterior à experimentação, inclusive o estudo da distância entre dois pontos no plano cartesiano. O professor mencionou ainda que os alunos da turma selecionada são muito ativos e abertos para o estudo da matemática, apesar de enfrentarem dificuldades para articular diferentes objetos e campos matemáticos e relacioná-los durante as resoluções de problemas mais elaborados e contextualizados.

A respeito da utilização do software GeoGebra e da Lousa Digital, o professor informou que os alunos ainda não conheciam, apesar da escola ter recebido a Lousa há dois anos.

Apresentamos no próximo subcapítulo a proposta de atividades desenvolvida durante o momento de experimentação desta pesquisa, elaborada com a finalidade de favorecer o estudo sobre circunferência.

4.3 A PROPOSTA DE ATIVIDADES

Para a experimentação da pesquisa, foram propostos dois encontros de 100 minutos, completando quatro aulas de 50 minutos, em horário regular de aula, com uma turma de 3º ano do Ensino Médio. Ao elaborarmos a proposta de atividades, buscamos atender às orientações apresentadas nos documentos oficiais para o estudo articulado das representações geométricas e algébricas da Geometria Analítica. Dessa forma, escolhemos o software GeoGebra para utilizarmos com a Lousa Digital.

A escolha desse software também buscou atender às orientações para se estudar a Geometria Analítica articulada às representações algébricas e geométricas. A elaboração da Proposta de Atividades sedimentou-se no objetivo de propor um desafio

aos alunos que os movessem a participar e tomar o problema para si mesmos. Dessa maneira, pensamos na elaboração de uma figura que tivesse circunferências, objeto matemático de nosso estudo, para solicitar a eles que o representasse na janela geométrica do Geogebra. Diante disso, decidimos criar um *smile* que apresentasse o máximo de circunferências possível, o que deu origem à figura 8.

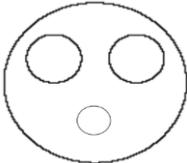
Quanto à escolha do ambiente tecnológico, optamos pelo software Geogebra por esse apresentar duas janelas denominadas, respectivamente, “janela algébrica” e “janela geométrica”. Ambas apresentam dados de forma simultânea, ou seja, se o aluno decide utilizar a janela geométrica para representar uma reta, um ponto, uma circunferência, etc., a janela algébrica apresenta os registros algébricos referentes à figura. Do mesmo modo, se o aluno optar por inserir uma expressão algébrica na janela algébrica, simultaneamente o Geogebra expõe a representação geométrica daquela expressão.

Definimos que a experimentação aconteceria em dois encontros, sendo que no primeiro os alunos utilizariam a janela geométrica, observariam e fariam relações entre a representação geométrica feita por eles e os registros apresentados pelo Geogebra. No segundo encontro, eles fariam os registros algébricos, observariam e fariam relações entre esses registros e a representação geométrica apresentada pelo Geogebra.

Dessa forma, ao apresentarmos as análises dos dois encontros, nomeamos o subcapítulo da análise do primeiro encontro como “Um estudo da equação da circunferência: **da Geometria para a Álgebra**”. Em relação ao subcapítulo da análise do segundo encontro, o intitulamos como “Um estudo da equação da circunferência: **da Álgebra para a Geometria**”.

No Quadro1 apresentamos a Proposta de Atividades para os dois encontros.

Quadro 1 – Proposta de Atividades

1ª Encontro - 100 minutos	
Atividade	<p>Figura 8 – Representação do <i>Smile</i></p>  <p>Fonte: Dados da pesquisa</p>

Objetivo	Identificar a relação entre a representação geométrica das circunferências presentes na composição do <i>smile</i> e as suas equações.
Metodologia/Encaminhamentos	<p>Questões e encaminhamentos dirigidos aos alunos:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) Analisando a figura do <i>smile</i>, que figuras geométricas vocês identificam? 2) Como podemos desenhá-la no GeoGebra? [Discutir o uso do Software GeoGebra para a construção de uma circunferência. Os alunos farão a escolha pelos comandos que desejarem. Questionar como o plano cartesiano do GeoGebra poderá auxiliar na representação do <i>smile</i>.] 3) Como vamos iniciar o desenho do <i>smile</i>? [Deixar os alunos definirem o início e como representá-lo usando os dados sobre coordenadas do centro e medida do raio. Um aluno ou mais devem ir até a Lousa fazer a representação.] 4) Analisando a imagem da primeira circunferência representada, qual foi a equação que surgiu na janela de álgebra? Qual a relação entre a equação que surgiu e as coordenadas do centro e a medida do raio da circunferência? [Nesta etapa, as intervenções serão realizadas para que os alunos identifiquem as relações possíveis, sem dar respostas.] 5) Qual é a distância entre um ponto qualquer da circunferência e o seu centro? Como podemos comprovar isso? [Espera-se que os alunos identifiquem a medida como sendo a do raio e que digam que basta medirmos esta distância a partir de diferentes pontos da circunferência. Pode-se sugerir o uso do recurso do GeoGebra de mover um ponto sobre a circunferência, e também que analisem o que acontece quando alteramos o ponto destacado da circunferência em relação à medida do raio. Ao final, discutiremos que a circunferência é um conjunto de pontos equidistantes do centro da circunferência, e a distância é o raio.] 6) Serão apagados os elementos complementares à circunferência representados no item 5, e será realizada a representação das demais circunferências do <i>smile</i>, – sempre questionando e sugerindo que os alunos usem a Lousa Digital: <ul style="list-style-type: none"> ✓ Que informações usamos para escolher o centro e o raio da nova circunferência? ✓ Qual é a relação entre a representação geométrica e a representação algébrica da circunferência? <p>Construímos, assim, um <i>smile</i> com a composição de quatro circunferências. Há outra estratégia para representar o <i>smile</i>?</p> <p>A partir das respostas dos alunos institucionalizaremos informações sobre a relação entre a representação geométrica e algébrica das circunferências. Essas relações serão registradas no quadro e os alunos deverão copiá-las.</p>
2ª Encontro – 100 minutos	
Atividade	Representar o <i>smile</i> da Figura 8 utilizando o software GeoGebra, a partir da explicitação das equações das circunferências.
Objetivo	Estabelecer relações entre a equação de uma circunferência e a sua representação geométrica.
Metodologia/Encaminhamentos	<ol style="list-style-type: none"> 1) Como vocês iniciarão a representação do <i>smile</i> usando equações de circunferência? 2) Qual a primeira circunferência que iremos representar? Qual a equação dessa circunferência? Que dados usarão para enunciá-la?

	<p>[A partir dessas questões e indicações dos alunos, um deles deve ir à Lousa Digital realizar a representação da equação, digitando-a. Ao obter a representação geométrica, os alunos serão questionados se a representação está de acordo com o que esperavam. Caso não esteja, vamos interagindo até obter um resultado esperado.]</p> <p>3) Qual é a relação entre a equação dada e a representação geométrica obtida?</p> <p>4) Como podemos continuar a construir o smile? [Para as construções das demais circunferências, iremos questioná-los sobre como obter cada equação.]</p> <p>5) Que informações usaram para escolher a equação?</p> <p>6) Analisando as equações dadas, qual a relação com as suas representações geométricas?</p> <p>7) Como podemos obter uma circunferência a partir de sua equação? Que dados da circunferência conheceremos? São suficientes? Por quê? [Após a colocação dessas questões, será analisado se os alunos conseguem obter/visualizar a representação geométrica de circunferências a partir de uma equação dada e se obtêm a equação a partir da representação geométrica da circunferência.]</p> <p>8) Dialogar com os alunos sobre as conclusões registradas anteriormente no quadro e no caderno. Caso os alunos ainda não tenham compreendido a representação da equação reduzida da circunferência, iremos generalizá-la, discutindo-a com eles: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.</p> <p>Também será mencionado que, se as coordenadas (x,y) representam um ponto qualquer da circunferência, se (a, b) representa o seu centro, e r é o raio, podemos obter a equação da circunferência empregando o Teorema de Pitágoras, usado para obter a distância entre dois pontos do plano. Isso será discutido a partir da representação geométrica, sempre dialogando com os alunos.</p>
--	---

Fonte: Dados da Pesquisa

O desenvolvimento desta proposta de atividades e a análise dos dados obtidos, a partir do referencial teórico adotado nesta pesquisa, serão apresentados no próximo capítulo.

5 REPRESENTANDO CIRCUNFERÊNCIAS COM O USO DA LOUSA DIGITAL: UMA EXPERIÊNCIA COM UMA TURMA DE 3º ANO DO ENSINO MÉDIO

Apresentamos neste capítulo a análise dos dados coletados durante o período da experimentação com o objetivo de responder à questão de pesquisa: “Quais as contribuições do uso da Lousa Digital em um estudo sobre circunferências em sala de aula?”.

A análise foi realizada a partir de duas categorias, sendo que na primeira categoria, intitulada “Lousa Digital e o ciclo de ações de alunos em um estudo sobre circunferência”, analisamos a possibilidade de ativação e manutenção do ciclo de ações dos alunos durante o estudo realizado e, na segunda categoria, “Interação entre sujeitos”, analisamos o processo de interação entre sujeitos (alunos – alunos e professora - alunos) com o uso da Lousa Digital.

A análise das duas categorias será realizada simultaneamente, pois foi recorrente o fato de identificarmos ambas as categorias em um mesmo momento da experimentação. Dessa forma, a divisão deste capítulo foi realizada por encontro e não por categoria.

Os dois subcapítulos a seguir apresentam a análise dos encontros entre a professora e os sujeitos da pesquisa. No primeiro subcapítulo, intitulado “O Estudo da Equação da Circunferência: da Geometria para a Álgebra”, expomos a análise do primeiro encontro no qual desenvolvemos a primeira atividade proposta para favorecer o aluno a identificar relações entre os registros algébricos que surgem na tela do software Geogebra a partir da entrada de registros geométricos. No segundo subcapítulo, denominado como “O Estudo da Equação da Circunferência: da Álgebra para a Geometria”, apresentamos a análise do segundo encontro, quando desenvolvemos a segunda proposta de atividade com o objetivo de que o aluno estabelecesse relações entre os registros geométricos executados pelo software, a partir da entrada dos registros algébricos realizados pelos participantes.

Quanto aos 15 alunos participantes desta pesquisa, eles foram identificados com os seguintes nomes fictícios: Álisson, Bruno, Ellen, Everton, João Pedro, Juliane, Leandro, Luana, Mayara, Nadine, Nobre, Pereira, Soares, Vinicius e Yasmin.

5.1 UM ESTUDO DA EQUAÇÃO DA CIRCUNFERÊNCIA: DA GEOMETRIA PARA A ÁLGEBRA

Nesse subcapítulo trazemos a análise do primeiro encontro realizado com a turma de alunos, que tinha por objetivo identificar a relação entre a representação geométrica das circunferências presentes na composição do *smile* e as suas equações. Iniciamos com a análise da proposta da atividade: *representar o smile (Figura 8) no software GeoGebra*.

Após a apresentação da proposta de atividade, os alunos Ellen e João Pedro se voluntariaram para ir até a Lousa Digital para iniciar a produção, revezando os momentos de uso da caneta. A seguir, um recorte do diálogo inicial para definir a primeira descrição a ser realizada no computador, para iniciar o ciclo de ações:

Professora para a turma: ... a Ellen e o João Pedro vão desenhar [a circunferência]. Eles vão começar o desenho [do smile]. Eles estão representando a opinião do grupo, então vamos discutir por onde vocês começariam?

Alunos¹⁸: pela maior [referindo-se a circunferência que corresponde ao contorno da cabeça do smile].

Soares: pela boca.

Professora: por quê?

Soares: pra aproveitar mais o centro...

[Ao ouvirem a justificativa do colega Soares os alunos parecem concordar com ele, pois fazem silêncio quando a professora os questiona sobre uma opinião diferente.]

Professora: [...] De quais elementos eu preciso [...]? [referindo-se à construção da circunferência].

Everton: faz um giro. [o aluno pegou a caneta, colocou-a sobre sua mesa, colocou um dedo sobre uma de suas extremidades, fixando-a, enquanto girou a outra extremidade com a outra mão, em um movimento circular.]

João Pedro para Everton: mas aí sai por dentro. [se referiu à extremidade que o colega “fixou” com o dedo, que poderia sair do lugar].

Nadine para a professora: a gente nunca aprendeu isso.

Professora: não? Ele falou em rodar isso daqui [pega a caneta que está sobre a mesa do Everton e repete o movimento que o Everton fez para que todos pudessem ver]. O que vocês acham?

Everton para a professora: mantém o eixo parado!

Professora para a turma: Ele falou em “manter o eixo parado”. [...] Vocês concordam que o que “vai ficar parado” é um eixo? [referindo-se ao centro da circunferência]

Everton para a professora: é o centro!

Professora: é o centro! [...] Além de definir um centro, o que mais eu preciso pra construir uma circunferência?

Pereira: A extremidade.

¹⁸ Durante a transcrição das gravações relativas à experimentação, não foi possível identificar pontualmente quais alunos se manifestaram para responder aos questionamentos, pois não estavam no foco da lente da filmadora. Assim, caracterizamos esses sujeitos como “alunos”, pois foram alguns alunos da turma.

Professora para Pereira: a extremidade?

Professora para a turma: o Pereira disse que a gente precisa da “extremidade”. Definido o centro, o Pereira falou que preciso da extremidade. Como é que eu vou definir essa extremidade?

Pereira: pelo “tamanho” da circunferência... [o aluno faz gesto com as mãos, referindo-se à distância do centro a um ponto da circunferência, ponto este que o aluno chamou de extremidade].

Professora: esse “tamanho”? Do centro até onde? [referindo-se à segunda extremidade do raio].

Pereira: ... Do raio.

Professora: ... Do raio!

[aplausos de aprovação]

Pereira: precisa do raio, que é uma constante, pra construir a circunferência.

Professora: o Pereira falou que eu preciso do raio, que é uma constante, pra construir uma circunferência.

Vinicius: precisa de um raio.

Alunos: o centro e o raio.

Professora: podem escolher então, [...]

[...]

Everton: “pega” o centro no quatro...

Professora para a turma: o Everton sugeriu a coordenada quatro... Quatro pra x ou pra y?

Everton: x.

Professora: e para y?

Everton: três.

Os alunos aceitaram a sugestão.

Nesse movimento de diálogo, evidencia-se o esforço da professora em promover um momento em que os alunos pudessem expor e discutir suas proposições, pois a partir do seu questionamento “então vamos discutir por onde vocês começariam?”, inicia-se a participação dos alunos.

No excerto observamos a participação de diferentes alunos que terminam por concordar com o aluno Soares, quando este sugeriu que se começasse pela boca para melhor aproveitamento do centro da tela. Isso vem ao encontro dos estudos de Scherer (2005) sobre o papel do professor para a promoção de um movimento de cooperação, que é o levantamento de proposições com justificativas, com potencial para interferir nas ações mentais dos outros, que também estão abertos e dispostos a expor as suas proposições.

O primeiro questionamento da professora não apresentou potencial para manter o diálogo, houve a necessidade de uma segunda indagação sobre os dados necessários para se desenhar a circunferência para que mais alunos se envolvessem na primeira proposta de descrição (uso de comandos do Geogebra) para a realização da tarefa na Lousa Digital.

No segundo questionamento da professora “*De quais elementos eu preciso para construir a circunferência?*”, a participação da turma foi maior em relação à primeira pergunta. Isso nos faz inferir que os questionamentos elaborados pelo professor podem contribuir para um maior ou menor envolvimento da turma na realização da tarefa. Dessa forma, cabe ao professor elaborá-los de uma maneira que atenda às necessidades em determinado momento, e direcioná-los de forma a manter o diálogo, aprimorando-os ou modificando-os ao menor sinal de redução da participação da turma.

Ainda nesse recorte, observamos que a dupla responsável por manipular a Lousa não compreendeu que a turma definiu o ponto de coordenadas (4,3) como sendo o centro da circunferência para representar o contorno da cabeça do *smile*, e tentaram escolher os pontos de coordenadas (4,0) e (0,3). Porém, foram “impedidos” pelo grupo que, depois de algum tempo, conforme demonstram os diálogos que se seguem, os fazem compreender a localização do ponto de coordenadas (4,3). Dentre as manifestações do grupo para que a dupla localizasse no plano cartesiano o ponto (4,3), destacamos o seguinte diálogo:

Bruno para a dupla: Não! [...] quatro x e três y .

[...]

Everton para João Pedro: três para y e quatro para x .

O grupo se envolve na produção, o que a caracteriza como coletiva, embora a manipulação do software e da Lousa Digital estivesse sob responsabilidade dos alunos Ellen e João Pedro.

Naquele momento, outros alunos como Everton e Bruno tentam também explicar para a dupla que, embora as coordenadas sejam dois números, o ponto é um só. João Pedro, um dos alunos da dupla, pede que apenas um dos colegas o ajude, pois “não compreendia a turma”. O colega Everton, levantou o braço e sugeriu:

Everton para João Pedro: três para y e quatro para x .

João Pedro repete devagar: três para y ...

Alunos: não! [a turma avverte ao colega João Pedro quando ele faz um gesto de que iria clicar no ponto (4,0)].

O aluno João Pedro demonstrou ainda não compreender a localização do ponto indicado pela turma. Inferimos que a dificuldade da dupla pode se constituir em uma dificuldade matemática de compreensão em relação ao fato que, para a localização de um ponto no plano cartesiano, é necessário uma abscissa x e uma ordenada y . Inferimos, ainda, que a atividade proposta com uso da Lousa Digital oportunizou um momento favorável de discussão entre os alunos. O colega Everton e outros alunos da turma forneceram mais orientações para a dupla:

Everton para João Pedro: *vai pra lá [mostrando para a direita do ponto (0,3) que João Pedro apontava naquele momento]*

Alunos: *está certo. [A dupla atende às orientações da turma e localiza o ponto (4,3)].*

Turma com aplausos: *Aí!*

Observamos que João Pedro demonstrou compreender ao apontar com o dedo para o ponto (4,3) na Lousa Digital. A colega Ellen ainda não havia compreendido, e João Pedro, em uma atitude de auxílio, apontou com o dedo sobre o ponto escolhido pela turma, solicitando que o selecionasse, pois ela estava com a caneta da Lousa Digital.

