UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

RENAN GUSTAVO ARAÚJO DE LIMA

PROBLEMAS DE COMBINATÓRIA: UM ESTUDO DE CONHECIMENTOS MOBILIZADOS POR LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA

CAMPO GRANDE – MS
2015

RENAN GUSTAVO ARAÚJO DE LIMA

PROBLEMAS DE COMBINATÓRIA: UM ESTUDO DE CONHECIMENTOS MOBILIZADOS POR LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, como requisito parcial para a obtenção título de Mestre em Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Luiz Magalhães de Freitas.

CAMPO GRANDE – MS

2015

RENAN GUSTAVO ARAÚJO DE LIMA

PROBLEMAS DE COMBINATÓRIA: UM ESTUDO DE CONHECIMENTOS MOBILIZADOS POR LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, como requisito parcial para a obtenção título de Mestre em Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Luiz Magalhães de Freitas.

Campo Grande – MS, 20 de fevereiro de 2015.

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dr. José Luiz Magalhães de Freitas
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS

____

Profa. Dra. Rute Elizabete de Souza Rosa Borba
Universidade Federal do Pernambuco – UFPE

____

Profa. Dra. Marilena Bittar
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS

DEDICATÓRIA

Aos meus pais Antonio e Veranei;

meu irmão Fernando e minha avó Vanilda,

pelo apoio irrestrito. E à minha linda Jhenifer

pelo amor e companheirismo ao longo dessa trajetória.

AGRADECIMENTOS

À Deus, por não deixar faltar saúde e forças ao longo dessa caminhada, que está ainda em construção.

Aos meus pais Antonio e Veranei, meu irmão Fernando e minha avó Vanilda, que nunca mediram esforços e me oportunizaram percorrer essa trajetória acadêmica. Essa conquista também é de vocês.

À minha lindinha Jhenifer, pelo amor irrestrito, paciência, apoio e carinho em todos os momentos. Obrigado por estar ao meu lado, tanto nos momentos bons, quantos nos difíceis.

Ao professor José Luiz, que aceitou me guiar ao longo dessa trajetória. Por ser um exemplo para mim, tanto nos aspectos profissionais, quanto pessoais.

À professora Marilena, que foi uma das principais responsáveis de eu estar trilhando esse caminho. Obrigado pelos momentos de conversas e “co-orientação”.

À professora Rute, pela leitura minuciosa e contribuições para o crescimento dessa pesquisa.

À Tatiani pela paciência e ajuda em todos os momentos que necessitei, mesmo estando ocupada, nunca me negou ajuda.

À Vanessa, pelo tempo disponibilizado na ajuda e participação no curso de extensão.

Aos meliantes da turma: Maxlei, Mauro, Rogério, Darlysson, Júlio e Leonardo, pelos momentos de risada e inúmeros “elogios” trocados. Posso falar uma coisa para vocês?

À todos os integrantes da Turma de 2013 do mestrado, apesar do “pré-conceito” inicial que tive em relação a vocês, foi um prazer imensurável tê-los ao longo desses dois anos.

À CAPES, pelo apoio financeiro para o desenvolvimento da pesquisa.

RESUMO

A presente pesquisa tem como objetivo geral investigar aspectos da construção do conceito de combinatória de alunos de licenciatura em Matemática, quando resolvem problemas do tema. Para isso, utilizamos como aporte teórico a Teoria dos Campos Conceituais desenvolvida por Vergnaud, que fornece um quadro teórico acerca do desenvolvimento cognitivo do sujeito diante de situações de aprendizagem, e a Teoria das Situações Didáticas proposta por Brousseau, em especial a ideia de situações *adidáticas*. Além disso, pautamo-nos em pesquisas que abordam metodologias de ensino de combinatória e dificuldades que os alunos apresentam quando trabalham com o tema. Para a elaboração, desenvolvimento e análise da sequência didática, utilizamos como embasamento metodológico a Engenharia Didática, percorrendo as quatro fases que a compõem. Propusemos um curso de extensão para alunos ingressantes de um curso de Licenciatura em Matemática de uma Universidade Federal do Estado de Mato Grosso do Sul, estruturado em oito sessões, compostas por diferentes tipos de situações-problema de combinatória, como apresentam Pessoa e Borba. No desenvolvimento das sessões os alunos foram organizados em grupos, pois acreditamos que tal organização poderia propiciar discussões sobre os problemas. Os dados analisados nesta pesquisa são oriundos dos protocolos dos alunos e das gravações de áudio e vídeo produzidos durante as sessões. Em nossas análises evidenciamos que, de modo geral, os alunos explicitam ter dificuldades sobre o tema de combinatória, em especial na classificação das diferentes situações, e consequentemente, acabam utilizando fórmulas combinatórias inadequadas durante a resolução dos problemas. Em relação aos conhecimentos, destacamos a importância da listagem de possibilidades nas resoluções dos alunos, pois além de ser uma estratégia que mobilizam para resolver o problema, também a utilizam como um meio de validação para outras estratégias, como na conjectura de outras estratégias e na utilização de fórmulas combinatórias. Além disso, evidenciamos que os licenciandos mobilizam com frequência o Princípio Fundamental da Contagem nos problemas de arranjo, permutação e produto cartesiano, enquanto nos problemas de combinação optam por outras estratégias, como a listagem de possibilidades e a utilização de fórmulas. Por fim, no decorrer da sequência didática, percebemos que alguns alunos apresentaram indícios de incorporação de novas estratégias, como a utilização do Princípio Fundamental da Contagem e conjectura de fórmulas.

Palavras-Chave: Combinatória. Teoremas em ação. Sequência didática. Estratégias. Dificuldades.

ABSTRACT

This research has as general objective to investigate aspects of the construction of the concept of combinatorial by students that are graduating in Mathematics, when they solve combinatorial problems. For this, we used as the theoretical base the Conceptual Fields Theory developed by Vergnaud, which provides a theoretical framework on the cognitive development of the bloke facing learning situations, and the Theory of Didactic Situations proposed by Brousseau, especially the idea of non-didactical situations. Besides, we were also guided by researches that address combinatorial teaching methodologies and difficulties students have when they work with the theme. For the elaboration, development and analysis of didactic sequence, we used as a methodological basis the Didactic Engineering, coursing the four stages that comprise it. We proposed a extension course to new students of Mathematics Graduation of a Federal University of the State of Mato Grosso do Sul, organized into eight sessions, composed of different types of combinatorial problem-situations, as presented by Pessoa and Borba. In the development of the sessions the students were organized into groups, because we believe such organization could provide discussions on the problems. The data analyzed in this study come from the protocol of the students and audio and video recordings produced during the sessions. In our analysis, we showed that, in general, students show to have difficulties about the combinatorial theme, especially in the classification of different situations, and consequently, end up using inadequate combinatorial formulas during problems solution. About the knowledge, we highlight the importance of the list of possibilities in the students' resolutions, because, besides being a strategy that they mobilize to solve the problem, also they use it as a mean of validation for other strategies, as the conjecture of other strategies and use of combinatorial formulas. Furthermore, we observed that students mobilize frequently Fundamental Principle of Counting in the arrangement problems, permutation and cartesian product, while in the combination problems students choose other strategies, as the list of possibilities and use of formulas. Finally, during the didactic sequence, we realized that some students showed signs of incorporation of new strategies, such as using the Fundamental Principle of Counting and conjecture of formulas.

Keywords: Combinatorial. Theorems in action. Didactic sequence. Strategies. Difficulties.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Ao iniciar o curso de Matemática-Licenciatura na Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS) tive[1] um primeiro contato com o conteúdo de combinatória no curso, na disciplina Matemática Aplicada 1, ofertada no primeiro semestre. Durante o desenvolvimento do tema na disciplina, me chamou atenção a maneira que o mesmo como foi trabalhado, por meio de situações-problema, com momentos de discussões em grupos e os alunos livres para resolvê-los da maneira desejada, pois se tratou de uma metodologia diferente da trabalhada durante o ensino médio.

No segundo semestre, estudei novamente o conteúdo de combinatória na disciplina Introdução à Probabilidade e Estatística. Porém, diferentemente da disciplina anterior, a combinatória foi vista apenas como uma ferramenta para o cálculo de probabilidades, na contagem dos casos desejados e totais, sem a discussão dos tipos de problemas e suas possibilidades. Além disso, para o cálculo dessas possibilidades, trabalhamos predominantemente com fórmulas, cabendo a nós, alunos, apenas a identificação dos problemas e da fórmula a ser utilizada para a resolução dos mesmos.

Apesar de estar inserido em um curso de Licenciatura, iniciei o terceiro semestre do curso com o objetivo de seguir a carreira acadêmica na área da Matemática Aplicada, aprofundando os estudos em conteúdos como combinatória e probabilidade. Porém, ao ingressar no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID)[2], no ano do 2011, pude ter contato com outras áreas que não tinha conhecimento, em especial a Educação Matemática.

As atividades desenvolvidas no PIBID, dentre elas a elaboração e desenvolvimento de sequências didáticas, me chamaram a atenção e agradaram. Além dessas, também haviam os momentos nos quais os alunos da escola conveniada com o Programa podiam tirar dúvidas com os integrantes do PIBID, sendo que nesses momentos de auxílio tive a oportunidade de estar em contato com alunos do ensino médio e perceber que a maneira como tal conteúdo era abordado, privilegiando o uso de fórmulas, gerava nos mesmos dificuldade na compreensão dos conceitos e na resolução dos problemas relativos ao tema.

---

[1] Escrevo, nesse momento, em primeira pessoa, por se tratar de experiências pessoais vivenciadas pelo pesquisador.

[2] Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência é um programa financiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES). Um dos objetivos do programa é a integração dos alunos do curso de Licenciatura no ambiente escolar, contribuindo para a formação inicial.

Assim, por estar cada vez mais inserido no PIBID durante a graduação, realizando novas atividades, participando de eventos da área da Educação Matemática, e também, com a angústia sobre a maneira que o conteúdo de combinatória era trabalhado no ensino básico, decidi realizar no Trabalho de Conclusão de Curso algo que envolvesse tais tópicos. Nesse momento procurei o Prof. Dr. José Luiz Magalhães de Freitas, para desenvolvermos[3] uma sequência didática que envolvesse o conteúdo de combinatória para ser trabalhada com alunos do ensino médio.

Realizamos a pesquisa intitulada *“Um estudo de problemas de Combinatória na Educação Básica por meio do Princípio Fundamental da Contagem”,* que teve como objetivo investigar uma possibilidade de abordagem de conteúdos de combinatória na educação básica por meio da exploração de situações-problema e do Princípio Fundamental da Contagem. A pesquisa foi desenvolvida em uma escola da rede pública da cidade de Campo Grande – MS, com alguns alunos do 1º ano do ensino médio e teve a duração de quatros sessões de uma hora cada. Tomamos essa escolha pois os mesmos não haviam estudado tal conteúdo em sala de aula, e assim, poderíamos analisar as estratégias utilizadas por eles para resolver os problemas propostos. Constatamos que os alunos foram capazes de resolver os problemas que envolviam combinatória, utilizando apenas as operações básicas e o Princípio Fundamental da Contagem, mesmo não tendo estudado combinatória em sala de aula, além de apresentarem alguns elementos de incorporação de novas estratégias nas resoluções dos problemas.

Ao ser aprovado no processo de seleção do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, na linha de pesquisa da ensino e aprendizagem, decidimos, meu orientador e eu, dar continuidade com a pesquisa sobre o conteúdo de combinatória, porém, tínhamos dúvidas se a mesma seria realizada com alunos do ensino básico ou superior, e acabamos optando pelo segundo. Realizamos essa escolha pois, no processo de aprendizagem dos alunos, o professor possui um importante papel na preparação e condução das aulas. A pesquisa de Teixeira (2012) teve como objetivo investigar os conhecimentos de professores de Matemática para explorar noções relativas aos problemas de contagem ao longo do ensino fundamental, apresentando como um resultado importante a ser destacado a postura do professor no momento da correção de um problema de combinatória, tendo em vista que

> Ainda são bastante fortes, determinantes e arraigadas as concepções e crenças dos professores de que a solução de um problema de contagem passa, necessariamente, pela aplicação de uma fórmula para legitimar o resultado obtido, mesmo quando do uso de uma representação. (TEIXEIRA, 2012, p. 396).

---

[3] A partir desse ponto utilizamos os verbos no plural por se tratar de um trabalho conjunto do pesquisador e do orientador.

Nessa perspectiva, o professor pode incentivar o aluno a resolver problemas de combinatória somente com a utilização de fórmulas, além de acreditarem que qualquer outra estratégia elaborada não possui rigor e validade para ser considerada correta.

Sabo (2010) buscou investigar os saberes docentes de professores de Matemática do ensino médio acerca da combinatória, utilizando como instrumento entrevistas semiestruturadas. A pesquisa teve como sujeitos seis professores de Matemática, que possuíam características distintas de alguns aspectos, como: tempo de magistério, idade, nível ao qual lecionavam, formação acadêmica, rede em que lecionavam (pública ou privada) e número de aulas semanais. O pesquisador constatou que alguns professores reproduzem práticas que vivenciaram em suas experiências escolares, ressaltando a importância e influência dos conhecimentos e práticas de professores para os alunos. Além disso, os sujeitos da pesquisa apresentaram dificuldades em relação aos problemas que era necessário analisar a ordem dos elementos na formação dos subconjuntos. O pesquisador também constatou uma distinção na utilização das fórmulas combinatórias, pois alguns professores valorizavam seu uso, enquanto outros optavam pelo Princípio Fundamental da Contagem.

A pesquisa de Rocha (2011) teve como objetivo analisar os conhecimentos que professores do ensino fundamental e médio têm sobre a combinatória e seu ensino. A pesquisa foi desenvolvida com seis professores da educação básica, sendo dois dos anos iniciais do ensino fundamental, com formação inicial em Pedagogia, dois dos anos finais e dois do ensino médio, que eram formados em Matemática-Licenciatura. Para o desenvolvimento da mesma, utilizou-se de entrevistas semiestruturadas com os professores, além dos problemas propostos na pesquisa de Pessoa e Borba (2009, *apud* ROCHA, 2011) e os protocolos das resoluções dos alunos oriundos da pesquisa de Pessoa (2009). Ao analisar os dados produzidos, a pesquisadora constatou que, de modo geral, os professores apresentavam dificuldades na diferenciação dos problemas de arranjo e combinação, na leitura dos enunciados desses problemas e nas correções das produções dos alunos que lhes foram apresentados. Além disso, os professores destacaram a necessidade de pré-requisitos para o ensino da combinatória, nos três níveis, sendo que os professores dos anos iniciais do ensino fundamental indicaram a utilização de recursos como música e rimas; os dos anos finais do ensino fundamental indicaram a necessidade da multiplicação; e, os professores do ensino médio destacaram a possibilidade de que só seria possível trabalhar com problemas de produto cartesiano nos anos anteriores, devido à dificuldade dos demais problemas.

Em relação às estratégias priorizadas pelas professoras, Rocha (2011) verificou que os mesmos decidiam suas escolhas a partir das concepções que têm dos problemas, levando em consideração o nível de dificuldade e as expectativas que têm dos alunos. Assim, para um problema de produto cartesiano, por exemplo, os professores dos anos iniciais adotaram as estratégias da listagem, tabelas e diagrama de árvores; os dos anos finais priorizaram a tabela de dupla entrada e o diagrama de árvores; e os professores do ensino médio recorreram ao Princípio Fundamental da Contagem.

Frente aos resultados encontrados ao longo da investigação, Rocha (2011) destaca a pouca quantidade de ações voltadas à formação dos professores, inicial e continuada, sobre a combinatória, pois as pesquisas com essa temática têm se concentrado em investigações com alunos do Ensino Básico, que também é preciso desenvolver. Desse modo, faz-se necessário realizar pesquisas que tenham como foco professores em atividade ou futuros professores, e consequentemente, contribuir para a prática pedagógica dos mesmos no ensino de combinatória.

Diante do exposto, o presente trabalho discorre sobre o desenvolvimento da pesquisa que tem como objeto o conteúdo de combinatória. Buscamos ao longo da mesma, ***investigar aspectos da construção do conceito de combinatória de alunos de licenciatura em Matemática, quando resolvem problemas do tema.***

Para o desenvolvimento da investigação, utilizamos como aporte teórico a Teoria das Situações Didáticas (BROUSSEAU, 1996, 2008) e a Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1996, 2009b), além da Engenharia Didática (ARTIGUE, 1996) como referencial metodológico, para a elaboração, desenvolvimento e análise de uma sequência didática composta por situações-problema de combinatória. A mesma foi desenvolvida com os licenciandos ingressantes no curso de Matemática de uma Universidade Pública no Estado de Mato Grosso do Sul e foi composta de 8 sessões.

Organizamos a dissertação em seis capítulos, sobre os quais discorremos brevemente nesse momento:

No Capítulo 1 apresentamos, de maneira breve, alguns aspectos iniciais da pesquisa como as orientações sobre o ensino de combinatória apresentadas nos documentos oficiais e dificuldades e estratégias de alunos ao estudarem o tema, que serão retomadas no capítulo 3. Além disso, expusemos a questão norteadora, o objetivo geral, e os objetivos específicos que nos guiaram ao longo da mesma.

No Capítulo 2 discorremos sobre a Teoria dos Campos Conceituais, proposta por Vergnaud, e a Teoria das Situações Didáticas, modelada por Brousseau, que compõem nosso referencial teórico. Além disso, esse capítulo contém a Engenharia Didática, sistematizada por Artigue, que utilizamos como referencial metodológico da pesquisa.

O Capítulo 3 é composto por um quadro teórico-didático sobre o conteúdo de combinatória. Esse capítulo contém tópicos que nos guiaram ao longo da pesquisa, sendo eles: um estudo do desenvolvimento histórico do tema; a combinatória como um objeto matemático; uma análise sobre alguns tópicos do ensino de combinatória em três livros didáticos aprovados no Guia do PNLD de 2012; pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem de combinatória, em especial com alunos do ensino superior; e, uma síntese dos resultados encontrados ao longo do capítulo, com possíveis teoremas em ação que os alunos podem mobilizar durante a experimentação.

No Capítulo 4 apresentamos nossas escolhas metodológicas para a realização da investigação, como os sujeitos da pesquisa e a elaboração do curso de extensão. Além disso, nesse capítulo, trouxemos a sequência didática que elaboramos, com as situações-problema e as variáveis didáticas que utilizamos ao longo da mesma.

O Capítulo 5 é composto pelas análises a *priori*, experimentação e análise *a posteriori* das sessões desenvolvidas com os alunos. Desse modo, organizamos o capítulo por sessões, sendo que cada uma delas contém as três fases: as análises a *priori*, experimentação e análise *a posteriori*, além das considerações dos encontros.

Por fim, no capítulo 6 apresentamos as considerações finais sobre a pesquisa. Além disso, apresentamos contribuições da pesquisa para os participantes, e, em especial, para a formação profissional do pesquisador.

1 ASPECTOS INICIAIS DA PESQUISA

Nesse capítulo, apresentamos elementos do ensino da combinatória analisando as orientações propostas pelos documentos oficiais, como os Parâmetros Curriculares Nacionais (1997, 1998), Orientações Curriculares Nacionais do Ensino Médio (2006), Guia do Livro Didático do Programa Nacional do Livro Didático de 2012 (2011), entre outros. Também discorremos sobre aspectos iniciais, acerca da aprendizagem e dificuldades que alunos vivenciam ao estudar o tema, os quais retomamos no capítulo 3. Além disso, apresentamos a questão de pesquisa, o objetivo geral e os objetivos específicos, justificando as escolhas dos mesmos.

1.1 O ensino de combinatória proposto nos documentos oficiais

De acordo com os documentos oficiais do Brasil, a combinatória deve ser trabalhada desde os primeiros anos da educação básica, de modo intuitivo, com situações-problema envolvendo o conteúdo, sem a necessidade da formalização dos conceitos ou fórmulas. No texto dos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 1997), no momento da apresentação do conteúdo de multiplicação, presente nos primeiros ciclos do ensino fundamental, deve-se trabalhar com todos os seus significados, sendo um deles o raciocínio combinatório. Um exemplo de problema, desse tipo, que poderia ser desenvolvido com os alunos seria: "Maria deseja ir a uma festa e decidiu ir vestida com uma saia e uma blusa. No momento de escolher a roupa, ela notou que possui três saias e duas blusas diferentes. De quantas maneiras diferentes Maria pode se arrumar para a festa?". Acreditamos que o professor poderia inserir problemas como esse para os alunos do primeiro ciclo da educação básica, pois envolve apenas conceitos conhecidos por eles.

O trabalho de combinatória com os alunos fornece elementos para o desenvolvimento de competências necessárias, não somente para o ambiente escolar, mas para o convívio social do cidadão. Tal fato é anunciado nos PCN (BRASIL, 1998) quando se atribui a necessidade de desenvolver tais conteúdos na educação básica, para que o aluno consiga tratar as informações do cotidiano como dados estatísticos e ideias relativas à probabilidade e à combinatória.

Além dessas necessidades relatadas, problemas que envolvem a combinatória possibilitam que os alunos desenvolvam competências relacionadas à organização, criatividade, autonomia no processo de resolução, além do raciocínio combinatório. Esse tipo de problema leva os alunos a mobilizarem diversas estratégias, como: a contagem dos casos, a representação de diagramas de árvores, a tabela de dupla entrada e a utilização do Princípio Multiplicativo (SOUZA, A., 2010).

No ensino médio, o conteúdo de combinatória vem sendo ministrado com os alunos de maneira formal, sendo proposto o trabalho com os conceitos de combinação, arranjo e permutação. Nas Orientações Curriculares Nacionais do Ensino Médio - OCNEM (BRASIL, 2006) tem-se que

> [...] o ensino da Combinatória possui importância para outras competências, conforme relatado anteriormente, e não somente para o ensino de probabilidade realizado posteriormente. Além disso, no momento de desenvolver tal conteúdo, não se deve ficar preso à utilização de regras e fórmulas definidas. [...] A combinatória não tem apenas a função de auxiliar o cálculo das probabilidades, mas tem inter-relação estreita entre as ideias de experimento composto a partir de um espaço amostral discreto e as operações combinatórias. (BRASIL, 2006, p. 79).

Nessa perspectiva, o ensino da combinatória possui importância para outras competências, conforme relatado anteriormente, e não somente como ferramenta para o ensino de probabilidade. Além disso, conforme abordam as OCNEM (2006), no momento de se trabalhar o tema em sala de aula, o professor não precisa ficar preso somente aos problemas de contagem. Poderia ser discutido problema como o das Pontes de Könisberg, tratado por Euler, ou problemas de rotas e trajetos mais eficientes e curtos. Com problemas desse tipo, os alunos podem desenvolver habilidades de modelar problemas, explorá-los, identificar se existe ou não uma solução, entre outras.

Outro aspecto importante de ser ressaltado é que enquanto está desenvolvendo o conteúdo em sala de aula, o professor não deve ficar preso à utilização de regras e fórmulas definidas, tendo em vista que as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN + (BRASIL, 2007) destacam que as fórmulas devem ser consequências do raciocínio combinatório no momento do trabalho de problemas que envolvem contagem. A sua utilização é apenas para agilizar o processo quando os dados envolvidos nos problemas são grandes. Além disso, os PCN + (BRASIL, 2007) salientam competências que os alunos precisam desenvolver quando for trabalhado o tema, como a organização de maneira adequada de números e informações para simplificar cálculos, identificação de regularidades para estabelecer regras e propriedades, e identificação de dados e relações envolvidas nas situações-problema utilizando os processos de contagem.

Acreditamos que o ensino de combinatória, baseado na utilização de fórmulas de maneira direta, sem a construção do raciocínio combinatório pode gerar, nos alunos, dificuldades no momento de atribuir significados às soluções obtidas a partir da aplicação das mesmas.

De acordo com o Guia de Livros Didáticos PNLD 2012 (BRASIL, 2011), todas as obras aprovadas apresentaram o Princípio Fundamental da Contagem, o que já demonstra algum avanço em relação aos livros didáticos de anos anteriores. Porém, apesar de terem apresentado o Princípio Fundamental da Contagem, ele não é explorado de maneira adequada no decorrer do capítulo. Além disso, os livros didáticos apresentam uma organização em módulos sobre combinação, permutação e arranjo, privilegiando a utilização das fórmulas para a resolução das situações-problema que são propostas.

Porém, apesar de exposto nos documentos oficiais que o ensino da combinatória deve ocorrer desde os anos iniciais da escolarização e suas contribuições para a formação acadêmica e social dos alunos, vemos em pesquisas que têm a combinatória como objeto de investigação (ESTEVES, 2001; MIGUEL; MAGINA, 2003; PESSOA, 2009; SANTOS-WAGNER; BORTOLOTI; FERREIRA, 2013), que os alunos apresentam dificuldades ao estudarem esse conteúdo em sala de aula.

Santos-Wagner, Bortoloti e Ferreira (2013) destacam que alunos ao resolverem problemas de combinatória tentam utilizar fórmulas combinatórias em busca da solução, porém não se preocupam com características conceituais dos problemas. Esse fato pode levá-los a utilizar fórmulas que não são correspondentes aos problemas, ocasionando resoluções errôneas. Desse modo, refletimos que mesmo que os alunos conheçam todas as fórmulas combinatórias, não significa que eles consigam resolver as situações-problema sobre o tema. Para isso, é necessário que se interprete o problema, evidencie as características do mesmo (relevância da ordem, possibilidade de repetição dos elementos, entre outros), e caso queira utilizar as fórmulas, utilize a adequada.

Roa, Batanero, Godino e Cañizales (1997) apontam que alunos de licenciatura, sujeitos da pesquisa que realizaram, apresentaram a listagem das possibilidades como estratégia mais adotada para resolver os problemas. Porém, também destacam que esses alunos não realizaram essa estratégia sob uma organização sistemática, dificultando a listagem de todos os casos possíveis. É possível que os mesmos superem tal dificuldade ao trabalhar com o tema, pois conforme aponta os PCN (BRASIL, 1997, 1998), a combinatória propicia que os alunos desenvolvam habilidades na resolução de situações-problema, por exemplo, na organização e sistematização do desenvolvimento das estratégias

Rocha e Borba (2012) relatam que quando os alunos estão trabalhando com o conteúdo, apresentam dificuldades na diferenciação entre arranjo e combinação, na repetição ou não dos elementos do conjunto, o fato do contexto social pode vir a influenciar as escolhas na hora de resolução de exercícios, e a interpretação textual. Além disso, verificamos que alunos que já tiveram um ensino formal de combinatória, em geral no 2º ano do ensino médio, apresentam dificuldades na diferenciação dos problemas combinatórios, em especial nos problemas de combinação e de arranjo, conforme destaca Pessoa (2009).

Diante do exposto e refletindo sobre dificuldades de professores, tanto em formação inicial, quanto em formação continuada têm diante de problemas de combinatória, nessa pesquisa de mestrado temos por objetivo responder à seguinte **questão norteadora**: *Como ocorre a construção do conceito de combinatória de alunos de licenciatura em Matemática, quando resolvem problemas do tema?*

1.2 Objetivos da pesquisa

Com a finalidade de responder nossa questão norteadora, temos como **objetivo geral** da pesquisa ***investigar aspectos da construção do conceito de combinatória de alunos de licenciatura em Matemática, quando resolvem problemas do tema.***

Para atingirmos esse objetivo geral, elencamos **três objetivos específicos**. O primeiro objetivo específico é ***identificar e analisar as estratégias de resolução utilizadas pelos alunos***, pois, ao mobilizarem estratégias para resolverem os problemas propostos, os alunos explicitam, seja nas discussões em grupo ou nas produções escritas, vestígios de conhecimentos que os levam a realizar tais escolhas.

O segundo objetivo consiste em ***analisar a superação de possíveis dificuldades pelos alunos durante o desenvolvimento das atividades***. Esse objetivo específico foi traçado pois não esperamos que a pesquisa seja apenas diagnóstica. Além de esse estudo ajudar na compreensão de quão forte são essas dificuldades, desejamos investigar e analisar se a sequência didática e as escolhas consideradas ao longo da investigação, contribuem para a superação dessas dificuldades dos alunos. À medida que a sequência didática for desenvolvida, é provável que os alunos enfrentem momentos de dificuldades, dando-lhes possibilidades de refletir sobre essas, e, até mesmo superá-las.

Por fim, procuramos ***investigar a apropriação de novas estratégias de resolução pelos alunos durante o desenvolvimento da sequência***. Ao propiciarmos aos alunos momentos em que podem assumir uma postura ativa durante o desenvolvimento da sequência didática, é possível que os mesmos sejam capazes de elaborar novas estratégias, que não apresentavam no início da pesquisa, podendo construir assim, novos conhecimentos ao resolverem situações-problema de combinatória.

2 REFERENCIAIS TEÓRICO E METODOLÓGICO

Nesse capítulo, apresentamos elementos da Teoria dos Campos Conceituais (TCC) e da Teoria das Situações Didáticas (TSD) que, juntamente com o estudo realizado na análise preliminar, constituem o nosso referencial teórico para a realização da pesquisa. Buscamos discutir ideias de invariantes operatórios e conceito da Teoria dos Campos Conceituais, bem como situações *adidáticas* e meio *adidático* presentes na Teoria das Situações Didáticas, as quais utilizamos nessa investigação. Também apresentamos a Engenharia Didática, nosso referencial metodológico, que em conjunto com a TCC e a TSD nos orientam na elaboração, desenvolvimento e análise da sequência didática.

Ressaltamos que tanto a Teoria dos Campos Conceituais, quanto a Teoria das Situações Didáticas foram desenvolvidas a partir dos estudos psicogenéticos de Piaget. Essas teorias têm a concepção que a aprendizagem do sujeito se dá por meio de um processo de desequilíbrios cognitivos, que o mesmo deve vivenciar para aprender um novo conceito. Apesar disso, ambas contêm outros elementos constituintes, indo além dos estudos de Piaget. A Teoria dos Campos Conceituais apresenta a ideia de o conceito ser constituído por três conjuntos (das situações, dos invariantes e das linguagens), sendo necessário que o sujeito vivencie uma diversidade de situações que dão sentido ao conceito para aprendê-lo. Assim, a aprendizagem se torna um processo contínuo, diferentemente da ideia de etapas de desenvolvimento. Além dos desequilíbrios cognitivos que o sujeito deve vivenciar, Brousseau destaca que somente isso não é suficiente para a aprendizagem dos alunos, e, ao modelar a TSD como uma teoria com foco didático, destaca o papel do professor para a apreensão de um saber. O mesmo tem um papel de elaborar e propor situações que favoreçam a aprendizagem dos alunos, além de institucionalizar o saber que está em cena para todos os alunos (BESSOT, 2011).

2.1 Teoria dos Campos Conceituais

A Teoria dos Campos Conceituais (TCC) é uma teoria cognitivista que visa fornecer um quadro teórico com princípios que servem como base para compreender o desenvolvimento e a aprendizagem das competências complexas do sujeito (VERGNAUD, 1996). Apesar de a TCC não se tratar de uma teoria didática, ela é útil nesse campo do saber, pois permite compreender o desenvolvimento cognitivo dos alunos, quando estão inseridos em um ambiente de ensino. Para Vergnaud (2009b) a aprendizagem ocorre a partir de um processo de adaptação, no qual o sujeito vivencia uma experiência.

Vamos pensar em um professor de Matemática recém-formado no curso de Licenciatura e que está iniciando sua carreira docente. Pode acontecer que apesar de ele ter estudado diversos conteúdos matemáticos, por vezes mais avançados do que o conteúdo escolar, quando está inserido na sua prática em sala de aula, encontre dificuldades para atingir seu objetivo, que deve ser a aprendizagem dos alunos.

Esse fato ocorre pois, apesar de estudar situações de ensino[4] na Licenciatura, esse professor está inserido em um ambiente com novos desafios, como o domínio da sala de aula, relação professor/aluno, gerenciamento do conteúdo programático, entre outros, aos quais ele terá que se adaptar. Assim, "Não podemos esperar encontrar unicamente pela formação uma competência tão rica e adaptativa quanto aquela constituída no decorrer da experiência." (VERGNAUD, 2009b, p. 18). Desse modo, Vergnaud atribui importância às situações vivenciadas pelos alunos, quando destaca que

> [...]os conhecimentos dos alunos são formados pelas situações com que eles se depararam e que progressivamente dominaram, nomeadamente pelas primeiras situações suscetíveis de dar sentido aos conceitos e aos procedimentos que se pretende ensinar-lhes. (VERGNAUD, 1996, p. 171).