Os recortes apresentados evidenciam dificuldades da dupla em localizar pontos, o que gerou um movimento de interação no grupo. Após a escolha do ponto que representaria o centro da boca, a professora orientou para a continuidade da construção da primeira circunferência, sugerindo a escolha do raio. Os alunos Ellen e João Pedro continuaram a fazer a descrição (primeira ação do ciclo de ações) na Lousa Digital, usando comandos do software. Ao escolherem o centro pelo toque da caneta, o *software* GeoGebra abriu uma janela que solicitou a medida de um raio, e o diálogo continuou conforme observamos a seguir:

Professora para a turma: *agora é o raio!*

Nobre: *dois.*

Everton para a professora e para o Nobre: *Dois!... Dois vai dar certinho. [referindo-se à possibilidade da boca não interceptar os eixos do plano cartesiano].*

Professora lê para a turma a informação dada na janela: *“Digite o valor do raio” [...]*

Alunos: *dois!*

Alunos: *aí! [a dupla digitou o valor 2 aparecendo assim a circunferência de raio 2]*

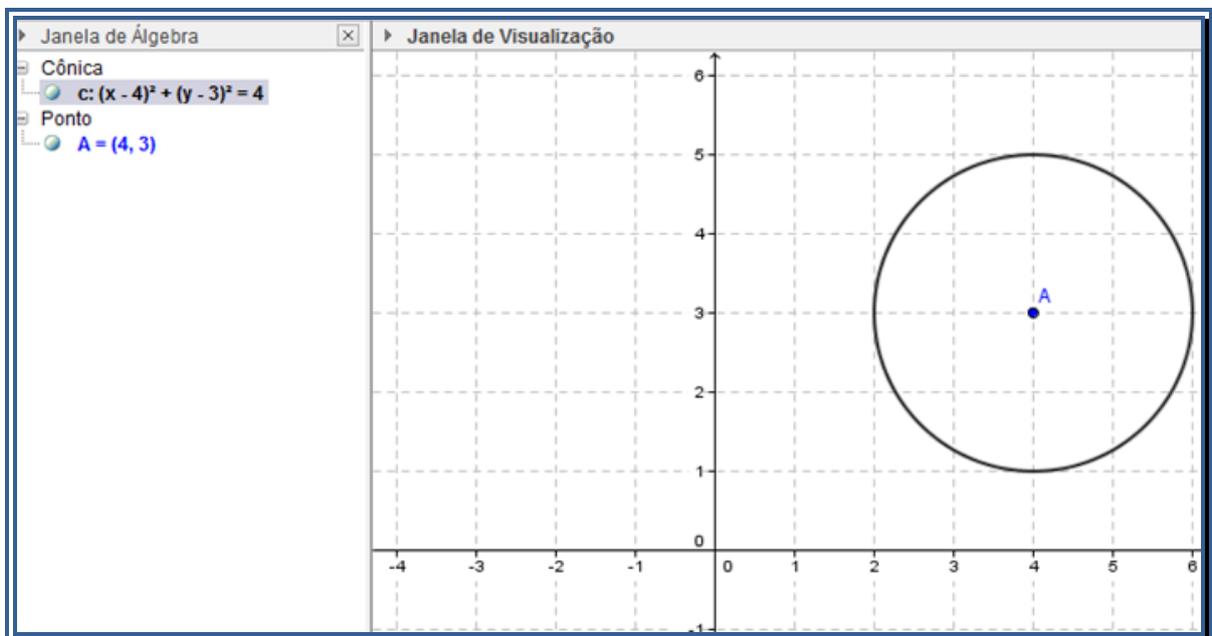
[alunos aplaudem, em aprovação à circunferência representada pelo Geogebra na Lousa Digital]

No excerto desse diálogo, destacamos o papel desenvolvido pela professora em oportunizar que a turma fizesse escolhas e as testassem, importante para a vivência do ciclo de ações pelos alunos. A atitude da professora durante a atividade mostra seu esforço em lançar o convite aos alunos de forma a conquistá-los para a atividade, envolvê-los na ação nesse momento inicial, para então adentrarem ao ciclo de ações, a partir de uma primeira descrição com vistas à construção da primeira circunferência.

Observamos o envolvimento de três alunos no diálogo: Nobre, Everton, e João Pedro, embora a turma como um todo tenha se manifestado durante toda a primeira tentativa de construção da boca. Essa manifestação se deu a partir de expressões de aprovação ou reprovação das escolhas feitas pelos colegas. O trio de alunos citados, porém, se dispôs a ir além de “uma manifestação de aprovação ou reprovação”, pois expôs também suas justificativas. A participação do grupo ocorreu na escolha dos pontos e na localização do ponto (centro da circunferência) no plano cartesiano, conforme representado nos recortes.

Depois dessas escolhas do grupo e da **descrição** realizada no GeoGebra, o *feedback* da Lousa Digital (a partir do uso do Geogebra) foi apresentado na Figura 9:

Figura 9: 1ª tentativa para a representação da boca do *smile*



Fonte: Dados da Pesquisa

Após o *feedback* apresentado pelo software, a professora orientou a turma, por meio de um diálogo, com a finalidade de que os alunos pudessem vivenciar as ações de **reflexão** e do Ciclo de Ações já iniciado:

Professora: *Pessoal, com a participação do grupo, nós fizemos essa circunferência. O Soares tinha sugerido começar pela boca, e vocês desenharam essa boca.*

Amanda: *Nossa! [desaprovando o feedback dado pelo software para a medida do raio da circunferência da boca do smile]*

João Pedro: *Tem que ser menor, então!*

Professora: *Era o que vocês queriam?*

Alunos: *não...*

Professora: *não?*

Alunos: *não, não...*

A turma reprovou a circunferência construída para representar a boca do *smile*. Analisamos que as decisões foram feitas e discutidas pelo grupo, em um movimento de interação, pois diferentes alunos se manifestaram para a escolha: o Nobre sugeriu o valor de duas unidades de comprimento para o raio; o Everton aprovou a sugestão e qualificou-a com a característica de “que vai dar certinho”, pois essa medida pareceu atender às suas representações mentais para a circunferência que representa a boca.

Observamos ainda que, naquele momento, o grupo vivenciava a ação de **reflexão** empírica, pois se baseou na construção apresentada na tela do GeoGebra para reprová-la, ou seja, a reprovação se deu apenas a partir do observável.

A partir da reprovação da primeira descrição, deu-se início a uma nova ação do ciclo, a **depuração**. Alguns alunos sugeriram que se considerasse a circunferência construída como sendo a que representa um dos olhos. Após breve discussão entre os participantes do grupo, ficou decidido que uma nova construção seria feita e a primeira circunferência construída seria apagada porque não representava a boca por eles esperada.

Nadine: *Pode ser o olho direito.*

Professora para os alunos: *pode ser o olho direito?*

João Pedro para Nadine: *Não, não! Pode ser a cabeça, mano!*

Alunos: *Vamos refazer. [apoiando a ideia de que o melhor seria refazer a circunferência aproveitando apenas a experiência da construção da circunferência anterior]*

Professora: *Antes de arrumarmos, vamos discutir mais, [...] Nem todo mundo gostou, né? Um quis que fosse a boca, outro quis que fosse o olho, mas... foi uma primeira tentativa, vocês estão conhecendo o software agora e vocês já sabem localizar um ponto, quando foi falado x [igual a] 4 e y [igual a] 3, vocês localizaram esse ponto [apontou na Lousa Digital], no campo*

geométrico do GeoGebra e apareceu esse registro aqui [apontou na Lousa Digital, no campo algébrico do GeoGebra].

Professora: O que é esse registro aqui $A = (4,3)$? [a professora se referiu ao registro apresentado pelo software Geogebra em sua janela de álgebra].

Nesse diálogo, observamos que a professora aproveitou o momento para questionar os alunos sobre os registros geométricos e algébricos apresentados pelo software a fim de desafiá-los para que pudessem refletir sobre o *feedback* apresentado pelo GeoGebra. Pois “o sujeito age e aprende quando se sente desafiado, quando sente alguma necessidade, quando está interessado ou intrigado com algo, quando está disposto, [...]” (SCHERER, 2005, p. 87). A seguir, apresentamos a continuidade do diálogo.

Professora: O que é esse registro aqui $A = (4,3)$?

Nadine: As coordenadas do ponto A.

[...]

Alunos: A.

João Pedro: O ponto A.

[...]

Professora: [...] quando vocês escolheram o raio 2, apareceu essa circunferência e ao mesmo tempo essa equação [...] x menos quatro entre parênteses ao quadrado, mais y menos três ao quadrado, igual a quatro. A partir da nossa representação geométrica, o GeoGebra nos deu aquela representação algébrica. Que relação existe entre a representação do ponto e essa equação com a representação que aparece aqui [na janela geométrica]. Que relação existe? E esse quatro aqui? [aponta para o segundo membro da equação $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 4$]

Pereira: esqueci o nome!

Nobre para Pereira: diâmetro!

Pereira: Diâmetro! É isso aí!

Professora: o quatro é o diâmetro?

Pereira: isso!

Diante dos questionamentos da professora, alguns alunos se manifestaram. No trecho, destacamos a participação da Nadine, do Pereira, do Nobre e do João Pedro. Os demais alunos, apesar de não aparecerem no diálogo apresentado no excerto, aparecem (no vídeo) atentos ao diálogo. Embora a professora tenha feito questionamentos para o grupo todo, percebemos que apenas alguns alunos participaram, os demais ficaram em silêncio.

Estes mesmos alunos aparecem, em outros momentos do vídeo, em atitudes de diálogo com os colegas durante os questionamentos, o que nos faz inferir que eles estão, embora sem manifestação no coletivo, participando do debate e da atividade.

Neste excerto, analisamos que o diálogo promovido pela professora a partir do questionamento “*Que relação existe entre a representação do ponto e essa equação (...)?*” proporcionou um movimento de diálogo favorável à interação entre os alunos, com destaque para o diálogo entre Pereira e Nobre que apresentaram conhecimentos prévios sobre diâmetro. Destacamos também do recorte a hipótese levantada pelo aluno Pereira de que o segundo membro da equação que aparece na tela do GeoGebra representa a medida do diâmetro da circunferência.

Nesse momento do diálogo, na tentativa de responder ao questionamento levantado pela professora, o aluno Pereira apresentou sua hipótese sobre o número 4 que aparece no segundo membro da equação, o que possibilitou à professora continuar o diálogo, conforme segue:

Professora para a turma: *O Pereira levantou uma hipótese de que aquele quatro é um diâmetro. O que é diâmetro Pereira?*

Pereira: *É o raio vezes dois.*

[...]

Professora: *Bom, nessa primeira circunferência, o Pereira levantou essa conjectura. Alguém quer fazer outra conjectura? Ou concordam com ele?*

[silêncio]

Professora para a turma: *Nós vamos fazer as outras [referindo-se às outras circunferências] e observar se essa conjectura que ele levantou de que depois da igualdade aparece a medida do diâmetro, para ver se isso se verifica nas outras três que ainda faltam.*

Nesse diálogo, observamos a tentativa da professora em promover um debate para que os alunos pudessem refletir sobre a proposição levantada por Pereira ou novas proposições, com justificativas, caracterizando assim um movimento de aprendizagem cooperativa. Mas, devido ao silêncio apresentado, ela propôs a continuidade da representação do *smile* para que os alunos pudessem validar ou refutar a hipótese levantada por Pereira nas discussões das próximas circunferências que seriam construídas.

Embora a proposição levantada por Pereira fosse incorreta, a professora não apontou a incorreção, mas convidou os alunos a discutirem a proposição. Como a turma ficou em silêncio, ela os desafiou a observar se essa proposição se verificaria com as demais circunferências que seriam construídas. Dessa forma, identificamos uma postura de abordagem construcionista, uma vez que ao invés de dar resposta pronta a uma proposição levantada, a professora opta por fazer novos

questionamentos para que o próprio aluno possa testar e validar, ou não, sua proposição.

Aproveitando o momento de discussão, a professora indagou sobre a relação da representação geométrica da circunferência com os registros do primeiro membro da sua equação. A esse respeito, o aluno Pereira e outros alunos apresentaram novas conjecturas, conforme segue o diálogo:

Professora: [...] *Que relação vocês fazem? A conjectura do Pereira é que depois da igualdade aparece o diâmetro. Que conjectura vocês fazem do registro antes da igualdade?*

Nobre: *Aparecem as coordenadas.*

Professora: *coordenadas?*

[...]

Vinicius repetindo o que Pereira falou: *na equação da circunferência tem as coordenadas.*

Professora: *na equação dada tem as coordenadas. Quais coordenadas?*

Everton completando o que Nobre falou: *a de x e a de y.*

Pereira para Everton: *Não! É da circunferência?*

Professora: *O Pereira falou que são coordenadas da circunferência.*

[...]

Vinicius para Pereira: *é do centro da circunferência. [...]*

Nesse excerto do diálogo, observamos um avanço no sentido de iniciar um movimento de aprendizagem cooperativa posto que, até então, apenas o aluno Pereira havia levantado uma conjectura. O segundo aluno a participar foi o Nobre ao afirmar que no primeiro membro da equação da circunferência “aparecem as coordenadas”. E, após a professora questionar um pouco mais sobre a afirmação de Nobre, Pereira afirmou que são as coordenadas da circunferência. Por fim, verificamos uma hipótese complementar às afirmações apresentadas por Pereira e Nobre, que é a hipótese de Vinicius ao afirmar que são as coordenadas: “do centro da circunferência”.

Observamos que ambos os alunos, Nobre e Everton, afirmaram que no primeiro membro da equação há registro das coordenadas, mas nada disseram a respeito do ponto que essas coordenadas representam. Isso oportunizou ao colega Vinicius sugerir que fosse “do centro da circunferência”. Compreendemos que o momento se caracterizou como um momento de cooperação, pois as afirmações feitas por Nobre e Everton provocaram em Vinicius uma desestabilidade cognitiva, o que o fez repensar e sugerir o centro para a circunferência.

A professora, então, propôs a continuação da atividade de representação do *smile*, conforme diálogo:

Professora: quem vem fazer a boca, ou o olho? [a professora deu a oportunidade para continuarem com a escolha anterior (a circunferência representar a boca) ou construir uma nova circunferência, como a que representa o olho (por exemplo), pois a circunferência anterior foi apagada].

[O Nobre foi rapidamente à frente].

Professora para Nobre: Qual circunferência você vai fazer?

Nobre para a professora: a do rosto.

Professora para a turma: Ele [Nobre] escolheu fazer a circunferência do rosto. De quais elementos ele precisa mesmo?

Alunos: do centro e do raio.

Professora para a turma: Qual seria o melhor centro?

Everton: Zero, zero. [referindo-se ao ponto $(0,0)$] para ficar no centro...

Professora: por quê $(0,0)$? E o raio?

Nobre para a turma: cinco é melhor.

Everton para Nobre: Eu concordo. Você está esperto. [referindo-se às sugestões de Nobre tanto para essa nova circunferência, quanto para a circunferência anterior, pois nossos registros apontam que em ambos os momentos, Nobre tomou a iniciativa de escolher valores para o raio e o aluno Everton concordou com as medidas sugeridas, nesses dois momentos].

Identificamos que nesse diálogo há uma decisão pela mudança de estratégia. A primeira circunferência que foi construída representaria a boca, mas, nesse momento de reconstrução, decidiram mudar a escolha para a construção da cabeça ao invés da construção da boca, pois, como expressado pelo Everton, iria centralizar o *smile*.

Analisamos ainda o papel da professora nesse diálogo, pois ao questionar “por que o $(0,0)$?”, referindo-se à escolha do aluno Nobre, o aluno não respondeu assim como nenhum de seus colegas, prevalecendo um momento de silêncio. Apesar dessa ausência de resposta, a professora prosseguiu com a discussão, aceitando a “quebra de silêncio” feita pelo aluno Nobre ao sugerir que o raio tivesse medida cinco. A esse respeito, destacamos a necessidade do professor de manter-se atento a tudo, articulando o diálogo constantemente.

Identificamos, ainda, que a interação também ocorre entre os próprios alunos. Quando Nobre diz para a turma “cinco é melhor”, inferimos que os alunos vivenciam um momento de interação e diálogo uns com os outros e não somente com a professora.

Professora: Qual vai ser o raio?

Alguns alunos: Cinco.

Outros alunos: Seis.

Outros alunos: Sete.

Nobre: Seis é melhor.

Professora: vocês podem ir tentando até decidirem o que ficar melhor.

[Nobre escolhe o raio seis].

Professora: Por que vocês escolheram esse centro?

Everton: Pra centralizar o olho e a boca.

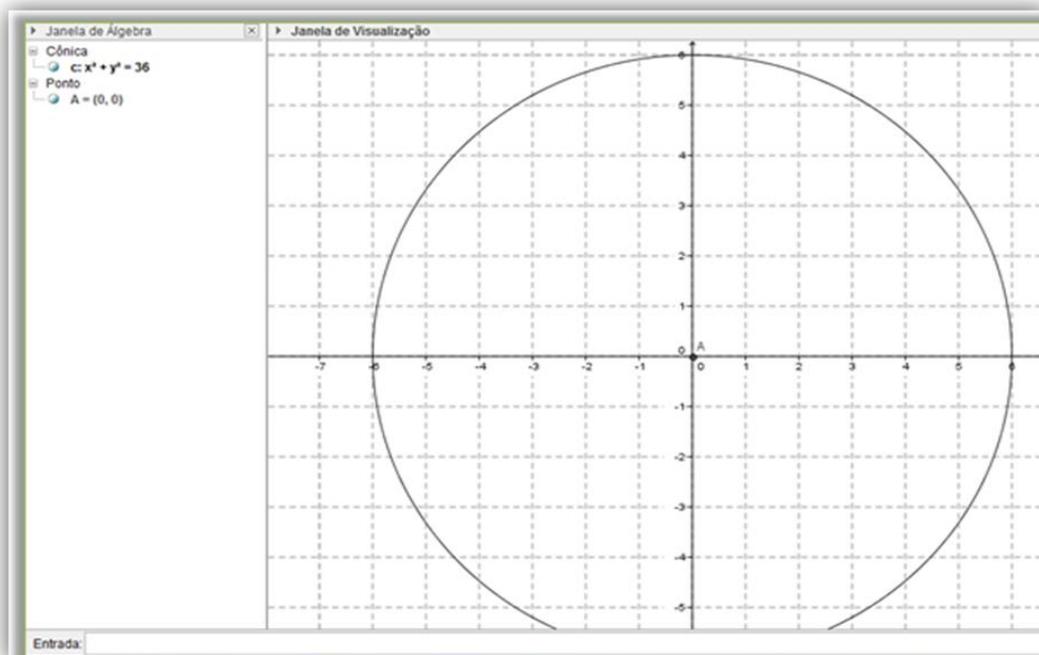
Nobre: o três daqui [apontou para (-3,0)] e este três daqui [apontou para (3,0)] são simétricos.

[Alunos aplaudem muito em sinal de aprovação]

Nesse excerto, observamos que a professora lançou um questionamento para os alunos (“Por que vocês escolheram esse centro?”) oportunizando-os a justificarem suas escolhas para os comandos do software ao construírem circunferências para a representação do *smile*. A respeito da escolha da medida do raio, a professora não lançou questionamentos, perdendo uma oportunidade de analisar e compreender outras estratégias empregadas pelos alunos na execução da tarefa.

A turma construiu a circunferência que representava a cabeça do *smile* e, ao final da construção, a professora questionou sobre a estratégia escolhida. Embora apenas dois alunos tenham se manifestado (Everton e Nobre), a turma aprovou a escolha. A representação da cabeça está apresentada na Figura 10:

Figura 10: Representação do contorno do rosto do *smile*



Fonte: Dados da pesquisa

A partir do *feedback* dado pelo software, a turma aprovou a construção da circunferência. Desta forma, a professora estabeleceu questionamentos como o apresentado no diálogo a seguir:

Professora: *agora vamos aproveitar e ver se a conjectura que o Pereira tinha levantado se verifica com essa circunferência.*

Professora para Pereira: *Pereira, qual é a conjectura que você tinha feito mesmo naquela hora?*

Pereira: *que o número que está depois da igualdade seria o diâmetro.*

Professora para Pereira: *Pereira, pela tua conjectura, qual valor teria que ter dado aqui? [Nesse momento, Pereira olha fixamente para a Lousa Digital e se mantém em silêncio, como se buscasse uma nova proposição, uma vez que o resultado dado pelo software não atendia à sua proposição inicial].*

João Pedro para professora: *doze. [João Pedro respondeu embora a pergunta tenha sido feita para o Pereira]*

Professora para todos: *doze?*

Pereira para professora: *doze, mas é ao quadrado! [elevado ao quadrado]*

Professora para Pereira: *agora você levantou uma nova conjectura. Que conjectura é essa?*

Pereira para professora: *que é o raio ao quadrado. [medida do raio elevado ao quadrado].*

Professora: *é o raio ao quadrado? Qual é o raio? [qual é a medida do raio?].*

Vinicius: *Seis ao quadrado dá trinta e seis.*

Ao analisarmos a resposta de Pereira, identificamos que ele, ao mesmo tempo em que refuta a hipótese apresentada, já apresenta uma nova conjectura de que o valor representado no segundo membro da equação está elevado ao quadrado. Ao ouvirem essa nova conjectura, alguns alunos acenam afirmativamente com a cabeça em sinal de concordância com a nova proposição do colega; os demais alunos, nesse momento, estavam apenas observando o diálogo.