Nessa perspectiva, caso o professor tenha a mesma concepção de que a aprendizagem dos alunos também advém das experiências que ele protagoniza, o mesmo irá planejar suas aulas de modo que os alunos perpassem por diversas situações, dando-lhes condições para se adaptar e construir novos conhecimentos.

Vamos retomar o exemplo do professor de Matemática que inicia sua trajetória docente. Quando o mesmo se depara com situações de dificuldade, como o controle da sala de aula, uma das atitudes desse professor é conversar com outros professores que já trabalham na escola e que enfrentam ou não essa dificuldade, procurando ajuda. O professor experiente busca ajudá-lo, explicitando estratégias e métodos que ele utiliza em sala de aula, e o professor iniciante retorna para a sala de aula acreditando que conseguirá superar essa dificuldade. Porém, o que frequentemente ocorre é que, apesar dos conselhos que lhe foi passado, o professor não consegue superar totalmente a dificuldade encontrada. Um dos motivos desse fato ocorrer é que o professor experiente apesar de conseguir ter o controle de sala, não conseguiu explanar todos os conhecimentos que utiliza para isso. Esses conhecimentos que o professor experiente mobiliza em sala de aula, Vergnaud (2009b) classifica como a forma operatória do conhecimento, as explicações e conselhos que esse professor deu para o professor iniciante,

[4] Referimo-nos as disciplinas cursadas durante o curso de Licenciatura voltadas para a formação da prática profissional do futuro professor, como os Estágios Supervisionados.

atribui como forma predicativa[5] do conhecimento. Desse modo, geralmente, o sujeito não possui os conhecimentos operatórios e predicativos no mesmo patamar, como é o caso do professor experiente do nosso exemplo. Apesar de tentar explicar o que realiza nas suas aulas, ele não consegue explicitar outros conhecimentos necessários que utiliza na situação de controle da sala de aula, como tentar perceber a característica dos alunos, os motivos da agitação dos mesmos, os conhecimentos da relação professor-alunos, entre outros. Então, para a realização dessa ação, o professor experiente tem conceitos e conhecimentos, explicitáveis e não explicitáveis, que o professor iniciante ainda não possui (VERGNAUD, 2009b).

Nesse exemplo, ambos os professores possuem conhecimentos de acordo com suas vivências, logo, uma mesma tarefa, como o controle de sala de aula, representa situações distintas para eles. Nessa perspectiva, Vergnaud apresenta a seguinte distinção de situações para um sujeito:

> 1- classes de situações para as quais o sujeito dispõe, no seu repertório, num dado momento do seu desenvolvimento, e em determinadas circunstâncias, das competências necessárias ao tratamento relativamente imediato da situação;
> 2- classes de situações para as quais o sujeito não dispõe de todas as competências necessárias, o que obriga a um tempo de reflexão e de exploração, a hesitações, a tentativas abortadas, conduzindo-o, quer ao êxito, quer ao fracasso. (VERGNAUD, 1996, p. 156).

Refletimos então, que o professor experiente encontra-se no primeiro caso atribuído por Vergnaud, pois para a situação de controle de sala de aula possui competências necessárias para executar tarefas que se propõe, apesar de poder se defrontar com novas situações. Já o professor iniciante encontra-se no segundo caso, pois apesar de sua vivência, seja na Licenciatura ou na sala de aula, não possui competências necessárias para superar as dificuldades, entrando em um processo de reflexão, como descrito por Vergnaud. Desse modo, ressaltamos a importância da experiência para a aprendizagem, pois, somente por meio dela, o sujeito será capaz de desenvolver as competências necessárias para realizar uma situação, o que é denominado de esquemas.

Vergnaud (2009b, p.21) define esquema, uma das ideias centrais da TCC, como “uma organização invariante da atividade para uma classe de situações dadas”. Os esquemas contêm os conhecimentos em ação que orientam a ação e organização do sujeito em uma classe de situações. Vamos tomar o seguinte problema presente em nossa pesquisa para discussão: *Uma escola deseja sortear dois prêmios para seus professores de Matemática. O primeiro prêmio*

[5] Vergnaud (2009b) atribui à forma predicativa, a habilidade do sujeito de expressar seus conhecimentos, seja de maneira verbal, simbólica, entre outros.

será um tablet e o segundo um relógio. Sabendo que a escola conta com cinco professores de Matemática, de quantas maneiras diferentes os prêmios poderão ser distribuídos?

Para um problema desse tipo, os alunos mobilizam esquemas já desenvolvidos por eles, apresentando uma organização em busca da solução, como uma estratégia de listagem das possibilidades. Como o problema não apresenta nenhuma restrição quanto à repetição dos professores durante o sorteio, o aluno nomeia os professores sendo A, B, C, D e E, e inicia a listagem de todos os possíveis sorteios, por exemplo: A-A, A-B, A-C, ..., contando todos os vinte e cinco casos possíveis. Devemos nos atentar que não podemos afirmar que essa organização é de fato um esquema do aluno, baseado apenas nesse problema. Porém, caso o aluno apresente novamente essa conduta em problemas do mesmo tipo, realmente se trata de um esquema. Além disso, em outra classe de situação, como problemas de contagem que envolvem mais elementos, o aluno enfrentará um processo de adaptação, no qual seus esquemas serão enriquecidos com novos procedimentos e conhecimentos (VERGNAUD, 1996). O esquema é composto por quatro componentes, sendo eles:

- Um objetivo, subobjetivos e antecipações.
- Regras em ação de tomada de informação e de controle
- Invariantes operatórios: conceitos em ação e teoremas em ação
- Possibilidade de inferências em situação. (VERGNAUD, 2009b, p. 21).

Essa ideia de esquema que apresenta os quatro componentes, possui característica analítica. As regras em ação, do tipo “se... então...”, são a parte geradora dos esquemas, em que o sujeito retira informações e controles do problema, e gera uma sequência de ações de acordo com os objetivos e conhecimentos em ação do sujeito sobre determinada situação. O objetivo é a parte intencional do sujeito no esquema, que pode ser particionado em subobjetivos e gerar antecipações que possam resolver a situação que deseja. No caso do problema do sorteio dos professores, o aluno tem como objetivo descobrir o número total de sorteios que pode ocorrer, podendo definir subobjetivos como encontrar a quantidade total de sorteios nos quais o professor A fique com o primeiro prêmio, posteriormente com o professor B, e assim sucessivamente.

Na composição dos esquemas estão presentes também os conhecimentos em ação do sujeito em uma determinada classe de situações, que são chamados de invariantes operatórios. Os invariantes operatórios, compostos pelos conceitos em ação e teoremas em ação, são elementos fundamentais para que o sujeito retire informações da situação e determine os procedimentos que irá realizar. Para Vergnaud (2009b, p.23) “um conceito em ação é um conceito pertinente na ação em situação. Um teorema em ação é uma proposição tida como verdadeira na ação em situação.”. Ressaltamos que os conceitos em ação e os teoremas em ação, não necessitam serem conceitos e teoremas matemáticos, respectivamente. É importante destacar que para analisar os esquemas dos sujeitos em uma situação é necessário levar em consideração os quatro elementos que o compõem. Para o desenvolvimento de nossa investigação, na qual buscamos investigar aspectos da construção do conceito de combinatória de alunos de licenciatura em Matemática, atemo-nos às análises nos invariantes operatórios, em específico, nos teoremas em ação.

Retomando o problema do sorteio dos professores de Matemática, um possível teorema em ação que pode ser mobilizado pelo aluno é: *se um problema é de combinatória, então existe uma fórmula que o resolve e basta utilizá-la para encontrar a solução*. Para problemas desse tipo, o teorema em ação apresentado tem um domínio de validade[6]. Porém, existem problemas de combinatória, como os que apresentam o princípio aditivo ou restrições, em que esse teorema em ação não será verdadeiro. Os conceitos em ação são elementos fundamentais para a construção das proposições, pois permitem identificar objetos, relações, interpretar informações da situação, entre outros. No caso do exemplo apresentado, é necessário que os alunos tenham conceitos como de números, de agrupamento, entre outros, para compreender e tentar resolver o problema.

Uma possibilidade de investigar os conhecimentos dos alunos sobre o conteúdo de combinatória é estudar os invariantes que os mesmos mobilizam quando resolvem problemas relacionado ao tema. Entretanto, devemos estar atentos que segundo Vergnaud (1996, p. 165) “Conceitos e teoremas explícitos constituem apenas a parte visível do iceberg da conceptualização: sem a parte escondida, constituída pelas invariantes operatórias, esta parte visível não seria nada”. Por fim, o quarto elemento constituinte do esquema são as inferências que podem ser realizadas, e possibilitam, ao sujeito, analisar o desenvolvimento das situações, a partir de suas escolhas e redefinir um novo encaminhamento, caso necessário.

Ressaltamos novamente a importância de os alunos vivenciarem uma variedade de situações, possibilitando a mobilização de elementos de esquemas. Assim, Vergnaud (2009b) afirma que para o aluno compreender um conceito, não basta conhecer somente uma definição. Nessa perspectiva, o conceito é formado por três conjuntos, C= {S, I, L}, sendo eles: o conjunto das situações, dos invariantes e das linguagens,

---

[6] Domínio de validade é uma classe de situações nas quais o invariante operatório é válido (verdadeiro), proporcionando resultados corretos. Porém, fora de seu domínio de validade, tal invariante operatório proporciona resultados incorretos.

Como discorremos anteriormente, o conjunto das **situações** é que dá sentido ao conceito. Nesse conjunto estão presentes duas ideias em relação às situações, a de *variedade* e de *história*. Um conceito possui uma variedade de situações que dão sentido ao mesmo, as quais os alunos devem vivenciar. Além disso, essa vivência que eles perpassaram, possibilita a formação de novos conhecimentos.

O conjunto dos **invariantes operatórios**, também discutido, é constituído dos conhecimentos em ação (conceitos em ação e teoremas em ação), estruturantes na organização da atividade do sujeito, em uma situação. Desse modo, em cada classe de situações, os sujeitos mobilizam invariantes operatórios de modo a organizar sua ação para atingir o objetivo desejado. São os invariantes operatórios que possibilitam a atribuição de significados às situações pelos sujeitos (VERGNAUD, 1996). Retomando o exemplo do sorteio dos professores de Matemática, os alunos atribuem significados diferentes, de acordo com seus invariantes. Enquanto um aluno pode compreender o problema como apenas uma situação de sorteio e buscar a solução listando as possibilidades, outro aluno pode identificar o problema como um arranjo, com repetição, e aplicar a fórmula correspondente para encontrar a resposta, sendo que as duas escolhas estão corretas.

O **conjunto das representações linguísticas e simbólicas (L)** possibilita a representação de elementos da situação, conceitos e relações, além de contribuir no processo estruturante do pensamento, tendo um papel de significante do conceito. O autor destaca a importância da linguagem e de outros significantes na TCC, na “ajuda à designação e, portanto à identificação, das invariantes: objetos, propriedades, relações, teoremas; ajuda ao raciocínio e à inferência; ajuda à antecipação dos efeitos e dos objetivos, à planificação e ao controle da ação”. (VERGNAUD, 1996, p.180). Um exemplo no qual esse fato é evidenciado é quando um aluno, na ação da escrita, realiza murmúrios. Essa ação realizada pelo sujeito, não somente tem função de representar (oralmente na língua materna) o que está sendo escrito, mas contribui na organização do seu pensamento para o desenvolvimento da escrita.

2.1.1 A combinatória como conceito constituinte do Campo Conceitual Multiplicativo

Na perspectiva apresentada na Teoria dos Campos Conceituais, entendemos que para a compreensão de um conceito é necessário perpassar por diversas situações nos quais o mesmo está presente, com representações e invariantes distintos. Desse modo, ao analisar essas situações, entendemos que um conceito não está isolado de outros, mas que existe uma relação entre diversos conceitos, situações, invariantes e representações. Assim, Vergnaud (2009b) apresenta a ideia de campo conceitual, como sendo

> [...]o conjunto de situações cujo domínio progressivo pede uma variedade de conceitos, de esquemas e de representações simbólicas em estreita conexão; o conjunto de conceitos que contribuem com o domínio dessas situações. (VERGNAUD, 2009b, p.29).

Uma das vantagens que essa organização oferece é a possibilidade de compreender que um conceito é composto por diversas situações que lhe dão sentido, presentes no campo conceitual, além dos procedimentos e invariantes que podem ser mobilizados pelos alunos diante dessas situações.

O autor apresenta o exemplo do campo conceitual aditivo, formado por todas as situações cujo tratamento necessita de adições ou subtrações, além de conceitos, teoremas e propriedades que permitem analisar essas situações. Apesar de haver situações desse campo conceitual que contemplem o conceito da combinatória, não discorremos sobre o campo conceitual aditivo e focamos no campo conceitual multiplicativo, no qual esse conceito se encontra presente.

O campo conceitual multiplicativo é composto por situações cujo tratamento envolve multiplicação ou divisão, além de abrangerem outros conceitos como fração, função linear e não linear, espaço vetorial, produto cartesiano, área, volume, entre outros (GITIRANA; CAMPOS; MAGINA; SPINILLO, 2014). Pautado em considerações matemáticas e psicológicas, Vergnaud (2009a) classifica as situações do campo multiplicativo em dois grandes blocos: o isomorfismo de medidas e o produto de medidas.

As situações de isomorfismos de medidas têm como característica ser “uma relação quaternária entre quatro quantidades: duas quantidades são medidas de certo tipo e as duas outras medidas, de outro tipo.” (VERGNAUD, 2009a, p. 239). Apresentamos alguns exemplos[7] de situações que se enquadram nessa classe:

1- Leonardo deseja comprar figurinhas para iniciar sua coleção. Sabendo que cada pacote contém 4 figurinhas, quantas figurinhas terá caso compre 3 pacotes?

2- Sabe-se que cada pacote de figurinha contém 4 figurinhas. Quantas pacotes Leonardo necessita comprar para adquirir 12 figurinhas?

---

[7] Fonte (adaptado): Gitirana et. al. (2014).

3- Leonardo comprou 3 pacotes de figurinhas, ficando com um total de 12 figurinhas. Quantas figurinhas continha cada pacote?

4- Ao solicitar 12 figurinhas para comprar, Leonardo as recebeu em três pacotes de mesma quantidade. Caso Leonardo deseje apenas 4 figurinhas, quantos pacotes ele irá receber?

Evidenciamos que em todos os problemas existem uma relação quaternária, tendo em vista que estão em jogo duas quantidades de pacotes e duas quantidades de figurinhas. Apesar de situações semelhantes, Vergnaud (2009a) destaca que a complexidade das mesmas é diferente durante a resolução, tendo em vista que possuem estruturas diferentes. Para observarmos essa diferenciação, representamos a estrutura de cada problema a seguir:

Quadro 1- Estrutura dos Problemas de Isomorfismo de medidas

Exemplo 1		**Exemplo 2**		**Exemplo 3**		**Exemplo 4**	
Pacotes	Figurinhas	Pacotes	Figurinhas	Pacotes	Figurinhas	Pacotes	Figurinhas
1	4	1	4	1	x	x	4
3	x	x	12	3	12	3	12

Fonte: dados da pesquisa

Apesar de todas essas situações poderem ser resolvidas por meio de multiplicações ou divisões, pelo fato de possuírem estruturas diferentes, os alunos podem utilizar estratégias diferentes para a resolução dos mesmos, como raciocínio escalar, raciocínio proporcional, entre outros (GITIRANA et. al., 2014).

Enquanto as situações de isomorfismos de medidas têm relações quaternárias, as situações de produtos de medidas consistem “em uma relação ternaria entre três quantidades, das quais uma é o produto das duas outras ao mesmo tempo no plano numérico e no plano dimensional” (VERGNAUD, 2009a, p. 253), que podem ser representadas por meio de um plano cartesiano. Dessa maneira, verificamos que nessa classe há situações que envolvem diversos conceitos, por exemplo: produto cartesiano, áreas e volumes. Além disso, o autor distingue dentre as situações de produtos de medidas duas classes de problemas distintos, sendo elas: encontrar a medida-produto, conhecendo as medidas elementares; encontrar as medidas elementares, conhecendo-se a outra e a medida-produto. Contemplamos essas duas classes de problemas de produto de medidas ao longo da sequência didática, com os seguintes problemas:

1- Dados os conjuntos A={2,4,5,6} e B={1,3,9}, quantos pares ordenados (x,y) podemos formar sabendo que x é elemento do conjunto A e y elemento do conjunto B?
2- Uma companhia de transporte rodoviário intermunicipal estuda as 15 possíveis rotas para a realização de viagens do município A ao município C, com passagem obrigatória pelo município B. Sabendo que de A à B existem três possíveis trajetos, quantos trajetos existem entre B e C?

Ao adotar uma perspectiva consonante à apresentada na Teoria dos Campos Conceituais, o professor pode entender que há diversas classes de situações que abordam a multiplicação e a divisão, as quais possuem semelhanças e singularidades entre si. Com isso, a compreensão dessas diferentes situações auxilia “na elaboração de abordagens de ensino e aprendizagem que possibilitem a eles abranger uma riqueza maior de questões. E, assim, poder ofertar aos estudantes mais oportunidades de ampliar e aprofundar seu conhecimento sobre a multiplicação e divisão” (GITIRANA et. al., 2014, p. 37).

Além do significado de produto cartesiano considerado por Vergnaud (2009a) no campo conceitual multiplicativo, na nossa pesquisa contemplamos os demais significados da combinatória. Para isso, pautamo-nos na classificação de Pessoa e Borba (2010) que distingue quatro classes de problemas combinatórios, sendo eles: permutação, arranjo, combinação e produto cartesiano, que apresentamos com mais detalhes na sequência do trabalho.

2.2 Teoria das Situações Didáticas

Na mesma perspectiva apresentada na Teoria dos Campos Conceituais, concebemos que a aprendizagem de um aluno se dá pelas experiências que o mesmo vivencia ao longo de sua trajetória. Assim, a Teoria das Situações Didáticas (TSD), desenvolvida por Brousseau (1996, 2008), que tem por objetivo modelar o processo de ensino em Matemática, nos fornece um quadro teórico para preparar a nossa sequência de ensino, pois conforme caracteriza Brousseau, “Uma “situação” é um modelo de interação de um sujeito com um determinado meio. [...] Reservamos o termo *situações didáticas* para os modelos que descrevem as atividades do professor e do aluno.” (BROUSSEAU, 2008, p. 21, grifo do autor).

Partindo dos estudos de Piaget, Brousseau (1996) problematiza os trabalhos matemáticos desenvolvidos por três diferentes elementos: o matemático, o professor e o aluno.

O matemático parte de um problema contextualizado, e na busca pela solução perpassa por diversas reflexões, tentativas, refutações e reformulações do percurso até conseguir resolver o problema inicial. Após isso, seu trabalho é organizar os resultados obtidos nesse trajeto de pesquisa, filtrando as dificuldades enfrentadas durante o processo. Desse modo, conforme ressalta Brousseau (1996), o matemático despersonaliza, destemporaliza e descontextualiza o saber que estava produzindo, com o intuito de tornar público esse saber.

No caso do aluno, o autor destaca que seu trabalho não deve estar restrito apenas a aprender as definições e os teoremas do saber em jogo. Para aprender Matemática, o mesmo deve vivenciar passos percorridos por um matemático, de modo que “aja, formule, prove, construa modelos, linguagens, conceitos, teorias, os troque com outros, reconheça aqueles que não são conformes à cultura, retire desta aqueles que lhe são úteis, etc.” (BROUSSEAU, 1996, p. 38). Claro que o caminho no qual o aluno irá percorrer não será idêntico ao do matemático, devido aos conhecimentos que cada um possui, suas vivências, motivações, entre outros fatores. Para que o aluno possa trilhar os passos de um matemático, essa situação não pode ser demasiadamente difícil, nem extremamente trivial[8], para não desestimular o aluno. É nesse momento que o professor entra em cena.

O professor se torna fundamental para que os alunos consigam vivenciar o processo descrito anteriormente. Com o objetivo de proporcionar a aprendizagem, o professor deve realizar o caminho inverso da forma de apresentar do matemático, tendo que contextualizar, personalizar e temporalizar o saber, para que os alunos tenham condições de interagir com esse meio.

Dois termos fundamentais na Teoria das Situações Didáticas são as ideias de meio e situação. No caso de situação, Brousseau (2008) as entende como sendo as interações que um sujeito realiza em um determinado meio, sendo que, denomina-se situações didáticas os modelos de interação entre o professor, o aluno e o saber, em um determinado meio modelado com intenções didáticas, visto que “um meio sem intenções didáticas é incapaz de induzir o aluno a adquirir todos os conhecimentos que se espera que obtenha” (BROUSSEAU, 2008, p. 34). Deixamos claro nesse momento que o termo situação utilizado nessa teoria é diferente do utilizado na TCC, sendo que na TSD se refere às interações que os sujeitos realizam entre si e um meio, e na TCC refere-se a uma atividade ou tarefa. Já o meio antagônico é composto pelo ambiente e as condições nas quais os alunos estarão inseridos ao vivenciarem as situações

[8] O termo trivial é oriundo de *trívium*, que na Idade Média se referia à divisão inferior das Artes Liberais, na qual estava presente a Gramática, a Lógica e a Retórica. Desse modo, o adjetivo termo trivial pode dar a ideia de ser algo comum ou corriqueiro. (CUNHA, 2007).

adidáticas propostas pelo professor. Esse ambiente é formado tanto pelas escolhas *a priori* do professor, como organização da turma, as situações-problema, materiais didáticos que serão utilizados, entre outros, quanto por elementos decorrentes do desenvolvimento das situações, por exemplo, os conhecimentos dos alunos, diálogos e questionamentos dos alunos e do professor, *feedback* e retroações do próprio meio *adidático*. Essas interações, que podem ser explícitas ou implícitas, constituem um meio autônomo e antagonista ao sujeito, e, segundo Brousseau (1996, p. 49) "O aluno aprende adaptando-se a um meio que é um fator de contradições, de dificuldades, de desequilíbrios, [...]. Este, saber, fruto da adaptação do aluno, manifesta-se através de respostas novas, que são a prova da aprendizagem". Desse modo, tanto um professor que organiza sua aula de maneira axiomática[9], quanto uma aula que prima a construção do conhecimento dos alunos são consideradas uma situação didática, já que ambas têm a intenção de ensino. Porém, nesse momento Brousseau (1996) implementa um conceito de suma importância na TSD, o conceito de situação *adidática*.

2.2.1 Situações *adidáticas*

Conforme relatado anteriormente, Brousseau se baseou nos estudos de Piaget para o desenvolvimento da Teoria Situações Didáticas e, assim, dentre as possíveis situações didáticas considera um tipo, em especial, de fundamental importância para a aprendizagem dos alunos, a qual nomeia como situação *adidática*. Brousseau (2008) caracteriza uma situação *adidática* do seguinte modo:

> As concepções atuais do ensino exigirão do professor que provoque no aluno – por meio da seleção dos "problemas" que propõe – as adaptações desejadas. Tais problemas, escolhidos de modo que o estudante os possa aceitar, devem fazer, pela própria dinâmica, com que o aluno atue, fale, reflita e evolua. Do momento em que o aluno aceita o problema como seu até aquele em que produz a resposta, o professor se recusa a intervir como fornecedor dos conhecimentos que quer ver surgir. O aluno sabe que o problema foi escolhido para fazer com que ele adquira um conhecimento novo, mas precisa saber, também, que esse conhecimento é inteiramente justificado pela lógica interna da situação e que pode prescindir das razões didáticas para construí-lo. Não só pode como deve, pois não terá adquirido, de fato, esse saber até que o consiga usar fora do contexto de ensino e sem nenhuma indicação intencional. (BROUSSEAU, 2008, p.34-35).

---

[9] Entendemos uma organização axiomática, uma aula orientada por definições e teoremas do saber, e, para resolver os exercícios são aplicados técnicas e fórmulas.

Tal situação é caracterizada pelo papel ativo do aluno de agir, refletir e argumentar sobre um problema matemático que foi pensado e elaborado pelo professor, colocando-se como um pequeno pesquisador, e não tendo a intervenção explícita do professor na sua resolução.

Um momento fundamental para que o aluno comece a vivenciar uma situação *adidática* é a devolução do problema. Para isso, o professor é responsável em propor um problema (jogo, atividade) que seja interessante e que desperte no aluno seu espírito investigativo, além da criação de um meio antagônico, que gere desequilíbrios cognitivos e possibilite o aluno a buscar novamente esse equilíbrio. Desse modo, o aluno deve aceitar a responsabilidade da situação proposta, com fins didáticos, tomá-la para si e partir em busca da solução do mesmo, caracterizando assim, o momento de devolução (BROUSSEAU, 2008). Após ter ocorrido a devolução, os alunos iniciam as situações *adidáticas*, percorrendo três tipos de situações que a compõem: situação de ação, situação de formulação e situação de validação. Deixamos claro que essas três situações estão intimamente relacionadas, sem que haja a necessidade de seguir a ordem dessas etapas e podendo começar novos ciclos, dando continuidade ao processo.

A situação *adidática* de ação, possui uma característica mais empírica das demais, já que o aluno tenta buscar soluções do problema de maneira mais operacional. Por meio das interações com o meio *adidático* em que está inserido, o aluno busca observações e regularidades presentes, que lhe sirvam de *feedback* para orientar suas próximas decisões.

A situação *adidática* de formulação é um momento no qual o aluno elabora conjecturas que possam levá-lo a resolver o problema, e deve comunicá-la para outro sujeito, seja ele real ou fictício (BROUSSEAU, 2008). Assim, na situação de formulação o aluno ainda não tem a intenção de validar tal conjectura, apesar de esperar que seja verdadeira.

Na situação *adidática* de validação o aluno comunica, para um sujeito real ou cognitivo, a conjectura elaborada no momento de formulação (caso tenha feito), e tenta provar ou refutar a mesma. Esse momento *adidático* passa a ter um caráter mais científico, de modo que os alunos mobilizam seus conhecimentos, além das informações do meio em que estão inseridos, e por meio de mecanismos de provas tentam verificar a validade das conjecturas.

Nesse contexto, ao vivenciarem uma situação *adidática* os alunos têm oportunidade de realizar descobertas, e, Freitas (2008, p. 86) afirma que "*as situações adidáticas* representam os momentos mais importantes da aprendizagem, pois o sucesso do aluno nelas significa que ele, por seu próprio mérito, conseguiu sintetizar algum conhecimento". Tais descobertas envolvem um saber matemático, como uma propriedade, teorema, proposição, conceito, entre outros.

Temos que estar atentos ao fato de que apesar de o aluno possuir o papel ativo na busca por respostas ao problema e na construção do seu conhecimento, o professor não está ausente durante esse processo. Além de ter que preparar o meio *adidático* e o problema a ser proposto aos alunos, de modo que os mesmos tenham interesses e condições de tentar resolvê-lo, no momento em que os alunos estão no processo de investigação o professor atua como um mediador. Durante todo o processo ele realiza questionamentos, sem interferir explicitamente na construção do conhecimento, de maneira que os alunos não desanimem e continuem vivenciando uma situação *adidática.*

Ao final da fase *adidática*, o professor, juntamente com os alunos, faz a institucionalização do saber. Brousseau (2008) comenta o fato de não ter considerado inicialmente esse momento, na elaboração do modelo teórico das situações didáticas, porém os professores que experimentavam em sala de aula sentiam a necessidade de realizar um "fechamento" da aula. Foi então que Brousseau observou a importância e a necessidade de o professor sistematizar as estratégias mobilizadas e os resultados encontrados durante a situação *adidática*, sendo um momento em que se explicita o conhecimento em jogo, caso não tenha aparecido anteriormente, e é conferido um *status* ao saber que foi trabalhado, de modo que o aluno não se perca no meio de outras informações. O momento de institucionalização não é considerado um momento *adidático*, pois nele, diferentemente dos demais momentos, o professor está no controle do saber em jogo.

2.3 Engenharia Didática

Para operacionalizar o desenvolvimento da pesquisa, utilizamos a Engenharia Didática (ED) como referencial metodológico, pois a mesma é um esquema experimental pautado nas situações de ensino, de modo a orientar na concepção, realização, observação e análise da sequência didática (ARTIGUE, p. 196). A Engenharia Didática surgiu como metodologia de pesquisa, de modo mais sistematizado no início da década de 1980, em pesquisas da Didática da Matemática[10]. Artigue (1996) justifica o nome de essa metodologia ser chamada Engenharia Didática, quando ressalta que a mesma

[10] "Didática da Matemática [...] teve, em sua origem, estudos realizados por Guy Brousseau, Gérard Vergnaud, Yves Chevallard, Raymond Duval, Michele Artigue, Régine Douady, Aline Robert, dentre outros." (BITTAR, no prelo, p. 2).

> [...]era comparável ao trabalho do engenheiro que, para realizar um projecto preciso, se apoia nos conhecimentos científicos do seu domínio, aceita submeter-se a um controlo de tipo científico mas, ao mesmo tempo, se encontra obrigado a trabalhar sobre objectos depurados da ciência, e portanto a estudar de uma forma prática, com todos os meios ao seu alcance, problemas de que a ciência não quer ou ainda não é capaz de se encarregar. (ARTIGUE, 1996, p. 193).

Desse modo, semelhante ao caminho percorrido pelo engenheiro, o pesquisador, baseado em conhecimentos científicos, planeja e realiza sua sequência de ensino, de modo que possibilite os alunos a vivenciarem tais situações, no nosso caso, situações *adidáticas*. Assim, para o desenvolvimento da pesquisa, percorremos as quatro etapas presentes nessa metodologia: as análises preliminares, concepção e análise *a priori*, experimentação e análise *a posteriori* e validação. Salientamos, de antemão, que apesar de estar estruturada nessas quatro fases que explicitamos adiante, a Engenharia Didática não é uma metodologia fechada. O pesquisador, caso sinta necessidade, durante o desenvolvimento da ED tem a liberdade de retomar fases anteriores e reestruturá-las, tendo em vista alcançar os objetivos da sequência.

2.3.1 Fases da Engenharia Didática

A análise preliminar tem como foco o estudo do quadro teórico-didático do objeto matemático presente na pesquisa, e, "tem por objetivo fornecer subsídios ao pesquisador para a elaboração da sequência didática" (BITTAR, no prelo, p.3). Assim, conforme apresenta Artigue (1996), a fase de análise preliminar é composta de

> [...] a **análise epistemológica** dos conteúdos visados pelo ensino; a análise do ensino habitual e dos seus efeitos; a **análise das concepções dos alunos**, das dificuldades e obstáculos que marcam a sua evolução; a **análise do campo de constrangimentos** no qual virá a situar-se a realização didáctica efectiva; e, naturalmente, tendo em conta os objetivos específicos da investigação. (ARTIGUE, 1996, p. 198, grifo nosso).

Nessa perspectiva, realizamos uma investigação de aspectos históricos e epistemológicos da combinatória, buscando compreender como ocorreu seu desenvolvimento, além de possíveis dificuldades presentes nesse percurso. Também realizamos um estudo de pesquisas sobre o tema, evidenciando as principais estratégias e dificuldades dos alunos diante de problemas de combinatória. Privilegiamos nesse momento os estudos que tiveram como sujeitos de pesquisa alunos que já tinham trabalhado com esse conteúdo, tanto dos anos finais do ensino médio ou do ensino superior, uma vez que nossa pesquisa tem como sujeitos de pesquisas os alunos iniciantes de um curso de ensino superior.

Foram analisadas as orientações propostas acerca desse conteúdo nos documentos oficiais, como os Parâmetros Curriculares Nacionais, as Orientações Curriculares Nacionais do

Ensino Médio e o Guia do Livro Didático do PNLD 2012. Além disso, realizamos um estudo matemático da combinatória e investigamos alguns elementos do ensino de combinatória em três livros didáticos do 2º ano do ensino médio, sabendo que esse conteúdo está previsto para ser trabalhado de modo sistemático nesse ano.