A filmagem mostra que nesse momento do diálogo, dos quinze alunos que aparecem na cena, treze estavam olhando para a Lousa Digital, e pareciam atentos ao diálogo entre a professora e o aluno Pereira. A professora propôs a continuidade da reflexão e do debate buscando novas oportunidades de cooperação:

Professora: *O valor do raio que vocês escolheram é seis, né?*

Yasmim para a professora: *foi ela [a Amanda] quem escolheu seis...*

Professora: *é... ela escolheu seis.... [medida seis para o raio].*

Professora: *Ele [referindo-se a Pereira] está dizendo agora, que este valor [apontou para o valor 36 do segundo membro da equação] é seis ao quadrado, o que vocês acham?*

Nobre, enquanto apontava para a Lousa Digital: *está elevado ao quadrado porque são quatro lados, daí dá 6 [apontou para o ponto (6,0)], seis [apontou para (-6,0)], seis [apontou para (0,6)] e seis [apontou para (0, -6)].*

Alunos para Pereira: não é...

Pereira para alunos: mas se fosse “mais”, o x ao quadrado mais o y ao quadrado, e o raio ao quadrado. Vai ser a área.

Professora: é? Vamos ver se isso acontece com outras circunferências? 36 é a medida de área da circunferência?

Everton para João Pedro: não...

João Pedro para Everton: vai ser sim, porque se fosse três [se π fosse considerado como tendo medida igual a três unidades], a área da circunferência seria $2\pi r$ [o aluno se referia à medida do comprimento da circunferência e não à medida de área. A professora não percebeu isso no momento, por isso não o corrigiu].

João Pedro: Doze, seis, doze, duas vezes três seis.

Professora: duas vezes seis?

João Pedro: seis vezes seis, trinta e seis.

Professora: e esse seis seria o que?

João Pedro: considerando π (pi) igual a três, doze vezes três é trinta e seis. Seria a área.

Observamos que a maioria do grupo concordou com a nova proposição do Pereira, mas não com a sua justificativa. Os colegas Nobre e João Pedro tentaram apresentar justificativas, mas a turma não concordou com eles. Dessa forma, a professora optou por não continuar o diálogo sobre essa questão e deu a continuidade à representação do *smile*, pois avaliou que essa discussão não atendia ao objetivo da aula.

O diálogo a seguir apresenta a continuidade da produção:

Professora: Vamos continuar a desenhar?

[A Ellen se voluntariou].

Professora: Pessoal, a Ellen vai fazer uma nova circunferência. Como ela está representando o grupo, então vamos discutir: que informação ela precisa para construir uma nova circunferência?

Alunos: centro e raio.

Professora: Qual centro vocês preferem escolher para essa nova circunferência?

João Pedro: menos dois e três. [referindo-se ao ponto (-2,3)].

Professora: menos dois e três? Para o olho direito esquerdo ou a boca?

Alunos: menos três e três.

Amanda: Por que não coloca menos dois? Vai ficar muito longe. [referindo-se à distância entre os dois olhos].

João Pedro: menos dois é melhor.

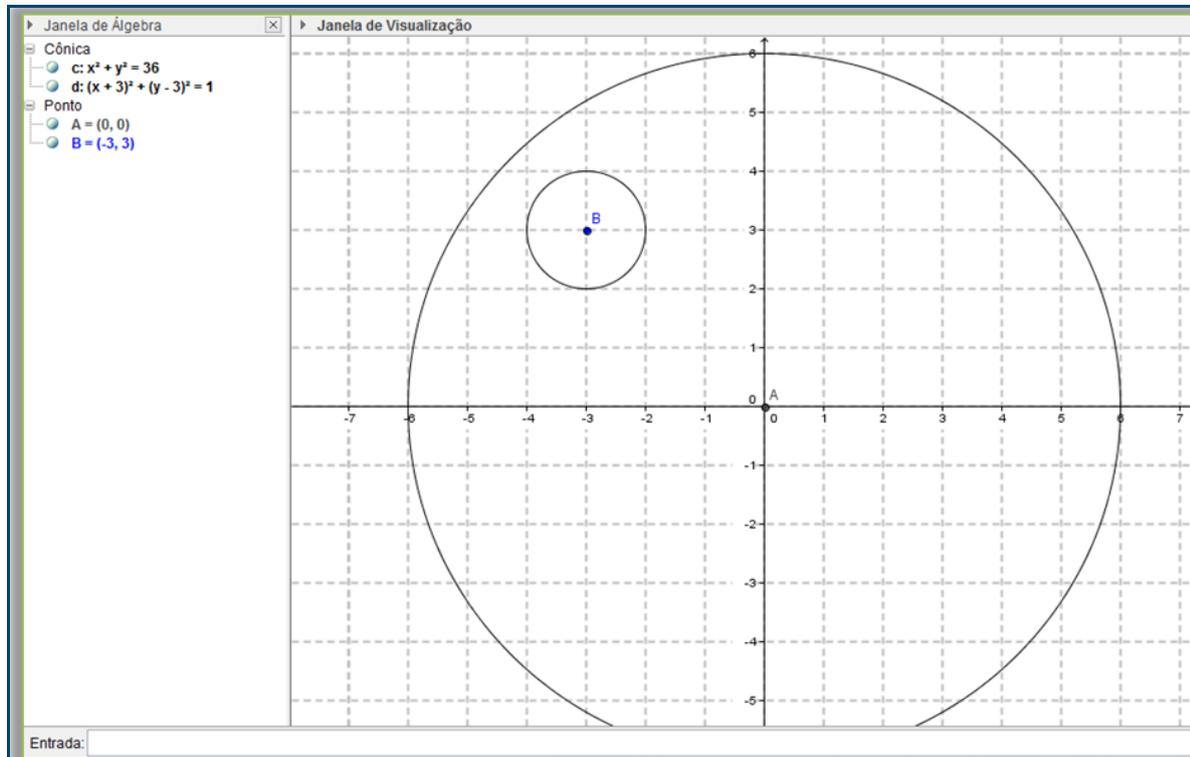
Amanda: claro que não, vai ficar certinho... [em defesa de sua sugestão anterior quando estava tomando o cuidado para que os olhos tivessem uma boa distância entre si, de forma a não ficarem muito distantes nem muito próximos]

Mayara: centro menos três, três... vai dar certo... [em apoio à sugestão do João Pedro. A turma aceita, assim, essa sugestão e representam no Geogebra um ponto (-3,3)].

[Ellen representa a circunferência a partir do ponto sugerido]

O *feedback* dado pelo *software* é apresentado na Figura 11, o qual foi reprovado pela maioria dos alunos da turma.

Figura11: 1ª tentativa de representação do olho esquerdo do *smile*



Fonte: Dados da pesquisa

A maioria da turma reprovou a representação do olho, pois achou que deveria ficar mais no centro do rosto, senão “iria saltar da cabeça”. Não é possível identificar quem fez essa proposição, pois não aparece na imagem do vídeo. Pode-se identificar apenas a aluna Mayara na discussão favorável à reconstrução do olho esquerdo. A opinião dela também era de que, se aceitassem o olho esquerdo da forma como estava construído, isso acarretaria um resultado desfavorável após a construção do olho direito, levando em consideração as proporções e a simetria em relação ao eixo das ordenadas.

A discussão para a reconstrução do olho esquerdo está no diálogo que segue:

[nesse momento os alunos conversaram para a melhor escolha das coordenadas do centro e da medida do raio da circunferência]

Alunos: menos três e três! Isso!

[a aluna Mayara constrói o centro e aparece a janela do raio]

Professora: e o raio?

Mayara: um e meio;

Alunos: um...

Mayara: ... e meio...

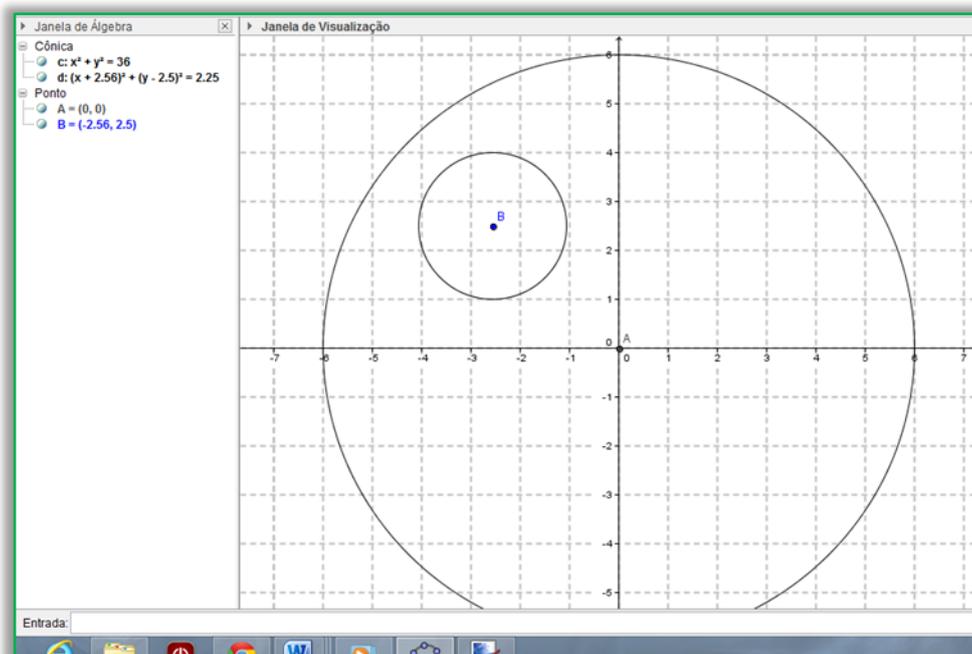
[Há uma rápida discussão para a escolha do centro, pois uns querem a medida um enquanto que outros querem a medida um e meio]

Mayara: mais vai passar [de um quadrante para outro]. Fica muito perto [do eixo das coordenadas].

Alunos: Aí! [em coro, em demonstração de satisfação, pois a circunferência desenhada atendeu às expectativas].

Naquele momento, identificamos uma demonstração de interação do grupo com a aluna Ellen ao demonstrar satisfação com a nova circunferência construída. A todo o momento a turma orientou Ellen em sua atividade de construção na Lousa Digital, assim, a construção desenvolvida por ela, representava as sugestões do grupo, como se fosse construída a várias mãos. A Figura 12 apresenta essa nova tentativa.

Figura 12: 2ª tentativa de representação do olho esquerdo do *smile*



Fonte: Dados da pesquisa

Essa nova representação do olho esquerdo atendeu às expectativas da turma, pois estava mais centralizada. Para a construção do olho direito, a própria aluna Ellen ofereceu a caneta da Lousa Digital para algum (a) voluntário (a), o que nos faz inferir que queria compartilhar com outro colega esse momento de construir circunferência na Lousa Digital. Uma nova discussão se inicia durante a construção do olho direito:

Ellen: quem vem fazer o outro olho?

[A Giovanna se prontificou, mas pediu para Ellen ficar ao seu lado]

Professora: *Como vai ser? Que informações vocês vão precisar para fazer a nova circunferência?*

[alunos escolhem o ponto (-2,5; 0)]

[As alunas que estão à frente sentem dificuldade em localizar o ponto, e são ajudadas pelo colega João Pedro, que se levanta e vai à Lousa Digital, apontando o ponto a que a turma se referia. A aluna Giovanna, que estava com a caneta manipulando a Lousa Digital, escolheu o ponto (2.5,0), e a turma manifestou reprovação].

Giovanna: *calma gente, é a primeira vez.*

[Ellen ajuda Giovanna, pois a dificuldade em localizar um ponto no Geogebra foi a mesma que ela teve anteriormente e, agora, já tinha condições de auxiliar a colega Giovanna]

[Depois que o olho direito foi representado, os alunos se manifestaram positivamente, pois o que o Geogebra apresentou como resposta às escolhas de centro e raio atenderam às expectativas]

Professora: *[...] Desconsiderando essa pequena imprecisão (o ponto escolhido tinha abscissa -2,4 e não -2,5, como se pretendia inicialmente), vocês gostaram desse olho?*

Alunos: *gostamos.*

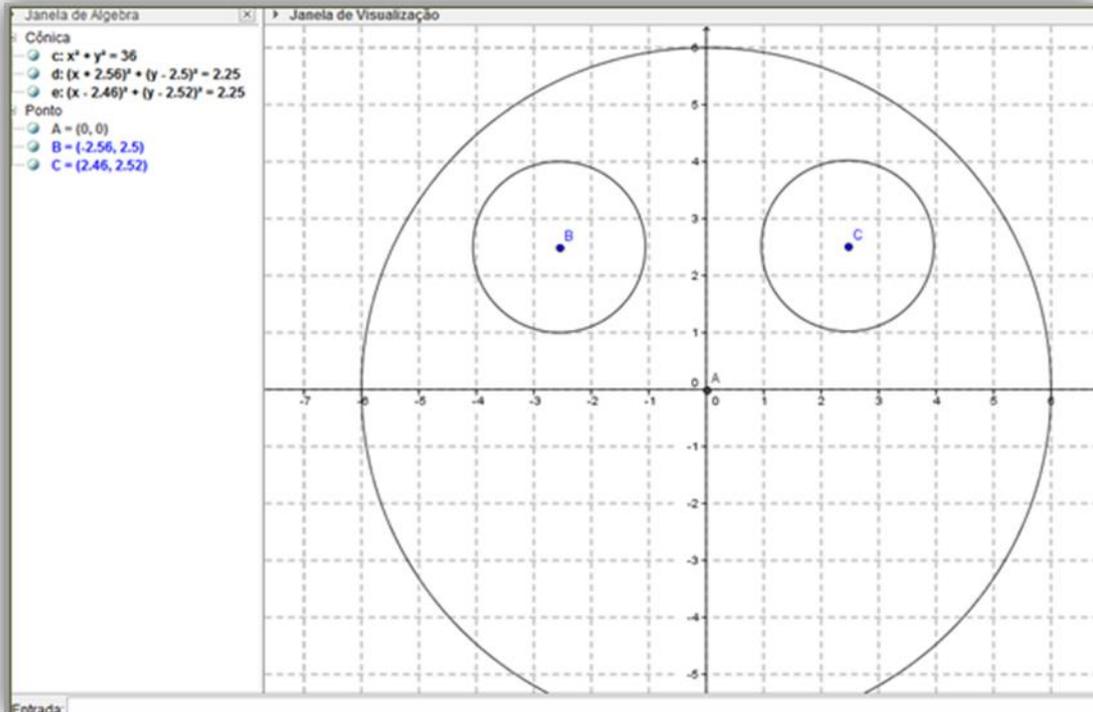
Everton: *ficou bonito.*

A estratégia para a construção do olho esquerdo era deixá-lo mais afastado da primeira circunferência já construída para representar a cabeça do *smile*, pois da forma como foi construído na primeira tentativa, os olhos pareciam “querer saltar para fora do contorno da cabeça”. Apesar dessa estratégia parecer óbvia e clara para o contexto daquele momento, a professora poderia tê-los questionado novamente, uma vez que poderiam surgir outras informações e/ou estratégias. Dessa forma, a mudança de escolha da abscissa -3 (primeira tentativa) para a abscissa -2,5 (segunda tentativa) poderia apresentar novas estratégias, além da já considerada no momento de “afastar os olhos da circunferência que representava o contorno da cabeça, impedindo-os de saltar”. Assim, novamente destacamos o papel do professor indagador atento às oportunidades para questionar.

Apesar do olho direito ser simétrico ao olho esquerdo, as alunas que estavam à frente sentiram dificuldade em localizar o ponto que representava o centro da circunferência [olho direito] e foram ajudadas pelo colega João Pedro, que se levantou e foi à Lousa Digital para apontar a localização do ponto sugerido pela turma. A aluna Giovanna, que estava com a caneta manipulando a Lousa Digital, escolheu o ponto (2.5,0) e a turma manifestou reprovação. A aluna Ellen ajudou a colega Giovanna na localização do ponto. Ressaltamos que esta dificuldade da colega foi a mesma

apresentada por Ellen inicialmente, o que nos faz inferir que Ellen já havia conseguido superá-la.

Figura 13: Representação do olho direito do *smile*



Fonte: Dados da pesquisa

Após o GeoGebra apresentar o olho direito, os alunos se manifestaram positivamente, pois a resposta do software correspondeu às escolhas de centro e raio que a turma tinha sugerido, ou seja, manter a simetria entre os dois olhos, tendo o eixo y como eixo de simetria. Analisamos que, nessa estratégia, o aluno Nobre mobilizou o conceito de simetria, favorecido pelo questionamento inicial da professora. Dessa forma, identificamos que a interação a partir do uso da Lousa Digital e o software Geogebra favoreceu a mobilização de outros conhecimentos a partir da discussão.

A construção da circunferência que representa a boca foi representada pelo aluno Everton juntamente com o colega Soares, este que se voluntariou prontamente, após a solicitação da professora, conforme pode ser observado no excerto a seguir:

Professora: Quem vem fazer a boca?

[Everton e Soares se prontificam.]

Professora: eles vão representar a opinião da turma, então qual centro e qual raio?

[solicitando as coordenadas do centro e a medida do raio da circunferência]

Quando a dupla iniciou a atividade na Lousa Digital, a turma verificou que a dupla tinha dificuldades para manipular o GeoGebra e a Lousa Digital e, da mesma forma como orientaram os outros colegas, auxiliaram também a dupla.

[nesse momento, a dupla tem dificuldades em manipular o GeoGebra e a Lousa Digital, a turma, porém, os orientam, manifestando reprovação quando erram e comemorando com aplausos quando acertam].

Mayara: -3.

Ellen: bem em cima do $y = -3$.

Vinícius: -2.

Mayara para Vinícius: não, com o -2 vai ficar muito em cima.

João Pedro: não, é o ponto $(0, -3)$

[A dupla então seleciona, com a caneta, o ponto $(0, -3)$.]

Professora: e qual é a melhor medida do raio para essa circunferência?

Everton: um.

Pereira: um.

João Pedro: tem que ser menor que o raio dos olhos, então tem que ser um.