A segunda fase da Engenharia Didática é a concepção e análise *a priori* da sequência de ensino, a qual é considerada o cerne dessa metodologia devido à sua importância. Essa fase, conforme ressalta Artigue (1996), é composta por um momento descritivo e outro preditivo, na qual o pesquisador com posse dos resultados obtidos na fase anterior elabora a sequência didática, pautado nas variáveis didáticas[11]. Desse modo, o pesquisador, em um primeiro momento, realiza a descrição das escolhas na sequência, como as variáveis didáticas e as atividades que a compõem. Após isso, realiza o momento de previsão dos possíveis comportamentos (cognitivos) que os alunos podem apresentar quando forem resolver as atividades da sequência, como as possíveis estratégias e dificuldades que podem aparecer. Assim, o objetivo da análise *a priori* é "determinar de que forma permitem as escolhas efetuadas controlar os comportamentos dos alunos e o sentido desses comportamentos" (ARTIGUE, 1996, p. 205). Destacamos novamente a importância de se realizar a análise *a priori*, pois com ela, o pesquisador tem condições de compreender o que pode aparecer na sequência, além de realizar intervenções, caso seja necessário (BITTAR, no prelo).

Após a concepção e a análise *a priori,* é realizada a experimentação. Essa fase é caracterizada pela aplicação da sequência didática com os alunos, os quais são os sujeitos da pesquisa. Nela, o pesquisador tem a possibilidade de retomar os problemas previstos, e refletir se os mesmos estão coerentes com os objetivos iniciais, além de coletar os dados a serem analisados na análise *a posteriori* (ARTIGUE, 1996). Em nossa pesquisa, utilizamos como dados para a análise, os protocolos com as produções dos alunos e gravações de áudio e vídeo dos encontros.

A partir dados obtidos na experimentação, o pesquisador realiza a análise *a posteriori* e a validação da Engenharia Didática. Ressaltamos que essa fase é composta por dois momentos, a análise *a posteriori* e a validação, sendo que as mesmas são atividades distintas. Na análise *a posteriori* são analisadas as produções e comportamentos (cognitivos) dos alunos durante o

[11] Segundo Bittar (no prelo, p. 4), as variáveis didáticas são "elementos da situação que, ao serem alterados implicam em mudanças de estratégias de resolução por parte dos alunos.". Artigue (1996) distingue as variáveis em microvariáveis e macrováriaveis, sendo que nos centramos nas primeiras, por se tratar das organizações locais da engenharia, como de uma sessão ou fase. Um exemplo de variável em nossa pesquisa é a quantidade de elementos do conjunto, pois a medida que aumenta, a estratégia de listagem se torna inviável, em relação à outra mais sistemática.

desenvolvimento da sequência didática, além de, caso o pesquisador sinta necessidade, poder utilizar-se de outros instrumentos externos para complementar sua análise, como questionários e entrevistas (ARTIGUE, 1996). Por fim, são confrontados os resultados obtidos na análise *a posteriori* com as hipóteses elaboradas na análise *a priori*, realizando assim a validação da ED. Artigue (1996) destaca o cuidado que se deve ter no momento de realizar a validação da Engenharia Didática pois,

> Na maior parte dos textos publicados relativos a engenharias, o confronto das duas análises, a priori e a posteriori, exibe distorções. Elas estão longe de ser sempre analisadas em termos de validação, a saber, investigando aquilo que, nas hipóteses consideradas, as distorções constatadas invalidam. Com frequência, os autores limitam-se a propor modificações da engenharia, visando a sua redução, sem se envolverem, pois, verdadeiramente, num procedimento de validação. (ARTIGUE, 1996, p. 209).

Isso não significa que o pesquisador não pode propor modificações na sua ED após a sua validação, mas, que não se limite a realizar apenas isso. Tais sugestões de modificações, que podem ser benéficas para atingir o objetivo da Engenharia Didática, podem ser postas após ser realizada a validação da ED.

Desse modo, conforme Artigue (1996) observa, essa metodologia de pesquisa difere das demais metodologias não nos objetivos, mas sim nos seus procedimentos, como a validação. Na ED essa validação é interna, já que não se utiliza instrumentos de avaliações estatísticas, não ocorre a comparação dos resultados de diferentes grupos, e nem a comparação do estado inicial com o estado final do aluno[12], as quais são características das validações **externas** (BITTAR, no prelo)**.** Não desejamos dar a entender que a validação interna seja melhor ou pior que as demais, mas apenas que a Engenharia Didática possui essa característica que difere das demais metodologias.

2.4 Uma reflexão sobre a Teorias dos Campos Conceituais, a Teoria das Situações Didáticas e a Engenharia Didática em nossa pesquisa

Diante do exposto, em nossa pesquisa elaboramos e aplicamos uma sequência didática de modo que os alunos pudessem vivenciar diversas situações *adidáticas*. Para isso, nos pautamos na Engenharia Didática como referencial metodológico, pois a mesma nos dá condições de elaborar e analisar tal sequência didática. As situações-problema foram selecionadas e/ou elaboradas de modo que abrangessem os diferentes tipos de situação do

---

[12] Um exemplo de comparação do estado inicial e estado final do aluno, sem considerar o processo percorrido pelo mesmo, são as pesquisas que utilizam como ferramenta de validação os pré-testes e pós-teste.

conceito de combinatória, perspectiva consonante à Teoria dos Campos Conceituais. Desse modo, a sequência é composta por problemas de combinação, arranjo, permutação e produto cartesiano, classificação proposta por Pessoa e Borba (2010).

Para a constituição do meio *adidático*, os alunos foram organizados em grupos, tendo em vista que tal organização é propícia para elaborarem estratégias e conjecturas na busca de solução para os problemas. Além disso, dentro de cada grupo, os mesmos tiveram condições de interagir com os problemas e nas discussões com os demais colegas, percorrendo os três momentos *adidáticos.* No final de cada encontro, sugerimos que os alunos apresentassem as estratégias mobilizadas para resolver os problemas e, a partir disso, é que foi realizado um momento de institucionalização das estratégias e fechamento do encontro.

Tendo em vista que o objetivo principal da pesquisa é investigar aspectos da construção do conceito de combinatória de alunos de licenciatura em Matemática, a sequência tem um fim didático, pois os alunos serão confrontados com diferentes situações, podendo refletir e reestruturar seu conhecimento sobre combinatória ao vivenciar as situações *adidáticas*.

3 CONSTITUIÇÃO DO QUADRO TEÓRICO-DIDÁTICO

Nesse capítulo, realizamos um estudo do desenvolvimento histórico da combinatória, aspectos matemáticos do tema, análise de alguns tópicos do ensino proposto em três livros didáticos aprovados pelo Guia do Plano Nacional de Livros Didáticos 2012 (Guia do PNLD/2012), além de pesquisas que tiveram a combinatória como objeto de investigação. Por fim, os resultados encontrados ao longo do capítulo, serviram de subsídio para o desenvolvimento da pesquisa, e, possibilitou modelarmos teoremas em ação que podem aparecer no decorrer da sequência didática.

3.1 Aspectos históricos

Nesse primeiro item, apresentamos alguns elementos que envolvem o surgimento da combinatória, expondo alguns fatos e problemas relativos ao conteúdo, além de discorrer sobre alguns matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento da área.

A origem da Matemática surge da necessidade do homem em realizar suas atividades no dia-a-dia, sendo que a primeira atividade relacionada à combinatória é a contagem dos elementos. Biggs (1979) apresenta elementos da origem da combinatória, desde os primórdios até momentos antes de ela ser reconhecida como um ramo da Matemática, sendo que nos pautaremos nesse estudo para apresentar fatos desse período. Como aborda o autor, a humanidade reconhece como verdade a existência dos Princípios Aditivo e Multiplicativo para realizar a contagem de objetos, como apresentado em problemas de diversas épocas.

O Papiro de Rhind[13], existente desde os anos 1650 a.C., apresenta o problema 79 que tinha como objetivo a contagem de elementos, e a partir de traduções do mesmo esse problema foi interpretado tendo o seguinte enunciado: “Há sete casas, cada uma com sete gatos, cada gato mata sete ratos, cada rato teria comido sete cabeças de trigo, cada um dos quais teria produzido sete medidas hekat[14] de grãos. ” (BIGGS, 1979, p.11, tradução nossa). Nesse problema que envolvia uma sequência de objetos que aumentavam numa progressão de razão sete, o papiro trazia a seguinte solução:

---

[13]O Papiro de Rhind é um manuscrito matemático é composto por 85 problemas, que foram copiados pelo escriba Ahmes de um trabalho mais antigo. Esse documento continha a matemática egípcia da época, e juntamente com o Papiro de Moscou compõem as principais fontes de informações da matemática egípcia. Esse trabalho foi adquirido pelo egiptólogo escocês A. Henry Rhind, o qual originou o nome do papiro. Atualmente o Papiro de Rhind está exposto no Museu Britânico, em Londres. (EVES, 2007).

[14]Hekat é uma unidade de medida de grãos, equivalente à 4,8 litros, que era utilizada no Egito Antigo. (VAZQUEZ, 2011).

Casas	7
Gatos	49
Ratos	343
Trigos	2401
Hekat	16807
	19607 objetos totais

Nesse caso, para obter a solução do problema que envolvia a contagem de objetos, dificilmente seria realizada uma contagem, devido à grande quantidade de elementos que compõem a solução do mesmo. Desse modo, acreditamos que para obter a resposta, os egípcios já dispunham de técnicas mais sistematizadas de contagens, que possivelmente mobilizavam os Princípios Aditivo e Multiplicativo. Além de presente no Papiro de Rhind, problemas semelhantes ao apresentado anteriormente eram utilizados como quebra-cabeça, estando inseridos em famosas obras, como o Dicionário Oxford de Citações. Um caso de problema semelhante ao problema 79 do Papiro de Rhind foi proposto em 1202, por Leonard Fibonacci em sua obra *Liber Abaci*[15], e tinha o seguinte enunciado:

> Sete mulheres velhas estão indo para Roma; e cada uma delas tem sete mulas; cada mula carrega sete sacos; cada saco contém sete pães; cada pão contém sete facas; e cada faca tem sete bainhas. Qual é o número total de coisas? (BIGGS, 1979, p. 110, tradução nossa).

Desse modo, verificamos que esse problema de contagem é milenar e suas resoluções perpassam por diversas culturas. Problemas como esse, apresentam algumas ideias que estão presentes no conteúdo de combinatória, e apesar de não possuir uma formalização como campo de saber matemático, já eram resolvidos utilizando técnicas mais elaboradas que o procedimento de contagem.

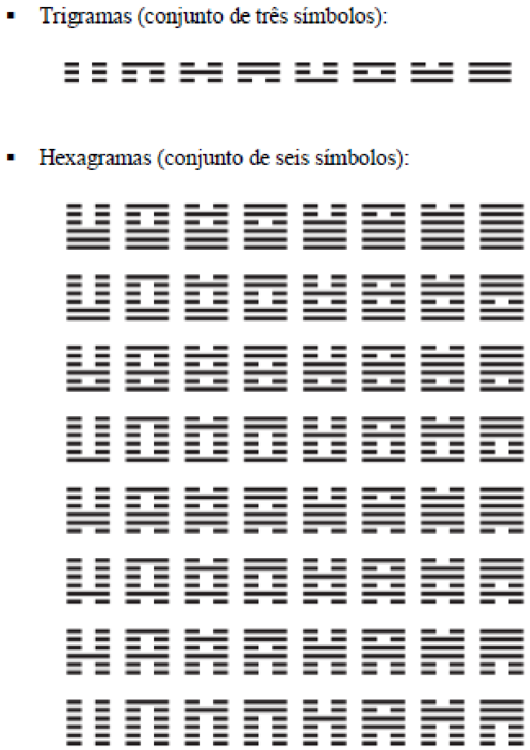
No que diz respeito à ideia de combinações e permutações, os primeiros vestígios encontrados foram na China. A obra *I Ching*[16] ou Livro das Mudanças, apresentou dois símbolos Yin (-) e Yang (- -), os quais eram combinados formando um conjunto de três

[15] A obra *Liber Abaci* foi escrita por Leonard Fibonacci em 1202, e estava pautada em questões da aritmética e álgebra elementares, como métodos de cálculo com inteiros e frações, e resolução de equações lineares e quadráticas. Pesquisas destacaram a influência árabe em sua obra, como na defesa da notação indo-arábica, de modo que Fibonacci, ao longo dos quinze capítulos, buscou explicar a leitura e a escrita desses novos números. (EVES, 2007).

[16]O *I Ching* (Livro das Mutações) é um livro chinês do período de 1182 – 1135 a.C., e é um dos livros mais famosos da literatura chinesa. (EVES, 2007).

símbolos (trigramas) e de seis símbolos (hexagramas). Quando combinados, obtêm-se um total de 8 trigramas distintos e 64 hexagramas, como os seguintes:

Figura 1 - Possíveis trigramas e hexagramas

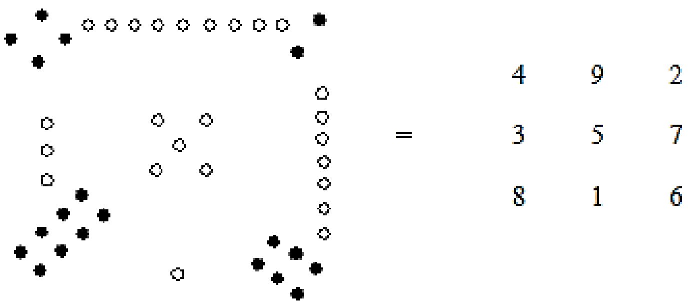


Fonte: Vazquez (2011, p. 16)

Conforme ressalta Biggs (1979), essa atividade de formação dos trigramas e hexagramas poderia ser relacionada ao conceito de combinação com repetição que conhecemos atualmente. Para a realização de todos os casos possíveis, os chineses apresentavam certa organização, como a simetria dos elementos. Assim, como sabiam que tinham $2^3 = 8$ trigramas possíveis e $2^6 = 64$ hexagramas, esse povo conjecturou a regra n^r para os casos que envolviam combinação com repetição. Além disso, essa estrutura em símbolos Yin e Yang poderia ser associada à ideia dos números binários, a qual Leibniz, em 1703, atribuiu aos ancestrais chineses a descoberta de tais números.

Outro componente relacionado à combinatória é a elaboração dos quadrados mágicos presentes na cultura chinesa. O quadrado mágico é um quadrado de ordem $n\,x\,n$, que é preenchido de maneira que a soma dos elementos de cada linha, coluna e diagonal possuam o mesmo valor (BIGGS, 1979). Segundo Vazquez (2011), o primeiro quadrado mágico conhecido é o de *Lo Shu*, presente no livro *I Ching*, que era de ordem três. Esse quadrado mágico organizado em símbolos representava as nove salas do palácio de Ming Thang, local onde ocorriam rituais.

Figura 2 - Quadrado mágico de Lo Shu



Fonte: Wilson; Lloyd apud Vazquez (2011, p. 19)

No momento em que esse quadrado mágico foi representado por números, tal organização causou fascinação pois, conforme ressalta Biggs (1979), além dos quadrados estarem relacionados a questões místicas, a aritmética envolvida causava espanto para a época. Além dos chineses, os árabes também apresentavam interesse em realizar a construção dos quadrados mágicos, atividade que pode ter sido introduzida por Jabir Ibn Hayyan (780 a.C.). Os árabes tinham habilidades na construção desses quadrados, tendo construído quadrados até a ordem 9, como apresentado na versão mais completa da Enciclopédia, publicada no Cairo em 1928. Além disso, os árabes apresentavam técnicas para a construção dos quadrados mágicos, de ordem par e ímpar, utilizando técnicas como a chamada “simples técnica da fronteira”.

Ainda no oriente, os hindus exibiam indícios no ramo da combinatória, pois apresentavam problemas envolvendo os conceitos de combinação e permutação. Um exemplo desses problemas estava no Tratado de Medicina de Susruta, do século VI a.C., no qual encontra-se uma discussão dos diferentes tipos de sabores que podem ser formados combinando seis qualidades básicas: doce, ácido, solução salina, pungente, amargo e adstringente. Para a solução desse problema, os hindus realizaram uma listagem sistemática, obtendo: seis soluções tomadas separadamente, quinze se tomados em duplas, vinte se tomados três elementos, quinze se tomados quatro elementos, seis se tomados cinco elementos e uma se fossem utilizados todos os elementos.

Apesar de apresentarem uma listagem sistemática na resolução do problema anterior, alguns fatores apontavam que os hindus conheciam uma regra para resolver problemas de combinação e permutação (BIGGS, 1979). Essa afirmação pode ser comprovada quando a obra

Brihatsamhita, escrita por Varahamihira[17], exibe cálculos dos perfumes que podem ser formados tomando quatro ingredientes, entre dezesseis possíveis. Desse modo, a obra relata que existem 1820 possibilidades de selecionar os quatro ingredientes, sendo que tal resultado dificilmente foi obtido por meio da listagem, já que a resolução na obra não aparece comentada e nem listada, levando a acreditar que os hindus conheciam a regra para resolver problemas desse tipo. Outro fator que indicava a habilidade dos hindus no campo da combinatória foi apresentado na obra intitulada *Lilavati*[18], escrita por Bháskara por volta de 1150, que também resolveu o problema dos sabores, além de um problema de combinação e outro de permutação, sem realizar a listagem de possibilidades.

No Ocidente, o conteúdo de combinatória foi trabalhado inicialmente pelos pitagóricos (540 a. C.) no desenvolvimento dos números triangulares. Esse conteúdo surgiu da necessidade de o homem escolher grupos de um determinado conjunto de elementos. A evolução da combinatória ocorreu de maneira lenta, sendo que os jogos de dados constituíram um dos principais fatores que contribuíram para o seu desenvolvimento, com Tartaglia (1499 – 1557) (BATANERO, GODINO, NAVARRO-PELAYO, 1996). Esses autores ressaltam na evolução da combinatória, alguns fatos marcantes, como em 1321, Levi ben Gerson, matemático e astrônomo judeu, escreveu sobre as três regras para a resolução de problemas de combinatória, descobertas pelos hindus, em relação às permutações, arranjos e combinações. Porém, a maior contribuição de Levi ben Gerson foi argumentar a igualdade no número de possibilidades dos casos simétricos nos problemas de combinação, sendo representado atualmente como: $C_r^n = C_{n-r}^n$.

Já no século XVII com os estudos de Fermat e Pascal no campo da probabilidade, a combinatória elevou-se de um campo somente de técnicas para resolver problemas, para um campo da Matemática que merece um estudo formal, fato que levou ao desenvolvimento dos princípios fundamentais da combinatória. Dessa maneira, o tema tomou forma como uma disciplina com caráter científico, por meio dos trabalhos de Leibniz e Bernoulli. Leibniz definiu a combinatória como

> [...]o estudo da colocação, ordenação e escolha de objetos enquanto Nicholson em 1818 definiu-a como o ramo da matemática que nos ensina a averiguar e expor todas as possíveis formas através das quais um dado número de objetos podem ser associados e misturados entre si (VASQUEZ, NOGUTI, 2004, p.4)

---

[17]Astrônomo hindu que publicou trabalhos sobre a trigonometria do seu povo, além de uma tábua de senos aparentemente oriunda da tábua de cordas de Ptolomeu (EVES, 2007, p. 248).

[18]Obra escrita pelo famoso matemático Bháskara, publicada em 1150, referente ao conhecimento da aritmética. (EVES, 2007).

Nessa perspectiva, a combinatória é vista como um ramo da Matemática, com definições, teoremas e propriedades, e envolve problemas de existência e de contagem de objetos. Por outro lado, Bernoulli, que estava desenvolvendo pesquisas no campo da probabilidade, considerou a combinatória como uma importante ferramenta para resolver os problemas probabilísticos de cunho teórico. Outro matemático que contribuiu para a evolução da combinatória como uma ciência Matemática foi Leonard Euler. Ele observou alguns teoremas em relação ao problema de partição de um número inteiro, além de uma importante contribuição no desenvolvimento da teoria dos grafos, a partir do problema das pontes de Königsberg[19].

Segundo estudos sobre o tema (BATANERO, GODINO, PELAYO, 1996; VAZQUEZ, 2011) o desenvolvimento da combinatória levou à ampliação do campo da Matemática em outras áreas, como a Probabilidade, determinantes, teoria dos grupos, teoria dos números e a topologia. Newton (1642 – 1727), pautado em trabalhos anteriores, desenvolveu o Teorema Binomial, conhecido no Brasil como Binômio de Newton, relacionando conceitos do cálculo diferencial integral com a combinatória. Galois (1811 - 1832) para realizar seu trabalho na teoria dos grupos utilizou o trabalho de Lagrange sobre permutações das raízes em uma equação polinomial. Além de contribuir para a própria Matemática, a combinatória também propiciou a evolução e aplicação em áreas externas à Matemática, exemplos da Geologia, Química, Informática, Engenharia. Apesar de esse desenvolvimento contribuir para diversas áreas na Matemática, devemos estar atentos que tal evolução ocorreu lentamente pois, apesar de diversos povos apresentarem conhecimentos aplicados aos problemas de seu tempo, os mesmos não aprofundavam em aspectos conceituais e no estudo do tema como objeto matemático, fato que pode indicar dificuldades na compreensão do tema. (BATANERO, GODINO, PELAYO, 1996).

3.2 Combinatória como objeto matemático

Após um estudo da evolução histórica da combinatória, nesse item, focamos a combinatória como objeto matemático, abordando suas definições, conceitos e demonstrações que abrangem o tema. Morgado, Pitombeira de Carvalho, Pinto Carvalho e Fernandez (1991) definem a combinatória como uma parte da Matemática que analisa as estruturas e relações

[19]Um problema que questionava se era possível realizar um trajeto entre quatro porções de terra da cidade de Königsberg, de modo a cruzar as sete pontes que ligavam as terras somente uma vez, e retornar para o ponto de partida. (EVES, 2007).

discretas. Dentre os problemas presentes nesse conteúdo destacam-se dois tipos: demonstrar a existência de subconjuntos de elementos de um conjunto finito dado e que satisfazem certas condições; contar ou classificar os subconjuntos de um conjunto finito que satisfazem certas condições dadas. (MORGADO *et. al*. 1991, p. 2).

Dessa maneira, a combinatória vai muito além do estudo que envolve apenas problemas de contagem como as permutações, combinações e arranjos, que são trabalhados no ensino básico. Estão presentes problemas de contagem que utilizam outros conceitos como o Princípio da Inclusão-Exclusão e o Princípio de Dirichlet[20], também conhecido como princípio das gavetas ou da casa dos pombos, além de problemas de existência de conjuntos e funções geradoras. Porém, Morgado *et. al*. (1991) consideram que um dos motivos de se privilegiar o ensino de permutações, arranjos e combinações na educação básica é pelo fato de serem mais simples e terem um uso mais amplo, possibilitando resolver uma grande quantidade de problemas de combinatória. Para resolver problemas de combinatória, sem que haja a necessidade de listar todos os casos possíveis, utilizamos os princípios aditivo e multiplicativo como ferramentas fundamentais nesse processo de resolução, sendo eles:

Princípio Aditivo

Se A e B são dois conjuntos distintos e disjuntos com p e q elementos, respectivamente, então A ∪ B possui p + q elementos.

Extensão do Princípio Aditivo

Se A_1, A_2,...,A_n são conjuntos distintos e disjuntos dois a dois, e se A_i possui a_i elementos, então a quantidade de elementos da união de todos esses conjuntos é dado pela soma da quantidade de elementos de cada um deles. Ou seja, $\cup_{i=1}^{n} A_i$ possui $\sum_{i=1}^{n} a_i$ elementos.

Então, dado um problema como: Uma mãe decide matricular seu filho em uma atividade extracurricular na escola em que ele estuda e verifica que a mesma possui três esportes: natação, futsal e judô; além de dois cursos na área artística: desenho e música. Sabendo que a mãe só tem condições de matricular seu filho em uma atividade extracurricular, quantas possibilidades de escolha a mãe e o filho têm para escolher? Nesse problema, verificamos que eles têm três possibilidades de escolha no conjunto dos esportes e duas possibilidades de escolha no conjunto

---

[20] Para mais informações desses conceitos que não abordaremos nesse texto, sugerimos a consulta das obras de Morgado *et. al.* (1991), Muniz Neto (2012).

referente à área artística. Aplicando o princípio aditivo, a mãe e o filho têm cinco possibilidades de escolha para realizar uma atividade extracurricular.

Princípio Multiplicativo ou Princípio Fundamental da Contagem

Se uma decisão d_1 pode ser tomada de a maneiras e se, uma vez tomada a decisão d_1, a decisão d_2 puder sempre ser tomada de b maneiras, então o número de maneiras de se tomarem as decisões d_1 e d_2 é $a\ x\ b$.

Extensão do Princípio Multiplicativo

Se um evento A_i pode ocorrer de m_i maneiras diferentes, para $i = 1, 2, 3, \dots, n$, então esses n eventos podem ocorrer, em sucessão, de $m_1\ x\ m_2\ x\ \dots\ x\ m_n$ maneiras diferentes.

Ressaltamos que não é necessário que a decisão d_2 seja independente da decisão d_1, pois há problemas em que a escolha de elementos na decisão d_2 é definida a partir de uma escolha na decisão d_1. Porém, é importante observar que para utilizarmos o princípio multiplicativo, é necessário que, independente da escolha realizada na decisão d_1, a decisão d_2 terá *sempre a mesma quantidade de escolhas possíveis* a serem tomadas. Um problema que é possível resolver utilizando o princípio multiplicativo: Quantos números ímpares de três algarismos distintos são possíveis formar com os algarismos do sistema de numeração decimal?

Para a resolução do problema, utilizando o princípio multiplicativo, vamos separar o mesmo em três etapas de escolha. Conforme solicitado, devemos formar números ímpares, então temos 5 opções de escolha para a ordem das unidades do número que será formado. Como dito, a escolha do algarismo na segunda etapa depende da escolha realizada na anterior, por exemplo, caso já tenhamos escolhido o algarismo 1, não podemos utilizá-lo nesse momento. Porém independentemente da escolha realizada na etapa anterior, temos 8 opções de escolha para a ordem das centenas, já que não podemos utilizar o 0 e nem o algarismo já escolhido na primeira etapa. Por fim, nos restam também 8 possibilidades de escolher a ordem das dezenas, pois nessa etapa não podemos utilizar apenas os dois algarismos já escolhidos. Dessa maneira, obtemos $8 \times 8 \times 5 = 320$ possibilidades de formar o número que atenda as condições impostas.

A utilização do princípio multiplicativo nos possibilitou encontrar a quantidade de números possíveis de se formar sem ter a necessidade de realizar a listagem de todas as possibilidades, o que seria inviável para problemas desse tipo. Esses dois princípios apresentados, o aditivo e multiplicativo, oferecem condições e estratégias para resolver problemas de combinatória. Além disso, a partir dos princípios, em especial o princípio multiplicativo, é possível deduzir fórmulas para os problemas de arranjo, combinação e permutação. Apresentamos a seguir, os conceitos de permutação, arranjo e combinação, pautados na obra de Santos, Mello, Murari (2007), e discorremos sobre as características de cada conceito.

3.2.1 Permutação

Uma permutação de n objetos distintos é qualquer agrupamento ordenado desses objetos, sendo denominado P_n o número de permutações simples dos n objetos. Dessa maneira, nos referimos a uma permutação, quando desejamos encontrar de quantas maneiras é possível ordenar um conjunto com n elementos.

A partir dessa definição de permutação, vamos conjecturar a fórmula da resolução utilizando o princípio multiplicativo. Para a primeira posição temos n possibilidades, para a segunda posição temos $(n-1)$, a terceira temos $(n-2)$, até que na última posição temos 1 única possibilidade de elemento a ser ordenado. Então, pelo princípio multiplicativo temos que o número total de maneiras de ordenar o conjunto de n elementos é dado por:

$$P_n = n\,.\,(n-1).\,(n-2).\,\ldots\ .2\,.1$$

É equivalente à

$$P_n = n!$$

Um problema frequentemente presente nos livros didáticos é a organização de filas, como o seguinte: De quantas maneiras pode-se organizar uma fila com quatro pessoas?

Para a primeira posição da fila temos 4 possibilidades de escolha, para a segunda posição temos 3 possibilidades, para a terceira posição sobraram 2 possibilidades e para a última posição apenas 1 opção. Utilizando o princípio multiplicativo, podemos organizar a fila de quatro pessoas de $4\ x\ 3\ x\ 2\ x\ 1 = 24$ maneiras, o mesmo resultado da fórmula, $4! = 24$.

3.2.2 Arranjo

Um arranjo simples de n elementos tomados p a p, onde $n \geq 1$ e p é um número natural tal que $p \leq n$, são todos os grupos de p elementos distintos, que diferem pela ordem e pela grandeza dos p elementos que compõem cada grupo.

Assim como está presente na definição, quando abordamos problemas de arranjo, devemos estar atentos à ordem em quem os elementos escolhidos serão distribuídos. Selecionados os p elementos em uma determinada ordem, quando trocamos a ordem dos mesmos p elementos selecionados, estamos formando um novo grupo para problemas de arranjo. Também ressaltamos que existem autores (DANTE, 2010; SOUZA, J., 2010) que consideram os problemas de permutação como um caso dentre os problemas de arranjo, sendo que nesse caso, deseja-se selecionar p elementos dentre n, com p = n.

Os livros didáticos apresentam a fórmula $A_p^n = \frac{n!}{(n-p)!}$ para a resolução dos problemas de arranjo, porém, caso ocultem como a obtiveram e o porquê de a mesma estar correta, pode dificultar a atribuição de significados nas resoluções dos problemas por parte dos alunos, conforme apresentam pesquisas sobre o tema (PESSOA, 2009; MIGUEL; MAGINA, 2003). Assim, julgamos importante o professor demonstrar, a partir da definição e em conjunto com os alunos, a fórmula do arranjo simples, utilizando o princípio multiplicativo, como a seguir.

Temos um conjunto com n elementos, do qual devemos selecionar de modo ordenado um grupo com p elementos. Dessa maneira, para o primeiro elemento escolhido temos n opções. Para a segunda escolha, temos $(n-1)$ opções, para a terceira temos $(n-2)$, até que na $p - enésima$ escolha nos resta $(n-(p-1))$ possibilidades de elementos. Então, utilizando o princípio multiplicativo, temos que a quantidade total de grupos que podem ser formados é dada por:

$$A_p^n = n.(n-1).(n-2). \dots .(n-(p-1))$$

Por questão de organização da regra**,** utilizando o princípio da igualdade podemos multiplicar e dividir um mesmo número sem que altere a sentença. Então, multiplicaremos e dividiremos a fórmula encontrada por $(n-p)!$. Desse modo, realizando as operações temos que:

$$A_p^n = \frac{\left[n.(n-1).(n-2). \dots .\left(n-(p-1)\right)\right].(n-p)!}{(n-p)!}$$

É equivalente à

$$A_p^n = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Um problema comum, quando se estuda arranjo é o de organizar comissões com cargos, como o seguinte: Dez alunos de uma escola decidem montar uma comissão para realizar a formatura da turma. De quantas maneiras podem ser escolhidos três alunos, sendo um para presidente, um para tesoureiro e um para secretário da comissão?

Vamos resolver esse problema de dois modos utilizando as estratégias do princípio multiplicativo e a aplicação da fórmula. Na primeira estratégia, utilizando apenas o princípio multiplicativo, para o cargo de presidente possuímos 10 modos, para o cargo de tesoureiro temos 9 opções e 8 possibilidades para secretário. Desse modo, temos um total de $10\ x\ 9\ x\ 8 = 720$ maneiras de montar a comissão.

Na segunda estratégia, aplicando a fórmula de arranjo simples, obtemos que:

$$A_3^{10} = \frac{10!}{(10-3)!} \Leftrightarrow A_3^{10} = \frac{10!}{7!} \Leftrightarrow A_3^{10} = \frac{3628800}{5040} \Leftrightarrow A_3^{10} = 720$$

3.2.3 Combinação

Combinação simples de n elementos tomados p a p, onde n≥ 1 e p é um número natural tal que $p \leq$ n, são todas as escolhas não ordenadas de p desses n elementos.

Dessa maneira, quando nos referimos a uma combinação, desejamos formar subconjuntos de p elementos, de um total de n, com $p \leq n$. Uma característica importante que diferencia esse tipo de problema dos problemas de arranjo e permutação é a irrelevância da ordem de seleção dos elementos. Como a combinação simples pode ser considerada como a formação de subconjuntos, nos problemas de combinação a alteração da ordem dos elementos selecionados não altera o subconjunto formado.

De modo geral, os livros didáticos e problemas que apresentam apenas a fórmula de resolução de problemas de combinação simples $C_p^n = \frac{n!}{p!\,.(n-p)!}$, podem contribuir para gerar dificuldades de compreensão dos alunos.

Essa escolha de apresentação pode ser realizada de modo que os mesmos compreendam o surgimento da fórmula, possibilitando elaborarem sua conjectura. Considerando uma combinação, a formação de subconjuntos de p elementos de um total de n, com $p \leq n$, utilizando o princípio multiplicativo, iremos conjecturar a fórmula apresentada. Para o primeiro elemento do subconjunto temos n possibilidades, para o segundo elemento $(n-1)$ possibilidades, para o terceiro, $(n-2)$ opções de escolhas, até que para o $p - enésimo$ elemento do subconjunto temos $(n-(p-1))$ opções de escolha. De acordo com o princípio multiplicativo, o número de subconjuntos encontrados é $C_p^n = n.(n-1).(n-2).\ldots\ .(n-(p-1))$. Porém, como destacamos, nos problemas de combinação a ordem das escolhas dos elementos é irrelevante na formação dos subconjuntos, e, ao selecionarmos os elementos dos conjuntos da maneira que foi realizada a ordem das escolhas está sendo considerada.

Dessa forma, vamos considerar os elementos A, B e C de um conjunto {A, B, C}. De quantos modos podemos organizar os elementos apresentados, de maneira que a ordem dos elementos seja considerada? Podemos organizar os elementos A, B e C de 6 maneiras distintas, pois para a primeira posição temos 3 possibilidades, para a segunda posição 2 possibilidades e para a terceira posição restou 1 possibilidade, sendo os seguintes casos: A-B-C, A-C-B, B-A-C, B-C-A, C-A-B, C-B-A. Apesar de organizarmos os três elementos de 6 maneiras distintas, quando nos referimos ao conjunto que contém apenas esses elementos, o conjunto é o mesmo. Como nos problemas de combinação, para a formação de subconjuntos, a ordem dos elementos é irrelevante, temos que desconsiderar os subconjuntos contados mais de uma vez, como os conjuntos {A, C, B}, {B, A, C}, {B, C, A}, {C, A, B} e {C, B, A} que são iguais ao conjunto {A, B, C}.

Para um subconjunto com p elementos distintos, utilizando o princípio multiplicativo, podemos organizar os p elementos de $p!$ maneiras. Entretanto, apesar de estarem organizados de formas diferentes, os subconjuntos formados são os mesmos. Então no resultado encontrado $C_p^n = n.(n-1).(n-2). \dots .(n-(p-1))$ estamos contando $p!$ a mais cada subconjunto formado. Dessa forma, dividindo por $p!$ o valor encontrado, temos que o número de subconjuntos possíveis de serem formados com p elementos de um conjunto de n elementos é dado por:

$$C_p^n = \frac{n.(n-1).(n-2). \dots .(n-(p-1))}{p!}$$

Analogamente ao caso do arranjo, vamos multiplicar e dividir a fórmula encontrada por $(n-p)!$, obtendo

$$C_p^n = \frac{\left[n.(n-1).(n-2). \dots .\left(n-(p-1)\right)\right].(n-p)!}{p!\,.(n-p)!}$$

Logo,

$$C_p^n = \frac{n!}{p!\,.(n-p)!}$$

Nessa perspectiva, apresentamos o seguinte problema para exemplificar problemas de combinação: Pedro, Maria, João e Lara participam de um sorteio, no qual dois deles irão ganhar uma entrada para o cinema. De quantas maneiras distintas podem ser realizadas a premiação do sorteio?

Para isso, vamos pensar nas etapas que serão realizadas para definir os premiados. No momento de definir o primeiro sorteado temos 4 possibilidades de resultados e para o segundo, tem-se 3 possibilidades, já que um deles havia sido sorteado anteriormente. Assim, temos

$4\ x\ 3 = 12$ possibilidades. Mas nesse problema a ordem dos sorteados não tem importância, pois se fossem sorteados Pedro-Maria ou Maria-Pedro seriam as mesmas pessoas que iriam ao clube. Dessa maneira, como estamos contando cada caso duas vezes, o número de possíveis premiados é dado por $\frac{4\ x\ 3}{2} = 6$. Caso aplicássemos a fórmula de resolução de maneira direta, teríamos:

$$C_2^4 = \frac{4!}{2!\,.\,(4-2)!} \Leftrightarrow C_2^4 = \frac{4!}{2!\,.\,2!} \Leftrightarrow C_2^4 = \frac{24}{4} \Leftrightarrow C_2^4 = 6$$

3.2.4 Classificação de Pessoa e Borba (2010) para problemas de combinatória

Pessoa e Borba (2010) definem o raciocínio combinatório como um tipo de pensamento que envolve contagem, mas que vai além da enumeração de elementos de um conjunto.

> Na Combinatória contam-se, baseando-se no raciocínio multiplicativo, grupos de possibilidades, através de uma ação sistemática, seja pelo uso de fórmula, seja pelo desenvolvimento de uma estratégia que dê conta de atender aos requisitos desses tipos de problemas, como a constituição de agrupamentos, a determinação de possibilidades e sua contagem. (PESSOA; BORBA, 2010, p. 2)

Assim, problemas de combinatória podem ser resolvidos utilizando diversas estratégias com o objetivo de realizar a contagem. As estratégias de resolução, como a listagem ou utilização de fórmulas, são utilizadas baseadas no raciocínio multiplicativo, o qual deve ser o foco no trabalho com os alunos.

Diferentemente das classificações de permutação, combinação e arranjo que apresentamos anteriormente que levaram em consideração apenas aspectos matemáticos, Pessoa e Borba (2010) modelam uma nova classificação pautada em questões cognitivas. Nessa concepção, baseadas na Teoria dos Campos Conceituais, as pesquisadoras realizam uma nova classificação para os problemas de combinatória de acordo com as propriedades contidas em cada tipo de problema, sendo eles: produto cartesiano, arranjo, permutação e combinação. Para cada tipo de problema, foram identificadas duas propriedades de modo que essas, em conjunto, diferenciam os problemas. A seguir, apresentaremos a classificação realizada por Pessoa e Borba (2010) com as duas propriedades e um exemplo para cada tipo de problema.

Produto Cartesiano

- Dados dois (ou mais) conjuntos distintos, os mesmos serão combinados para formar um novo conjunto;

- A natureza dos conjuntos é distinta do novo conjunto formado.

  Exemplo: Pedro vai à sorveteria e deseja tomar uma casquinha com uma bola de sorvete. Sabendo que tem sete sabores de sorvete e três coberturas diferentes que ele gosta, quantas maneiras diferentes de casquinha Pedro pode escolher?

Permutação

- Todos os elementos do conjunto serão usados, cada um apenas uma vez (especificamente para os casos sem repetição);
- A ordem dos elementos gera novas possibilidades.

  Exemplo: Quantos números de quatro algarismos distintos são possíveis formar usando os algarismos 1, 4, 6, 9?

Arranjo

- Tendo n elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos, ..., p elementos, com $0 < p < n$, sendo p e n números naturais;
- A ordem dos elementos gera novas possibilidades.

  Exemplo: Quantos pares ordenados (x, y) com x ≠ y, é possível formar a partir dos elementos do conjunto A = {2, 3, 5, 6, 7, 9}.

Combinação

- Tendo n elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos, ..., p elementos, com $0 < p < n$, com p e n naturais;
- A ordem dos elementos não gera novas possibilidades.

  Exemplo: Ane, Elisa, Rosana, Felipe e Gustavo formam uma equipe. Dois deles precisam representar a equipe em uma apresentação. Quantas possibilidades de duplas são possíveis de formar na equipe?

3.3 Um olhar sobre os Livros Didáticos

O livro didático se constitui como um importante material didático no ambiente escolar, se tornando mais um elemento constituinte do processo didático. De acordo com as Orientações Curriculares Nacionais do Ensino Médio:

> O texto didático traz para a sala de aula mais um personagem, seu autor, que passa a estabelecer um diálogo com o professor e seus alunos, refletindo seus pontos de vista sobre o que é importante ser estudado e sobre a forma mais eficaz de se trabalharem os conceitos matemáticos. (BRASIL, 2006, p. 86).

Podemos dizer então, que o livro didático é um dos materiais que o professor se pauta na sua prática docente, contribuindo na elaboração e desenvolvimento de suas aulas, além de representar um material de suporte para os alunos (BRASIL, 2006). Assim, as escolhas didáticas do professor, por vezes pautadas nas escolhas do livro didático, como o conteúdo apresentado, a metodologia, exercícios, vão interferir na aprendizagem dos alunos.

Desse modo, julgamos pertinente analisarmos características do ensino proposto acerca do conteúdo de combinatória. Decidimos tomar para a análise livros do 2º ano do ensino médio, que combinatória está inserida, das três coleções mais adotadas[21] que foram aprovadas PNLD e constam no Guia do Livro Didático do PNLD 2012 (BRASIL, 2011). Os livros escolhidos para a análise se encontram no quadro a seguir:

Quadro 2 - Livros Didáticos analisados

L_1	Matemática: ciências e aplicações - vol. 2, São Paulo, Editora Saraiva, 2010, 6ª edição.	Gelson Iezzi; Osvaldo Dolce; David Degenszajn; Roberto Périgo; Nilze de Almeida.
L_2	Matemática: contexto e aplicações – vol. 2, São Paulo, Editora Ática, 2010.	Luiz Roberto Dante
L_3	Novo Olhar matemática – vol.2, São Paulo, Editora FTD, 2010.	Joamir Roberto de Souza

Fonte: dados da pesquisa

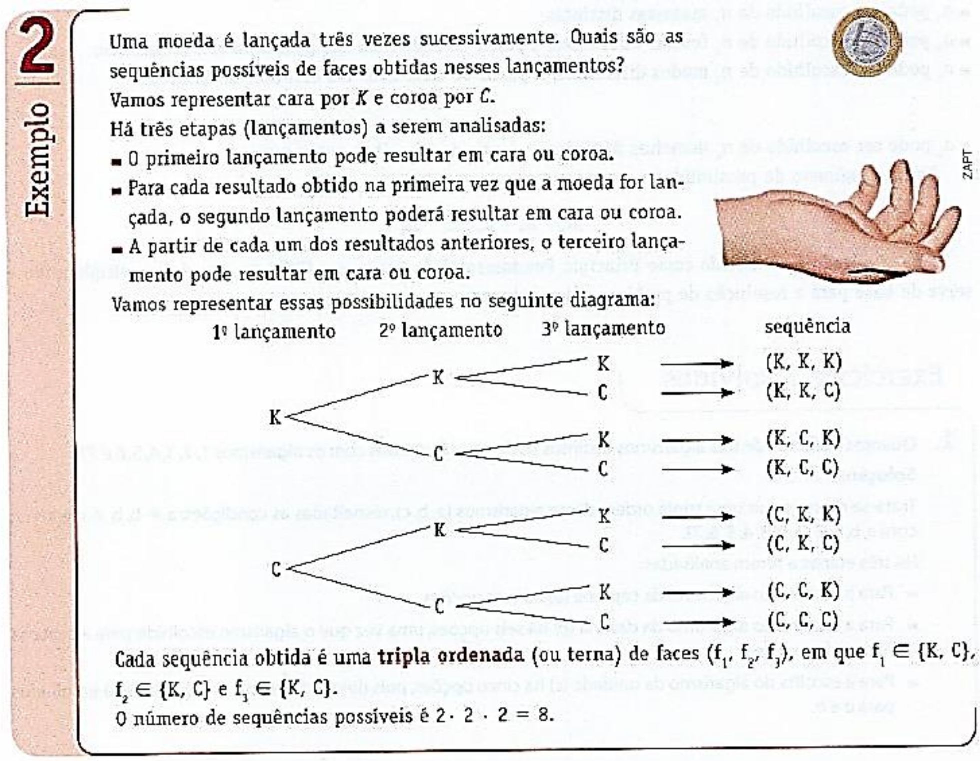
Para analisarmos aspectos do ensino de combinatória proposto pelos livros didáticos, iremos nos ater a alguns elementos do tema, sendo eles: a introdução e conceitualização do conteúdo, a organização ao longo do capítulo e as técnicas de resolução mobilizadas pelo autor. Além disso, focaremos na introdução do conteúdo de combinatória e nos tópicos referentes às permutações, arranjos e combinações, em detrimento aos demais tópicos como permutações com repetições e binômio de Newton, que não estão presentes na nossa sequência didática.

[21]Fonte: Portal do Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (Portal de FNDE). Disponível em: < http://www.fnde.gov.br/programas/livro-didatico/livro-didatico-dados-estatisticos>. Acesso em: 15 de abril de 2014.

a) Sobre o Livro L_1

Ao introduzir o conteúdo de combinatória, os autores iniciam com a apresentação de alguns problemas do cotidiano, explicitando que os mesmos abrangem o conteúdo em questão. Em seguida, apresentam três exemplos, que são resolvidos utilizando a árvore de possibilidades, com o objetivo de apresentar o Princípio Fundamental da Contagem, como mostra o exemplo a seguir:

Figura 3 - Introdução da combinatória no livro L_1



Exemplo 2

Uma moeda é lançada três vezes sucessivamente. Quais são as sequências possíveis de faces obtidas nesses lançamentos?

Vamos representar cara por K e coroa por C.

Há três etapas (lançamentos) a serem analisadas:

- O primeiro lançamento pode resultar em cara ou coroa.
- Para cada resultado obtido na primeira vez que a moeda for lançada, o segundo lançamento poderá resultar em cara ou coroa.
- A partir de cada um dos resultados anteriores, o terceiro lançamento pode resultar em cara ou coroa.

Vamos representar essas possibilidades no seguinte diagrama:

Cada sequência obtida é uma **tripla ordenada** (ou terna) de faces (f_1, f_2, f_3), em que $f_1 \in \{K, C\}$, $f_2 \in \{K, C\}$ e $f_3 \in \{K, C\}$.

O número de sequências possíveis é $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

Fonte: Iezzi *et. al.* (2010, p. 251)

Percebemos que na discussão apresentada, os autores destacam as três etapas que envolvem o problema e as possibilidades de ocorrer um evento em cada uma delas, representando-as com o diagrama de árvores. Essa escolha possibilita ao aluno compreender a validade do Princípio Fundamental da Contagem, fato que poderia não ocorrer caso não fosse apresentado inicialmente.

Após um breve trabalho com fatorial, ao longo do capítulo os conceitos de arranjo, permutação e combinação são contemplados, a partir de situações-problema que representam cada tipo de problema, e realizam de maneira adequada a elaboração das fórmulas utilizando o

Princípio Fundamental da Contagem. Quando inicia os problemas de arranjo, os autores utilizam o PFC a partir da definição, como a seguir:

Figura 4 - Conjectura da fórmula do arranjo no livro L_1

Contagem do número de arranjos

Dados n elementos distintos, vamos indicar por $A_{n,k}$ o número de arranjos desses elementos tomados k a k.

Vamos usar o PFC:

- O 1º elemento da sequência pode ser escolhido de n formas possíveis.
- O 2º elemento da sequência pode ser escolhido de $n - 1$ maneiras distintas, pois já fizemos a escolha anterior e não há repetição de elementos.
- Feitas as duas primeiras escolhas, há $n - 2$ maneiras diferentes de escolher o 3º elemento da sequência, pois não pode haver repetição.

$\vdots$ $\qquad$ $\vdots$ $\qquad$ $\vdots$

- Para escolher o k-ésimo elemento, a partir das $k - 1$ escolhas anteriores, sobram $n - (k - 1) = n - k + 1$ opções.

Assim, pelo PFC, a quantidade de arranjos possíveis (indicada por $A_{n,k}$) é:

$$\boxed{A_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)} \quad (1)$$

Para obter uma expressão equivalente a (1) usando fatorial, basta multiplicá-la e dividi-la por: $(n - k) \cdot (n - k - 1) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1 = (n - k)!$. De fato:

$$A_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots (n-k+1) \cdot \frac{(n-k) \cdot (n-k-1) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-k) \cdot (n-k-1) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Observe que o numerador da expressão acima corresponde a $n!$.

Assim:

$$\boxed{A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}} \quad (2)$$

Os problemas que envolvem contagem do número de arranjos podem ser resolvidos pelo PFC ou pela aplicação das fórmulas equivalentes (1) ou (2).

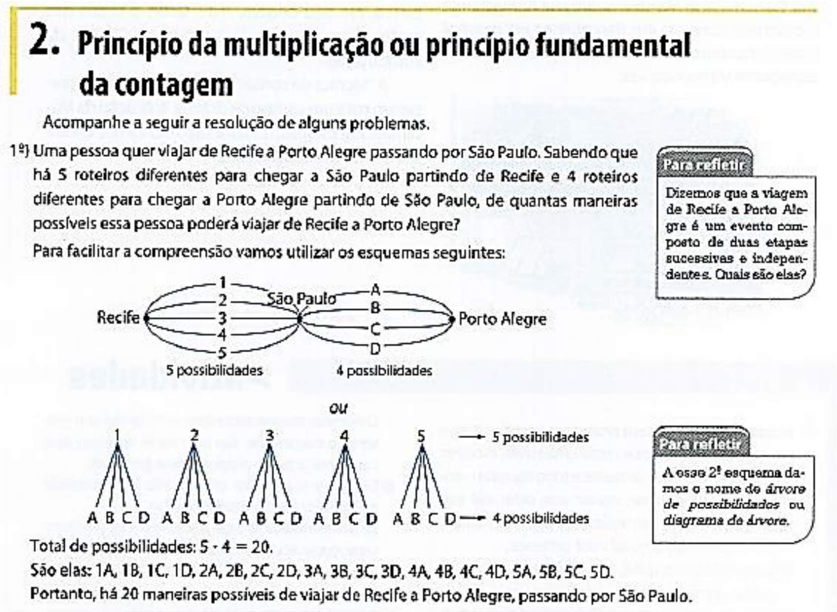
Fonte: Iezzi *et. al.* (2010, p. 261 - 262)

Outra característica positiva da obra é o fato de ser ressaltado que para resolver os problemas de combinatória, é possível utilizar tanto a fórmula do arranjo, quanto o PFC. Além do destaque nesse momento, nos exemplos abordados, são apresentadas as duas estratégias de resolução, ficando a critério do aluno escolher a resolução que desejar. Por fim, nos problemas de combinação é ressaltada a irrelevância da ordem dos elementos nesse tipo de problema, sendo reflexões a partir do problema apresentado, para assim elaborar a fórmula correspondente. Em relação à organização que é adotada no capítulo, o livro L_1 tem como característica uma organização estruturada em módulos, nos quais são trabalhados separadamente cada tipo de problema combinatório.

b) Sobre o Livro L_2

O autor inicia o capítulo com uma contextualização e fatos históricos que envolvem o conteúdo de combinatória. Porém, os mesmos são deixados de lado para a introdução do tema. Para isso, o mesmo seleciona um problema e o resolve utilizando o diagrama de árvore, com o objetivo de realizar a conjectura do Princípio Fundamental da Contagem, assim como no livro L_1.

Figura 5 - Introdução do conteúdo no livro L_2



2. Princípio da multiplicação ou princípio fundamental da contagem

Acompanhe a seguir a resolução de alguns problemas.

1º) Uma pessoa quer viajar de Recife a Porto Alegre passando por São Paulo. Sabendo que há 5 roteiros diferentes para chegar a São Paulo partindo de Recife e 4 roteiros diferentes para chegar a Porto Alegre partindo de São Paulo, de quantas maneiras possíveis essa pessoa poderá viajar de Recife a Porto Alegre?

Para facilitar a compreensão vamos utilizar os esquemas seguintes:

Total de possibilidades: $5 \cdot 4 = 20$.

São elas: 1A, 1B, 1C, 1D, 2A, 2B, 2C, 2D, 3A, 3B, 3C, 3D, 4A, 4B, 4C, 4D, 5A, 5B, 5C, 5D.

Portanto, há 20 maneiras possíveis de viajar de Recife a Porto Alegre, passando por São Paulo.

Para refletir

Dizemos que a viagem de Recife a Porto Alegre é um evento composto de duas etapas sucessivas e independentes. Quais são elas?

Para refletir

A esse 2º esquema damos o nome de *árvore de possibilidades* ou *diagrama de árvore*.

Fonte: Dante (2010, p. 276)

Destacamos que ao longo do capítulo, a obra apresenta diferentes tipos de representações de diagramas, de acordo com o problema proposto. Em relação à apresentação do conceito de permutação e arranjo, o autor também parte de uma situação-problema, na qual faz o uso tanto do diagrama de árvores, quanto do PFC e conjectura a fórmula correspondente, fato consonante ao livro L_1. No momento de apresentar a fórmula da combinação, foi realizada a escolha de conjecturá-la a partir das fórmulas dos itens anteriores.

Figura 6 - Conjectura da fórmula de combinação no livro L_2

2º) Consideremos um conjunto com 5 elementos e calculemos o número de combinações simples de 3 elementos, ou seja, o número de subconjuntos com 3 elementos.

Conjunto com 5 elementos: {a, b, c, d, e}.

Combinações simples de 3 elementos: {a, b, c}, {a, b, d}, {a, b, e}, {a, c, d}, {a, c, e}, {a, d, e}, {b, c, d}, {b, c, e}, {b, d, e}, {c, d, e}.

Cada combinação dessas dá origem a 6 arranjos, permutando de todos os modos possíveis seus 3 elementos. Por exemplo: ao permutar todos os elementos da combinação {a, b, c} encontramos os arranjos: (a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a). Isso significa que o número de arranjos de 5 elementos tomados 3 a 3 é seis vezes o número de combinações de 5 elementos tomados 3 a 3, ou seja: $A_{5,3} = 6C_{5,3}$.

Como o 6 foi obtido fazendo permutações dos 3 elementos de, por exemplo, {a, b, c}, temos $P_3 = 6$. Logo,

$$A_{5,3} = P_3 \cdot C_{5,3}$$

$$\text{ou } C_{5,3} = \frac{A_{5,3}}{P_3} = \frac{\frac{5!}{(5-3)!}}{3!} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!2!} = \frac{20}{2} = 10$$

Fórmula das combinações simples

A cada combinação de **n** elementos tomados **p** a **p** correspondem **p!** arranjos, que são obtidos pela permutação dos elementos da combinação, ou seja:

$$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Então:

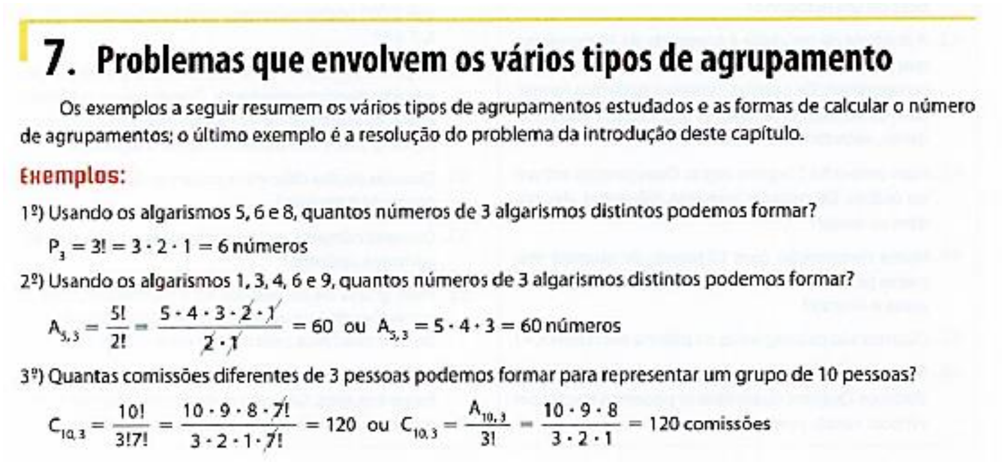
$$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!} \quad \text{ou} \quad C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Fonte: Dante (2010, p. 286)

Essa escolha possibilita caracterizar uma relação dos problemas de combinação, com os problemas de arranjo e permutação. Porém, é necessário que o aluno tenha compreendido a conjectura das demais fórmulas anteriormente, diferentemente das escolhas do livro L_1. Além disso, com o objetivo de apresentar a fórmula de combinação, o autor utiliza de uma linguagem algébrica, característica que pode gerar dificuldades, como no momento que destaca que $A_{5,3} = P_3 . C_{5,3}$.

Em relação à organização do capítulo e estratégias mobilizadas, o livro didático tem a característica de apresentar muitos exemplos resolvidos para cada tipo de problema, após a definição de cada tipo (em média sete exemplos). Na resolução dos mesmos, recorre, de modo geral, às estratégias do PFC e aplicação da fórmula, e em alguns momentos uma representação por diagramas e tabelas de dupla entrada. Além disso, o autor apresenta no capítulo, um item intitulado *Problemas que envolvem os vários tipos de agrupamentos.*

Figura 7 - Organização dos problemas no livro L_2



7. Problemas que envolvem os vários tipos de agrupamento

Os exemplos a seguir resumem os vários tipos de agrupamentos estudados e as formas de calcular o número de agrupamentos; o último exemplo é a resolução do problema da introdução deste capítulo.

Exemplos:

1º) Usando os algarismos 5, 6 e 8, quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar?

$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ números

2º) Usando os algarismos 1, 3, 4, 6 e 9, quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar?

$A_{5,3} = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 60$ ou $A_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ números

3º) Quantas comissões diferentes de 3 pessoas podemos formar para representar um grupo de 10 pessoas?

$C_{10,3} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cancel{7!}} = 120$ ou $C_{10,3} = \frac{A_{10,3}}{3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$ comissões

Fonte: Dante (2010, p. 293)

Após os exemplos que retomam as técnicas de resolução apresentada anteriormente são apresentados 31 problemas de combinatória, contendo problemas de arranjo, permutação e combinação. Essa organização possibilita que os alunos busquem identificar os tipos de problemas de acordo com suas características, em detrimento a uma organização que trabalha os diferentes tipos de problemas em módulos distintos.

c) Livro L_3

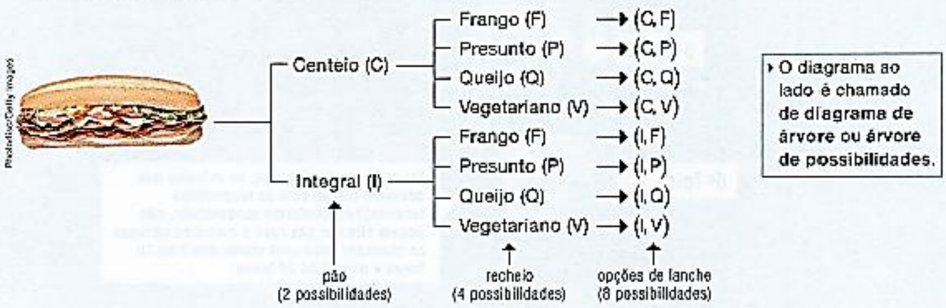
Como encontrado na análise dos livros anteriores, o autor também inicia o capítulo com um problema contextualizado, para conjecturar o PFC. Além do diagrama de árvores, ele ainda mobiliza como representação a tabela de dupla entrada, na qual são montadas as possibilidades do problema.

Figura 8 - Introdução do conteúdo no livro L_3

Veja uma situação que pode ser resolvida por esse princípio.

Em certa lanchonete, para montar um sanduíche, os clientes possuem duas opções de pão (centeio ou integral) e quatro de recheio (frango, presunto, queijo ou vegetariano). De quantas maneiras distintas um cliente pode montar um sanduíche com um tipo de pão e um de recheio?

Podemos representar todas as possibilidades por meio de um diagrama.



Essas possibilidades também podem ser representadas por uma tabela de dupla entrada.

Opção de recheio \ Opção de pão	Centeio (C)	Integral (I)
Frango (F)	(C, F)	(I, F)
Presunto (P)	(C, P)	(I, P)
Queijo (Q)	(C, Q)	(I, Q)
Vegetariano (V)	(C, V)	(I, V)

Fonte: Souza, J. (2010, p. 216)

Percebemos que os três livros analisados possuem uma organização semelhante no que se refere à introdução do conteúdo, pois partem de situações contextualizadas e fazem uso da representação do diagrama de árvores para conjecturar o PFC. Conforme destaca Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996), tal escolha contribui para sua compreensão.

Para a apresentação do conceito de arranjo e a fórmula correspondente, o livro L_3 parte de uma situação-problema, na qual utiliza o PFC. Porém para os demais conceitos, o autor utiliza a fórmula já conjecturada para apresentar as novas.

Figura 9 - Apresentação do conceito de permutação no livro L_3

Permutação simples

Nos casos de arranjos simples, em que $n = p$, temos uma **permutação simples**, ou seja, um arranjo de n elementos, tomados n a n. Indicamos a quantidade total de permutações simples de n elementos por P_n, e obtemos esse valor da seguinte maneira:

$$P_n = A_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

Permutação simples é todo arranjo de n elementos distintos tomados n a n.
A quantidade total de permutações simples é indicada por P_n e calculada por:

$$P_n = n!$$

Fonte: Souza, J. (2010, p. 228)

Nesse caso, o autor do livro didático considera a permutação simples um caso particular do arranjo, e para obter a fórmula da permutação faz uso da fórmula do arranjo, para o caso $n = p$. Observa-se que o autor não realizou uma discussão mais ampla sobre o conceito de permutação, a qual permitiria obter a fórmula utilizando apenas o PFC e a identificação da permutação como um caso particular de arranjo.

No que diz respeito à organização adotada no livro didático, verificamos que o livro L_3 inicia o capítulo com problemas que utilizam o Princípio Fundamental da Contagem e em seguida apresenta os conceitos de arranjo, permutação e combinação, nessa ordem. Além disso, a obra está estruturada de forma segmentada, apresentando os conceitos em módulos, trabalhando separadamente arranjo, permutação e combinação, e apenas na seção de atividades complementares que apresenta problemas com todos os conceitos estudados, ficando a critério do professor a forma de trabalhá-los com seus alunos.

Em relação às estratégias mobilizadas para a resolução dos problemas, apesar de utilizar o diagrama de árvores e a tabela de dupla entrada para apresentar o PFC, ao longo do capítulo o autor foca na utilização de fórmulas na resolução dos exercícios propostos, como no caso do problema de permutação apresentado a seguir:

Figura 10 - Problema proposto no livro L_3

R7 (UTFPR-PR) Para tentar melhorar seu índice no Ibope, uma emissora de televisão resolveu mudar a ordem de sua programação, no sábado, das 12 às 18 horas. Os programas exibidos nesse horário são: esporte, documentário, religioso, variedades, filme nacional e filme estrangeiro. Cada um desses programas tem duração de uma hora. Se o programa religioso deve ser o último a ser exibido, então o número de maneiras diferentes de se formar a programação é de:

a) 120 b) 5 c) 60 d) 720 e) 6

Resolução

Nesse caso, a ordem dos programas deve ser considerada, ou seja, cada programação é um arranjo dos 6 programas tomados 6 a 6, isto é, uma permutação. Como a programação deve terminar com o programa religioso, fixamos o último e permutamos os outros 5 programas.

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Portanto, há 120 maneiras diferentes de se formar a programação, ou seja, a alternativa correta é a.

Fonte: Souza, J. (2010, p. 229)

Para a resolução desse problema, o livro didático utiliza como estratégia de resolução apenas a fórmula anteriormente apresentada. Além disso, na abordagem que utiliza para a resolução do problema, há aspectos que podem ser considerados como tecnicistas, com os quais identifica-se as características do problema e aplica-se a fórmula adequada. Essa escolha pode levar o aluno a acreditar que somente é possível resolver os problemas aplicando as fórmulas, e que sua função é identificar nos problemas características necessárias que permitem a aplicação da fórmula adequada.

Assim, apresentamos um quadro, no qual buscamos sintetizar os elementos da análise que realizamos nos Livros Didáticos adotados.