[A turma, de uma forma geral, acata a sugestão de que a melhor medida para o raio da boca é uma unidade e comemoram com o feedback apresentado pelo Geogebra]

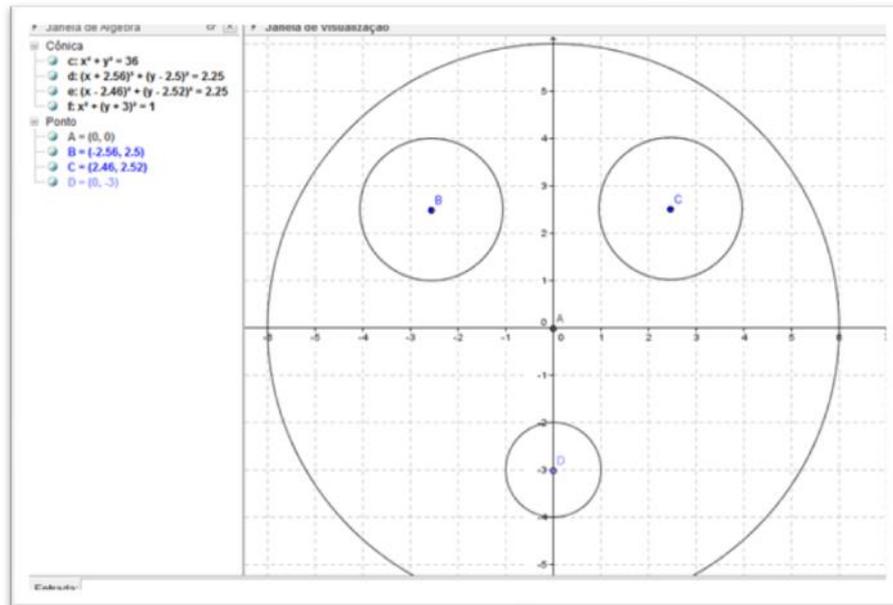
Nesse recorte, observamos a participação dos alunos Mayara, Ellen, Vinícius, João Pedro, Everton e Pereira. Alguns poucos alunos mostraram que se sentiam confiantes para expor suas opiniões e justificativas, como a Mayara e o Vinícius que sugeriram valores para a coordenada y do centro da representação da circunferência da boca. A Mayara sugeriu o valor -3 enquanto Vinícius sugere o valor -2. Quando Mayara disse para Vinícius: “Não, com o -2 vai ficar muito em cima”, observamos um momento de interação entre essa dupla, com respeito recíproco, apesar dos valores sugeridos serem diferentes. A Mayara justificou sua escolha pelo valor -3 após analisar que o valor apresentado por Vinícius faria com que a boca ficasse muito próxima aos olhos.

Depreendemos que, nesse momento, a aluna apresentou em suas coordenações mentais a imagem de uma boca muito próxima aos olhos, quando esta ainda não havia sido construída. Dessa forma, ela vivenciou, em suas coordenações mentais, um ciclo de ações, pois ao pensar em **descrever** o ponto $(0, -2)$ para o centro da circunferência que representaria a boca, já antecipou que o software apresentaria como **execução** um ponto muito próximo dos olhos já representados Assim, ao vivenciar a **reflexão** sobre o que poderia ser modificado na **descrição** realizada,

identificou como **depuração** desse ponto as coordenadas sugeridas pelo colega Vinícius, o ponto (0, -3).

A turma aprova a boca construída, conforme a Figura14.

Figura14: Representação da boca do *smile*



Fonte: Dados da pesquisa

Ao surgir a Figura 14, a turma comemorou, pois essa figura atendia ao que pretendiam. Observamos que nessa “comemoração” há indícios das ações “execução-execução-reflexão” vivenciadas pelo grupo. Esse momento de representação da boca do *smile* por uma circunferência evidencia, a partir das escolhas feitas para as coordenadas do centro e do raio, manifestações de reflexão e depuração das certezas levantadas a partir da experiência de construção das circunferências anteriores (contorno da cabeça, olho direito e olho esquerdo).

Ressalta-se a “descrição” elaborada pela turma para a representação da boca do *smile* a partir da linguagem do software. Assim, o Geogebra apresenta o *feedback* composto pela imagem anteriormente apresentada e a equação da circunferência. A fim de que os alunos vivenciassem a terceira ação do ciclo, ou seja, refletir sobre o resultado obtido, a professora novamente os questionou sobre os registros algébricos e geométricos das circunferências construídas, conforme demonstra o diálogo que se segue:

Everton: posso fazer uma sobancelha aqui?

Professora para a turma: O Everton quer fazer uma sobancelha, mas antes dele fazer uma sobancelha, eu queria fazer uma pergunta: quando ele escolheu o centro E, apareceu zero e menos três [referindo-se às coordenadas do ponto (0,-3)]. O GeoGebra fez certo?

Professora: *e a equação da circunferência $x^2 + (y+3)^2 = 1$. Verifica a conjectura que vocês fizeram?*

[...]

Pereira: *verificou sim...*

Alunos: *um ao quadrado é igual a um... [testaram a proposição do Pereira, de que o valor isolado no segundo membro refere-se ao quadrado do valor da medida do raio].*

[O aluno Everton, com o consentimento da professora, desenha as sobancelhas a partir de um ícone do software para a construção de arcos por dois pontos do plano.]

Nesse trecho, analisamos a atitude da professora diante da solicitação do Everton para fazer a sobancelha do *smile*, embora na Figura 8 do *smile* não haja sobancelha. O consentimento dado pela professora constitui uma postura que favorece novas aprendizagens. Como a representação das sobancelhas não fazia parte da proposta de atividades, não trazemos esse momento para a análise.

Destacamos ainda que, naquele momento de finalização da construção do *smile*, a discussão final proposta pela professora teve a participação da turma como um todo. O aluno João Pedro afirmou que na equação $x^2 + (y+3)^2 = 1$ não aparece o valor zero da coordenada x do centro, conforme já tinha falado anteriormente.

Ao fazer o questionamento “*Verifica a conjectura que vocês fizeram?*”, a professora oportunizou aos alunos testarem a conjectura levantada por eles de que o valor do segundo membro da equação de uma circunferência representa o valor do seu raio elevado ao quadrado. Analisamos que ao responderem “*um ao quadrado é igual a um*”, os alunos testaram a conjectura para o valor um para o raio, confirmando assim a hipótese levantada.

Observamos que essa discussão ao final da atividade representou a institucionalização da relação entre a representação geométrica do raio e do centro da circunferência relativos à boca do *smile*, com a representação algébrica de sua equação, o que constituía o objetivo da proposta da atividade para esse primeiro encontro: “Identificar a relação entre a representação geométrica das circunferências presentes na composição do *smile* e as suas equações”. As discussões a partir dos questionamentos da professora nos mostram elementos que permitem identificar possibilidades dos alunos estabelecerem relações entre as representações geométrica e algébrica da circunferência, a partir da vivência do ciclo de ações e da espiral de aprendizagem mediados pelo uso do software Geogebra na Lousa Digital.

Destacamos que o desenvolvimento de uma atividade comum, a partir do uso da Lousa Digital, e dos questionamentos lançados pela professora para o grupo, contribuíram para a interação entre os alunos durante a representação do *smile*. Detectamos que os alunos participantes das discussões apresentavam suas proposições e ouviam as dos colegas, configurando-se como um momento favorável para a exposição e reflexão de suas certezas, permitindo-se ouvir e refletir sobre as proposições dos outros, colocando-se em uma atitude aberta para que estas agissem sobre as suas certezas. Semelhante interação constitui, assim, um movimento de cooperação favorável à construção de conhecimentos sobre a relação entre as representações geométrica e algébrica da circunferência.

5.2 UM ESTUDO DA EQUAÇÃO DA CIRCUNFERÊNCIA: DA ÁLGEBRA PARA A GEOMETRIA

Descreveremos, neste subcapítulo, a análise do segundo encontro com os participantes da pesquisa, cujo objetivo era estabelecer relações entre a equação de uma circunferência e a sua representação geométrica, durante a atividade de composição do *smile*, a partir da descrição das equações das circunferências que o compõe.

O início do segundo encontro se deu com a proposta da atividade de representar o *smile* (Figura 9) no software GeoGebra. Vejamos parte do diálogo inicial:

Professora: *O desafio de hoje é desenhar esse mesmo smile, só que nós não vamos mais utilizar a janela geométrica e observar a janela algébrica, nós vamos escrever a equação da circunferência [apontou para a janela algébrica] e ver a circunferência aparecer aqui [apontou a janela geométrica]. Entenderam?*

[como o silêncio prevaleceu, a professora repetiu a proposta]

Professora: *Naquele dia, nós desenhamos a circunferência e apareceu a sua equação. Hoje nós vamos fazer o contrário, pois já vimos como escrever a equação e a relação entre a equação e a circunferência... então, como vocês desenhariam o smile, a partir das equações? Quantas equações teremos que escrever?*

Vinicius: *três! Quatro! Quatro! São quatro circunferências.*

Somente após identificar que a turma entendeu a proposta de atividade, a professora a iniciou, conforme o seguinte diálogo:

Professora para a turma: *Por qual circunferência vocês querem começar a desenhar?*

Yasmim: *pela pequena...*

Professora: *pela menor?[...]*

Nobre para Yasmim: *começa pela maior...*

Vinicius para Yasmim: *pela maior é mais fácil...*

Professora: *pode ser o menor ou o maior... O maior é mais fácil por que, gente?*

Vinicius para a turma: *já fiz a equação, já fiz a equação...*

Alunos para professora: *para ficar centralizado...*

Identificamos nesse excerto, um momento em que a turma traçava uma estratégia de construção do *smile*. A aluna Yasmin foi a única a propor que se iniciasse a construção por uma das circunferências menores, internas à circunferência maior, que representa o contorno da cabeça. Os alunos Nobre e Vinicius propuseram que a construção do *smile* começasse pela circunferência maior e, quando questionados pela professora sobre o porquê dessa estratégia, explicaram que é “para ficar centralizado”, pois uma vez determinado o contorno da cabeça, ficaria mais fácil construir os olhos e a boca, representados por circunferências internas à ela.

Como a maioria decidiu pela representação da circunferência relativa à cabeça, a professora iniciou a discussão conforme segue:

Vinicius para a turma: *já fiz uma equação aqui... [o aluno mostra sua anotação no caderno]*
[a professora não ouve Vinicius falar e ele repete]

Vinicius para a professora e para a turma:... *ah, deixa eu escrever... já fiz uma equação... eu quero fazer uma equação.. Alguém quer fazer uma equação? . [referindo-se a escrever a equação no GeoGebra]*

[Alunos riem com a insistência de Vinicius]

Professora para Vinicius e para a turma: *é nessa “entrada” aqui, óh Vinicius, óh turma que vamos descrever a equação. [Apontou para o ambiente do GeoGebra].*

Dessa forma, antes do início da atividade, a professora apresentou o espaço, no ambiente do software GeoGebra, no qual seria feita a descrição da equação da circunferência. Destacamos, assim, a importância de se apresentar ferramentas do software GeoGebra apenas no momento em que essa ferramenta se faz necessária para resolver uma problemática durante o estudo de um objeto matemático, pois o que está em evidência é a construção de conhecimentos sobre o objeto de estudo e não o uso do software.

Ressaltamos, portanto, a importância da professora estar atenta para apresentar um recurso do software que se fez necessário para o momento. O diálogo prossegue:

Vinicius para a turma: *já fiz uma já! [referindo-se à equação que escreveu no caderno]*

Nobre: *Vamos fazer a maior...*

Vinicius para Nobre: *então, eu já fiz a equação da circunferência maior, pode ser? [solicitava nesse momento o consentimento do colega para escrever a circunferência].*

Vinicius mostra o caderno com a anotação para a professora, quando esta vai pegar o caderno para ler a equação, ele diz: Espera falta um quadrado aqui. [O aluno coloca um expoente dois sobre um dos parênteses da equação que escreveu]

Professora lê para a turma: *Olha, o Vinicius escreveu o seguinte: $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 36$. O que vocês acham?*

Professora para Vinicius: *Essa equação aqui é pra fazer qual circunferência?*

Vinicius para a professora: *a maior.*

Professora para Vinicius: *a maior?*

Vinicius para a professora: *porque a maior vai englobar todas as outras três circunferências.*

Professora para a turma: *o que vocês acham? Pode ser?*

[a turma faz gestos com a cabeça, em sinal positivo, concordando com a sugestão do Vinicius].

Nesse momento, a professora convida o aluno Vinicius para ir até a Lousa Digital para descrever sua equação no Geogebra, uma vez que a turma mostrou aceitá-la, afinal, ninguém a rejeitou ou apresentou outra equação. Inicia-se assim a ação de descrição do ciclo de ações nesta nova tarefa. Enquanto descrevia, o aluno Vinicius fez um questionamento:

Vinicius para professora: *Como faz para “elevar ao quadrado”? [referindo-se ao expoente dois presente na equação da circunferência].*

Professora: *tem que digitar o acento circunflexo e depois o número dois.*

Juliane para Vinicius: *aperta a setinha...*

Yasmim para Vinicius: *aperta o “ctrl” e o “a”, depois o “2”.*

Vinicius para Yasmim: *óh! Parabéns hein!*

Identificamos no diálogo que a informação sobre o uso de um recurso do software GeoGebra ocorreu no momento em que o aluno Vinicius teve a necessidade de descrever sua equação no software. Essa dificuldade do aluno gerou um movimento de interação no grupo. A professora forneceu a informação “*tem que digitar o acento circunflexo e depois o número dois*”, e, em seguida, as alunas Juliane e Yasmim forneceram outras informações: “*aperta a setinha*” e “*aperta o “ctrl” e o “a”, depois o “2”*”, respectivamente.

Observamos, assim, um movimento de interação entre os alunos Vinicius, Juliane e Yasmim, pois além de expressarem verbalmente suas afirmações, dirigiram-se até Vinicius para mostrar-lhe as ferramentas às quais se referiam. Essa ação foi acompanhada por todos os alunos que, embora estivessem sentados, acompanhavam os registros que Vinicius, Juliane e Yasmim faziam na Lousa Digital.

A descrição elaborada pela turma, e executada no GeoGebra, apresentou uma resposta que atendeu ao que o Vinícius pretendia ao escrever inicialmente a equação em seu caderno. Destacamos, ainda, a concordância da turma com a colega Yasmim. O diálogo continuou:

*Professora lê a equação que o Vinícius **descreveu** na janela de entrada: $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 36$.*

***Juliane:** está certo.*

***Professora para Vinícius:** Por que 36? [referindo-se ao segundo membro da equação]*

***Vinícius para a professora:** Por que o raio vai ser 6.*

***Professora para Vinícius:** e qual vai ser o centro?*

***Vinícius para a professora:** zero nos dois... [ao dizer “nos dois”, o aluno se referiu às duas coordenadas do centro, ou seja, se referiu ao ponto (0,0)].*

***Professora para os alunos:** O que é que vocês acham que vai aparecer quando se apertar o “enter”?*

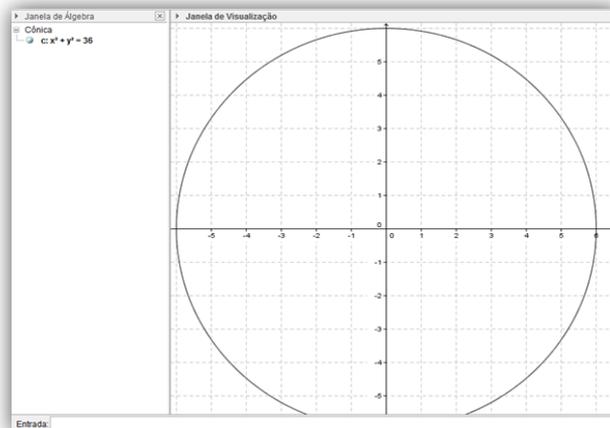
[silêncio... nesse momento o aluno Vinícius dá o comando enter e todos olham para a figura que surgiu]

***Professora:** [...] Era o que vocês queriam? [referindo-se à circunferência construída]*

***Yasmim para o Vinícius:** Faz mais centralizado...*

A circunferência obtida é apresentada na Figura 15:

Figura 15: Representação do contorno da cabeça do *smile*



Fonte: Dados da Pesquisa

A professora, ao questionar: “Era o que vocês queriam?”, não recebe nenhuma resposta, levando-a a avaliar que a circunferência foi aceita e o silêncio representava que havia quem estivesse antecipando mentalmente a construção das demais circunferências, como aponta a aluna Yasmim ao afirmar: “faz mais centralizado”.

Na sequência, a professora propôs a continuidade da construção do *smile*, conforme mostra o diálogo:

Professora: Vocês já construíram a circunferência do contorno da cabeça... Agora vocês querem construir qual circunferência?

Juliane: o olho. [Nesse momento, a aluna vira-se para os colegas esperando por uma opinião favorável ou contrária à sua sugestão]

Professora: qual olho?

Vinícius: pode ser o esquerdo...

As imagens do vídeo mostram que a aluna Juliane estava sentada bem à frente, nas primeiras carteiras, e, ao dizer “o olho”, ela virou-se para trás e girou a cabeça para olhar para todos os colegas da sala, como se pedisse o consentimento deles para a sua sugestão, ou até mesmo para ver se eles fariam outra proposição. Inferimos, assim, que essa interação pode ser favorável para evoluir a um momento de cooperação. Conforme salienta Scherer (2005), na cooperação os sujeitos não impõem suas proposições para que os outros a aceitem, mas buscam seduzi-los para o que afirmam, mantendo-se numa atitude aberta para ouvir as proposições dos outros e até mesmo para aderir a elas.

Nesse momento de escolha, os demais alunos permaneceram apenas olhando para a Lousa Digital, atentos às sugestões dadas pelos colegas Juliane e Vinícius, porém mantiveram-se em silêncio. Deduzimos que esse silêncio significa uma forma de concordarem com as sugestões. Dessa forma, a representação do olho prossegue, conforme diálogo:

Vinicius para Nobre: Vem desenhar o olho esquerdo Nobre!

Professora para a turma: que equação vocês escreveriam para o olho esquerdo?

Luana conversa com Lorraine: o centro pode ser menos dois e três...

Yasmim conversa com Juliane: o centro pode ficar naquele ponto ali...

Nobre: x menos...

Vinícius para Nobre: põe colchete...

Professora: qual centro você vai escolher? [referindo-se às coordenadas do centro da circunferência que representaria o olho esquerdo].

Nobre: o do lado esquerdo...

Professora para Nobre: mas com quais coordenadas?

Nobre sugere: dois e meio, dois e meio... [referindo-se ao ponto (2.5, 2.5)]

Nobre: não! É menos dois e meio, dois e meio [referindo-se ao ponto (-2.5, 2.5)].

Yasmin pra Nobre: Não... é menos dois e meio....

Yasmin para Nobre: é três e pouco...

Pereira diz para Nobre: é menos dois e meio e dois e meio [referindo-se ao ponto (-2.5,,2.5)].

Pereira: menos dois e meio, menos dois e meio.