Quadro 3 - Síntese da análise dos Livros Didáticos

Principais aspectos da análise		L_1	L_2	L_3
Introdução do conteúdo	Inicia por meio de situações contextualizadas.	x	x	x
	Apresenta a formalização diretamente.			
Ordem de apresentação dos conceitos	Princípio Fundamental da Contagem, arranjo, permutação e combinação.			x
	Princípio Fundamental da Contagem, permutação, arranjo e combinação.	x	x	
Organização do capítulo	Trabalha os conceitos essencialmente em módulos	x		
	Trabalha os conceitos em módulos, mas possui um momento que apresenta problemas misturados.		x	
	Trabalha os conceitos em módulos, mas os problemas misturados são apresentados apenas nas atividades complementares no final do capítulo.			x
Elaboração das fórmulas	Utiliza o Princípio Fundamental da Contagem em todos os conceitos.	x		
	Utiliza o Princípio Fundamental da Contagem no primeiro conceito, e para os demais conceitos utiliza as fórmulas já apresentadas.		x	x
	Apresenta somente a fórmula pronta.			
Estratégias de resolução dos problemas	Princípio Fundamental da Contagem e fórmulas.	x	x	
	Predominantemente o uso de fórmulas			x

Fonte: dados da pesquisa

Percebemos que os livros analisados apresentam características semelhantes, como o início de seus capítulos com a exploração de situações-problema e fazendo uso da representação do diagrama de árvores para conjecturar o Princípio Fundamental da Contagem. Já em relação à organização do capítulo, as obras apresentam estruturas estanques, como destacado no Guia do Livro Didático do PNLD de 2012 (BRASIL, 2011), e quase não trabalham com os problemas de combinatória com os diferentes conceitos em um mesmo tópico. Acreditamos que com uma nova organização diferente dos módulos, os alunos podem abandonar a postura de apenas aplicar as técnicas nos problemas de cada tipo e passem a desenvolver habilidades de identificar características dos problemas, além de novas estratégias de resolução.

3.4 Pesquisas sobre o tema

Pessoa (2009) buscou analisar o desenvolvimento do raciocínio combinatório com 568 alunos, do 2º ano do ensino fundamental ao 3º ano do ensino médio, sendo aplicada com todos os alunos uma ficha contendo oito problemas de combinatória; com dois problemas de cada tipo: produto cartesiano, arranjo, permutação e combinação. Assim, a pesquisadora analisou os resultados a partir de critérios estabelecidos, por exemplo: tipo de problema, nível de ensino, respostas e estratégias mobilizadas, problemas com maior ou menor número de possibilidades, entre outros. Durante a realização do teste não houve um tempo estipulado para a resolução e os alunos estavam livres para utilizarem a estratégia que considerassem adequadas.

Foi constatada uma grande evolução dos alunos do ensino fundamental I (2º ao 5º ano) para os alunos do ensino fundamental II (6º ao 9º ano), porém os alunos do ensino médio não apresentaram uma evolução esperada, sendo que a pesquisadora concluiu que os resultados parecem indicar a pouca influência do ensino direto da combinatória no desempenho dos estudantes. Na análise em relação aos significados dos problemas de combinatória, verificou-se que os alunos, em todos os níveis, apresentaram um maior índice de acerto nos problemas de produto cartesiano, seguidos dos de arranjo, permutação e por último os de combinação. Para tal fato, a pesquisadora concluiu que os problemas de produto cartesiano são trabalhados com mais frequência nas escolas desde os anos iniciais. Os problemas de permutação podem gerar mais dificuldades, em relação aos problemas de arranjo, devido à necessidade de utilizar todos os elementos do conjunto. Com relação ao baixo índice de acerto nos problemas de combinação, a pesquisadora inferiu a propriedade que a ordem dos elementos não gera um novo conjunto, além do fato de eles serem trabalhados somente no ensino médio. Dessa maneira, os alunos podem até pensar em estratégias eficientes para resolver o problema, mas caso não percebam a presença dessa propriedade, acabam considerando casos a mais.

Em relação às soluções, verificou-se o uso de diversas estratégias pelos alunos, tais como: a adição e subtração, divisão, desenho, árvore de possibilidades, quadro/diagrama, listagem de possibilidades, adição adequada de parcelas, multiplicação, Princípio Fundamental da Contagem, utilização de fórmulas e a percepção ou busca de regularidades. Na análise dessa categoria, percebeu-se a pouca utilização de estratégias como o desenho, que aparecem em geral nos anos iniciais, e do diagrama de árvore e do quadro/diagrama. A utilização do diagrama de árvore deveria ser incentivada pelos professores, desde os anos iniciais, pois “é uma representação que ajuda a compreender melhor as situações de enumeração e a encontrar com simplicidade a regra do produto” (BATANERO; GODINO; NAVARRO – PELAYO, 1996, p.54, tradução nossa).

A estratégia mais apresentada foi a listagem de possibilidades, com um decrescimento em relação aos níveis de escolaridade. Embora ocorra essa diminuição na utilização, os alunos do ensino médio ainda recorrem a essa estratégia em diversos problemas da lista que lhes foi passado. Essa estratégia possui um limitante quando o número de elementos a ser encontrado for grande, além da necessidade de realizar a listagem organizada, para perceber que foram contadas todas as possibilidades. A utilização de fórmulas e o Princípio Fundamental de Contagem, foram mobilizadas apenas no ensino médio, em geral pelos alunos do 3º ano. A utilização de fórmulas apresentou semelhança entre o número de acertos e erros, constatando em diversos momentos as trocas das fórmulas de combinação e a de arranjo. Acreditamos que mesmo apresentando as fórmulas para os alunos, não há garantia de sucesso na resolução dos problemas. Além desse conhecimento das fórmulas, os alunos devem ter uma competência de identificar e compreender o problema, e assim, escolher a fórmula adequada para a situação e aplicá-la. Por fim, a estratégia de busca de generalidades, diferentemente da estratégia de desenhos, mostrou uma evolução com o decorrer dos níveis escolares. Segundo Pessoa (2009), esse fato pode ocorrer devido ao desenvolvimento do aluno no ciclo escolar e as experiências extraescolares que viveram ao longo dos anos.

Esteves (2001) buscou estudar a aquisição e o desenvolvimento dos primeiros conceitos de combinatória, em uma turma de 14 anos, que cursavam a última série do ensino fundamental (atual 9º ano), trabalhando com dois grupos de alunos, o experimental e o de referência. O grupo experimental era composto pelos alunos do ensino fundamental, sendo elaborada uma sequência pautada em situações-problema que envolviam a contagem direta e na mobilização de diversas representações. Já o grupo de referência era formado por alunos do 2º ano do ensino médio e a sequência aplicada foi baseada na abordagem apresentada pelo livro didático adotado pela escola.

A pesquisadora constatou que os alunos do grupo experimental apresentaram o raciocínio combinatório no teste aplicado após o desenvolvimento da sequência. Porém, o uso de representação para resolver os problemas diminuiu em detrimento à utilização de uma linguagem aritmética e/ou algébrica, como o abandono do diagrama de árvores. No entanto, no resultado dos alunos do grupo de referência, foi observado que os mesmos apresentaram um baixo índice do raciocínio combinatório e de representações, e recorriam à utilização de fórmulas. Para essa característica, a autora atribui ao fato que a sequência trabalhada com esses alunos não tinha como foco no raciocínio combinatório e nas representações. Além disso, ambos os grupos apresentaram dificuldades em realizar generalizações, na percepção da propriedade de ordem nos problemas e no pensamento recursivo.

Para Batanero, Godino e Navarro – Pelayo (1996), um ponto que pode gerar dificuldades no ensino de combinatória é o fato de ela ser trabalhada de modo isolado dos demais conteúdos matemáticos. Além disso, outra causa de dificuldade dos alunos no conteúdo de combinatória é devido às carências na utilização do pensamento recursivo. Segundo os autores

> A recursão, como método geral para resolver um problema, consiste em reduzir a sua solução para obter uma versão mais simples do problema, refletir sobre o que foi feito e, finalmente, expressar o processo como algoritmo de redução de ou expressão recorrente (BATANERO; GODINO; NAVARRO – PELAYO, 1996, p. 61, tradução nossa).

Esse tipo de pensamento está presente no momento de resolver os problemas de combinatória, sendo necessário para a compreensão e utilização do Princípio Fundamental da Contagem.

Os autores apresentam também uma síntese de estratégias intuitivas de contagem, baseados em algumas pesquisas, dentre elas:

1- Estratégia caracterizada pela seleção aleatória dos elementos, podendo utilizá-los novamente;
2- A utilização de um procedimento de contagem, sendo que os elementos já contados não são mais utilizados;
3- Estratégia entre a contagem e o procedimento algoritmo, no qual se realiza a contagem com um procedimento mais sistemático que os anteriores;
4- A fixação de elementos para a realização de contagens, porém tal estratégia pode ser incompleta caso não fixe todas as possibilidades;
5- A estratégia algorítmica completa, na qual realiza a fixação de todas as possibilidades e realiza a contagem de maneira cíclica e completa.

Navarro – Pelayo, Batanero e Godino (1996) realizaram um teste de 13 problemas de combinatória, com 720 alunos de 14 e 15 anos, sendo que apenas 352 alunos já haviam tido aulas desse conteúdo. Na análise do teste, foram encontrados erros comuns nos modelos de seleção, colocação e partição, classificação de Dubois[22] (1984 apud NAVARRO-PELAYO; BATANERO; GODINO, 1996) baseada nas maneiras de representar os enunciados dos problemas combinatórios, a qual é adotada pelos autores. O autor caracteriza como modelo de

---

[22] Apesar de essa classificação de Dubois (apud NAVARRO-PELAYO; BATANERO; GODINO, 1996) não ter nos guiado para o desenvolvimento da nossa pesquisa, observamos que grande parte dos problemas que compõem a sequência didática que elaboramos contemplam o modelo implícito de seleção.

seleção os problemas de contagem que tem como objetivo selecionar uma quantidade m de elementos a partir de uma quantidade n de elementos. Os problemas que compõem o modelo de colocação têm como objetivo distribuir m elementos em n caselas[23]. E por fim, o modelo de partição é composto por problemas que têm como objetivo realizar a partição de m elementos em n subconjuntos (CAMPOS, 2011). Os erros encontrados foram:

- Trocar o modelo matemático do enunciado do problema: a troca de um problema de seleção por um de partição;
- Erro de ordem: confundir os problemas que a ordem interfere no resultado com os problemas que a ordem não interfere, como os problemas de combinação e arranjo;
- Erro de repetição: o aluno não considera a possibilidade de repetir os elementos no problema;
- Confundir os tipos de objetos: o aluno considera os objetos idênticos quando são diferentes e consideram diferentes quando são idênticos;
- Enumeração não sistemática: na estratégia de contagem, o aluno a realiza sem uma sistematização, dificultando a formação de todas as possibilidades;
- Resposta intuitiva errônea: nesse tipo de erro, os alunos apenas fornecem uma resposta numérica errada, sem nenhuma justificativa;
- Não recordar a fórmula correta da operação combinatória que identificou corretamente: apesar de identificar as operações combinatórias corretas, os alunos não lembram ou confundem a fórmula que deve ser utilizada;
- Não recordar os significados dos valores dos parâmetros na fórmula combinatória: confundir os valores no momento de aplicar a fórmula.
- Interpretação errônea do diagrama de árvores: o aluno mobiliza o diagrama de árvore de maneira inadequada ou o interpreta incorretamente.

Além disso, foi possível perceber que a principal dificuldade nos alunos que não trabalharam com esse conteúdo anteriormente se encontrava na enumeração não sistemática das possibilidades. Em relação aos alunos que já estudaram combinatória, percebeu-se que quando recorriam a estratégia de listagem de possibilidades, a mesma era realizada de um modo mais sistemático. Já no que diz respeito às dificuldades, estavam em relação à ordem e repetição dos elementos, na utilização das fórmulas e na interpretação incorreta do diagrama de árvore.

[23] Representa locais disponíveis para serem distribuídos os elementos dos problemas, por exemplo, envelopes para cartas, cadeiras para pessoas se sentarem, entre outros.

Miguel e Magina (2003) realizaram uma investigação das estratégias de solução de problemas de combinatória por alunos de um curso de Licenciatura. Para isso, utilizaram os problemas, com algumas adaptações, da pesquisa de Batanero *et. al.* (1997 apud MIGUEL; MAGINA, 2003) com 12 alunos, dos quais apenas um aluno havia estudado combinatória no ensino médio. Verificou-se que a estratégia de listagem de possibilidades foi a mais utilizada, resultado consonante com Navarro-Pelayo, Batanero e Godino (1996). Também percebeu que nenhum dos alunos, desse nível de escolaridade, recorreu ao diagrama de árvore, resultado semelhante à de outras pesquisas (ESTEVES, 2001; ROA *et. al.* 1997). Dessa maneira, salientamos a importância do professor na condução do conteúdo com os alunos, pois essa estratégia pode contribuir para a superação de dificuldades, como a listagem não sistemática, além de levar os alunos a novas estratégias, como a utilização do Princípio Fundamental da Contagem.

A pesquisa de Roa *et. al.* (1997) buscou investigar as estratégias utilizadas por alunos da Licenciatura na resolução de problemas de combinatória. Assim, os pesquisadores aplicaram um questionário contendo 13 problemas de combinatória para 29 licenciandos de Matemática, e desses, selecionou dois alunos que apresentaram os melhores índices e dois alunos com os piores índices no teste, para a realização de entrevistas individuais com os mesmos. Concluiu-se que os alunos pouco mobilizaram o diagrama de árvores, optando por outras estratégias, dentre elas: identificação da operação combinatória e aplicação da fórmula adequada, fixação de variáveis, redução do tamanho do problema, generalização de soluções. Também constatou que a principal causa dos erros dos alunos ao tentarem realizar a contagem, foi a listagem não sistemática. Além disso, os alunos apresentaram dificuldades na identificação da operação combinatória dos problemas propostos.

Santos-Wagner, Bortoloti, Ferreira (2013) realizaram um estudo com 198 estudantes do 3º e 8º semestre de quatro Universidades do estado da Bahia, a partir das resoluções de problemas de arranjo e combinação apresentadas pelos alunos. Na análise desse material, percebeu-se não ter encontrado grandes diferenças em relação ao índice de acertos e erros dos alunos de diferentes semestres. Ambos os casos, apresentaram cerca de 40% de erros nas questões e mais de 20% não apresentaram respostas. Esse número nos leva a refletir sobre como está sendo proposto, e se está sendo, o ensino de combinatória nos cursos de formação inicial de professores de Matemática, pois os alunos em final de formação inicial apresentaram dificuldades semelhantes, em termos quantitativos, aos alunos em fase inicial da graduação.

Em relação aos conhecimentos mobilizados pelos estudantes no momento da resolução, verificou-se a utilização de três estratégias: a listagem de possibilidades, a utilização de fórmulas e o princípio multiplicativo. Destacamos a necessidade da compreensão dos alunos em relação aos conceitos estudados, pois mesmo quando recorriam à utilização de fórmulas, apresentavam dificuldades, assim, “identificar uma fórmula não é o suficiente para resolver a questão. Infelizmente alguns alunos já foram condicionados a utilizar essa estratégia ou acreditam que basta identificá-la que o problema será resolvido.” (SANTOS-WAGNER; BORTOLOTI; FERREIRA, 2013, p. 618-619). Esse estudo mostrou que os alunos tinham dificuldades na interpretação dos problemas de contagem, na diferenciação dos conceitos envolvidos como combinação e arranjo, e na utilização das fórmulas. Dessa maneira, os autores apontam que o ensino desse conteúdo deve ser realizado de modo que haja compreensão conceitual e dos significados de cada tipo de classe de problema combinatório (arranjo, permutação, combinação), diferentemente do que tem sido trabalhado, cujo foco nos procedimentos, regras e fórmulas prontas para a resolução dos problemas.

Rocha (2007) tinha como objetivo analisar a construção de conhecimento dos alunos da licenciatura, submetidos a uma prática de ensino tradicional[24]. A pesquisa envolveu 17 alunos, sendo que 10 deles participaram de todo o processo de pesquisa. Para isso, o pesquisador realizou um pré-teste com cinco questões que envolviam combinação, arranjo, permutação, que estariam presentes em qualquer curso de combinatória simples. Então, os alunos eram submetidos à prática tradicional de ensino e por fim era aplicado outro teste com seis questões, sendo cinco iguais às aplicadas no pré-teste, para analisar a evolução dos alunos.

No pré-teste verificou-se um baixo índice de acerto dos alunos nas questões, apesar das inúmeras tentativas. Das cinco questões propostas, três delas tiveram 0% de acerto, uma teve 10% e outra 40 %. Após esse pré-teste, os alunos foram submetidos a uma prática tradicional e foi aplicado o pós-teste que mostrou pouca evolução dos alunos. Na questão que os alunos tinham acertado 40% no pré-teste, esse índice subiu para 80 %. Na única questão nova proposta no pós-teste houve 60 % de acerto, porém nas demais questões o índice variou entre 0%, 10% e 20% de acerto apenas. Assim, concluiu-se que apesar de o pós-teste possuir cinco questões idênticas a do pré-teste, a evolução dos alunos foi baixa em quatro delas. Dessa maneira, o pesquisador destaca que a prática tradicional aplicada com esses alunos se mostrou ineficiente para a aprendizagem do conteúdo de combinatória.

Como nossa pesquisa será realizada com os alunos de um curso de Matemática-Licenciatura, pautados nas pesquisas apresentadas anteriormente, apresentamos dois quadros que sintetizam as principais estratégias e dificuldades que os alunos nesse nível de ensino de

---

[24]O autor considera metodologia tradicional uma metodologia estruturada em definições, exemplos e exercícios de aplicação, nessa ordem.

combinatória enfrentam quando resolvem problemas do tema, pautadas nas pesquisas apresentadas anteriormente.

Quadro 4 - Principais estratégias mobilizadas pelos alunos

Estratégia	Descrição da Estratégia
Listagem de Possibilidades	O aluno realiza uma listagem, escrevendo todos os casos possíveis que atendem o problema proposto.
Fórmulas	O aluno tenta identificar o tipo de problema proposto, entre arranjo, permutação e combinação. Após isso, seleciona os valores presentes no problema e aplica a fórmula correspondente.
Princípio Fundamental da Contagem	O aluno divide o problema em etapas de escolha, verifica as possibilidades de cada etapa e utiliza o princípio multiplicativo.
Busca de Generalidades	O aluno inicia a listagem de possibilidades, geralmente fixando algum elemento, em busca de regularidades. Ao perceber alguma regularidade, realiza alguma operação que lhe fornece a resposta do problema sem que tenha que listar as demais possibilidades.
Diagrama de Árvores[25]	Uma espécie de grafo, é uma estrutura que possibilita organizar as possibilidades em cada etapa de escolha. A sua utilização, além da quantidade de possíveis casos também fornece listagem de todas as possibilidades.

Fonte: dados da pesquisa

Dentre as estratégias apresentadas, a listagem de possibilidades foi a estratégia mais mobilizada pelos alunos, seguidos da utilização de fórmulas e do Princípio Fundamental da Contagem. Apesar de destacarmos essas estratégias, em alguns casos os alunos mobilizam outras, como o desenho ou algum conhecimento de outro conteúdo matemático. O quadro seguinte apresenta as dificuldades que os alunos apresentam no momento de resolver os problemas.

[25]Conforme apontado em diversas pesquisas (ROA *et. al.* 1997, MIGUEL; MAGINA, 2003; ESTEVES, 2001) a estratégia da árvore de possibilidades quase não é mobilizada por alunos que já tiveram um ensino de combinatória. Porém, decidimos colocá-la no quadro das estratégias, devido a sua importância já citada.

Quadro 5 - Principais dificuldades apresentadas pelos alunos

Dificuldade	Descrição da Dificuldade
Listagem Não sistemática	Os alunos realizam a listagem sem nenhum tipo de organização. Dessa maneira, a listagem de possibilidades pode ficar faltando elementos, ou com elementos em excesso.
Ordem dos Elementos	Os alunos não percebem a característica do problema em relação à ordem dos elementos, considerando a ordem relevante em problemas que não é, e desconsiderando-a quando é necessário levá-la em conta. Um dos erros que pode surgir é classificar um problema de combinação como um problema de arranjo.
Repetição dos Elementos	Os alunos não percebem a característica do problema em relação à possibilidade de repetição de elementos. Então, desconsideram a repetição dos elementos quando o problema permite, assim como o inverso.
Diferenciação dos problemas combinatórios	Os alunos possuem dificuldades nos conceitos de cada tipo de problema de combinatória, classificando os problemas de maneira errônea.
Utilização das Fórmulas	Além da dificuldade de lembrar as fórmulas de cada problema, os alunos apresentam dificuldades na substituição dos valores do problema na fórmula e resolvê-la.
Utilização do Diagrama de árvores	Os alunos montam o diagrama de árvores com uma estrutura errônea.

Fonte: dados da pesquisa

Uma das maneiras de superar algumas dessas dificuldades pode ser a escolha da metodologia de ensino. A pesquisa de Souza, A. (2010) propõe a criação de uma sequência que explore os conceitos do Princípio Multiplicativo e Aditivo. Além disso, sugere que as atividades devem ser trabalhadas de modo intuitivo e de maneira que os alunos possam mobilizar diversas estratégias como a contagem dos casos, a utilização do diagrama de árvore, a tabela de dupla entrada, entre outras.

Lima, Carvalho, Wagner e Morgado (2006) afirmam que a abordagem de tal conteúdo poderia ser a partir de ideias simples, utilizando apenas conceitos básicos como a adição, subtração, multiplicação e divisão, além da utilização de um raciocínio simples sem a necessidade de utilização de fórmulas, as quais em diversos momentos podem não ser lembradas, dificultando a resolução do problema. Além disso, sugerem três etapas que os alunos devem percorrer no momento de resolver um problema de combinatória.

1- Postura: Para conseguirmos resolver os problemas, uma estratégia bastante utilizada é se colocar no papel de quem vai realizar a ação solicitada.

2- Divisão: Consiste em dividir decisões a serem tomadas por decisões mais simples, formando diversas etapas para a resolução.

3- Não adiar dificuldades: Nota-se que o fato de tentar adiar dificuldades em um primeiro instante, no final gera grande problema. Temos que, no momento inicial da resolução, começar pela decisão que tiver restrições.

Diante do exposto, ressaltamos o papel fundamental do professor no desenvolvimento do conteúdo com os alunos, para a superação de algumas dificuldades já apresentadas, o que coaduna com a TSD no que diz respeito ao papel do professor, que elabora situações e um ambiente propício para os alunos construírem seu conhecimento. Suas escolhas didáticas, como o trabalho que privilegie o raciocínio combinatório e a utilização de diferentes representações, em detrimento do foco nas fórmulas, além de situações-problema que incentivem os alunos a desenvolverem diferentes estratégias de resolução, discutindo as vantagens e desvantagens de cada uma. Assim, pautados nos resultados encontrados ao longo da análise preliminar que realizamos, apresentamos a seguir, perspectivas que guiaram a elaboração e análise da nossa sequência didática.

3.5 Uma síntese dos resultados da análise preliminar: os teoremas em ação

A partir dos tópicos abordados na análise preliminar, como os documentos oficiais, nosso olhar sobre características de três livros didáticos, e os resultados de pesquisas que investigam o processo de ensino e o de aprendizagem de combinatória, foi possível identificar alguns conhecimentos e dificuldades apresentadas pelos alunos no estudo do tema. Desse modo, na perspectiva apresentada na Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1996), modelamos seis possíveis teoremas em ação que os alunos podem mobilizar quando estão diante de problemas de combinatória, que nos subsidiará para o momento da análise dos conhecimentos e das dificuldades que os alunos apresentarão na nossa sequência didática. Dentre os teoremas em ação possíveis, modelamos:

$T_{1.1}$*: Dado um problema de contagem, sempre é possível listar todas as possibilidades.*

Modelamos esse teorema em ação devido à frequente ocorrência da estratégia de listagem de possibilidades que os alunos mobilizam diante dos problemas. Apesar desse teorema em ação ser verdadeiro para resolver problemas de contagem, o mesmo torna-se ineficaz à medida que a quantidade de elementos do conjunto do problema aumenta. Tomemos como exemplo a escolha de duas pessoas dentre quatro. Nesse caso, esse teorema em ação além de verdadeiro, também é eficaz para resolver o problema, encontrando as doze possibilidades. Porém, se o problema solicitasse que a escolha fosse de quatro pessoas dentre dez, apesar de ser verdadeiro, o teorema torna-se ineficaz devido à quantidade total de possibilidades, já que teria que listar 5040 possibilidades.

$T_{1.2}$: *Existe uma maneira sistemática de listar que garante esgotar todos os casos possíveis.*

Uma dificuldade comum quando os alunos mobilizam a estratégia de listagem das possibilidades é o fato de realizarem de maneira não sistemática (NAVARRO – PELAYO, BATANERO; GODINO, 1996), ocasionando uma listagem incompleta ou em excesso das possibilidades que podem acontecer no problema. Ao mobilizar esse teorema em ação, o aluno realiza a listagem sob certa organização, por exemplo: inicialmente fixa um elemento e lista todas as possibilidades que podem ser formadas com o mesmo; em um segundo momento, fixa outro elemento e realiza as listagens dos possíveis casos; e assim para todos os elementos, listando todas as possibilidades. Desse modo, modelamos esse teorema em ação, pois, temos como hipótese que um aluno que realiza a listagem sem uma organização está num estágio mais empírico, em relação a um aluno que a realiza de maneira sistemática.

$\mathrm{T}_{1.3}$: *Se o problema é generalizável, então ao fazer uma listagem sistemática é possível encontrar tal generalidade.*

Modelamos o teorema $T_{1.3}$, devido à estratégia que alguns alunos apresentavam de realizar generalizações fazendo uso da listagem sistemática para encontrá-la. Destacamos que a identificação desse teorema em ação requer uma atenção especial pois, para caracterizarmos esse teorema em ação como um conhecimento do aluno, o mesmo tem que utilizar essa estratégia previamente. Tomamos como exemplo um aluno que na ação de resolver uma situação-problema mobiliza os teoremas $T_{1.1}$ e $T_{1.2}$. No momento que está vivenciando a situação *adidática* percebe uma regularidade na sua listagem e realiza uma generalização. Percebemos que para esse aluno, a generalização ‘apareceu’ no problema que estava resolvendo, e o mesmo não iniciou sua busca pela resposta já com o objetivo de buscar a generalização. Caso o aluno, tente resolver outros problemas com o objetivo a *priori* de encontrar uma regularidade e generalizar, então, o mesmo estaria mobilizando o teorema em ação $T_{1.3}$.

Conforme Vergnaud (1996) destaca, os teoremas em ação e os conceitos em ação explícitos são apenas uma pequena parte da conceitualização que é possível identificar. No caso do item $T_{1.3}$, para a identificação do mesmo como um teorema em ação, temos a necessidade de analisar além dos registros escritos dos alunos, a explicitação da fala, para identificarmos como um conhecimento que o aluno possui ou construiu.

Decidimos numerar esses teoremas em ação como $T_{1.1}$, $T_{1.2}$ e $T_{1.3}$ pois os mesmos estão relacionados entre si e com a estratégia da listagem de possibilidades, pois conforme enunciamos, caso um aluno mobilize o teorema em ação $T_{1.2}$ (*Existe uma maneira sistemática de listar que garante esgotar todos os casos possíveis*), é necessário que o mesmo acredite que é possível listar todas as possibilidades do problema, mobilizando o teorema em ação $T_{1.1}$. Além disso, caso mobilize o teorema em ação $T_{1.3}$ em busca de uma generalidade, o aluno pode realizar uma listagem sistemática que garante listar todos os casos possíveis, mobilizando o teorema em ação $T_{1.2}$.

T_2*: Se um problema é de combinatória então existe uma fórmula que o resolve e basta utilizá-la para encontrar a solução.*

Esse teorema está consonante com as observações da pesquisa de Santos-Wagner, Bortoloti e Ferreira (2013) que verificaram alunos condicionados a utilizar somente essa estratégia para a resolução dos problemas, sendo que, os mesmos tentavam apenas identificar a classificação do problema proposto e aplicar a fórmula correspondente. Na perspectiva de Vergnaud (1996), esse teorema têm um domínio de validade, ou seja, problemas para os quais é verdadeiro, como os de contagem simples. Porém, em problemas que apresentam restrições, somente esse conhecimento pode ser insuficiente para resolvê-lo.

Desse modo, buscamos em nossa sequência didática, tanto situações em que esse teorema em ação é válido, quanto situações que o mesmo está fora do domínio de validade, com o objetivo de provocar desequilíbrios cognitivos nos alunos, quando a situação-problema está fora do seu domínio de validade. Outro ponto a ser ressaltado é que, os alunos no momento que utilizam as fórmulas combinatórias podem apresentar dificuldades em lembrar a fórmula correspondente ao tipo de problema.

T_3*: Se uma decisão* d_1 *pode ser tomada de* a *maneiras e se, uma vez tomada a decisão* d_1*, a decisão* d_2 *puder sempre ser tomada de* b *maneiras então o número de maneiras de se tomarem as decisões* d_1 *e* d_2 *é* a *x* b*. (Princípio Fundamental da Contagem)*

Vergnaud (1996) afirma que um teorema em ação não necessita ser realmente um teorema matemático, porém, esse fato pode acontecer. No nosso caso percebemos que na resolução de um problema combinatório, os alunos mobilizam como estratégia o Princípio

Fundamental da Contagem, separando o problema em etapas, encontrando as possibilidades de cada uma e multiplicando para encontrar todos os casos possíveis. Desse modo, decidimos considerar o PFC como um possível teorema em ação, de modo que os alunos mobilizam em busca da solução do problema.

$T_{4.1}$*: A ordem dos elementos sempre resulta em novas possibilidades.*

Os dois últimos teoremas em ação que modelamos estão relacionados à ordem dos elementos na escolha do agrupamento. Conforme observamos na análise preliminar, podemos distinguir os problemas de combinação e os problemas de arranjo, a partir da relevância ou não da ordem dos elementos no momento da formação dos agrupamentos, sendo essa a única propriedade que difere nesses dois tipos de problemas (PESSOA; BORBA, 2010).

Assim, modelamos esse teorema em ação pois os alunos podem sempre considerar que a ordem dos elementos resulta em novas possibilidades, no momento que estiverem resolvendo os problemas. Destacamos que esse conhecimento possui um domínio de validade em que é verdadeiro, como nos problemas de arranjo e permutação. Porém, em outros problemas, como os de combinação, esse conhecimento não se aplica, já que a ordem dos elementos não resulta em novas possibilidades, podendo ocasionar um alto índice de erros, conforme aponta a pesquisa de Pessoa (2009).

$T_{4.2}$: *A ordem dos elementos não interfere na quantidade de possibilidades.*

Em contra partida, também modelamos um teorema em ação para quando os alunos não consideram a ordem dos elementos relevante na formação dos conjuntos. Esse teorema em ação, assim como o teorema anterior, também possui um domínio de validade, como nos problemas de combinação. Porém, nos problemas de permutação e arranjo, esse conhecimento está fora do seu domínio de validade, podendo ocasionar erros e dificuldades para os alunos.

Desse modo, buscamos ao longo da sequência didática problemas que desestabilizam tais teoremas em ação, quando estiverem fora do seu domínio de validade, e que os alunos percebessem essa característica. Acreditamos que somente assim, os alunos que apresentam essas dificuldades, terão condições de analisar os problemas e mobilizar os teoremas em ação $T_{4.1}$ e $T_{4.2}$, quando forem pertinentes.

3.6 Relações entre estratégias mobilizadas pelos alunos e os teoremas em ação

Vergnaud (2009b, p. 23) destaca que “em uma dada situação o sujeito dispõe de vários tipos de conhecimentos para identificar objetos e suas relações e definir, a partir disso, objetivos e regras de condutas pertinentes”. Assim, os conhecimentos em ação que os sujeitos mobilizam, dentre eles os teoremas em ação, influenciam nas escolhas e nas ações que os sujeitos realizam em uma determinada situação. Destacamos que a realização dessa estratégia por parte do aluno não é algo aleatório, pois ela emerge de vivências e dos conhecimentos que possui. Com essa concepção, evidenciamos relações existentes entre as principais estratégias que os alunos mobilizam ao resolverem problemas de combinatória, que encontramos no decorrer das análises preliminares, e os teoremas em ação que modelamos anteriormente.