Observamos nesse diálogo, o movimento de escrita de uma nova equação de circunferência. É notável que o centro da nova circunferência tenha uma aceitação comum, a discordância, porém, está em como representar as coordenadas do centro. Observamos ainda, que o aluno Nobre aceita o convite de Vinícius para ir descrever a nova equação na Lousa Digital, evidenciando um momento de interação entre os alunos, e de contribuição do Vinícius para uma produção coletiva. O registro de Nobre no Geogebra faz Vinícius questioná-lo:

Vinicius para Nobre: *Por que menos? Não é o olho? Vai fazer o olho embaixo?*

*[Nobre não responde, pois está atento à atividade de **descrição**]*

Vinicius: *você vai fazer no quadrante debaixo? [referindo-se ao terceiro quadrante do plano cartesiano]*

Imediatamente os colegas olham para a Lousa Digital a fim de compreender a proposição de Vinícius, embora na Lousa Digital só houvesse, naquele momento, a circunferência que representava o contorno da cabeça. O diálogo a seguir apresenta um esforço para entrarem em acordo:

Luana para Vinicius: *mas vai ficar lado a lado.*

Vinicius para os colegas: *tá bom gente... eu achei que vocês iam fazer o olho, mas.... [como se desistisse de tentar mostrar aos colegas como estava pensando]*

Nobre para Vinicius: *é que primeiro é o "x"... [referindo-se ao primeiro valor que falou]...*

Luana para Vinicius: *não... mais...*

Vinicius para Nobre: *o olho fica lá em cima...*

Luana sorrindo para Vinicius: *então... [mostrando para Vinicius que concordava com a posição do olho, mas não concordava com o centro que ele estava escolhendo]...*

Luana fala para os colegas sorrindo: *...por que ele está falando isso?*

[Nobre mostra o ponto com o dedo na Lousa Digital, mostrando a coordenada x e a coordenada y escolhidas]

Vinicius para Nobre: *então é "um menos"... Você falou "menos, menos"... [referindo-se ao sinal das coordenadas que Vinicius tinha falado, pois ele falou anteriormente que as duas coordenadas seriam negativas, mas ao apontar na Lousa Digital, falou que apenas a coordenada x seria negativa].*

Luana para Vinicius: *um é menos e o outro é mais...*

No trecho, observamos um momento de interação entre Luana, Vinícius e Nobre. Vinícius tenta, embora sem sucesso, mostrar para Luana e Nobre que o sinal da coordenada x é negativo e, dessa forma, o valor da coordenada x deve ser representado entre parênteses para separá-lo do sinal de subtração que, na equação de uma circunferência, representa o cálculo da distância entre dois pontos.

Caracterizamos esse momento como de cooperação, pois é um processo de interação em que, na busca de um entendimento comum sobre o objeto de estudo, as ações mentais de uns agem sobre as ações mentais dos outros e, neste caso, a proposição dada por Vinícius desestabiliza as certezas de Nobre e de Luana. Estes que, por sua vez, também desestabilizam as certezas de Vinícius, constituindo um processo de cooperação.

A professora faz novos questionamentos a fim de que os pontos de conflito apresentados na discussão pudessem ser debatidos, favorecendo o entendimento comum. O diálogo a seguir apresenta essa discussão:

Professora: *quais informações vocês precisam mesmo para escrever a equação da circunferência?*

Nobre: *centro e raio...*

Professora: *Qual raio?*

Yasmim para Nobre: *um e meio...*

Luana para Nobre: *um e meio...*

Professora para a turma: *a Yasmim sugeriu um e meio, o que vocês acham?*

[ninguém sugere outro valor]

Professora: *então vamos tentar?*

Yasmim para Nobre: *é na “entrada” [referindo-se o local onde Nobre deveria **descrever** a equação]*

Nobre escreve a equação: $c(x-2.5)^2+(y+2.5)^2=2.25$

Nobre para os colegas: *está certo?*

Professora pergunta: *por que 2.25?*

Luana: *por que é um e meio ao quadrado.*

Esse trecho apresenta um erro na descrição da equação. A professora não aponta o erro, pois a retroação do software favorece a análise de um erro. Isso mostra a importância do professor estar atento às descrições do aluno, lançar questionamentos, sem apontar erros, pois deve permitir que os alunos vivenciem **reflexões** e **depurações** a partir das retroações do software. No entanto, vale mencionar que o professor precisa realizar sistematizações das informações ao longo do processo, ação pouco explorada nesta experimentação. O recorte a seguir apresenta esse momento:

Ao dar enter, o GeoGebra forneceu a seguinte mensagem: “Entrada inválida”.

Vinícius para Nobre: *foi por causa do “c” Nobre! E também está errado o “menos” da equação!*

[Os alunos riem, não compreendendo bem o que Vinícius estava querendo dizer...]

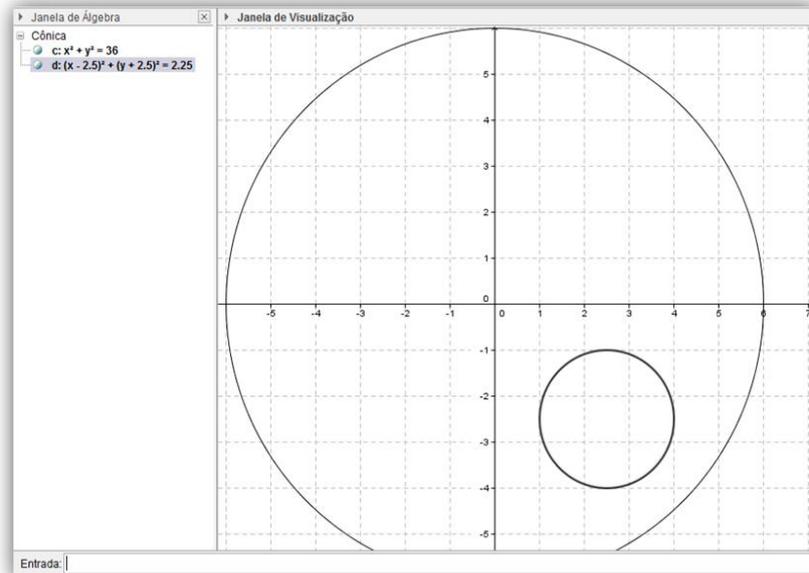
Nobre: *como assim?*

Vinícius: *é sim Nobre. Ali: x menos... Aquele menos é da equação, não é da coordenada...*

Luana: Vinicius, explica a fórmula que você falou...

O trecho apresenta o momento de depuração vivenciado pelo aluno Vinicius, suas palavras mostram que ele não concordava com a descrição que a turma elaborou. Retirando apenas o “c” da descrição, obteve-se a Figura 16:

Figura 16: 1ª tentativa de representação do olho esquerdo do *smile*



Fonte: Dados da Pesquisa

A Figura 16 apresenta a retroação do software à descrição elaborada pela turma $(x - 2.5)^2 + (y + 2.5)^2 = 2.25$. A turma não aprovou a figura que o software apresentou após a execução, o que levou os alunos a depurá-la, revendo principalmente os sinais e operações, pois essa foi a principal discordância na discussão anterior, ao descreverem a equação. O recorte a seguir apresenta a discussão em que a turma faz a depuração.

Yasmim para Vinicius: Dita de novo a equação...

Vinicius: Tem o “menos” da equação e também o “menos” do número também.

Professora para a turma: Olha só o que ele falou “tem o menos da equação... mas... tem o menos do número também”...

Yasmim para Vinicius: é isso que eu estou querendo dizer... por isso é mais...

Vinicius: tem que abrir um colchete...

Yasmim: ou colocar um mais... menos dois...

Luana para Yasmim: mais e menos?

Yasmim para Luana: é...

Professora para Yasmim: Por que mais, Yasmim?

Yasmim: porque vai sair lá em cima... [referindo-se ao segundo quadrante do plano cartesiano]

Vinícius para Yasmim: não....

Yasmim para Vinícius: ... é sim...

O trecho apresenta a interação entre os alunos Yasmim, Vinícius e Luana. Inferimos que Yasmim concordava com a proposição de Vinícius ao afirmar “é isso que eu estou querendo dizer”. Podemos, então, afirmar que os alunos concordaram com os sinais e operações, porém, não com a justificativa dos colegas. Essa interação pode ser caracterizada como um movimento de cooperação, pois ao ouvirem as justificativas das proposições dos outros, identificamos correspondências e discordâncias entre eles. Outro ponto que destacamos é o questionamento que uns fazem aos outros a fim de tentar compreender o outro, colocando-se em posição de abertura para aceitar, ou não, um ponto de vista diferente. A discussão sobre a descrição da equação da circunferência prosseguiu:

Vinícius para Yasmim: não tem um menos fixo na equação?

Yasmim para Vinícius: o menos é do 2 de baixo [a aluna se referia a um ponto do terceiro quadrante, cujas coordenadas são negativas]

Vinícius para Yasmim: mas a outra equação também tem menos x...

Yasmim: então

Yasmim para Vinícius: ... o menos é do 2 ali debaixo...

Vinícius para Yasmim: mas a outra equação também tem menos x...

Yasmim para Vinícius: então tem que colocar dois menos, que daí dará mais...

Luana fala para Yasmim: então tem que colocar colchete...

Vinícius: tem que colocar colchete...

Luana: ... então tem que dar menos...

Vinícius para Nobre: então... tem que colocar colchete...:

Vinícius: ah... sei lá!

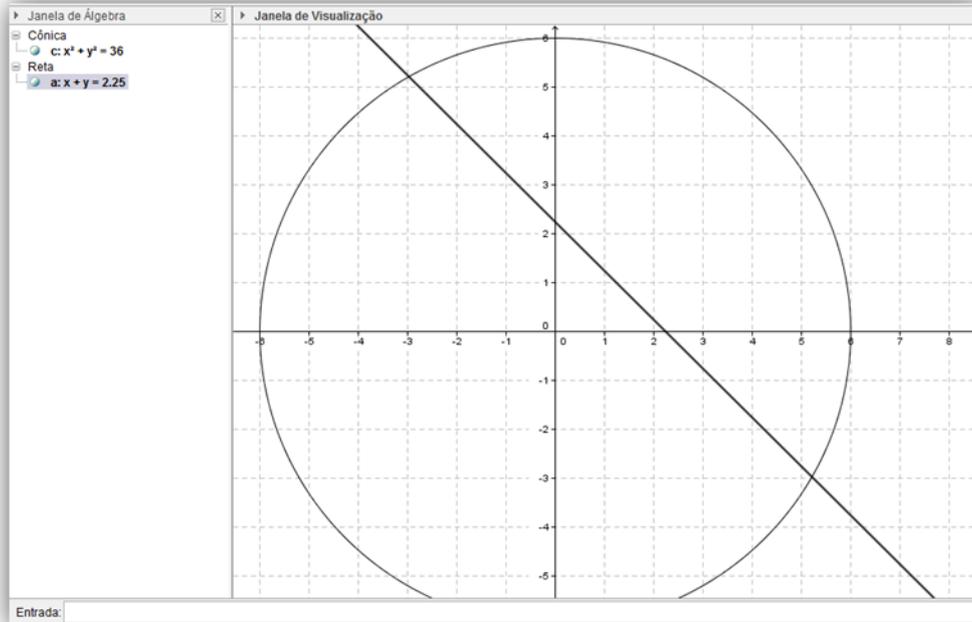
Professora: bom... o Vinícius acha que é x menos 2.5 ... O que vocês acham?

[Apesar do questionamento, ninguém apresentou outra sugestão, nem apontou erros na equação que ao colega Vinícius digitou]

Observamos que, nesse diálogo, a turma discutiu os dados para a elaboração de uma nova equação. Esse momento tem características de cooperação ao denotar um processo no qual os participantes da discussão buscam um entendimento comum sobre o objeto de estudo, a partir da apresentação e discussão de diferentes proposições. No diálogo, os alunos Vinícius, Yasmim e Luana expõem suas certezas ao proporem elementos para a escrita da equação, portanto, as ações mentais de uns agem sobre as ações mentais dos outros no momento de depuração da equação que anteriormente apresentou um resultado insatisfatório.

A execução do GeoGebra para a nova descrição, cujo registro foi $x + y = 2.25$, está apresentada na Figura 17:

Figura 17: 2ª tentativa de representação do olho esquerdo do *smile*



Fonte: Dados da Pesquisa

Sem que a professora solicitasse a depuração, os alunos a iniciaram imediatamente, após a execução do software. O trecho a seguir demonstra o diálogo que caracteriza a depuração do registro da equação da circunferência encaminhado como $x + y = 2.25$:

Yasmim para Nobre: *o que é que você fez?*

Vinícius para Nobre: *Nobre, é por causa do “menos”... [Vinícius aponta o que acha ser o erro]. [Nobre olha para Vinícius e sorri]*

Vinícius para Nobre: *Nobre, coloca “menos” e parênteses...*

Professora lê o que o Nobre descreveu no GeoGebra: $x + y = 2.25$

Professora: $x + y = 2.25$... Qual foi o erro?

Vinícius: *não é assim... está diferente da equação da circunferência.*

Professora para Vinícius: *como que seria então Vinícius?*

Vinícius: *ó... coloca então... [Vinícius ainda não consegue apresentar a equação e, com olhos fixos na Lousa Digital, mantém um momento de silêncio]*

Podemos observar que Vinícius apresentou o que julga ser o erro na descrição que gerou a Figura 17. Ao justificar sua proposição diz: “*por que está diferente da*

equação da circunferência...”. Com a intenção de manter o diálogo, a professora lhe perguntou como seria a equação da circunferência do olho esquerdo. Mediante esse questionamento, o aluno parece vivenciar um momento silencioso de reflexão. Enquanto isso, outros alunos tomam a iniciativa de depurar e apresentar uma nova descrição:

Yasmim para Nobre: *coloca entre parênteses x mais dois vírgula cinco...*

[Nobre descreve para o software essa informação dada pela Yasmim].

Vinícius para Nobre: *tenta colchetes depois, se não der certo...*

Nobre para os colegas: *... se é assim, então eu não aprendi nada...*

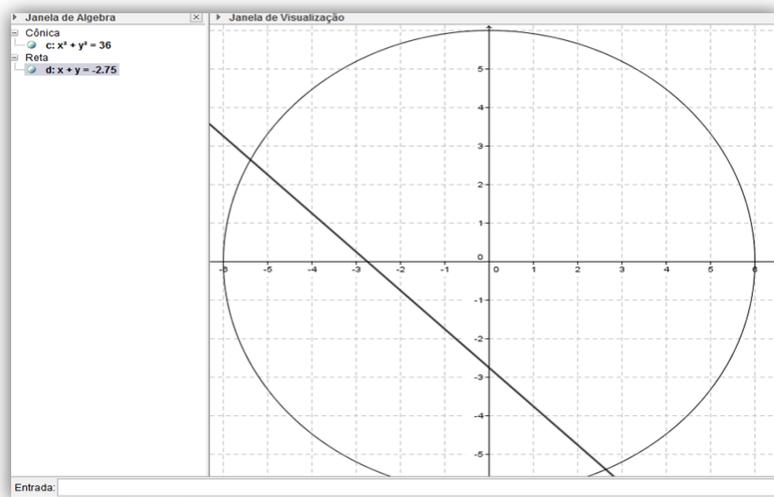
Yasmim para as colegas: *coloca menos nos parênteses, né?*

Lorraine para Nobre: *... é ao quadrado... coloca ao quadrado...*

Inferimos que, nesse momento, o aluno Nobre descrevia apenas as sugestões dos, não sendo, portanto, o que ele acreditava, mas aceitava as indicações dos colegas, uma vez que a sua descrição apresentou um *feedback* que ele não aceitou.

Observamos que o aluno Nobre refez sua descrição $(x+2.5)+(y+2.5)=2.25$. Antes que a turma aprovasse a sua descrição, o aluno já apertou a tecla *enter*. A aluna Lorraine, que o estava acompanhando, embora sentada em sua carteira, percebeu que ele não elevou os parênteses ao quadrado. Ela tenta avisá-lo, mas o Nobre já tinha apertado o *enter*. Para essa *equação*, o *GeoGebra* apresentou o *feedback* conforme a Figura 18:

Figura 18: 3ª tentativa de representação do olho esquerdo do *smile*



Fonte: Dados da Pesquisa

Quando o *GeoGebra* forneceu esse *feedback*, os alunos novamente apresentaram sua reprovação. O aluno Nobre, imediatamente, desfez a circunferência

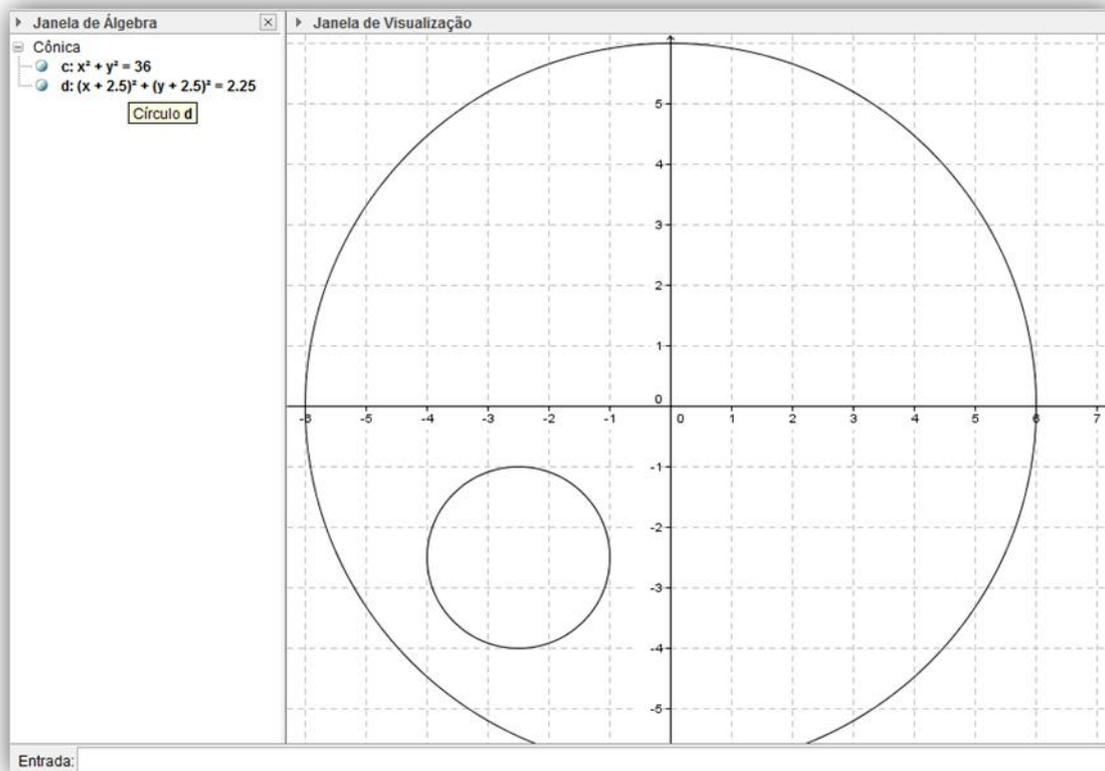
errônea e iniciou uma nova discussão. Semelhante atitude constitui a ação de depuração da descrição, a partir da linguagem do software, para buscar o erro localizado na descrição da equação da circunferência. A sequência do diálogo ilustra a pequena discussão em busca do erro:

Professora para a turma: *o que vocês acham que causou o erro?*

Alunos: *faltou elevar ao quadrado... [O aluno descreve a equação: $(x+2.5)^2+(y+2.5)^2=2.25$.]*

O GeoGebra mostra o que apresentamos, conforme a Figura 19:

Figura 19: 4ª tentativa de representação do olho esquerdo do *smile*



Fonte: Dados da Pesquisa

Diante dessa nova execução do software para a descrição $(x+2.5)^2+(y+2.5)^2=2.25$, os alunos estabelecem uma nova discussão:

Nobre: *deu embaixo!*

Professora: *“deu embaixo”? Onde está o erro aí?*

Vinícius levanta-se para escrever na Lousa, uma vez que os colegas não entendiam o que ele estava falando sobre colocar colchetes.