A listagem de possibilidades está relacionada com o teorema em ação $T_{1.1}$*(dado um problema de contagem, sempre é possível listar todas as possibilidades*), pois um aluno que realiza essa estratégia em um problema de contagem acredita que por meio desse procedimento conseguirá encontrar a resposta do problema. Durante a resolução, o mesmo pode fazer essa listagem de modo aleatório, encontrando dificuldades na organização e controle dos resultados, ao não listar algum caso ou contá-los em excesso, conforme aponta Roa et. al. (1997). Porém, uma solução para essa dificuldade é a utilização de uma metodologia durante o processo de listagem que contribui na organização e no controle das possibilidades. Desse modo, ao mobilizar o teorema em ação $T_{1.2}$*(existe uma maneira sistemática de listar que garante esgotar todos os casos),* o aluno realiza essa estratégia sob uma organização que contribui para a listagem de todas as possibilidades, pois a realiza de maneira sistemática.

O teorema em ação $T_{1.3}$: s*e o problema é generalizável, então ao fazer uma listagem sistemática é possível encontrar tal generalidade,* também está relacionada com a estratégia da listagem de possibilidades, porém apresenta uma diferença com os teoremas em ação anteriores. Ao mobilizar o teorema em ação $T_{1.3}$, o aluno tem como objetivo encontrar uma generalização para a situação-problema, realizando a estratégia que nomeamos como busca de generalidades. Para isso, utiliza a listagem de possibilidades como uma ferramenta que permite a identificação de regularidade nas respostas do problema.

As estratégias da utilização de fórmulas e do Princípio Fundamental da Contagem estão intimamente relacionados aos teoremas em ação T_2 (*se um problema é de combinatória então existe uma fórmula que o resolve e basta utilizá-la para encontrar a solução*) e T_3 (*se uma decisão* d_1 *pode ser tomada de* a *maneiras e se, uma vez tomada a decisão* d_1*, a decisão* d_2 *puder sempre ser tomada de b maneiras então o número de maneiras de se tomarem as decisões*

d_1 e d_2 $é$ a x b), respectivamente. Portanto, nossas análises estão pautadas nesses teoremas em ação que modelamos e suas relações com as principais estratégias que os alunos mobilizam, que apresentamos anteriormente.

4 ESCOLHAS METODOLÓGICAS

Na perspectiva apresentada no capítulo 2, a Engenharia Didática nos fornece um esquema estrutural para elaborar, aplicar e analisar nossa sequência *adidática*, no momento que percorremos as quatro fases que compõem essa metodologia. Após apresentarmos no capítulo anterior o quadro teórico-didático acerca do conteúdo de combinatória, discorremos nesse momento das escolhas metodológicas presentes na pesquisa, como as variáveis didáticas, a elaboração da sequência didática e os sujeitos da pesquisa.

4.1 Sujeitos da Pesquisa e o curso de extensão

A presente investigação teve como sujeitos de pesquisa alunos ingressantes de um curso de Licenciatura em Matemática, da cidade de Campo Grande – MS. A escolha por esses sujeitos e não por outros, de outros níveis de escolaridade, deve-se à nossa inquietação diante do resultado de pesquisas (SANTOS-WAGNER; BORTOLOTI; FERREIRA, 2013; ROA *et. al.*, 1997; ROCHA, 2010; MIGUEL; MAGINA, 2003), que apresentaram dificuldades que futuros professores de Matemática enfrentam quando estão trabalhando com problemas de combinatória. Conforme apresentado na análise preliminar, esses alunos, não somente os ingressantes, mas também os que estavam nos últimos semestres, apresentavam dificuldades tanto nos conceitos, quantos nas estratégias de resolução dos problemas.

Diante do cenário encontrado nessas pesquisas, e tendo em vista que o objetivo da nossa investigação é *investigar aspectos da construção do conceito de combinatória de alunos ingressantes em um curso de Licenciatura em Matemática,* julgamos importante, além de atingir os objetivos da nossa pesquisa, a realização de alguma ação que contribuísse para a formação desses futuros professores de Matemática. Desse modo, realizamos um curso de extensão intitulado *"Uma proposta de estudo de problemas de Combinatória com acadêmicos de Matemática*", que tinha como objetivo **promover discussões sobre o conceito e estratégias de resolução de problemas presentes no conteúdo de Combinatória**. O curso em questão foi coordenado por mim, sob a orientação do Prof. Dr. José Luiz Magalhães de Freitas, além de contar com a colaboração de duas alunas do PPGEduMat, que nomeamos como Colaboradora

A[26] e Colaboradora B[27]. O curso foi estruturado em oito encontros, sendo que cada encontro tinha a duração de duas horas.

Após decidirmos que os sujeitos de pesquisa seriam alunos da Licenciatura de um curso de Matemática, optamos pelos alunos ingressantes, devido ainda não terem cursado disciplinas do curso que tratam desse tema, além da maior disponibilidade para o desenvolvimento do curso de extensão. Definidos os sujeitos do curso de extensão, e consequentemente os sujeitos dessa pesquisa, divulgamos o curso para todos os alunos do 1º semestre do curso, sem um limite de vagas. Assim, houve 37 alunos inscritos, sendo que desses, 30 obtiveram a frequência mínima exigida (75% de presença nos encontros), concluindo o curso de extensão. Ao término do curso de extensão, todos os licenciandos concluintes assinaram um termo de compromisso que autorizava a utilização dos dados produzidos nas sessões nessa pesquisa os alunos, sendo que apresentamos o modelo dele no Apêndice A.

4.2 Sequência Didática

Pautados nos resultados encontrados na análise preliminar e tendo em vista o objetivo da pesquisa e do curso de extensão, elaboramos uma sequência didática com foco em situações-problema de combinatória, de modo que pudesse contemplar ambos os objetivos. Além disso, na perspectiva apresentada por Vergnaud (1996), para que um aluno tenha condições de aprender um determinado conceito, não basta simplesmente apresentarmos uma definição do mesmo. O sujeito deve percorrer um processo no qual tenha vivenciado diferentes tipos de situações que dão sentido a ele.

Para elaboração e escolha desses problemas, tendo em vista que os alunos pudessem vivenciar situações *adidáticas*, baseamo-nos na classificação apresentada por Pessoa e Borba (2010), quando distinguem os problemas de contagem em quatro tipos, a partir de suas propriedades, sendo eles: produto cartesiano, combinação, arranjo e permutação. Diante do cenário apresentado, inicialmente elaboramos uma sequência didática com 16 situações-problema, sendo 4 de cada tipo de situação combinatória. Entretanto, com o desenvolvimento da sequência didática julgamos pertinente trabalhar apenas 13 situações-problema, sendo que esses diferentes tipos de problemas estavam embaralhados ao longo da mesma, evitando assim

[26] Mestranda do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (PPGEduMat-UFMS), ingressante no ano de 2013.
[27] Mestranda do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (PPGEduMat-UFMS), ingressante no ano de 2013.

o trabalho dos diferentes tipos de situações em blocos distintos, como orientam os documentos oficiais (BRASIL, 2006). Além de levar em consideração esses diferentes tipos de situação que compõem o conceito, outro elemento também considerado durante a elaboração da sequência didática, foram as variáveis didáticas.

Conforme analisamos na primeira etapa da Engenharia Didática, as Orientações Curriculares Nacionais (2006) destacam que o ensino de combinatória não deve ficar preso à utilização de apenas uma estratégia de resolução dos problemas, como a predominância da utilização de fórmulas realizada no livro L_3, além de evitar o trabalho dos conceitos em estanques, tal qual o livro L_1. Dessa maneira, baseado nos resultados da análise dos livros didáticos e dos documentos oficiais, os problemas da sequência didática foram selecionados e elaborados de modo que pudessem ser resolvidos por diversas estratégias, como a listagem, o Princípio Fundamental da Contagem, fórmulas, entre outros.

Para o desenvolvimento das atividades, os alunos foram organizados em nove grupos, que continham três ou quatro alunos, exceto o Grupo 9 que iniciou o curso com quatro alunos, mas com o ingresso de novos participantes finalizou com seis alunos. Adotamos essa organização, pois os alunos teriam a possibilidade de realizar interações entre eles, o que favoreceria as fases de uma situação *adidática*.

4.3 Variáveis Didáticas

Artigue (1996) destaca que o pesquisador, no momento da investigação, toma decisões sobre um determinado número de variáveis de comando para atingir seu objetivo, sendo distinguidas[28] em variáveis macrodidáticas e microdidáticas, sendo que as últimas estão relacionadas à organização local da engenharia, como em um problema ou sessão. Essas variáveis nos ajudam a atingir os objetivos, pois tais escolhas influenciam e implicam na mudança de estratégia dos alunos no momento de resolver os problemas (BITTAR, no prelo). Então, apresentamos a seguir, as duas variáveis didáticas que compõem a nossa sequência, de modo que ao alterá-las no decorrer da mesma, influenciem nas estratégias mobilizadas pelos alunos.

Quantidade de elementos do Problema

[28]Essa distinção está intimamente relacionada ao tempo de duração da Engenharia Didática desenvolvida e à localidade em que se desenvolve a sequência didática. Atemo-nos a destacar as microvariáveis, pelo fato de priorizarmos somente essas em nossa pesquisa.

Ao analisarmos o quadro teórico-didático da combinatória, identificamos nas pesquisas do tema a utilização constante da estratégia de listagem pelos alunos, como na pesquisa de Miguel e Magina (2003). Apesar de ser válida nos problemas de contagem, por vezes, somente o uso dessa estratégia, pode ser inviável para a resolução do problema proposto. Assim, elencamos a quantidade de elementos do problema como uma variável didática, sendo que, ao “jogarmos” com ela, esperamos que os alunos percebam as possibilidades e limitações da estratégia de listagem e, assim, mobilizem uma estratégia mais generalizada, além de outros teoremas em ação, como o PFC.

Restrições (características) impostas ao problema

Os problemas de contagem podem ser resolvidos por diversas estratégias diferentes, como a listagem, o PFC, a árvore de possibilidades, a utilização de fórmulas, entre outros. Como apresentado nas pesquisas de Santos-Wagner, Bortoloti, Ferreira (2013) e Pessoa (2009), os alunos que já estudaram combinatória no ensino médio utilizam de maneira predominante, além da listagem de possibilidades, as fórmulas de combinação, arranjo e permutação. Desse modo, consideramos as restrições impostas ao problema como uma variável didática, de modo que nem todos os problemas da sequência didática possam ser resolvidos com a aplicação direta de uma fórmula. Assim sendo, para resolver tais problemas será necessário que os alunos mobilizem outras estratégias, como o Princípio Aditivo, separar o problema em etapas, além da possibilidade de buscar uma generalização, dependendo do problema.

4.4 Estrutura da Sequência Didática

Conforme apresentamos anteriormente, a nossa sequência didática é composta com 8 sessões, estruturada com uma ou duas situações-problema de combinatória em cada encontro, que foram elaboradas pautados nos resultados encontrados na análise preliminar, como as propostas dos documentos oficiais e a análise do conteúdo da combinatória em livros didáticos do ensino médio. A seguir, apresentamos os treze problemas da nossa sequência didática, que foram desenvolvidos com os alunos, com a classificação e variáveis didáticas de cada problema.

Quadro 6 - Composição da sequência didática

<table>
<tr><th rowspan="2">Sessões</th><th rowspan="2">Problemas</th><th rowspan="2">Classificação</th><th colspan="2">Variáveis Didáticas</th></tr>
<tr><th>Quantidade de elementos do problema[29]</th><th>Restrições (características)</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Primeira sessão</td><td>Uma escola deseja sortear dois prêmios para seus professores de Matemática. O primeiro prêmio será um tablet e o segundo um relógio. Sabendo que a escola conta com cinco professores de Matemática, de quantas maneiras diferentes os prêmios poderão ser distribuídos?</td><td>Arranjo</td><td>Pequeno</td><td>Possibilidade de repetição dos professores</td></tr>
<tr><td>Quantos anagramas são possíveis de formar com a sigla “UFMS”? E se o anagrama começar com consoante?</td><td>Permutação</td><td>Pequeno</td><td>Começar com consoante</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Segunda Sessão</td><td>Dado uma circunferência c, são indicados 4 pontos distintos sobre ela.
a) Quantos segmentos de reta com extremidades em dois desses pontos podem ser traçados?
b) Tendo três desses pontos como vértice, quantos triângulos podem ser formados?
c) Se na circunferência c fossem indicados 5 pontos, ao invés de 4, quantos segmentos de retas poderiam ser traçados? E quantos triângulos?</td><td>Combinação</td><td>Pequeno</td><td>Sem restrição</td></tr>
<tr><td>Dados os conjuntos A={2,4,5,6} e B={1,3,9}, quantos pares ordenados (x,y) podemos formar sabendo que x é elemento do conjunto A e y elemento do conjunto B?</td><td>Produto Cartesiano</td><td>Pequeno</td><td>Sem restrição</td></tr>
<tr><td>Terceira Sessão</td><td>De quantos modos é possível dividir 6 atletas em dois times de 3 jogadores?
E se definíssemos os times, sendo Comercial e Operário, como podemos dividir esses jogadores?</td><td>Combinação</td><td>Pequeno</td><td>Duas etapas no problema.</td></tr>
<tr><td>Quarta Sessão</td><td>Quantos são os números de três algarismos distintos? E se for somente números pares, quantos são ao todo?</td><td>Arranjo</td><td>Grande</td><td>Números serem pares, no item b.
Possibilidade de utilização do Princípio Aditivo.</td></tr>
<tr><td>Quinta Sessão</td><td>Uma companhia de transporte rodoviário intermunicipal estuda as 15 possíveis rotas para a realização de viagens do município A ao município C, com passagem obrigatória pelo município B. Sabendo que de A à B existem três possíveis trajetos, quantos trajetos existem entre B e C?</td><td>Produto Cartesiano</td><td>Pequeno</td><td>Inverso.</td></tr>
</table>

[29]Tendo em vista que a quantidade de elementos contidos no problema interfere diretamente na quantidade de possibilidades que atendem o mesmo, adotamos como critério para a classificação dessa variável didática a quantidade de possibilidades da resposta do problema. Assim, quando um problema tivesse até 30 possibilidades de solução, classificamos como uma quantidade pequena de elementos, e caso tivesse mais de 30 possibilidades, classificamos como uma quantidade grande de elementos.

	Um celular está configurado com um sistema de senhas que é composta por 3 dígitos distintos, dentre os 10 dígitos possíveis de escolher. Além disso, o celular está configurado de modo que a cada senha errada, é necessário esperar 30 segundos para inserir uma nova senha. Sabendo disso, qual é o tempo máximo que uma pessoa leva para desbloquear o celular, supondo que ela não conhece a senha?	Arranjo	Grande	Sem restrição
Sexta Sessão	Um restaurante tem a opção de fazer prato feito como refeição, no qual, o cliente pode escolher, um prato principal (bife com fritas, peixe com purê, frango com legumes ou lasanha), uma salada (dentre salada verde, salada russa ou salpicão) e a sobremesa fica sendo opcional (salada de frutas ou pudim). Quantas são as possíveis refeições o cliente pode escolher, com no máximo um tipo de sobremesa?	Produto Cartesiano	Grande	Utilização do Princípio Aditivo.
	Uma faculdade realiza seu vestibular em dois dias de provas, com 4 matérias em cada dia. Este ano a divisão foi: Matemática, Português, Biologia e Inglês, no primeiro dia e Geografia, História, Física e Química, no segundo dia. De quantos modos pode ser feito o calendário de provas?	Combinação	Grande	Sem restrição
Sétima Sessão	O conjunto {1, 2, 3, 4, 5} possui quantos subconjuntos?	Combinação	Grande	Utilização do Princípio Aditivo (do conjunto vazio até o próprio conjunto)
	Cinco casais de amigos vão ao cinema e desejam sentar-se em uma fileira de 10 lugares, de maneira que os integrantes de cada casal permaneçam sempre lado a lado. De quantas maneiras distintas esses casais podem acomodar-se no cinema?	Permutação	Grande	Duas etapas
Oitava Sessão	Doze times se inscreveram em um torneio de futebol amador. O jogo de abertura do torneio foi escolhido da seguinte maneira: primeiro foram sorteados 4 times para compor o Grupo A, foram sorteados 2 times para realizar o primeiro jogo de abertura do torneio, sendo que o primeiro deles jogaria em seu próprio campo e o segundo seria no campo do adversário. Então, a quantidade total de escolhas possíveis para o Grupo A e a quantidade total de escolhas dos times do jogo de abertura pode ser calculada através de: a) Uma combinação e um arranjo, respectivamente. b) Um arranjo e uma combinação, respectivamente. c) Um arranjo e uma permutação, respectivamente. d) Duas combinações. e) Dois arranjos.	Envolve os conceitos dos problemas de combinatória	------	Sem restrição

Fonte: dados da pesquisa

5 ANÁLISES *A PRIORI* E *A POSTERIORI*

Neste capítulo discorremos sobre os problemas que compõem as sessões de nossa sequência didática, com a análise *a priori* de cada problema, as variáveis didáticas e possíveis estratégias que os alunos podem mobilizar, além de dificuldades que podem encontrar, com base nos resultados encontrados na análise preliminar. Salientamos que no decorrer das sessões, apresentamos as estratégias de cada problema, porém, não expressamos mais as dificuldades relativas a cada estratégia, após estas já terem sido apresentadas. Na sequência, realizamos uma breve descrição da experimentação, seguidas da análise *a posteriori* e considerações da mesma.

Conforme dito anteriormente, os alunos se organizaram em nove grupos, os quais enumeramos de 1 a 9 sendo que, para o momento da análise *a posteriori*, eles foram identificados pelas primeiras letras do alfabeto, seguidos do número do grupo que fizeram parte. Desse modo, os alunos do Grupo 1 foram nomeados por a1, b1 e c1, os do Grupo 2 como Alunos a2, b2 e c2, e assim segue os demais alunos.

Desses nove grupos, excluímos da análise *a posteriori* as produções e discussões do Grupo 8, pois das três alunas integrantes do mesmo, somente a Aluna a8 obteve a frequência mínima que havia sido fixada, nos dando condições de acompanhar sua evolução. Desse modo, houve encontros que essa aluna, por ser a única aluna presente de seu grupo, foi deslocada para outros grupos, como o Grupo 1 ou Grupo 7, de modo que pudesse discutir os problemas e as estratégias de resolução.

5.1 Sessão 1

Essa sessão foi composta por duas situações-problema, uma de arranjo e outra de permutação.

5.1.1 Análise *a priori* do primeiro problema

O primeiro problema da sessão foi:

Uma escola deseja sortear dois prêmios para seus professores de Matemática. O primeiro prêmio será um tablet e o segundo um relógio. Sabendo que a escola conta com cinco professores de Matemática, de quantas maneiras diferentes os prêmios poderão ser distribuídos?

Nesse problema de arranjo, com a possibilidade de repetição dos professores, escolhemos uma situação contextualizada de sorteio de prêmios acreditando que, por ser uma situação do cotidiano, os alunos pudessem se colocar na mesma e a partir de então, buscar estratégias de solução para o problema. Por estar na primeira sessão da sequência, adotamos como variáveis didáticas valores pequenos e sem nenhuma restrição, de modo que fosse possível mobilizar as mais diversas estratégias.

Possíveis estratégias:

E_1*: Listagem de Possibilidades*

Por se tratar de valores pequenos que compõem o problema, é viável realizar uma listagem dos possíveis sorteios. Assim, nomeando os professores de A, B, C, D e E, inicia-se pela listagem de todos os casos: A-A, A-B, A-C, A-D, A-E, B-A, B-B, B-C, B-D, B-E, C-A, C-B, C-C, C-D, C-E, D-A, D-B, D-C, D-D, D-E, E-A, E-B, E-C, E-D, E-E totalizando 25 possibilidades de sorteios. Uma eventual dificuldade que pode vir a aparecer, como observa ROA et. al. (1997), é a realização de uma listagem não sistemática dos alunos, que podem esquecer algum caso ou contá-los em excesso, nos permitindo identificar vestígios dos teoremas em ação $T_{1.1}$ (*Dado um problema de contagem, sempre é possível listar todas as possibilidades*) e $T_{1.2}$. (*Existe uma maneira sistemática de listar que garante esgotar todos os casos possíveis)*, caso os mobilizem.

E_2*: Utilização da Fórmula*

Identifica-se que o problema proposto é um problema de arranjo e em um primeiro momento aplica-se a fórmula correspondente, consonante ao teorema em ação T_2 (s*e um problema é de combinatória então existe uma fórmula que o resolve e basta utilizá-la para encontrar a solução).*

$$A_2^5 = \frac{5!}{(5-2)!} \Leftrightarrow A_2^5 = \frac{5!}{3!} \Leftrightarrow A_2^5 = \frac{120}{6} \Leftrightarrow A_2^5 = 20$$

Em um segundo momento, considera-se os casos em que são sorteados os mesmos professores nos dois prêmios, e soma-se essas 5 possibilidades com as 20 encontradas por meio da fórmula, totalizando 25 possibilidades. Para essa estratégia, acreditamos que podem ocorrer dificuldades na utilização da fórmula, desde lembrá-la de maneira correta até na realização das operações.

$E_{3:}$ *Princípio Fundamental da Contagem*

Utilizando o Princípio Fundamental da Contagem, organiza-se o problema em duas etapas a serem escolhidas. Para o primeiro prêmio tem-se 5 possibilidades de professores, e para o segundo prêmio, 5 possibilidades também. Dessa maneira, tem-se que o total de possibilidades de sorteios é $5\, x\, 5 = 25$ possibilidades de escolha. Destacamos que essa estratégia está intimamente relacionada ao teorema em ação T_3 (*Princípio Fundamental da Contagem*), fato que nos possibilita identificar o mesmo.

E_4 *: Busca de Regularidades*

Relacionada ao teorema em ação $T_{1.3}$(*se um problema é generalizável, então ao fazer uma listagem sistemática é possível encontrar tal generalidade*), com o intuito de buscar uma generalidade ao problema, inicia-se utilizando a listagem de possibilidades, como do seguinte modo:

A-A, A-B, A-C, A-D, A-E

B-A, B-B, B-C, B-D, B-E

Em um segundo momento, percebe-se que para cada professor que ganhar o primeiro prêmio, existem 5 possibilidades diferentes para ganhar o segundo prêmio. Desse modo, como cinco professores podem ganhar o primeiro prêmio, o total de possibilidades é $5\, x\, 5 = 25$ possibilidades de sorteio.

Além das dificuldades comentadas durante as estratégias, é possível que ocorram dificuldades em relação à ordem da realização do sorteio, podendo mobilizar o teorema em ação $T_{4.2}$(*a ordem dos elementos não interfere na quantidade de possibilidades),* sendo que esta situação está fora do seu domínio de validade, caracterizando-se como um teorema errôneo nesse problema. Caso não considere a ordem relevante para o problema, que nesse caso é, pode-se realizar a listagem de metade dos elementos ou classificá-lo como sendo uma combinação, e assim, aplicar a fórmula correspondente.

Outra possível dificuldade está no fato de não considerar a possibilidade de repetição dos professores no sorteio, e nesse caso, mobilizar algumas das estratégias já apresentadas, chegando ao total de 20 possibilidades de sorteio.

5.1.2 Análise *a priori* do segundo problema

O segundo problema da primeira sessão é o seguinte:

Quantos anagramas são possíveis de formar da sigla "UFMS"? E se o anagrama começar com consoante?

Nesse segundo problema, de permutação, também adotamos um número pequeno de elementos como primeira variável didática e colocamos a restrição de o anagrama formado com as letras da sigla UFMS iniciar com uma consoante na segunda parte do problema. Atribuímos essa escolha pautados no resultado apresentado por Santos-Wagner, Bortoloti, Ferreira (2013), no qual os alunos identificavam os problemas e aplicavam uma fórmula diretamente para encontrar a solução. Desse modo, mesmo que os alunos realizassem esse procedimento na primeira parte do problema, posteriormente, era necessário que os mesmos refletissem sobre a restrição imposta e pensassem em uma estratégia para resolver a questão. Nesse problema, assim como no primeiro, os alunos deveriam levar em consideração a ordem dos elementos no momento de resolvê-lo, mobilizando o teorema em ação $T_{4.1}$(*a ordem dos elementos sempre resulta em novas possibilidades)*.

Possíveis estratégias para a primeira parte do problema:

E_1*: Listagem de Possibilidades*

Nessa estratégia inicia-se listando todos os possíveis anagramas que podem ser formados, podendo realizar esse procedimento de maneira sistemática ou não, caso mobilizem o teorema em ação $T_{1.2}$. (*existe uma maneira sistemática de listar que garante esgotar todos os casos possíveis*), do seguinte modo: UFMS; UFSM; USFM; USMF; UMFS; UMSF; FUMS; FUSM; FMSU; ... ;SMFU, totalizando 24 anagramas.

E_2*: Utilização da Fórmula*

Identifica-se e classifica-se o problema como uma permutação de quatro elementos e aplica-se a fórmula correspondente:

$$P! = 4! \Leftrightarrow P! = 4\ x\ 3\ x\ 2\ x\ 1 \Leftrightarrow P! = 24$$

$E_{3:}$ *Princípio Fundamental da Contagem*

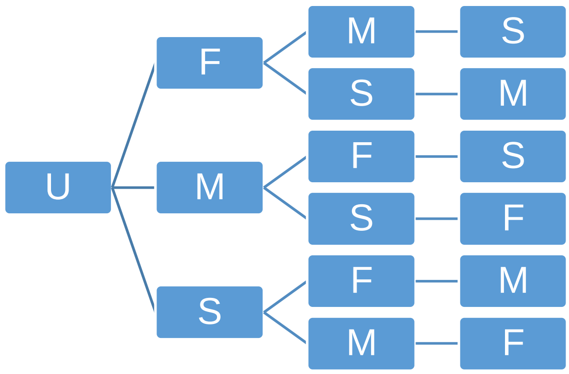
Para essa estratégia, determina-se que há quatro opções de letras para a primeira posição do anagrama, três opções para a segunda posição, duas opções para a terceira posição e apenas uma opção na última posição. Utilizando o PFC, obtém-se que há $4\ x\ 3\ x\ 2\ x\ 1 = 24$ possibilidades de anagramas diferentes.

E_4 *: Busca de Regularidades*

A partir de alguma das estratégias já apresentadas, como a listagem de possibilidades, verifica-se que para cada letra fixada na primeira posição, é possível formar seis anagramas diferentes. Dessa maneira, como a sigla UFMS possui quatro letras distintas, o total de possibilidades é $4\ x\ 6 = 24$ anagramas distintos.

E_5 *: Árvore de Possibilidades*

Conforme destaca Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996) a árvore de possibilidades, por meio de sua maneira de representar o pensamento, é uma estratégia que contribui para se construir o desenvolvimento do raciocínio combinatório e conjecturas do Princípio Fundamental da Contagem. Portanto, para esse problema, pode-se utilizar essa estratégia da seguinte maneira:



De maneira análoga, constrói-se outras três árvores de possibilidades, fixando as demais letras na primeira posição, totalizando os 24 casos possíveis. Essa estratégia tem como característica fornecer todos os casos possíveis, além de propiciar a quantidade de possibilidades. Consonante ao resultado apresentado por pesquisas sobre o tema (MIGUEL; MAGINA, 2003; NAVARRO-PELAYO; BATANERO; GODINO, 1996), apesar das contribuições dessa estratégia, é possível que a mesma seja preterida por outras, além de ocorrer dificuldades na construção dos diagramas de árvores.

Para a segunda questão desse problema, pode-se utilizar as estratégias já apresentadas para o item anterior, com as adaptações necessárias, como a listagem de todos os anagramas que comecem com consoantes, fixar uma consoante na primeira posição e utilizar a fórmula de permutação com as outras três letras, ou, utilizar o PFC, sabendo que na primeira posição há apenas três opções, e não mais quatro. Além disso, é possível que se mobilize a seguinte estratégia:

E_{b1} *: Exclusão dos casos indesejados*

Após ter realizado o primeiro item do problema e encontrado as possibilidades de todos os casos possíveis, retira-se desses os anagramas iniciados com a vogal U, restando os anagramas que atendem a restrição do problema. Assim, utilizando alguma das estratégias anteriores, encontra-se 6 anagramas que iniciam com a letra U, e subtrai-se dos 24 anagramas possíveis de se formar, resultando em 18 anagramas distintos que iniciam com consoante.

5.1.3 Experimentação

Esta sessão ocorreu no dia 21 de março de 2014, das 9h às 11h e contou com a presença de trinta alunos, que se dividiram em 9 grupos, de modo a elaborar e discutir as estratégias de resolução das duas situações-problema da sessão. Para o desenvolvimento da sessão foi apresentado, em um primeiro momento, o Problema 1, posteriormente o Problema 2, e, por fim, realizado um momento em que os alunos apresentavam as estratégias mobilizadas nos dois problemas, esboçando elementos da institucionalização (BROUSSEAU, 1996). Nessa sessão, assim como nas demais, destacamos que ocorreu a devolução dos problemas e o envolvimento dos alunos em situações *adidáticas* em que buscaram resolver os problemas em jogo.

5.1.4 Análise *a posteriori*

Conforme apresentamos na análise *a priori*, na resolução do Problema 1 os alunos poderiam não considerar a possibilidade de um professor ganhar os dois prêmios. Com um olhar semelhante a esse, durante a realização da análise *a priori*, nós, ministrantes do projeto de extensão, também não havíamos considerado a possibilidade de repetição dos professores, apesar de o enunciado do problema não fazer essa restrição.

Verificamos que os Grupos 1, 2, 3, 4 e 5 perceberam que nesse problema é possível considerar a repetição dos professores, enquanto os Grupos 6, 7, 8 e 9 resolveram o problema sem considerar essa possibilidade. O Grupo 2 e o Grupo 5, que consideraram a repetição dos professores, resolveram o problema mobilizando as estratégias E_1 e E_3, listagem de possibilidades e Princípio Fundamental da Contagem, respectivamente. A Aluna a2 iniciou o problema utilizando a estratégia E_3 (PFC), considerando cinco opções para o primeiro prêmio e quatro opções para o segundo. Nesse momento, a Aluna c2 realizou o seguinte questionamento:

> Aluna c2: Tá. Mas, e o mesmo professor pode ganhar 2?
> Aluna a2: Não. Mas eu já excluí um aqui né, não excluí?
> Aluna c2: Tá. Mas vai que esse professor pode ganhar outro prêmio. Não falou que vai tirar esse professor do sorteio. O mesmo professor pode ganhar o *tablet* e o relógio.
> Aluna a2: Mas assim, [...] o cara que ganhar o primeiro prêmio não ganha o segundo prêmio, ele tirou o primeiro lugar.
> Aluna c2: Mas não falou se vai tirar.
> Aluna a2: É, não fala né.
> [...]
> Aluna a2: Mas não tem como, eu só tenho a opção do primeiro prêmio e a opção do segundo prêmio, eu só tenho dois prêmios.
> Aluna c2: É que não é primeiro lugar, segundo lugar, não é classificação.
> Aluna a2: Ah! É primeiro prêmio e segundo prêmio.
> [...]

Após esse diálogo inicial, as alunas do Grupo 2 realizaram o mesmo questionamento para o pesquisador:

> Aluna c2: Aqui um professor pode ganhar dois prêmios?
> Pesquisador: Um professor ganhar dois prêmios?
> Aluna c2: Não? Aqui fala primeiro prêmio, segundo prêmio, não fala que vai tirar o papelzinho do primeiro sorteado.
> Pesquisador: Então, vamos ler o problema. [...]
> Aluna c2: Pelo que eu olhei aqui, pode.

Vemos por meio dos diálogos anteriores que as alunas do Grupo 2 estavam envolvidas com a situação-problema que propusemos, empenhando-se na busca da resposta do mesmo. Assim, caracterizamos que houve a devolução com essas alunas, pois Brousseau (2008, p. 91) destaca que “a devolução é o ato pelo qual o professor faz com que o aluno aceite a responsabilidade de uma situação de aprendizagem (adidática) ou de um problema e assume ele mesmo as consequências dessa transferência”. Após ter ocorrido a devolução do problema pelas alunas, a Aluna a2 apresentou para as demais sua estratégia E_3, o Princípio Fundamental da Contagem, mas sem considerar a repetição dos professores. Já a Aluna c2, que considerou a possibilidade de repetição dos mesmos, diante dos questionamentos e reflexões das demais alunas do grupo, tentou validar seu pensamento junto às mesmas e apresentou sua resolução pautada na estratégia E_1, a listagem de possibilidades, estando vinculada aos teoremas $T_{1.1}$ (*Dado um problema de contagem, sempre é possível listar todas as possibilidades)* e $T_{1.2}$ (*Existe uma maneira sistemática de listar que garante esgotar todos os casos possíveis)* pois, além de listar, a realizou sob uma organização sistemática.