Yasmim: o Vinícius quer fazer colchete... Eu acho que a circunferência maior está de cabeça para baixo...

[risos]

Luana: tá parecendo uma bochecha... [risos]

Nobre: eu também acho...

Luana: a gente pode deixar sem olhos, com uma bochecha...

[risos]

Vinícius escreveu: $[x - (-2.5)]^2$

Nobre para Vinícius: deixa os colchetes?

Vinícius para Nobre: em uma equação, os parênteses ficam dentro de um colchete...

Yasmim para Nobre: primeiro resolve o parênteses, né?

Nobre para Yasmim: isso!

Nesse trecho, observamos a tentativa do aluno Vinícius em mostrar aos colegas que o erro é a ausência de colchetes. Os colegas, por outro lado, permanecem na certeza de que o uso de colchetes é desnecessário. Inferimos, porém, que, como os erros foram recorrentes nas tentativas anteriores, eles assumiram uma postura de abertura para ouvir a proposição do colega Vinícius.

Alunos para Vinícius: não precisa...

Vinícius: mas é assim...

Professora para a turma: ... vamos tentar...

Vinícius completa: $[x - (-2.5)]^2 + (y - 2.5)^2 = 2.25$

Professora: O que vocês acham do que o Vinícius fez?

[silêncio] Vocês concordam com o que o Vinícius fez?

Nobre escreveu no GeoGebra o que o Vinícius escreveu no quadro, porém, sem fechar o colchete que havia aberto: $[x - (-2.5)^2 + (y - 2.5)^2 = 2.25$

Yasmim: tem que fechar o colchete lá no final...

[Nobre atende ao pedido da Yasmim]

Ao dar *enter*, o GeoGebra apresentou a mensagem “entrada inválida”, o que não atendeu às expectativas de Vinícius. O recorte a seguir apresenta o diálogo que aconteceu nesse momento:

Alunos: põe só parênteses:

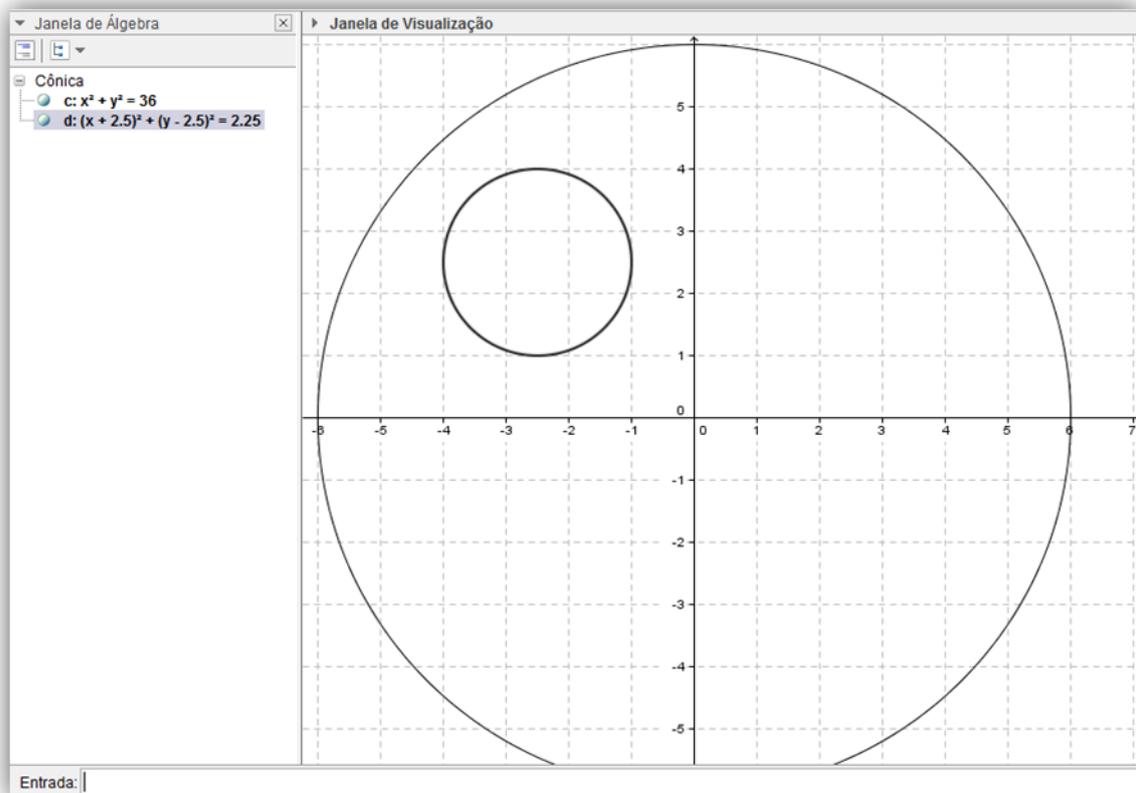
Nobre, então, troca os colchetes por parênteses: $(x - (-2.5))^2 + (y - 2.5)^2 = 2.25$

Alunos: aí!

Yasmim: Finalmente...

Alunos: agora falta o outro olho...

Observamos que a turma aprovou o *feedback* apresentado pelo *software* para a circunferência que representa a equação $(x - (-2.5))^2 + (y - 2.5)^2 = 2.25$. Essa nova circunferência está representada na Figura 20:

Figura 20: 5ª tentativa de representação do olho esquerdo do *smile*

Fonte: Dados da Pesquisa

A retroação do software a partir da execução das descrições favoreceu o movimento de reflexão e depuração. Semelhante dinâmica favoreceu uma nova oportunidade para discussão sobre a equação da circunferência, conforme mostra a continuidade do diálogo:

Professora: o que vocês estavam errando?

Nobre: eu não estava prestando atenção na equação.

Professora: o que vocês observam na equação da circunferência, então?

Nobre: daquela circunferência?

Professora: De qualquer circunferência... De uma circunferência genérica de centro (a,b) e raio r ?

Nobre: x menos a , ao quadrado, mais y menos b , ao quadrado é igual ao " r " ao quadrado.

Professora: Essa é a equação de uma circunferência de centro $C(a,b)$ e raio r , mas e se o centro for $(-a,b)$? [referindo-se a um ponto do 3º quadrante]

[...].

Nobre: e daí vai inverter a posição dele no plano cartesiano se mudarmos os sinais, podendo ficar embaixo (3º quadrante com coordenada y negativa) ou lá em cima (2º quadrante, com coordenada y positiva).

Deduzimos que, nesse momento, o aluno Nobre referiu-se à experiência por ele vivenciada ao descrever uma equação que apresentou uma circunferência no 3º quadrante e no 4º quadrante, quando ele pretendia que estivesse no segundo quadrante. A professora poderia ter avançado com os questionamentos solicitando que ele justificasse a representação da equação da circunferência em cada quadrante para melhor compreender o que o aluno estava pensando.

Em continuidade à discussão sobre a equação de uma circunferência quando uma de suas coordenadas apresenta sinal negativo, a professora questiona:

Professora: e se a coordenada b for negativa?

Luana: a expressão $(y-b)^2$ vai ficar $(y+b)^2$.

Inferimos que a aluna Luana pode ter vivenciado um momento de abstração pseudoempírica, pois ela fala de uma propriedade do objeto de discussão que não está presente no campo visual, apenas em suas coordenações mentais.

Professora: antes de fazermos o próximo olho, gostaria de fazer uma discussão com vocês sobre o que significa essa expressão $(x+2.5)^2+(y-2.5)^2=2.25$. O que os elementos “ x ” e “ y ” representam?

Nobre: os eixos x e y .

Yasmim: não... são os pontos da circunferência.

Nobre: Se fizer uma reta no x (faz gesto de uma reta paralela ao eixo y passando pelo ponto x) e se fizer uma reta no y (paralela ao eixo x), vai dar o ponto. [Enquanto faz sua explicação, o aluno faz gestos representando as retas e o ponto formado a partir da intersecção entre elas].

[...]

Professora: vamos representar a distância de um ponto qualquer da circunferência até o seu centro?

[A professora apresentou o ícone do GeoGebra que representa segmentos a partir de dois pontos.]

Professora: clica em um ponto qualquer da circunferência... escolheu o “segmento” (ícone) e construiu um segmento do A até o centro...

Vinícius: não seria melhor fazer outra circunferência? Daí a circunferência passaria pelo centro.

A professora comentou que poderiam continuar essa discussão com a circunferência que já estava registrada:

Professora: olha nessa informação dada pelo GeoGebra, a distância entre os pontos é seis. Qualquer ponto da circunferência tem distância seis até o centro?

Alunos: tem.

Professora: como é que a gente pode comprovar isso?

[silêncio]

A professora então, apresenta o ícone do GeoGebra que faz com que o ponto A escolhido possa “girar” por toda a circunferência.

[Enquanto o Vinícius faz o ponto A mover-se sobre os demais pontos da circunferência, a professora observou com a turma a variação das coordenada do ponto A, e a permanência do valor do segmento.]:

Professora: As coordenadas do ponto A estão mudando... mas a medida do segmento “a” é sempre a mesma...

Esse diálogo atesta o momento de discussão sobre o valor constante do raio da circunferência partindo da escolha de um ponto P (x, y) qualquer da circunferência e, em seguida, traçando-se e medindo-se o segmento cujas extremidades são P e O (0,0), sempre considerando a primeira circunferência construída para representar o contorno da cabeça do *smile*. Ao final do diálogo, observamos, ainda, que a professora forneceu uma informação, quando poderia encaminhar os alunos a descobri-la a partir da potencialidade do Geogebra, que permite mover um ponto da circunferência sobre ela demonstrando que a medida do raio se mantém enquanto o “ponto qualquer” da circunferência assume diferentes coordenadas.

Em seguida, a professora aproveitou para discutir o significado dos termos “x – 0” e “y – 0” presentes na equação da circunferência:

Professora: Agora, eu gostaria que pensássemos um pouco sobre o que representa esse “x – 0” da equação da circunferência do contorno da cabeça...O que representa?

Nobre: é a distância do ponto ao centro...

Professora: se o x tiver o valor igual a 4, o que significa?

Nobre: a mesma coisa... [referindo-se à distância do ponto ao centro]

Professora: se o x tiver valor igual a 3, o que significa?

Yasmim: um segmento de medida 3.

Professora: Qual é o valor da coordenada x do ponto A? [a professora inicia a discussão sobre a distância entre um ponto qualquer da circunferência e o seu centro]

Alunos: 5,2

Professora: Isso... não sabemos exatamente, mas nós temos uma noção...[referindo-se aos pontos cujos valores das coordenadas não são inteiros, mas decimais, como as coordenadas do ponto A, por exemplo, cuja coordenada x é um número decimal]

Vinícius: 5,2

Professora: “x – 0” é a medida do segmento que tem quais extremidades?

Alunos: x e 0.

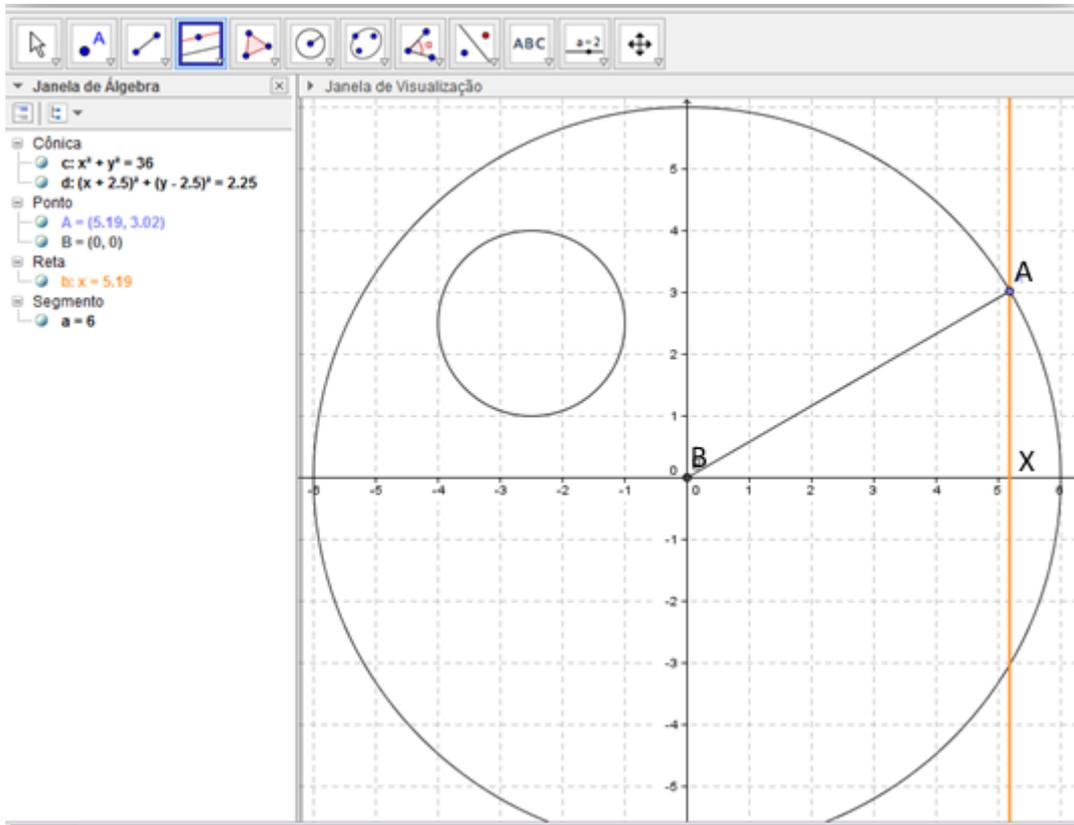
Professora: para sabermos exatamente qual é a coordenada em x, podíamos traçar uma paralela ao eixo y passando pelo ponto A.

[Nesse momento, a professora apresentou o ícone que constrói retas e solicitou que escolhessem o item “reta paralela”.]

Professora: bom, essa reta paralela que vamos traçar, vai passar por um ponto e ser paralela ao eixo y, então clica no ponto e no eixo y.

A representação da reta paralela ao eixo y , conforme o diálogo apresentado, está na Figura 21:

Figura 21: Reta paralela ao eixo y e passando pelo ponto $A(x, y)$



Fonte: Dados da pesquisa

O momento de discussão avança, mais uma vez, no sentido de verificar se os alunos reconheciam o significado dos termos “ $x - 0$ ” e “ $y - 0$ ”. Para isso, a professora fez questionamentos:

Professora: O que representa essa medida “ $x - 0$ ” nesta imagem?

Vinícius: um segmento...

Professora: Qual segmento?

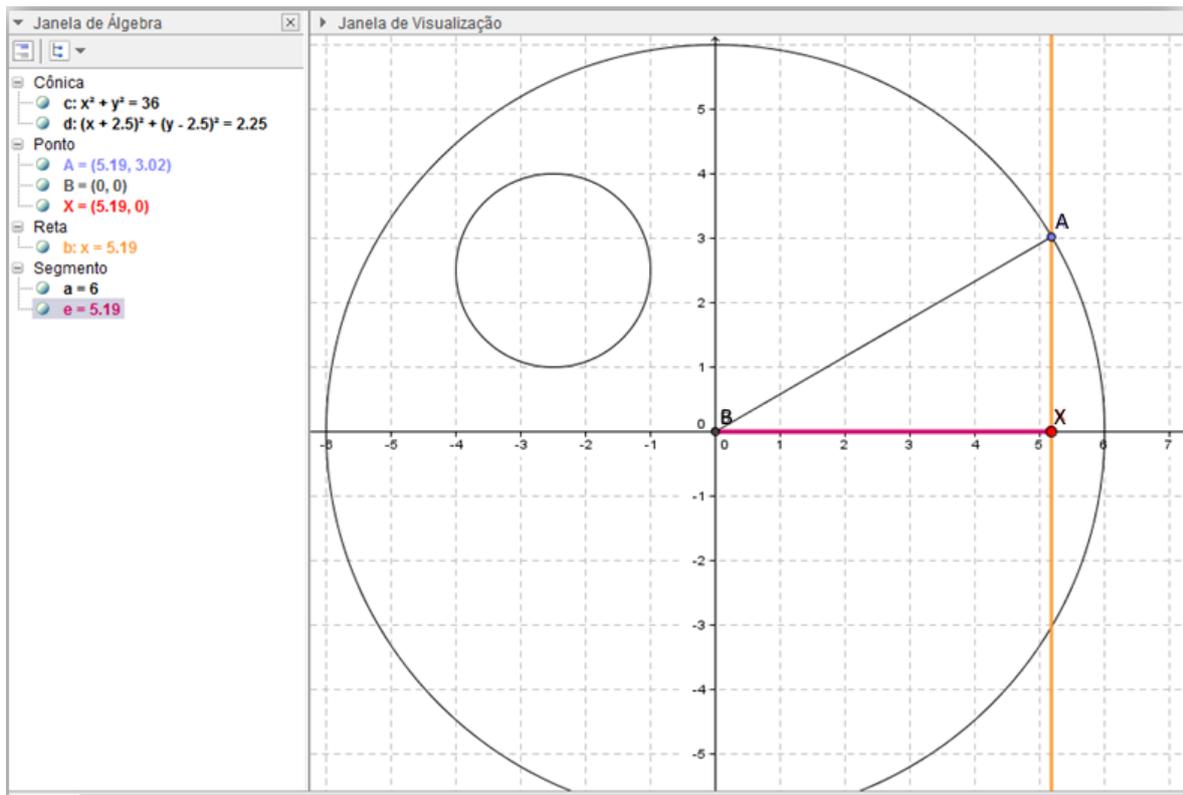
Nobre: o segmento BX ... [Esses pontos foram nomeados utilizando-se o ícone “ponto” do Geogebra]

Professora para Vinícius: destaca, então, o segmento que tem extremidades no B e no X , e depois clica com o botão direito para pintarmos. Podem escolher uma cor...

Alunos: rosa. [risos]

Professora: rosa? Pode ser.

A Figura 22 apresenta o segmento “ $x - 0$ ” na cor rosa:

Figura 22: Representação do segmento de medida “ $x - 0$ ”

Fonte: Dados da Pesquisa

A partir do triângulo retângulo ABX, a discussão segue no sentido de identificar o significado dos termos “ $x - 0$ ” e “ $y - 0$ ” como distância entre as coordenadas “ x e 0 ” e “ y e 0 ”, respectivamente, assim como a representação dessa distância a partir dos catetos do triângulo retângulo. O recorte a seguir apresenta um instante desse diálogo:

Professora: muito bem! “ $x - 0$ ” é esse segmento (na cor rosa). Agora vamos pensar no que representa esse “ $y-0$ ”?

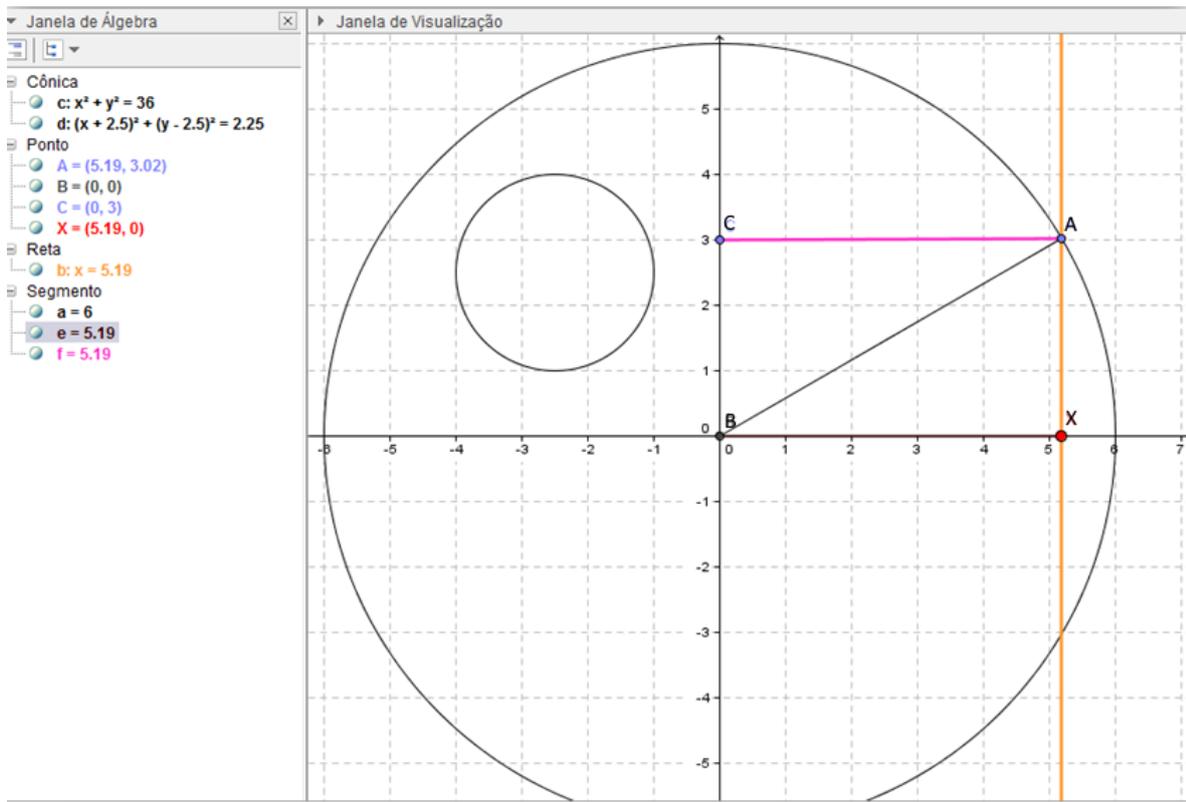
Yasmim: o tamanho do segmento...

Professora: o tamanho do segmento? Qual segmento?

Nobre: o do quatro ao zero [referindo-se à distância entre a coordenada $y= 4$ e $y=0$]

Professora: destaca pra mim esse segmento.

Inferimos que essa interação pode ser caracterizada como de cooperação, pois a proposição de Nobre complementou a proposição inicial apresentada por Yasmim. A aluna destacou o segmento a que se referia, como apresentado na Figura 23:

Figura 23: 1ª tentativa da representação de “ $y - 0$ ”

Fonte: Dados da Pesquisa

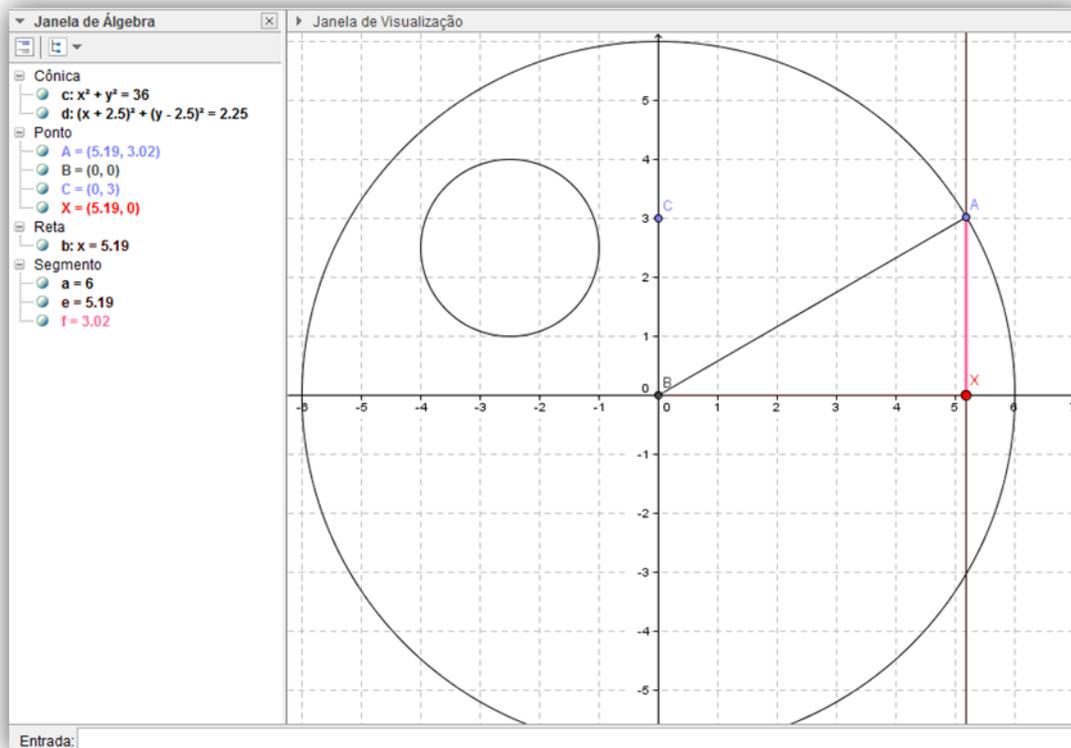
Diante da Figura 23, a professora questionou sobre o segmento destacado para representar a distância “ $y - 0$ ” e a aluna identificou seu equívoco, conforme vemos no diálogo:

Professora: é esse segmento? [referindo-se ao segmento AC].

Yasmim: é o segmento AX!

A aluna inicia, rapidamente, a reconstrução desse segmento, conforme mostra a Figura 24:

Figura 24: 2ª tentativa de representação do segmento “y-0”



Fonte: Dados da pesquisa

A partir dessa Figura 24, a professora propôs continuidade na discussão sobre a identificação do significado de “ $x - 0$ ” e “ $y - 0$ ” considerando a representação geométrica da circunferência e do triângulo retângulo construído ABX, tendo o raio como hipotenusa e os segmentos “ $x - 0$ ” e “ $y - 0$ ” como catetos.

Professora: [...] Nesse círculo maior, nós construímos esse triângulo retângulo... qual é a relação da equação da circunferência com esse triângulo retângulo? [...].

Yasmim: o de Pitágoras.

Professora: o de Pitágoras? Qual é o Teorema de Pitágoras?

Yasmim: $a^2 + b^2 = c^2$

Lorraine: cateto ao quadrado, mais cateto ao quadrado é igual hipotenusa ao quadrado.

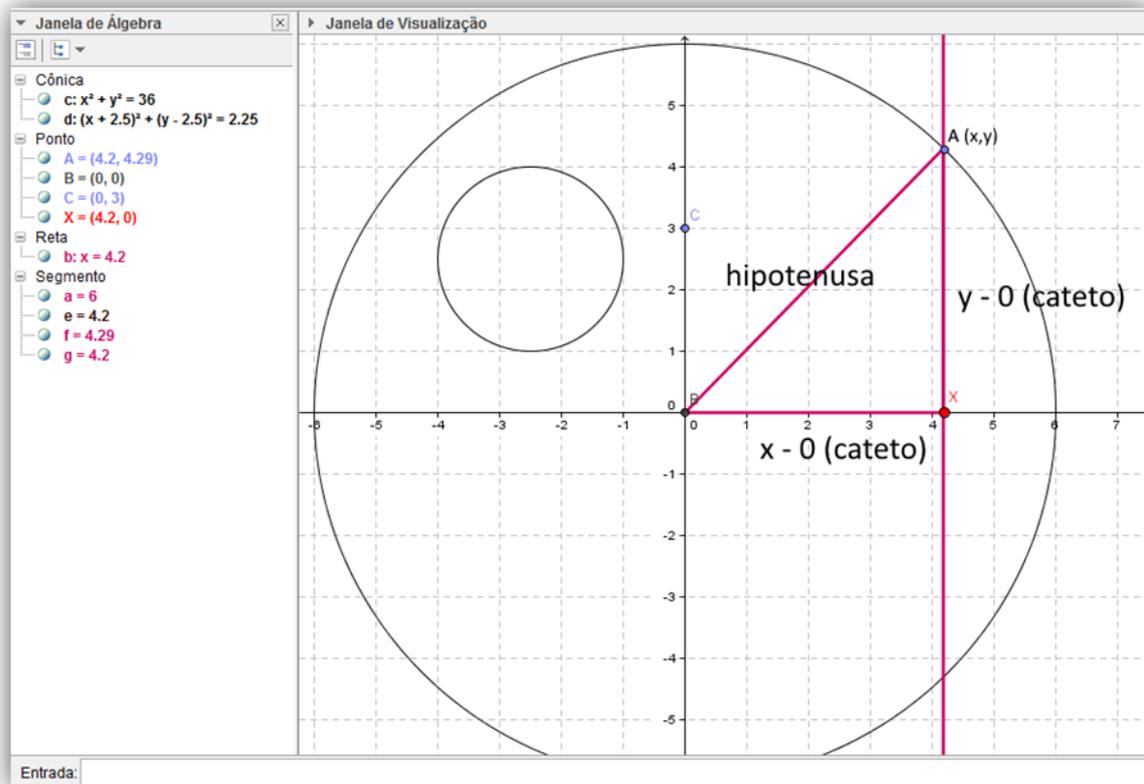
Professora: Esse ponto [apontou para o ponto $A(x, y)$] é um ponto qualquer da circunferência...]

Nobre: o raio é a hipotenusa?

Professora: sim... a hipotenusa desse triângulo retângulo é o raio da circunferência.

Nesse diálogo, identificamos a interação entre os alunos Yasmim, Lorraine e Nobre enquanto identificavam a relação entre a equação da circunferência e o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABX, como demonstra a Figura 25:

Figura 25: Triângulo retângulo pelo qual se obtém a equação da circunferência



Fonte: Dados da Pesquisa

Na interação entre os alunos Yasmim, Lorraine e Nobre, identificamos um momento de cooperação porque, ao participarem da discussão, eles apresentaram proposições com o objetivo de estabelecer coordenações externas, procurando reintegrar o equilíbrio cognitivo na interação. Segundo Scherer (2005), a cooperação é um processo interativo no qual cada sujeito participante tem a intenção de interferir nas proposições do outro, promovendo coordenações internas e externas, na busca de um entendimento comum. Outras proposições a esse respeito também estão presentes no diálogo que segue:

Professora: [...] Por que esse 6^2 ? [referindo-se ao segundo membro da equação $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 6^2$]

Nobre: É porque seis (raio da circunferência) é a hipotenusa (do triângulo retângulo). ... então na equação da circunferência está um cateto ao quadrado mais outro cateto ao quadrado, igual à hipotenusa [ao quadrado], que é igual ao raio, no caso.

Professora: isso... o raio é igual à hipotenusa ...

[...]

Vinícius para Nobre: é porque as informações da equação da circunferência estão no triângulo...

[...]

Professora: $(x - 0)$ é a distância do ponto x ao zero [mostrou a distância] ... é a distância entre esses dois pontos... $(y - 0)$ é a distância do ponto y ao zero... a distância 6 é a distância do zero ao ponto A . Todos esses segmentos são distâncias entre pontos. Com esse triângulo retângulo e o Teorema de Pitágoras, podemos compreender a equação da circunferência, [...]

No recorte, analisamos que Nobre, ao responder o questionamento da professora, levantou outra proposição: “então na equação da circunferência está um cateto ao quadrado mais outro cateto ao quadrado, igual à hipotenusa [ao quadrado], que é igual ao raio, no caso?”. Diante dessa proposição de Nobre, o colega Vinícius levantou outra proposição “é porque as informações da equação da circunferência estão no triângulo“. O intuito de Vinícius é de complementar a proposição de Nobre, isso nos permite identificar um momento de cooperação, pois embora as proposições sejam diferentes, são complementares e favoreceram operações mentais para o estabelecimento de um entendimento comum.

Ao final do diálogo, localizamos um momento importante da discussão, o da institucionalização do saber. Esse não é um momento de repasse de informações, mas de discussão sobre todos os conhecimentos construídos sobre o objeto de estudo. Na sequência do diálogo, a professora propôs a continuação da construção do *smile*, conforme segue:

Professora: Vamos então apagar este triângulo retângulo para fazermos o outro olho? Quem vem fazer o olho direito? Qual vai ser o centro e o raio?

Yasmim para Juliane: Vamos Juliane? Eu falo e você faz...

Alunos: abre parênteses

Professora: mas qual centro vocês escolheram?

Alunos: (2.5, 2.5)

Professora: Por quê?

Alunos: Para ficar centralizado...

Professora: e o raio?

Alunos: 1.5

Professora: então qual vai ser a equação?

Lorraine: x menos...

Luana: Não é “mais”?

Lorraine: não... agora é “menos.” [referindo-se ao fato que o ponto tem coordenada positiva]

Lorraine continua: “menos” 2.5, ao quadrado, mais y “menos” 2.5 ao quadrado, igual a 2.25...

Vinicius para Luana: ô Luana, está fazendo o outro olho?

Luana: é.

[Luana descreve a equação na Lousa Digital. Sente dificuldade em registrar o “elevar ao quadrado”, e pede ajuda da Yasmim, que a ajuda prontamente]

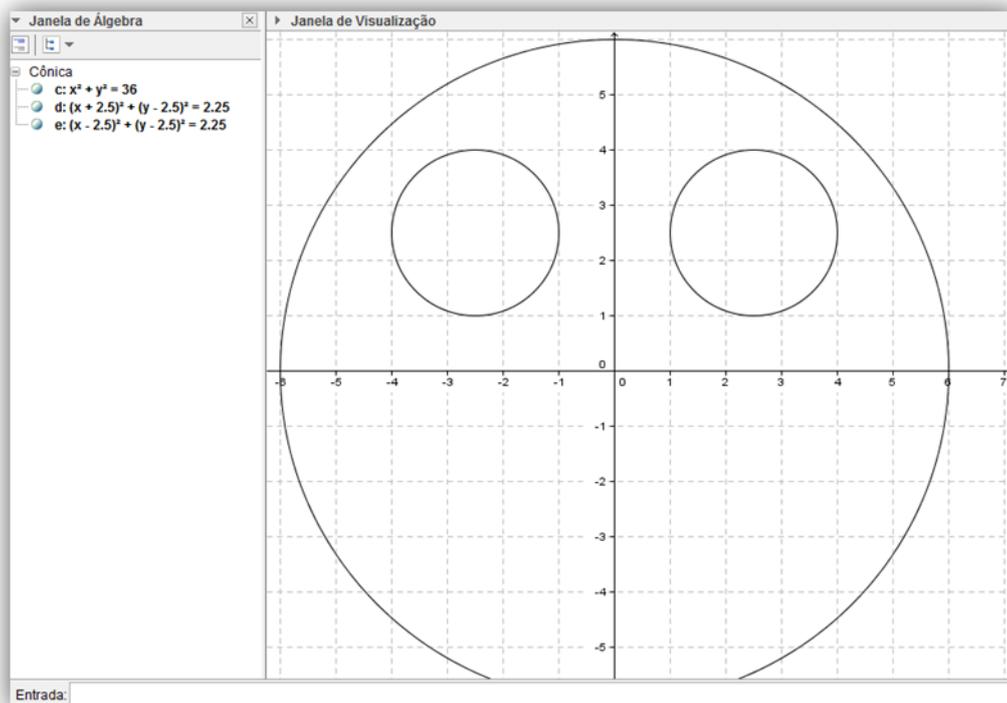
A Luana digita: $(x - 2.5)^2 + (y - 2.5)^2 = 2.25$.

Professora: Por que 2.15?

Vinicius: Por que é um e meio elevado ao quadrado.

Destacamos a participação da turma na descrição da equação da circunferência que representa o olho direito. Embora apenas duas alunas estejam descrevendo na Lousa Digital, é evidente a participação efetiva da turma. Inferimos que essa confiança foi adquirida a partir das discussões durante os erros recorrentes na construção do olho esquerdo. Destacamos a interação entre os alunos Yasmim, Luana, Lorraine e Vinicius. Esse movimento apresenta características de cooperação porque, ao descreverem a nova equação, as ações mentais de alguns alunos sobre essas escolhas agiam sobre as ações mentais dos outros, e procuravam, assim, chegar a um consenso. A seguir, apresentamos a Figura 26 que representa o olho direito.

Figura 26: Construção do olho direito do *smile*



Fonte: Dados da pesquisa

A partir da Figura 26, a professora propôs a continuidade da discussão após verificar que a turma aprovou o *feedback* dado pelo software. O diálogo a seguir relaciona-se à representação da boca:

Professora: vamos construir a boca? Qual centro e raio vocês querem?

Alunos: menos 3...

Nobre: primeiro é zero... zero e menos três... (0, -3)

Professora: qual vai ser o raio?

Alunos: um

Nobre: tem que ser menor que o olho...

Vinícius: dois.

Luana para Vinícius: é a pressão... [referindo-se à sua vontade de dar opinião levando-o a dizer que o quadrado de um é dois...]

Yasmim faz a descrição.

Juliane: vai ficar um monstrengo...

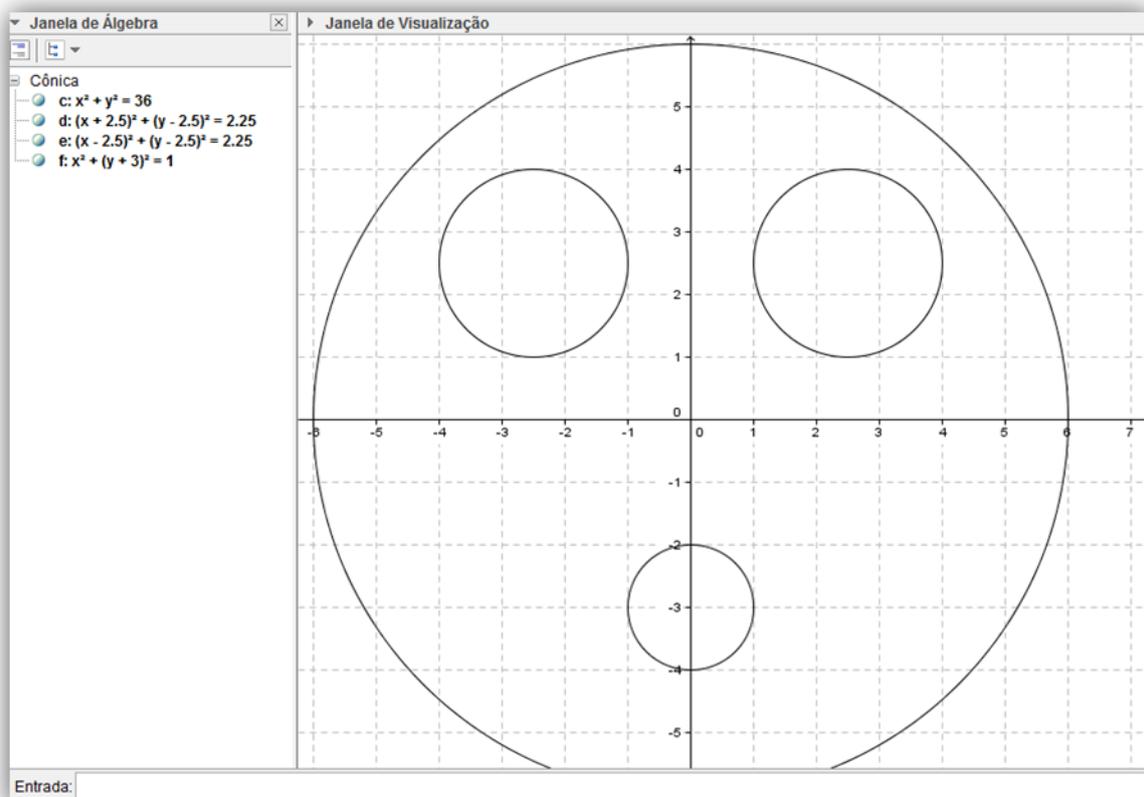
Professora: Por que dois Vinícius?