Somente nesse momento, nós, pesquisador e colaboradora A, nos demos conta da possibilidade de haver a repetição dos professores. Assim, reestruturamos a análise *a priori,* analisando dúvidas e discussões que não havíamos planejado. Esse fato nos permitiu refletir sobre como a metodologia da Engenharia Didática, além de "atuar na direção" dos alunos, já que foi elaborada com foco neles, também "reflete sobre" o pesquisador, nessa perspectiva de prever possíveis estratégias e dificuldades que podem aparecer e como gerenciá-las. Além disso, destacamos o fato de a ED não ser uma metodologia fechada, conforme ressalta Bittar (no prelo), já que mesmo durante a fase de experimentação, realizamos as adequações que julgamos ser necessárias na análise *a priori*.

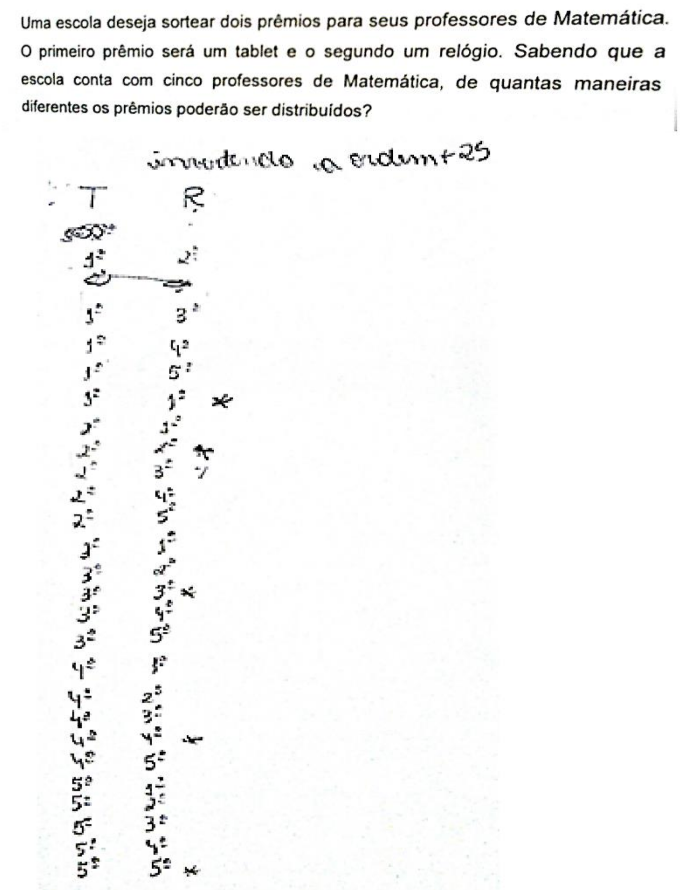
Os alunos do Grupo 1, tentaram inicialmente resolver o problema mobilizando uma fórmula que atendesse o problema, conforme consideramos na análise *a priori*. Porém, apesar de os mesmos tentarem utilizar a fórmula, apresentaram dificuldades em lembrá-las, como mostra o excerto a seguir:

> Aluna c1: Aí é aquele que dá para fazer pelo i ou pelo risquinho e coloca um em cima. Eu lembro que tinha um fatorial assim, esse ou por risquinho.
> Aluno a1: Ah, eu lembro.
> Aluna c1: Só que não lembro qual que faz.
> Aluno a1: Eu não lembro como é que faz as fórmulas.
> [...]
> Aluna c1: É cinco fatorial, sobre dois fatorial, sobre três fatorial.
> Aluna b1: Por que fica assim?
> Aluna c1: Porque fica dois professores, cinco menos três.

Nesse momento, destacamos que os alunos do Grupo 1 apresentaram uma postura semelhante ao observado na pesquisa de Santos-Wagner, Bortoloti, Ferreira (2013), ao tentarem apenas lembrar uma fórmula que resolva o problema, não levando em consideração as características do mesmo, como a ordem e a possibilidade de repetição dos elementos. Após essa discussão inicial, os alunos perceberam a possibilidade de repetição dos professores, apesar de considerarem "injusto" que isso ocorra. Também consideraram que a ordem dos professores sorteados faria diferença no problema, apresentando vestígios do teorema em ação $T_{4.1}$ (*a ordem dos elementos sempre resulta em novas possibilidades*). Assim, os alunos do Grupo 1 mobilizaram a listagem de possibilidades e o Princípio Fundamental da Contagem, estratégias

E_1 e E_3, respectivamente, para resolver o problema. Porém, apresentaram dificuldades em relação à ordem dos elementos, como no protocolo a seguir:

Figura 11 - Protocolo do Aluno a1, Sessão 1.



Uma escola deseja sortear dois prêmios para seus professores de Matemática. O primeiro prêmio será um tablet e o segundo um relógio. Sabendo que a escola conta com cinco professores de Matemática, de quantas maneiras diferentes os prêmios poderão ser distribuídos?

invertendo a ordem + 25

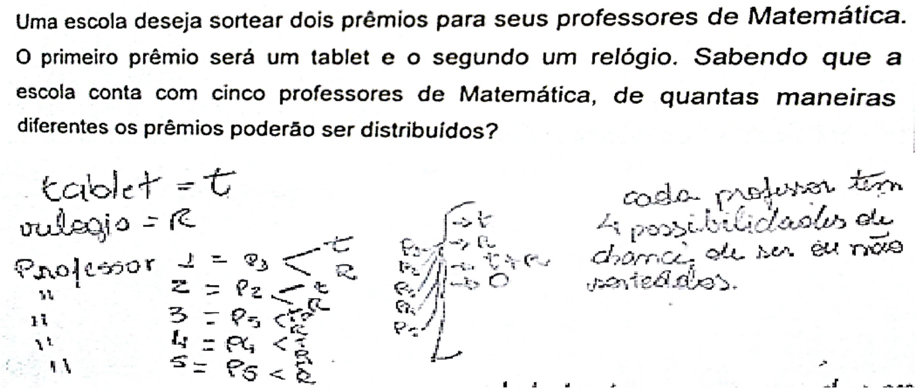
T	R
1º	2º
1º	3º
1º	4º
1º	5º
1º	1º *
2º	1º
2º	2º *
2º	3º
2º	4º
2º	5º
3º	1º
3º	2º
3º	3º *
3º	4º
3º	5º
4º	1º
4º	2º
4º	3º
4º	4º *
4º	5º
5º	1º
5º	2º
5º	3º
5º	4º
5º	5º *

Fonte: dados da pesquisa

Percebemos tanto nessa produção, quanto na produção apresentada pela Aluna c1, cuja utilizou o Princípio Fundamental da Contagem, que apesar de explicitarem corretamente a relevância da ordem dos professores nesse problema, inverteram a ordem dos professores em dois momentos durante a resolução do problema, contando casos a mais. Ao listarem as possibilidades do sorteio, já haviam contado os casos que invertiam a ordem dos professores para o primeiro e o segundo prêmio, porém, como não se atentaram ao fato de já terem feito essa inversão dos professores, realizaram-na novamente, contabilizando um total de 50 possibilidades.

Os alunos do Grupo 3, diferentemente dos grupos anteriores, iniciaram a resolução do problema com outra perspectiva. Enquanto os demais grupos consideravam a quantidade de professores possíveis para cada prêmio, o Grupo 3 considerou as possibilidades de eventos que poderiam ocorrer com o professor durante o sorteio, conforme apresentado.

Figura 12 - Protocolo do Aluno a3, Sessão 1.



Fonte: dados da pesquisa

Desse modo, cada professor poderia ter quatro possíveis resultados no sorteio, sendo eles: ganhar o tablet, ganhar o relógio, ganhar os dois prêmios ou não ganhar prêmio. Apesar de esse pensamento inicial estar correto, os alunos do Grupo 3 utilizaram a estratégia E_4 (generalização), de maneira inadequada, pois consideraram que como havia cinco professores, com cada um tendo quatro possíveis resultados no sorteio, teriam um total de 20 possibilidades distintas do sorteio, ao invés de 25 possibilidades. Destacamos que a estratégia E_4, é ineficaz se for realizada dessa maneira, pois como cada professor tem os quatro possíveis resultados, ao generalizar, os alunos estão considerando casos em que nenhum professor ganha prêmios, ou que todos ganhem os dois prêmios, o que não é o caso no problema.

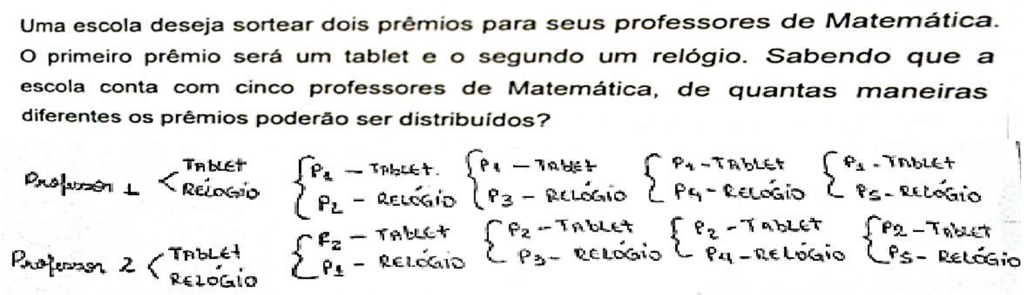
Nessa sessão, o Grupo 4 foi composto pelos Alunos a4 e b4, além dos Alunos c9 e d9, que a partir da segunda sessão ficaram no Grupo 9. Inicialmente, os alunos não consideraram a repetição dos professores durante o sorteio. Porém, no decorrer das discussões, com os alunos vivenciando momentos *adidáticos*, o Aluno c9 levantou essa possibilidade, sendo que a Aluna a4 concordou e utilizou as estratégias E_3 e E_4 (Princípio Fundamental da Contagem e Busca de Generalidades, respectivamente) para resolver o problema. Embora tenha compreendido o problema e ressaltado a possibilidade de repetição dos professores durante o sorteio, o Aluno c9 apresentou dificuldade em resolvê-lo, não mobilizando nenhumas das estratégias previstas na análise *a priori*, e, tendo apenas escrito os dois casos, de repetição e não repetição dos professores, que poderiam ocorrer no sorteio.

Apesar de relatarem que compreenderam esse pensamento, os Alunos b4 e d9 no momento que resolveram o problema utilizando a estratégia E_1, listaram apenas os casos em que haviam professores distintos. Ainda que o Aluno b4 tenha colocado uma observação de que aumentariam as possibilidades caso repetissem os professores, não considerou essa possibilidade ao resolver o problema. Além disso, após realizar a listagem das possibilidades, o Aluno b4 explicitou a dificuldade em relação à ordem dos elementos, relacionada aos teoremas em ação $T_{4.1}$(*a ordem dos elementos sempre resulta em novas possibilidades*) e $T_{4.2}$(*a ordem dos elementos não interfere na quantidade de possibilidades*).

> Aluno b4: Então. Eu levei em consideração que a ordem não importava.
> Pesquisador: E nesse problema importa ou não importa?
> Aluno b4: Então, isso que eu fiquei em dúvida.
> [...]
> Pesquisador: Por que?
> Aluno b4: Porque aqui você não está colocando como se fosse uma competição, em que o primeiro vai ganhar um relógio e o segundo um tablet. [...]. Então tanto vai importar se eu ganhar um relógio em primeiro, e você ganhar um tablet em segundo. Você ganhar um relógio (em primeiro), e eu ganhar um tablet em segundo.
> Pesquisador: Tanto faz?
> [...]
> Aluno b4: Eu acredito. Porque você não fala como se fosse uma competição. Agora se fosse uma competição, aí você levaria em conta que a ordem importava, porque um prêmio é melhor que o outro.

Ao analisarmos a resolução apresentada pelo Aluno b4, vemos um conflito no que ele explicita, em relação ao que está na resolução.

Figura 13 - Protocolo do Aluno b4, Sessão 1.



Fonte: dados da pesquisa

Ao realizar essa listagem apresentada no protocolo, e, de maneira análoga para os professores P3, P4 e P5, inferimos que o aluno mobiliza o teorema $T_{4.1}$(*a ordem dos elementos sempre resulta em novas possibilidades)*, pois no momento em que realizou a listagem, considerou que a ordem gerava novas possibilidades e trocou os prêmios dos professores, como no caso dos professores P1 e P2. Conforme destaca Vergnaud (2009b), percebemos que nesse momento, o conhecimento predicativo do Aluno b4, ao explicitar que a ordem dos elementos não importava (teorema $T_{4.2}$), não está consonante com seu conhecimento operatório, já que ao realizar a listagem, levou em consideração a ordem dos professores no sorteio (teorema $T_{4.1}$).

Então, após identificarmos esse conflito, questionamos o aluno b4 sobre sua resolução, em relação ao que ele explicitou.

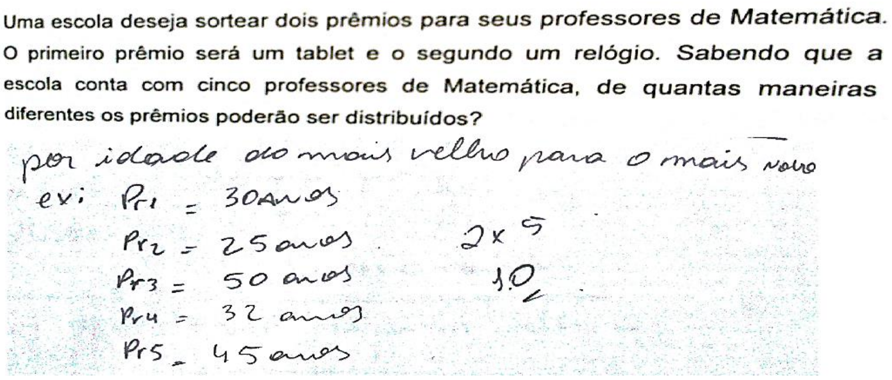
> Pesquisador: Os prêmios foram distribuídos da mesma maneira (na sua resolução)?
> Aluno b4: Eles (foram) sorteados... Da mesma maneira não! Porque são prêmios diferentes para cada um. Porque aqui (primeiro caso da listagem) ele ganhou um relógio, e aqui (segundo caso da listagem) ele ganhou um tablet.
> Pesquisador: E aí? Isso é diferente?
> Aluno b4: É diferente, então aqui (no problema) a ordem vai importar, porque o prêmio é diferente.

Conforme previsto na análise *a priori*, o Aluno b4 apresentou dificuldades em relação à ordem de sorteio dos professores, estando relacionadas aos teoremas $T_{4.1}$ e $T_{4.2}$. Apesar de resolver o problema mobilizando o teorema $T_{4.1}$ de maneira correta, ao explicitar sua resposta destacou vestígios do teorema $T_{4.2}$, que nesse problema se tratava de um teorema errôneo. Porém, ao vivenciar essa situação *adidática*, percorrendo um processo de adaptação com as retroações proporcionadas pelo meio *adidático*, como os questionamentos do pesquisador e os feedbacks de ações realizadas ao longo da resolução, no momento de validação de sua estratégia o Aluno b4 percebeu que neste problema o teorema $T_{4.1}$ estava correto, ao contrário do teorema $T_{4.2}$. Portanto, destacamos a importância da organização e influência do meio *adidático* no processo de construção de conhecimento do aluno, pois "um meio sem intenções didáticas é incapaz de induzir o aluno a adquirir todos os conhecimentos culturais que se espera que obtenha" (BROUSSEAU, 2008, p. 34).

Os Grupos 6 e 7 resolveram o problema sem considerar a repetição dos professores e perceberam a relevância da ordem de escolha dos professores, mobilizando o teorema em ação $T_{4.1}$, de modo que o problema poderia ser classificado como um arranjo simples. Assim, os alunos do grupo 6 realizaram a estratégia E_3, o PFC, a qual está vinculada ao teorema em ação T_3(*Princípio Fundamental da Contagem*). Já os alunos do Grupo 7, além da estratégia E_3, também recorreram às estratégias E_1(listagem de possibilidades) e E_2(utilização de fórmulas), chegando ao total de 20 possibilidades em todas as elas.

Por fim, verificamos que os Alunos a9 e e9 apresentaram dificuldades para resolver o problema. A Aluna e9 mobilizou o teorema $T_{1.3}$ (*se o problema é generalizável, então ao fazer uma listagem sistemática é possível encontrar tal generalidade)*, realizando uma generalização inadequada para o problema, pois considerou que cada professor pode ganhar dois prêmios, e, como se tem cinco professores, o sorteio poderia ocorrer de 10 maneiras distintas. O Aluno a9, além de apresentar uma resolução idêntica à apresentada pela Aluna e9, também resolveu "o problema" de outra maneira. Ao ler o mesmo, o Aluno a9 destacou a palavra *distribuídos*, e para resolver adotou critérios de distribuição.

Figura 14 - Protocolo do Aluno a9, Sessão 1.



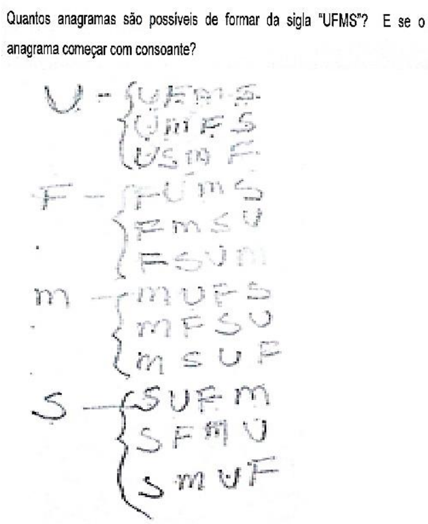
Fonte: dados da pesquisa

Nessa resolução, o Aluno a9 adotou como critério de distribuição a idade dos professores, com os prêmios sendo distribuídos dos professores mais velhos para os mais novos. Além desse critério, ele também apresentou como critério, o tempo de serviço de cada professor e destacou que poderia adotar outros critérios para se distribuir o prêmio, aumentando as possibilidades. Nesse caso, inferimos que ao interpretar o problema, o Aluno a9 desconsiderou o fato de se tratar de um sorteio dos prêmios, e ao resolvê-lo, vemos que o mesmo procura possíveis critérios para realizar a distribuição do prêmio.

Na continuidade do encontro, apresentamos o segundo problema para os alunos resolverem: *Quantos anagramas são possíveis de formar da sigla "UFMS"? E se o anagrama começar com consoante?*

Os Alunos a9 e c9 utilizaram a estratégia E_1 para resolverem o problema, conforme a resolução apresentada pelo Aluno c9.

Figura 15 - Protocolo do Aluno c9, Sessão 1



Fonte: dados da pesquisa

Evidenciamos que os alunos do Grupo 9 mobilizaram o teorema em ação $T_{1.1}$ (*dado um problema de contagem, sempre é possível listar todas as possibilidades*), ao realizarem a listagem de possíveis anagramas que podem ser formados da sigla UFMS, apesar de não listarem todas as possibilidades. Além disso, os mesmos não apresentaram indícios que perceberam que a listagem realizada está incompleta. Esse resultado vai ao encontro do que identificamos durante a análise preliminar, na qual algumas pesquisas, como a de Navarro–Pelayo, Batanero e Godino (1996), destacam que uma dificuldade que pode ocorrer ao realizar a listagem é os alunos não perceberem a falta de alguma possibilidade. As pesquisadoras apontam que a realização da listagem utilizando uma organização sistemática contribui para a superação dessa dificuldade, pois os alunos têm condições de organizar e ter o controle da listagem realizada. Destacamos que o Aluno c9 realizou a listagem sob uma organização, o que nos permite inferir que o mesmo mobiliza o teorema em ação $T_{1.2}$ (*existe uma maneira sistemática de listar que garante esgotar todos os casos possíveis*), pois o mesmo fixou a primeira letra do anagrama e buscou os casos que podem ser formados a partir dessa escolha. Porém, o que ocasionou a falta de possibilidades na listagem do aluno é o fato de não ter considerado que as duas últimas letras do anagrama poderiam permutar entre si, mantendo as duas primeiras letras fixas, por exemplo, UFMS e UFSM, FMSU e FMUS, entre outros.

Nas produções dos demais grupos, identificamos que os mesmos utilizaram predominantemente a estratégia E_3, o Princípio Fundamental da Contagem, para resolver o problema, com exceção do Aluno a5 que conhecia a fórmula do fatorial para resolução de anagramas. Na primeira parte do problema, os alunos resolveram de maneira idêntica à apresentada na análise *a priori*, resultando em 24 possibilidades. Além da estratégia PFC, destacamos que a Aluna a4 apresentou também a estratégia E_5, construindo quatro árvores de possibilidades, fixando em cada uma delas uma letra distinta na primeira posição.

Para o segundo item, novamente houve a predominância do PFC, em que os alunos consideraram, de maneira adequada, que tinham somente três opções de letras na primeira posição, já que o anagrama só poderia iniciar com uma consoante, resultando em $3\ x\ 3\ x\ 2\ x\ 1 = 18$ possibilidades. Apesar de utilizarem o PFC no primeiro item, para a segunda parte do problema, os alunos do Grupo 3 mobilizaram um conhecimento relacionado a razão e proporção, já que dividiram as 24 possibilidades encontradas no primeiro item por 4 (número de possibilidades que o anagrama pode começar) e somaram somente os casos que começavam com consoantes, totalizando os 18 anagramas possíveis que atendem a restrição do problema.

Corroboramos com Vergnaud (2009b) quando afirma que os conceitos estão alocados em campos conceituais, os quais são compostos por um "conjunto de situações cujo domínio progressivo pede uma variedade de conceitos, de esquemas e de representações simbólicas em estreita conexão" (VERGNAUD, 2009b, p. 29). Desse modo, para resolver uma situação-problema de combinatória, a qual está inserida no campo conceitual multiplicativo, não é necessário que o aluno utilize somente conceitos específicos da combinatória, como as fórmulas ou o Princípio Fundamental da Contagem. Ao analisarmos a resolução apresentada pelo Grupo 3, observamos que os alunos perceberam uma regularidade da resposta encontrada na primeira parte do problema, com as possíveis letras que podem iniciar o anagrama. A partir de então, apresentaram indícios de conhecimentos de razão e proporção, conceitos também presentes no campo conceitual multiplicativo, ao realizar a divisão e somar apenas as que atendiam à restrição do problema.

Outra estratégia mobilizada na resolução do segundo item do problema foi a E_{b1}, a subtração dos casos indesejados, em que os alunos do Grupo 5, além do Aluno a1, subtraíram das 24 possibilidades do primeiro item, os seis possíveis anagramas que começavam com a vogal U, após os terem listados. No momento que tentava validar sua estratégia para o Aluno d5, o Aluno a5 teve a seguinte reflexão e questionou:

> Aluno a5: Eu coloquei vinte e quatro menos seis, é igual a dezoito maneiras de se começar um anagrama com consoante. Porém, ele poderia dar um anagrama muito maior, entendeu? Com várias vogais.

Destacamos que apesar da resolução apresentada estar correta, o Aluno a5 questionou a viabilidade da estratégia em casos de uma maior quantidade de letras, como o anagrama da palavra "ALEXANDRE", palavra que ele escolheu. A estratégia de listagem, além de ser correta, também é eficiente nesse problema. Porém, conforme relatado pelo Aluno a5, há casos que somente essa estratégia é ineficaz para resolver o problema e o aluno terá necessidade de utilizar uma estratégia genérica. Para isso, ao longo das sessões "jogamos" com a variável didática que diz respeito à quantidade de elementos do problema, com o intuito de que alunos percebessem essa característica da estratégia de listagem.

Pautados em Brousseau (1996, 2008) verificamos que houve a devolução do problema perante os alunos desse grupo, pois levantaram novos questionamentos e buscaram encontrar respostas para tais questões, mesmo após terem resolvido o problema inicial utilizando a listagem de possibilidades. Então, os alunos do Grupo 5 buscaram outras estratégias para encontrar quantos anagramas que começam com consoantes que podem ser formados da palavra ALEXANDRE, e após inúmeras discussões chegaram à seguinte conclusão:

> Aluno a5: Eu acho que fluiu na minha cabeça aqui. Com a letra A, a gente exclui uma letra e vai dar: oito vezes sete, vezes seis, vezes cinco, vezes quatro, vezes três, vezes dois, vezes um. Daria sete vezes seis, vezes cinco, vezes quatro... (segunda utilização do PFC).
> Aluno d5: Mas aqui (na segunda vez que o Aluno a5 utiliza o PFC), você já vai começar a excluir duas vogais. Seria só essa primeira mesmo: oito vezes sete, vezes seis, vezes cinco ... Porque aí excluiria só o A (letra A).
> Aluno a5: Então, mas sobrariam mais três vogais.
> Aluno d5: Então, mas sabendo isso aqui: oito vezes sete, vezes seis... Tirando as vogais do começo, daria esse tanto, entendeu?
> Aluno a5: É, tá certo. É esse pensamento aí.

Inseridos em um meio antagonista, que causou desequilíbrios cognitivos e levou os alunos a buscarem solução para um novo problema, destacamos que os alunos do Grupo 5 percorreram os três momentos *adidáticos*, como verificamos no excerto anterior. Ao observar regularidades do meio, utilizar suas respostas anteriores e considerá-las para futuras decisões, os mesmos perpassaram pelo momento *adidático* de ação. Além disso, eles comunicaram entre si a informação elaborada anteriormente, e, em conjunto, validaram a estratégia do Princípio Fundamental da Contagem para a resolução desse problema, percorrendo os momentos de formulação e validação (BROUSSEAU, 2008). Por fim, ao vivenciarem os momentos *adidáticos*, os alunos do Grupo 5 tiveram condições de discutir as estratégias mobilizadas, de perceber a viabilidade da listagem de possibilidades, elaborando outra estratégia.

Ao final do encontro, seguimos para um momento de discussão das estratégias mobilizadas pelos alunos, no qual eles se dirigiam ao quadro e as apresentavam para a turma. Foi nesse momento que os alunos que não consideraram a possibilidade de repetição dos professores no primeiro problema perceberam tal possibilidade, como no diálogo seguinte à resolução apresentada pelo Aluno a7, que utilizou a fórmula de arranjo simples e encontrou 20 possibilidades.

> Aluna a4: O enunciado não especifica que cada professor pode ganhar só um prêmio, então eu tenho mais cinco possibilidades dessa distribuição [...].
> Aluno a7: Mas sorteou um nome, vai sortear de novo o mesmo nome? Como assim?
> Aluno b5: Imagina duas caixinhas, vamos colocar todos os nomes em uma caixinha no primeiro prêmio, e todos os nomes em outra caixinha no segundo prêmio. Tirei um, ganhei. Tirei outro, ganhei de novo, pode ser possível.
> Aluna b8: Eu acho que não pode ser (repetir os professores), porque não está especificado no enunciado que vai ser duas caixas, ou que vai ser em uma.
> Aluna a4: Mas é porque o que a gente está analisando não é a forma de como ocorreu o sorteio, são as possibilidades que ele pode acontecer.

Como observamos no diálogo supracitado, alguns alunos que não consideraram a repetição dos professores, ainda relutavam diante dessa possibilidade, por acreditarem não ser justo o mesmo professor ganhar os dois prêmios. Porém, durante a discussão do problema, e com a intervenção do pesquisador e da colaboradora A, os alunos compreenderam que a situação-problema não tinha nenhuma restrição em relação à repetição dos professores no sorteio, e consequentemente, tal possibilidade deveria ser considerada. Apesar de os alunos estarem ativos nas discussões e apresentações das estratégias, esse momento final do encontro não representou um momento *adidático,* já que contou com a nossa interferência explícita sobre o saber em jogo nos problemas propostos. Desse modo, caracterizamos esse momento como sendo de institucionalização, pois validamos as estratégias mobilizadas corretamente, refutamos as que eram inadequadas e conferimos um *status* aos eventos ocorridos durante a sessão, de modo que os alunos poderiam reutilizar nas próximas sessões (BROUSSEAU, 2008).

5.1.5 Considerações da primeira sessão

No desenvolvimento da primeira sessão, de modo geral, os alunos se mostraram participativos e interessados em resolver as situações-problema propostas, caracterizando assim a devolução (BROUSSEAU, 2008). Apesar de os alunos relatarem ter dificuldades em combinatória, os mesmos mobilizaram diversas estratégias para resolverem os problemas, tendo sido utilizadas a listagem de possibilidades, fórmulas, Princípio Fundamental da Contagem, generalizações e o diagrama de árvores, como previmos na análise *a priori.*

Em relação ao primeiro problema, houve grupos que consideraram de maneira correta a possibilidade de haver a repetição dos professores, e ao serem questionados argumentavam e defendiam esse ponto de vista. Presenciamos em diversos momentos do encontro a influência das vivências dos alunos ao resolverem os problemas pois, apesar de lerem o problema e verificarem a possibilidade de repetição dos professores, alguns não o faziam por considerar injusto isso ocorrer. Além disso, ao resolver o problema, o Aluno a9 desconsiderou o fato de se tratar de um sorteio e decidiu atribuir critérios de distribuição para os prêmios.

Por fim, destacamos a participação dos mesmos no momento final do encontro, no momento de validação e debate das estratégias, no qual houve a participação de todos. Eles discutiam seus pontos de vista, justificando-nos suas resoluções, pautados na interpretação que tiveram para o problema e tentando validar suas respostas perante os demais colegas. Assim, esse ambiente proporcionado pelos debates dos alunos, com argumentos e reflexões levantadas, nos forneceu subsídios para a realização da institucionalização da sessão.

5.2 Sessão 2

A segunda sessão foi composta por duas situações-problema, sendo a primeira um problema de combinação e a segunda um problema de produto cartesiano.

5.2.1 Análise *a priori* do primeiro problema

O primeiro problema da sessão segue abaixo:

1- Dada uma circunferência c, são indicados 4 pontos distintos sobre ela[30].

a) Quantos segmentos de reta com extremidades em dois desses pontos podem ser traçados?

b) Tendo três desses pontos como vértices, quantos triângulos podem ser formados?

c) Se na circunferência c fossem indicados 5 pontos, ao invés de 4, quantos segmentos de reta poderiam ser traçados? E quantos triângulos?

Para esse problema de combinação, não haviam restrições, de modo que os alunos poderiam utilizar diretamente a fórmula de combinação para resolvê-lo. Em relação à quantidade de elementos do problema, adotamos como variável didática apenas 4 elementos nos itens a e b, e no item c aumentamos essa quantidade para 5. Com essa escolha, nosso objetivo era que os alunos tivessem condições de utilizar inicialmente diversas estratégias. Porém, para o item c, ao aumentarmos o número de pontos contidos na circunferência, desejávamos que os alunos refletissem e considerassem outras estratégias mais genéricas e, caso realizassem a listagem de possibilidades, a mobilizassem utilizando uma organização sistemática. Além disso, esperávamos que os alunos percebessem que nesse problema o teorema em ação $T_{4.1}$ (*a ordem dos elementos sempre resulta em novas possibilidades*) está fora de seu domínio de validade, sendo necessário mobilizar o teorema em ação $T_{4.2}$: *a ordem dos elementos não interfere na quantidade de possibilidades*.

[30] Fonte (adaptado): Souza, J. (2010)

Possíveis estratégias:

Apresentamos, em um primeiro momento, as estratégias que os alunos podem mobilizar para responder os três itens do problema. Destacamos nesse momento que, por se tratar da mesma estratégia, realizamos a solução apenas para o item a, sendo que para os demais itens utiliza-se o mesmo pensamento, com as devidas adaptações. Em um segundo momento, exibimos outras possíveis estratégias que os alunos podem mobilizar para encontrar apenas os segmentos de reta que podem ser formados a partir dos pontos da circunferência, não sendo possível utilizá-la para encontrar a quantidade de triângulos.