Vinícius: não.... não...

Yasmim digita: $x^2 + (y+3)^2 = 1$

A partir da descrição elaborada pelo grupo e executada pelo software, aparece a seguinte Figura 27 na tela da Lousa Digital:

Figura 27: Representação da boca no *smile*



Fonte: Dado da Pesquisa

A reação da turma frente à circunferência da boca foi positiva, o que atende à proposição levantada pelo aluno Nobre quanto à medida do raio, pois ele disse “tem

que ser menor que a do olho”, o que fez a turma escolher a medida de uma unidade. O diálogo continuou:

Professora: *Gostaram?*

Alunos: *sim...*

Professora: *Vamos discutir um pouco sobre essa equação? A partir de uma equação eu consigo construir uma circunferência? Que elementos eu preciso para escrever a equação de uma circunferência? [com esse questionamento a professora esperava observar se identificavam os elementos geométricos presentes na equação da circunferência]*

Nobre: *temos que informar as coordenadas do centro e do raio...*

Professora: *As coordenadas do centro (0, -3) aparecem explicitamente: a coordenada zero que é (o valor de) “x” e a coordenada -3 que é (o valor) de y...*

Nobre: *tem que considerar o menos da equação e o outro menos do número...*

Vinícius: *menos com menos mais...*

Professora: *tá... e esse um aqui? [referindo-se ao valor do segundo membro da equação]*

Alunos: *é o raio... ele está elevado ao quadrado...*

Professora: *é... nesse caso aqui, coincidentemente está o mesmo valor, mas foi elevado ao quadrado... mais uma coisa: quando falamos que $y - (-3) = y + 3$, não é um simples jogo de sinal, na verdade, estamos falando da distância de uma coordenada y até a coordenada -3...*

Consideramos que nesse diálogo a professora poderia ter explorado mais com os alunos a nova equação que a turma descreveu, questionando-os sobre as informações que podem ser deduzidas sobre a circunferência a partir de sua equação, bem como sobre o significado do termo “ $y - (-3)$ ” como distância entre dois pontos.

Os dados analisados nos trazem evidências de que o uso da Lousa Digital favorece que os alunos vivenciem o ciclo de ações e a espiral de aprendizagem, pois propiciou aos alunos colocarem “a mão na massa”, manipulando digitalmente o objeto de estudo. Depreendemos, ainda, a importância do papel do professor nesse processo para acionar e manter o ciclo de ações a partir de questionamentos que mobilizem os alunos a pensar, a elaborar proposições, a descrever, a refletir e depurar sobre a execução apresentada pelo software.

Dessa forma, o uso da tecnologia da Lousa Digital articulado com os questionamentos da professora favoreceu o diálogo e o movimento de interação entre os alunos, uma vez que a grande tela da Lousa Digital potencializou a produção coletiva, permitindo-os utilizar a linguagem digital para expor e justificar a sua ação mental, bem como acompanhar a ação mental dos colegas, constituindo, assim, um movimento contínuo de interação.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao definirmos a questão norteadora desta pesquisa nos propusemos a investigar como ocorre a aprendizagem sobre circunferência com o uso da Lousa Digital em sala de aula. Nesse intuito, o objetivo geral foi o de identificar e analisar contribuições do uso da Lousa Digital em um estudo sobre circunferências com uma turma de alunos do 3º ano do Ensino Médio.

Na busca por atingir esse objetivo geral, relacionamos a ele dois objetivos específicos, sendo que o primeiro deles foi analisar ações e produções dos alunos ao usarem a Lousa Digital em um estudo sobre circunferências. A esse objetivo específico, elencamos a primeira categoria de análise “Lousa Digital e o Ciclo de Ações”.

A análise das ações e produções dos alunos a partir do ciclo de ações nos indica que o uso da Lousa Digital para o estudo de circunferências se configurou em uma forma diferente de aprendizagem com o uso de computadores. Apesar das ações de descrições para resolver um problema terem sido registradas por um aluno no Geogebra, usando a Lousa Digital, as mesmas foram elaboradas por mais alunos da turma, durante as discussões que as antecederam nas quais eles puderam expor suas opiniões. Dessa forma, as descrições relacionadas ao ciclo de ações representaram a decisão de um grupo e não apenas de um aluno que estava à frente da turma, com a caneta na mão, manipulando a Lousa Digital.

Nos momentos que se seguiram à execução das descrições pelo software GeoGebra, apresentadas na Lousa Digital, a ação de depuração do grupo acontecia em busca de uma nova descrição que explicitasse a produção que atendessem ao que pretendiam, iniciando-se assim, um novo ciclo de ações. O movimento de interação, a partir das discussões, favoreceu ações de reflexão e depuração, pois durante os diálogos direcionados à representação do *smile*, a turma procurava, por meio dos “erros apresentados na descrição anterior”, refletir sobre eles e os depuravam para propor novas descrições.

A escolha pelo software GeoGebra nesta pesquisa contribuiu para o estudo da circunferência com o uso da Lousa Digital, pois sua característica em apresentar simultaneamente a representação geométrica e a representação algébrica da circunferência, bem como seu potencial para registrar as descrições, oportunizaram

aos alunos refletirem sobre suas estratégias e conhecimentos, depurando-os e (re)construindo-os.

As produções obtidas, registradas nas Figuras 14 e 27, resultaram de uma ação coletiva, pois o aluno que se disponibilizava a manipular a Lousa Digital representava a opinião do grupo e não sua opinião particular. Durante as discussões se evidenciou as dificuldades e estratégias apresentadas pelo grupo em um movimento de interação que, por diversas vezes, se caracterizou como cooperação. Isso porque as coordenações mentais de alguns alunos, expostas em proposições, eram ouvidas, analisadas e confrontadas com as proposições de outros colegas, agindo sobre as ações mentais destes. Nesses momentos de descrição, reflexão e depuração em grupo, destacamos que o ciclo de ações foi vivenciado a partir da vivência individual do ciclo pelo aluno, e em diálogo com colegas, as descrições eram elaboradas ou reelaboradas pelo grupo.

Ainda na busca por atingir o objetivo geral, relacionamos a ele um segundo objetivo específico: analisar o processo de interação entre sujeitos ao realizarem um estudo sobre circunferências com o uso da Lousa Digital. A esse objetivo específico, elencamos a segunda categoria de análise “Interação entre sujeitos”.

A análise dos dados com esse foco nos permitiu considerar que o uso da Lousa Digital pela turma de alunos participantes da pesquisa, durante o desenvolvimento de uma atividade em sala de aula, favoreceu momentos de interação entre a professora e os alunos e entre os alunos.

Ao analisarmos as atitudes dos alunos ao exporem suas proposições na atividade, observamos que algumas interações entre eles apresentaram avanços no sentido de movimentos de cooperação, possibilitando momentos de aprendizagem cooperativa, desestabilizando certezas, propiciando momentos de (re) construção e/ou (re) organização de conhecimentos sobre um objeto matemático. Ainda na análise dessa segunda categoria, identificamos momentos em que os alunos questionavam uns aos outros, na tentativa de compreender a proposição do colega, na busca por uma resposta que fosse aceita por todos.

É importante destacar que a Lousa Digital por si só não favoreceu o movimento de cooperação, tendo o professor um papel essencial na coordenação das ações dos alunos, pois as ações devem partir de questionamentos que instiguem os alunos a exporem as suas proposições e as justificarem. Nesse sentido, a atitude da professora

na experimentação desta pesquisa poderia ter sido mais construcionista, no sentido de questionar mais para oportunizar a reflexão e o movimento de cooperação.

Dessa forma, a interação proporcionada com o uso da Lousa Digital, nesta pesquisa, aponta para uma oportunidade dos alunos argumentarem, comentarem e se posicionarem sobre um tema, constituindo um emaranhado de ideias e reflexões que se entrelaçam, em busca de um entendimento comum, embora tenham emanado de indivíduos com diferentes vivências e pontos de vista.

Outro dado importante que identificamos e analisamos diz respeito a alguns alunos que, embora estivessem presentes nos dois encontros, não se manifestaram verbalmente nem foram manipular a Lousa Digital. Não temos dados para dizer se esses alunos vivenciaram ou não o processo de aprendizagem, mas tiveram a oportunidade de falar e ouvir, acompanhando o processo. Talvez, acostumados ao silêncio nas aulas em que apenas o professor fala, não se encorajaram a falar.

A postura de “estar calado para ouvir o professor explicar” faz com que muitos alunos estranhem uma metodologia que valoriza seus pensamentos, um professor que os questionam e os instigam a apresentar e justificar suas reflexões. Durante o segundo encontro, após um questionamento da professora, um aluno disse ao outro: “essa professora faz muitas perguntas”, isso nos leva a concluir que uma aula pautada em questionamentos causa estranheza, tirando-os da zona de conforto, de “receberem tudo pronto”.

Dessa forma, o uso da Lousa Digital nesta pesquisa contribuiu para que os alunos vivenciassem uma metodologia em que se “pode falar” e ouvir mais colegas, confrontando mais certezas e questionamentos, o que também não seria possível se a tecnologia escolhida fosse os computadores individuais pelos quais se conseguiria falar (e ouvir) com apenas colegas usuários do mesmo computador.

O que observamos é que a Lousa Digital pode contribuir com movimentos de interação entre os alunos e destes com o professor, em uma abordagem construcionista. Entretanto, o papel do professor nesse processo tem muita relevância, pois a interação deve ser favorecida a partir de questionamentos para que os alunos não somente levantem conjecturas, mas as justifiquem e as testem, possibilitando-os a vivenciarem o ciclo de ações e a espiral de aprendizagem, em um processo de interação e cooperação. E, que a partir das coordenações oriundas da interação, o professor sistematize o conhecimento produzido.

Quanto à Proposta de Atividade elaborada e o software Geogebra esses contribuíram para atingirmos o objetivo geral da pesquisa, pois a Proposta de Atividades, em seus dois momentos, explorou o potencial do software Geogebra em favorecer que os alunos observassem relações entre as representações geométricas e as algébricas. Dessa forma, reconhecemos que uma Proposta de Atividades que privilegia uma abordagem construcionista favorece que o aluno observe regularidades, proponha conjecturas, levante hipóteses e as teste.

Um dado complementar à pesquisa obtivemos quando, ao final do ano letivo, em um encontro casual com o professor regente da turma, este nos informou que, ao trabalhar a temática da circunferência no quarto bimestre, conforme seu planejamento inicial, alguns alunos fizeram referência ao estudo desenvolvido em nossa experimentação, apontando-lhe relações com a representação geométrica da equação que o professor escreveu no quadro. Apesar dos poucos dados sobre esse momento, vemos indícios da mobilização dos conhecimentos construídos sobre circunferência, mesmo em um contexto temporal bem posterior à experimentação, evidenciando, assim, significado ao conhecimento construído.

A partir dos dados obtidos nesta pesquisa, reconhecemos a necessidade de novas pesquisas em se investigue questões como: Como outros softwares podem ser utilizados para a construção de conhecimentos sobre circunferência a partir do uso da Lousa Digital? O movimento de interação com o uso da Lousa Digital oportunizado nesta experimentação se repetiria com outras turmas em uma proposta construcionista? Essas são apenas algumas questões que evidenciam o quanto ainda temos a investigar sobre a problemática investigada nesta pesquisa.

REFERÊNCIAS

BALDINO, Roberto Ribeiro. Balanço da assimilação solidária no 3º grau. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, II., 1993, Natal. **Anais...** Natal: UFRN, 1993, p. 132-136.

BECKER, Fernando. Educação e construção do conhecimento: o processo de abstração reflexionante. **Educação e Realidade**, Porto Alegre, v. 18, n. 1, p. 43-52, 1993.

BITTAR, Marilena; GUIMARÃES, Sheila Denize; VASCONCELLOS, Mônica. A Integração da Tecnologia na Prática do Professor que Ensina Matemática na Educação Básica: uma proposta de pesquisa-ação. **REVEMAT – Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Santa Catarina, v. 3.8, p. 84-94, 2008.

BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari. **Investigação qualitativa em educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 1994.

BORDALLO, Mirella. **As cônicas na matemática escolar brasileira**: história, presente e futuro. 2011. 70f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2011. Disponível em: <teses2.ufrj.br/11/dissert/770194.pdf>. Acesso em: 04 jun. 2013.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais**: ensino médio. Brasília: MEC/SEF, 1999. 360 p.

_____. **Orientações Curriculares para o ensino médio**. Secretaria de Educação. Brasília: MEC/SEF, 2006. 260p.

_____. Ministério da Educação. **Guia de livros didáticos PNLD 2012**: Matemática. Ensino Médio. Brasília: MEC, 2012.

BROSSEAU, Guy. **Introdução ao estudo das situações didáticas**: conteúdos e métodos de ensino. São Pedro: Ática, 2008.

CARVALHO, Flávio de Pedro Soares. **Ensino e aprendizagem de conteúdos de Geometria espacial em um ambiente dinâmico e interativo**. 2011. 142f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciência e em Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás – UFG. Goiânia, 2011. Disponível em: <http://mestrado.prppg.ufg.br/uploads/97/original_Flavio_Disserta%C3%A7%C3%A3oDefinitiva.pdf?1332189043>. Acesso em: 20 nov. 2013.

CARVALHO, Sérgio Freitas de. **Formação continuada em serviço e o uso da Lousa Digital em aulas de matemática**: ações e reflexões de um grupo de professores. 2014. 150 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Matemática, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS. Campo Grande, 2014.

CARVALHO, Sérgio Freitas de; SCHERER, Suely. **Tecnologias digitais e aulas de matemática**: um estudo sobre o uso da Lousa Digital. 2012. Disponível em: <http://www.uems.br/eventos/semana2012/arquivos/49_2012-09-28_15-43-26.pdf> Acesso em: 20 Ago. 2013.

GRAVINA, Maria Alice. Geometria dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado da Geometria. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO, VII., 1996, Belo Horizonte. **Anais...** Belo Horizonte, Brasil, 1996, p. 1-13.

BALDINO, Roberto Ribeiro. Balanço da assimilação solidária no 3º grau. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, II., 1993, Natal. **Anais...** Natal: UFRN, 1993, p. 132-136.

INHELDER, Bärbel; BOVET, Magali; SINCLAIR; Hermine. **Aprendizagem e estruturas do conhecimento**. São Pedro: Saraiva. 1977. 282 p.

KENSKI, Vani Moreira. **Educação e tecnologias**: o novo ritmo da informação. Campinas, São Pedro: Papirus, 2008.

MACENA, Marta Maria Maurício. **Contribuições da investigação em sala de aula para uma aprendizagem das secções cônicas com significado**. 2007. 160 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Norte . Natal, 2007. Disponível em: http://bdtd.bczm.ufrn.br/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=1370 Acesso em: 15 jul. 2013.

MANTOAN, MariaTeresa Eglér. **O Processo de conhecimento**: tipos de abstração e tomada de consciência. NIED-MEMO 27. Campinas: NIED-UNICAMP, 1994.

MATO GROSSO DO SUL. **Referencial Curricular da Educação Básica da Rede Estadual de Ensino/MS**: Ensino Médio. Secretaria de Estado de Mato Grosso do Sul, 2012. 263 p.

MORAN, José Manuel. **A integração das tecnologias na educação**. 2006. Disponível em:<<http://www.eca.usp.br/prof/moran/integração.htm>>. Acesso em 26 jun. 2013.

NAKASHIMA, Rosária Helena. A linguagem audiovisual da Lousa Digital Interativa no contexto educacional. **Educação Temática Digital**, Campinas, v. 8, n. 1, p.33-48, dez. 2006.

PAPERT, Seymour. **A máquina das crianças**: Repensando a escola na era da informática. Porto Alegre: Artmed, 2008.

PIAGET, Jean. **Abstração Reflexionante**: relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais. Porto Alegre: ArtMed, 1995.

_____. **Fazer e Compreender**. Tradução Christina Larroudé de Paula Leite. São Pedro: Melhoramentos, 1978. 186p.

_____. **A tomada de consciência**. Tradução Edson Braga de Souza. São

Pedro: Melhoramentos, 1977. 211p.

PAULA, Adnilson Ferreira de. **Mobilização e articulação de conceitos de Geometria Plana e de Álgebra em estudos de Geometria**. 2011. 175 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Matemática, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul . Campo Grande, 2011.

PONTE, João Pedro da; BROCARD, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações Matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2009. (Coleção Tendências em Educação Matemática)

RIBEIRO, Jackson. **Matemática: ciência, linguagem e tecnologia**, 3: Ensino Médio. São Paulo: Scipione, 2010.

SCHERER, Suely. **Uma Estética Possível para a Educação Bimodal: aprendizagem e comunicação em ambientes presenciais e virtuais**. 2005. 240 f. Tese (Doutorado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2005.

SILVA, Marcelo Balduino. **Secções Cônicas: atividades com Geometria Dinâmica com base no Currículo do Estado de São Pedro**. 2011. 155p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP. São Paulo, 2011.

Disponível em: <www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertação/marcelo_balduino.pdf>. Acesso em: 02 mai. 2013.

TEUKOLSKY, Roselyn. Secções cônicas: um tópico interessante e enriquecedor. In: LINDQUIST, Mary Montgomery; SHULTE, Albert P. (Orgs.). **Aprendendo e Ensinando Geometria**. São Pedro: Atual, 1994. p. 191-213.

VALENTE, José Armando. **Informática na Educação: instrucionismo x construcionismo**. 1997. Disponível em: <<http://www.divertire.com.br/artigos/valente2.htm>>. Acesso em 06 abr. 2012.

_____. José Armando. **A Espiral da Espiral de Aprendizagem: o processo de compreensão do papel das tecnologias de informação e comunicação na educação**. 2005. Tese (Livre Docência) – Instituto de Artes, Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 2005.

_____. José Armando. Logo: mais do que uma linguagem de programação. In: VALENTE, José Armando. (Org). **Liberando a mente: computadores na educação especial**. Campinas: UNICAMP, 1991. p. 32-43.

_____. José Armando. **O computador na sociedade do conhecimento**. Campinas: UNICAMP/NIED, 1999.

VASCONCELLOS, Celso dos Santos. **Avaliação da aprendizagem: práticas de mudanças – por uma práxis transformadora**. 8. ed. São Pedro: Libertad, 2006.