E_1*: Listagem de Possibilidades*

Realiza-se a listagem, podendo utilizar como meio de representação o desenho da circunferência e dos pontos, encontrando seis segmentos de reta e quatro triângulos, para os itens a e b, respectivamente. E, no item c, encontra-se 10 segmentos de reta e 10 possíveis triângulos. Desse modo, para o item a, uma possível estratégia seria:

1- $\overline{AB}$	4- $\overline{BC}$
2- $\overline{AC}$	5- $\overline{BD}$
3- $\overline{AD}$	6- $\overline{CD}$

E_2*: Utilização da Fórmula*

Relacionada ao teorema em ação T_2 (*se um problema é de combinatória, então existe uma fórmula que resolve e basta utilizá-la para encontrar a solução*), após identificar as propriedades do problema e classificá-lo como uma combinação, utiliza-se a fórmula correspondente:

$$C_2^4 = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} \Leftrightarrow C_2^4 = \frac{4!}{2!\,2!} \Leftrightarrow C_2^4 = \frac{24}{4} \Leftrightarrow C_2^4 = 6$$

E_3*: Princípio Fundamental da Contagem*

Em um primeiro momento, considera-se que para a primeira extremidade do segmento de reta possui quatro possibilidades e para a segunda extremidade possui três opções. Utilizando o PFC, tem-se $4\ x\ 3 = 12$ possibilidades. Porém, deve-se observar que a ordem de escolha dos elementos não irá resultar em outro segmento de reta, conhecimento relacionado com o teorema em ação $T_{4.2}$ (*a ordem dos elementos não interfere na quantidade de possibilidades*), pois $\overline{AB}$

é o mesmo segmento de reta que $\overline{BA}$. Assim, ao utilizar o PFC, nota-se que está se contando duas vezes cada segmento, e, dentre as doze possibilidades encontradas inicialmente, divide-se por dois, resultando em seis segmentos de retas distintos.

Conforme destacamos anteriormente, para resolver o item a e a primeira parte do item c, os alunos podem mobilizar as estratégias a seguir, as quais não são válidas para encontrar as quantidades de triângulos.

E_{b1}: Relação com a geometria

Nessa estratégia, relaciona-se os pontos dados como sendo os vértices de um polígono, e a quantidade de segmentos de reta que podem ter esses pontos como extremidades é dada pela soma do número de diagonais do polígono e o número de lados do mesmo. Dessa maneira, pode-se utilizar outro conhecimento para encontrar a quantidade de diagonais, como a fórmula correspondente:

$$d = \frac{n\,(n-3)}{2} \Leftrightarrow d = \frac{4\,(4-3)}{2} \Leftrightarrow d = \frac{4}{2} \Leftrightarrow d = 2$$

Encontrado o número de diagonais, soma-se com a quantidade de lados do polígono em questão, nesse caso um quadrilátero, encontrando o total de seis segmentos de reta distintos.

E_{b2}: Soma dos (n-1) números naturais, ou, Soma dos termos de uma Progressão Aritmética.

No momento de resolver o problema, identifica-se que para o primeiro ponto é possível traçar três segmentos de reta distintos, para o segundo ponto é possível traçar dois segmentos, e, para os dois últimos pontos é possível traçar apenas um segmento. Desse modo, soma-se esses valores, encontrando os seis segmentos possíveis. Caso a quantidade de pontos seja grande, para encontrar a quantidade de segmentos de reta, ele pode utilizar a fórmula de soma de termos de uma Progressão Aritmética, $S_n = \frac{(a_1+a_n)n}{2}$, sendo que essa PA contém (n-1) termos e tem razão 1.

Além das dificuldades correspondentes a cada estratégia, é possível que no decorrer da sessão ocorram dificuldades em relação à ordem dos elementos, na formação dos segmentos de reta. Conforme destaca Pessoa (2009), os problemas de combinação são os problemas que os alunos apresentam maior índice de erros. Como destacamos anteriormente, os alunos podem considerar a ordem dos pontos da extremidade relevante na formação dos segmentos de reta e dos triângulos ao mobilizar o teorema em ação $T_{4.1}$(*a ordem dos elementos sempre resulta em* *novas possibilidades*), que está fora de seu domínio de validade, pois nesse problema não há relevância em relação à ordem dos elementos. Caso isso aconteça, os alunos encontrarão uma quantidade maior de elementos para os itens do problema, podendo responder que existem doze segmentos de reta distintos, tendo como extremidades os quatro pontos dados.

Outra possível dificuldade que pode ocorrer é uma generalização inadequada para o problema. Nesse caso, em relação ao item a, os alunos encontram que para cada ponto é possível formar três segmentos de reta distintos, e como há quatro pontos distintos, existem doze segmentos de reta distintos.

5.2.2 Análise *a priori* do segundo problema

Na sequência, o segundo problema:

Dados os conjuntos A={2,4,5,6} e B={1,3,9}, quantos pares ordenados (x,y) podemos formar sabendo que x é elemento do conjunto A e y elemento do conjunto B?

Assim como nos problemas anteriores, nesse problema de produto cartesiano adotamos valores pequenos como uma primeira variável, de modo que os alunos tivessem condições de listar as possibilidades. Na primeira e segunda sessões, optamos por adotar valores pequenos como variável didática, e no andamento da sequência, aumentamos esses valores, com o objetivo de o aluno utilizar estratégias que requeressem uma generalização, como o PFC ou busca por regularidades. Apesar de valores pequenos, julgamos que esse problema possibilitava que o aluno encontrasse regularidades e buscasse generalizações.

Possíveis estratégias:

E_1*: Listagem de Possibilidades*

Realiza-se a listagem de todos os pares ordenados possíveis, apresentando o teorema em ação $T_{1.1}$ (*dado um problema de contagem, sempre é possível listar todas as possibilidades*), podendo listar de maneira sistemática, mobilizando o teorema em ação $T_{1.2}$ (*existe uma maneira sistemática de listar que garante esgotar todas as possibilidades*), por exemplo:

1- (2,1)	5- (3,3)	9- (5,9)
2- (2,3)	6- (3,9)	10- (6,1)
3- (2,9)	7- (5,1)	11- (6,3)
4- (3,1)	8- (5,3)	12- (6,9)

E_2: Princípio Fundamental da Contagem

Adotamos para esse problema a estratégia E_2, o Princípio Fundamental da Contagem, ao invés da Utilização de Fórmulas, como nos problemas anteriores. Tal escolha está relacionada às características desse problema, que está classificado como produto cartesiano (PESSOA; BORBA, 2010). Nessa classe de problemas, não é apresentada uma fórmula específica para resolvê-lo, como acontece nos problemas de arranjo, permutação e combinação. Então, ao utilizar o teorema em ação T_3, relacionado ao PFC, considera-se que para a primeira posição do par ordenado há quatro opções e para a segunda posição, três opções. Então, é possível formar $4\ x\ 3 = 12$ pares ordenados distintos que atendem a restrição do problema.

E_3: Busca de Regularidades

Pautada no teorema em ação $T_{1.3}$, inicia-se a listagem dos pares ordenados verificando que para cada elemento do conjunto A é possível formar três pares ordenados distintos. Desse modo, como o conjunto A contém quatro elementos, é possível formar doze pares ordenados distintos.

5.2.3 Experimentação

Essa sessão ocorreu no dia 28 de março de 2014, das 9h às 11h, e contou com a presença de trinta e dois alunos. Esses alunos se dividiram em 9 grupos, e, como relatamos na primeira sessão, a partir desse encontro os Alunos c9 e d9, que antes estavam no Grupo 4, passaram a integrar o Grupo 9. O andamento do encontro aconteceu como o anterior, com a apresentação dos problemas, e por fim, o momento das discussões das estratégias mobilizadas pelos alunos.

5.2.4 Análise *a posteriori*

Para a resolução do primeiro problema, identificamos que os alunos mobilizaram as estratégias E_1, E_2 e E_3, a listagem de possibilidades, utilização de fórmulas e o Princípio

Fundamental da Contagem, respectivamente. Após distribuirmos a primeira situação-problema, os alunos do Grupo 1 realizaram o seguinte diálogo inicial:

> Aluna b1: Eu não gosto de circunferência. Nunca gostei de circunferência.
> Aluna c1: Pior que isso (circunferência), é só triângulo.
> Aluno a1: Ah, mentira que vai ser circunferência (o problema).

Verificamos que apesar de relatarem não gostar de circunferência e triângulos, tanto os alunos do Grupo 1, quanto os alunos dos demais grupos estavam engajados na busca da solução, e passaram a dialogar em busca de estratégias para resolver o problema, caracterizando assim a devolução (BROUSSEAU, 1996,2008). Todos os grupos iniciaram a busca pela resposta mobilizando inicialmente a estratégia E_1, a listagem de possibilidades, de modo que inferimos que os mesmos estavam vivenciando o momento *adidático* de ação pois, conforme destaca Freitas (2008, p. 95), nesse momento "o aluno, que se encontra ativamente empenhado na busca de solução de um problema, realiza determinadas ações mais imediatas, que resultam na produção de um conhecimento de natureza mais operacional", como é o caso da listagem de possibilidades.

No primeiro problema da sessão, os Grupos 1 e 9 utilizaram somente a estratégia da listagem de possibilidades, apresentando vestígios do teorema em ação $T_{1.1}$ (*dado um problema de contagem, sempre é possível listar todas as possibilidades*). Conforme salientamos na análise *a priori,* o meio *adidático* que elaboramos causou desequilíbrios nos alunos do Grupo 1, que apresentaram dúvidas em relação à ordem dos elementos no momento de formar o segmento de reta, como no excerto a seguir:

> Aluna c1: Segmento $\overline{AB}$, aí pode ser $\overline{BA}$?
> Aluno a1: Então, isso que eu acho que é a pegadinha, porque é o mesmo segmento.
> Aluna b1: Mas existe.
> Aluna c1: Mas a gente fala segmento $\overline{AB}$ e segmento $\overline{BA}$.
> Aluna b1: Para triângulo eu lembro que fala, mas para circunferência eu não lembro.
> Aluno a1: Não, porque $\overline{AB}$ e $\overline{BA}$ é o mesmo segmento.
> Aluna b1: Por que? (Mas) vai estar saindo de pontos distintos. Porque vai sair de A para B, e de B para A.
> [...]
> Aluna c1: Porque se for, vai ser só seis (segmentos). Se for do jeito que o Aluno a1 falou.

Destacamos que as Alunas b1 e c1, consideravam diferentes os segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{BA}$, como visto no diálogo supracitado. Desse modo, questionavam o Aluno a1 se atendo até mesmo à diferença no modo de falar (segmento $\overline{AB}$ e segmento $\overline{BA}$), dando indícios do teorema em ação $T_{4.1}$ (*a ordem dos elementos sempre resulta em novas possibilidades*), que nesse problema trata de um teorema errôneo. Enquanto isso, o Aluno a1 não considerou a ordem relevante nesse problema, apresentando o teorema em ação $T_{4.2}$ (*a ordem dos elementos não* *interfere na quantidade de possibilidades*) e durante as discussões no grupo, utilizou um desenho que representava a situação proposta, o que contribuiu para validar seu posicionamento diante das demais alunas pois, com o mesmo, foi possível visualizar que $\overline{AB}$ e $\overline{BA}$ se tratavam de um mesmo segmento de reta. Vergnaud (1996) salienta que a linguagem, um dos componentes do conceito, além de ter a função de representar a ação do sujeito e os elementos pertinentes da situação, "ajuda ao raciocínio e à inferência" (VERGNAUD, 1996, p. 180), consonante a essa situação vivenciada pelos alunos do Grupo 1. Assim, o Aluno a1 fez uso de uma representação diferente das anteriores, ao representar os elementos da situação e a ação que havia realizado e, a partir dessa, as Alunas b1 e c1 conseguiram verificar a irrelevância da ordem nesse problema. No momento em que o Grupo 1 foi questionado sobre a solução encontrada, os alunos apresentaram o seguinte posicionamento:

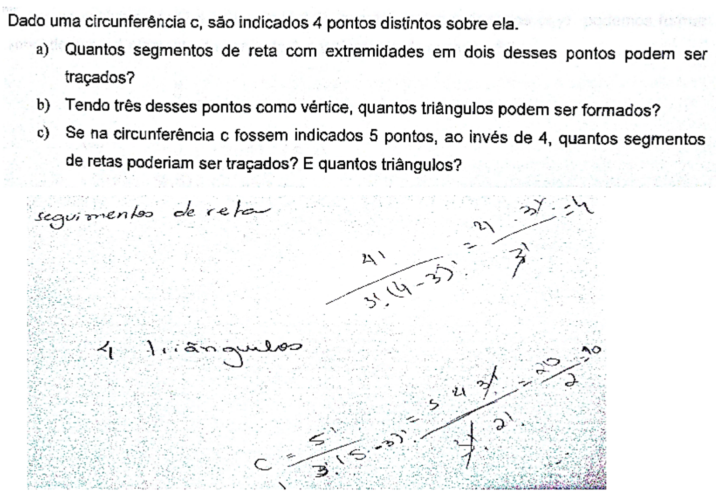
> Aluna c1: A gente pensou assim, se o $\overline{AB}$ é igual ao $\overline{BA}$, então não precisa contar. Agora essa é a dúvida.
> Pesquisador: Então, o que vocês acham?
> Aluna c1: Porque tanto faz a gente traçar, $\overline{AB}$ é igual a $\overline{BA}$.
> Aluno a1: Porque quando você marca $\overline{BA}$, vai ser a mesma distância de $\overline{AB}$.
> Aluna b1: Só vai mudar de onde o segmento saiu.

Como previmos na análise *a priori*, verificamos que as Alunas b1 e c1 apresentaram dificuldades em relação à ordem dos elementos, com indícios do teorema em ação $T_{4.1}$, que na primeira sessão estava dentro do seu domínio de validade, porém nesse problema estava fora dele. Ao vivenciarem os momentos *adidáticos* de ação, formulação e validação, nos quais resolveram o problema por meio da listagem sistemática de possibilidades, debatendo com os colegas do grupo tentando validar suas estratégias e resultados, além de refletir sobre as informações proporcionadas pelo meio *adidático*, essas alunas perceberam que esse teorema apresentava resultados errôneos nessa situação. Desse modo, tanto os alunos do Grupo 1, que realizaram a listagem das possibilidades utilizando uma organização sistemática, ao mobilizarem o teorema em ação $T_{1.2}$ (*existe uma maneira sistemática de listar que garante esgotar todos os casos possíveis*), quanto os alunos do Grupo 9 que não apresentaram indícios de tal organização sistemática, obtiveram corretamente como respostas seis segmentos de reta no item a, quatro triângulos no item b, e, dez segmentos de reta e dez triângulos no item c, exceto o Aluno a9 que deixou em aberto a possibilidade de se formar sete ou onze triângulos no item c.

Assim como os grupos anteriores, os Grupos 2 e 7 também iniciaram a busca pela resposta utilizando a listagem de possibilidades, encontrando a quantidade exata para os itens a e b, e no item c chegaram a nove triângulos possíveis a partir dos cinco pontos da circunferência. Esses dois grupos, durante a sessão, apresentaram vestígios do teorema em ação

T_2 (*se um problema é de combinatória, então existe uma fórmula combinatória que resolve e basta utilizá-la para encontrar a solução*) ao buscarem alguma fórmula que fornecesse a resposta do problema, como na resolução apresentada pela Aluna c2:

Figura 16 - Protocolo da Aluna c2, Sessão 2.



Fonte: dados da pesquisa

Em conjunto, as alunas do Grupo 2 testaram as fórmulas de combinatória que conheciam, como a de arranjo e de combinação, e as compararam com a listagem efetuada. Ao perceberem que nesse problema, a fórmula de combinação estava resultando no mesmo resultado encontrado por meio da listagem, a utilizaram para encontrar a quantidade de triângulos que podem ser formados utilizando os cinco pontos da circunferência, mobilizando a fórmula de C_2^5. Já o Aluno a7, também utilizou a mesma estratégia de testar as fórmulas correspondentes e comparar com as listagens realizadas. Porém, diferentemente das alunas do Grupo 2, ao mobilizar a fórmula e obter $C_2^5 = 10$, o Aluno a7 preteriu seu resultado em relação ao encontrado por meio da listagem, no qual listou apenas nove triângulos.

Percebemos então a força do teorema em ação $T_{1.1}$ nesses alunos, os quais acreditam que sempre é possível listar todas as possibilidades e utilizam essa listagem como meio de validar ou refutar outras estratégias, como as fórmulas. No caso do Grupo 2, as alunas passaram a utilizar a fórmula de combinação a partir do momento que verificaram a igualdade com a listagem realizada, mesmo sem levar em consideração as propriedades do problema. Vemos esse fato, quando a Aluna b2, exibe a seguinte relação:

Figura 17 - Protocolo da Aluna b2, Sessão 2.

Dado uma circunferência c, são indicados 4 pontos distintos sobre ela.

a) Quantos segmentos de reta com extremidades em dois desses pontos podem ser traçados?

b) Tendo três desses pontos como vértice, quantos triângulos podem ser formados?

c) Se na circunferência c fossem indicados 5 pontos, ao invés de 4, quantos segmentos de retas poderiam ser traçados? E quantos triângulos?

Relação = Resolvemos por Combina-
ção, só que pensamos mais no arranjo.

Fonte: dados da pesquisa

Mesmo utilizando corretamente a fórmula de combinação, o Aluno a7 a preteriu pela listagem que realizou no memento em que verificou diferença nos resultados, não validando sua estratégia. Esses eventos estão consonantes ao apresentado na pesquisa de Santos- Wagner, Bortoloti e Ferreira (2013) que destacam que, em muitos momentos, os alunos estão condicionados a utilizar procedimentos, como as fórmulas, e não levam em consideração os aspectos conceituais do problema.

Durante as discussões do primeiro problema, e, diante do desenho e das listagens dos possíveis segmentos de reta e dos triângulos que podem ser formados nos itens a e b, respectivamente, o Aluno a3, em conjunto com os demais alunos do Grupo 3, conjecturou uma fórmula que resolvia o problema, na qual apresentou a quantidade de segmentos de reta distintos que podem ser formados a partir dos cinco pontos na circunferência, como na resolução a seguir:

Figura 18 - Protocolo do Aluno a3, Sessão 2.

Dado uma circunferência c, são indicados 4 pontos distintos sobre ela.

a) Quantos segmentos de reta com extremidades em dois desses pontos podem ser traçados?

b) Tendo três desses pontos como vértice, quantos triângulos podem ser formados?

c) Se na circunferência c fossem indicados 5 pontos, ao invés de 4, quantos segmentos de retas poderiam ser traçados? E quantos triângulos?

$$\frac{5!}{2!3!} = \frac{5.4.3.\cancel{2}.\cancel{1}}{\cancel{2}.\cancel{1}!\,3!} = \frac{5.4.\cancel{3}}{\cancel{3}.2.1} = \frac{20}{2} = 10$$

10 segmentos

Fonte: dados da pesquisa

Apesar de a fórmula ser idêntica à fórmula de combinação, ao questionarmos como ele chegou a esse resultado, em nenhum momento o Aluno a3 expressou que se tratava de uma combinação, apresentando a seguinte justificativa:

> Aluno a3: Eu coloco os pontos que estão pedindo no exercício. No primeiro aqui (cinco fatorial) eu sempre estou pensando assim, colocar o total de pontos. Eu divido pelo total de pontos que eu vou usar, e pelos pontos que vão sobrar, entendeu? Aí eu decomponho os números.
> Pesquisador: E por que você está dividindo (e não realizando outra operação, como a multiplicação)?
> Aluno a3: Porque eu enxergo isso como dividindo, entendeu? Dividindo esses cinco pontos em dois que eu uso, e três que sobra. [...] Eu tenho o grupo que eu uso e o grupo que eu não uso. Mas eu tenho que usar os dois grupos, porque eles pertencem a esse (ao total de pontos, nesse caso, os cinco pontos dados).

Inicialmente o Aluno a3 selecionou a quantidade total de elementos do problema e utilizou o fatorial desse número. Em um segundo momento, decompôs o número inicial encontrado por outros dois, oriundos da partição dos elementos dados em dois conjuntos: os utilizados e os não utilizados para a formação dos subconjuntos, também na forma fatorial. Ao verificarmos essa regra conjecturada por esse aluno, somente a partir do diálogo com o mesmo que conseguimos compreender como elaborou a fórmula e, caso não tivéssemos tomado tal atitude, poderíamos acreditar que o aluno tivesse classificado o problema como uma combinação e estava apenas utilizando a fórmula correspondente, o que não foi o caso.

Para conjecturar essa fórmula, o Aluno a3 se baseou em suas tentativas operacionais, como o desenho e a listagem, e, para validá-la, comparou os resultados encontrados por meio da fórmula com os encontrados na listagem, verificando a igualdade. Desse modo, destacamos que nesse evento, o Aluno a3 percorreu os três momentos *adidáticos* que desejamos, vivenciando o papel de um pequeno pesquisador (BROUSSEAU, 2008).

Os alunos do Grupo 4 apresentaram respostas distintas para resolver o problema. Enquanto a Aluna a4 listou as possibilidades para o item a e b, encontrando seis segmentos de reta e quatro triângulos, respectivamente, o Aluno b4 realizou uma generalização inadequada, como no item b em que listou os três possíveis triângulos que podem ser formados utilizando o ponto A e considerou que os outros três pontos também teriam mais três possibilidades, resultando em um total de doze triângulos. Nesse caso, tal generalização é inadequada, pois ao fazer isso o aluno considerou que para cada ponto existem três triângulos distintos, o que não é o caso, já que só existe um único triângulo que tem como vértice os pontos A, B e C, que pode ser escrito como triângulo ABC, triângulo ACB, entre outros.

Para resolver o problema proposto, o Grupo 5 utilizou a estratégia E_1, listando todas as possibilidades. Porém, não satisfeitos com a resolução apresentada, os alunos do grupo se questionaram como fariam se fossem seis pontos na circunferência, semelhante ao realizado na primeira sessão em que realizaram a permutação da palavra “ALEXANDRE”. Assim, pautados nas retroações fornecidas pelo meio *adidático,* como as soluções que já haviam sido realizadas para o problema proposto e os debates entre os integrantes do grupo, os mesmos passaram a buscar alguma maneira de generalizar para mais casos, chegando ao seguinte resultado.

Figura 19 - Protocolo do Aluno b5, Sessão 2

Dado uma circunferência c, são indicados 4 pontos distintos sobre ela.

a) Quantos segmentos de reta com extremidades em dois desses pontos podem ser traçados?
b) Tendo três desses pontos como vértice, quantos triângulos podem ser formados?
c) Se na circunferência c fossem indicados 5 pontos, ao invés de 4, quantos segmentos de retas poderiam ser traçados? E quantos triângulos?

V	r	T
4	6	4
5	10	10
6	15	20
7	21	35
8	28	56
9	36	84
10	45	120

Fonte: dados da pesquisa

Nessa estratégia, os alunos consideraram inicialmente três colunas: os pontos dados (V), os segmentos de reta (R) e os triângulos (T). Após completar a tabela com os dados já disponíveis, perceberam a existência de uma regularidade na qual era possível encontrar o número de segmentos de reta e de triângulos, a partir do resultado do anterior. Para encontrar os segmentos de reta possíveis dados n pontos (R_n), somava-se a quantidade de pontos ($P_{(n-1)}$) e de segmentos de reta ($R_{(n-1)}$) do item anterior, resultando em $R_n = R_{(n-1)} + P_{(n-1)}$. Já para encontrar a quantidade de triângulos dados n pontos (T_n), somava-se a quantidade de segmentos de reta ($R_{(n-1)}$) e de triângulos ($T_{(n-1)}$) do item anterior, resultando em $T_n = T_{(n-1)} + R_{(n-1)}$. Por exemplo: a quantidade de segmentos de reta distintos com extremidades em dois pontos dentre sete dados, é dado pela soma da quantidade de pontos do item anterior e a quantidade de segmentos de reta do item anterior, nesse caso, $15 + 6 = 21$ segmentos de reta. Além disso, a quantidade de triângulos, tendo como vértices três dentre os sete pontos, é dado pela soma da quantidade de triângulos e de segmentos de reta encontrados com seis pontos, resultando em $15 + 20 = 35$ triângulos possíveis.

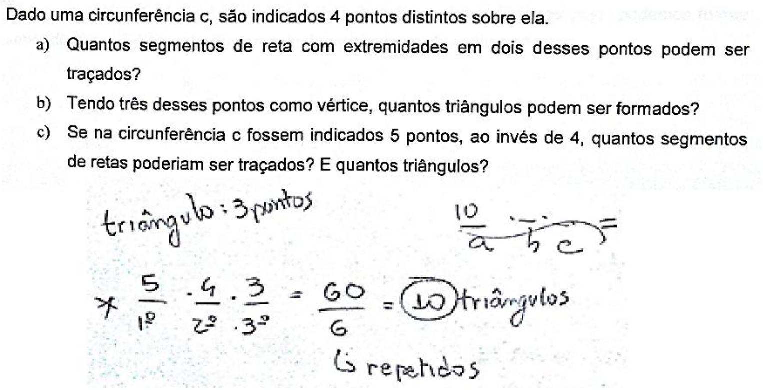
Como ocorrido no problema da primeira sessão, destacamos que os alunos do Grupo 5 apresentaram vestígios do teorema em ação $T_{1.3}$ (*se o problema é generalizável, então ao fazer uma listagem sistemática é possível encontrar tal generalidade*) pois, apesar de resolverem o problema realizando uma listagem, acreditaram que é possível realizar uma generalização para resolver o problema. Desse modo, *a priori*, realizaram a listagem para mais situações e analisaram os resultados encontrados em busca de uma regularidade. Semelhante aos Grupos 2 e 7 e o Aluno a3, para os alunos do Grupo 5 a estratégia da listagem de possibilidades não foi utilizada apenas para resolver o problema, pois os mesmos a mobilizaram como uma ferramenta para buscar e/ou validar outra estratégia, como a generalização e a fórmula adequada.

Por fim, os alunos do Grupo 6 foram os únicos que mobilizaram o Princípio Fundamental da Contagem (estratégia E_3) para resolver o problema. Os mesmos utilizaram corretamente o PFC para encontrar a quantidade de segmentos de reta que eram possíveis de serem formados, dividindo o resultado encontrado por dois, pois tinham que desconsiderar os segmentos de reta repetidos, por exemplo, $\overline{AB}$ e $\overline{BA}$, como apresentamos na análise *à priori*. Porém, ao tentarem encontrar a quantidade de triângulos que podem ser formados a partir de cinco pontos, os alunos apresentaram dificuldades no momento de desconsiderar os triângulos repetidos, como no diálogo a seguir:

> Pesquisador: E aqui deram 60? (quantidade de triângulos do item c)
> Aluna a6: É, mas aqui tem que dividir...
> Pesquisador: Então vocês sabem que tem que dividir por alguma coisa.
> [...]
> Aluna a6: Tipo, eu divido por dois (os segmentos de reta) porque todos eles vão ter seu simétrico. Se tem 10, porque metade estão se repetindo, $\overline{AB}$ e $\overline{BA}$. Por isso que eu dividi por dois para descobrir os segmentos de reta. Agora para os triângulos eu não consigo pensar do mesmo jeito.
> Aluno c6: Têm três possibilidades (de repetição do mesmo triângulo), pode ser ABC, BAC ... É o mesmo triângulo.
> Pesquisador: E quantas vezes você consegue escrever diferente esse mesmo triângulo?
> [...]
> Aluno c6: Dá seis possibilidades diferentes o mesmo triângulo.

Como notamos no diálogo, os alunos do Grupo 6 realizaram a estratégia do Princípio Fundamental da Contagem para encontrar os triângulos e, ao mobilizarem o teorema em ação $T_{4.2}$ (*a ordem dos elementos não interfere na quantidade de possibilidades*) perceberam a necessidade de desconsiderar os casos repetidos do resultado encontrado. Porém, ao questionarmos sobre as resoluções dos itens anteriores, os mesmos puderam refletir sobre tais indagações e apresentaram a seguinte resolução:

Figura 20 - Protocolo da Aluna a6, Sessão 2.


Dado uma circunferência c, são indicados 4 pontos distintos sobre ela.

a) Quantos segmentos de reta com extremidades em dois desses pontos podem ser traçados?

b) Tendo três desses pontos como vértice, quantos triângulos podem ser formados?

c) Se na circunferência c fossem indicados 5 pontos, ao invés de 4, quantos segmentos de retas poderiam ser traçados? E quantos triângulos?

triângulo: 3 pontos

$\frac{10}{a \; b \; c} =$

$\frac{5}{1^{\circ}} \cdot \frac{4}{2^{\circ}} \cdot \frac{3}{3^{\circ}} = \frac{60}{6} = 10$ triângulos

6 repetidos

Fonte: dados da pesquisa

Inicialmente consideraram cinco opções de pontos para o primeiro vértice, quatro opções para o segundo vértice e três opções para o terceiro vértice, resultando em um total de $5\ x\ 4\ x\ 3 = 60$ possibilidades. Em seguida, os alunos perceberam que desses sessenta triângulos encontrados, é necessário retirar os triângulos repetidos; nesse caso, cada triângulo pode ser escrito de seis maneiras distintas (triângulo ABC, triângulo ACB, entre outros). Então ao realizar a divisão, os alunos encontraram como resultado, a possibilidade de formar dez triângulos distintos.

Nessa resolução e nos registros de áudio, inferimos que os alunos do Grupo 6 mobilizaram o teorema em ação T_3, o Princípio Fundamental da Contagem. Além disso, ao realizarem a estratégia do PFC também levaram em consideração que a ordem dos elementos não interfere nas possibilidades (teorema em ação $T_{4.2}$) pois, caso não tivessem levado em consideração, acreditariam que o primeiro valor encontrado seria o correto e não retirariam os casos repetidos. Destacamos novamente que a elaboração do meio *adidático* contribuiu para que os alunos pudessem perceber como realizar a estratégia do PFC, além da importância do papel do professor/pesquisador durante os momentos *adidáticos*, pois conforme destaca Brousseau (1996, 2008), o professor apesar de não interferir diretamente na construção do conhecimento dos alunos, tem uma função importantíssima ao realizar questionamentos que contribuam para que os alunos reflitam e continuem vivenciando as três fases *adidáticas*.

Para a continuidade da sessão, apresentamos o segundo problema do encontro para os alunos resolverem: *Dados os conjuntos A={2,4,5,6} e B={1,3,9}, quantos pares ordenados (x,y) podemos formar sabendo que x é elemento do conjunto A e y elemento do conjunto B?*

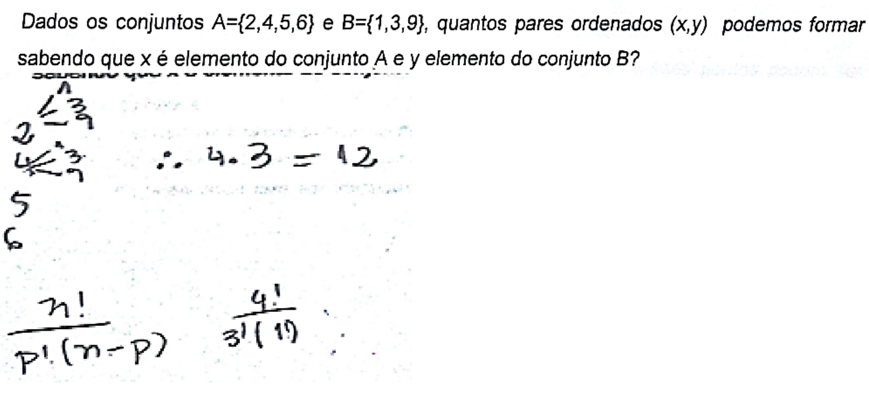
Nesse problema, verificamos uma semelhança nas estratégias mobilizadas, já que todos os grupos, exceto o Grupo 6, mobilizaram a estratégia E_1 em algum momento da resolução, ao listaram todas as possibilidades de maneira organizada. Atribuímos esse fato à escolha feita por nós, de adotar conjuntos com poucos elementos como variável didática, ficando viável a realização da listagem de todos os pares ordenados possíveis. Após essa listagem alguns alunos como a Aluna a4 e o Aluno a9, apresentaram a possibilidade de responder o problema multiplicando a quantidade de elementos do conjunto A pela quantidade de elementos do conjunto B. Além da listagem dos possíveis pares ordenados. Destacamos também que alguns alunos mobilizaram representações para o problema, como diagramas dos conjuntos A e B, e o plano cartesiano, o caso do Aluno c5.

Assim como no primeiro problema da sessão, os alunos do Grupo 6 resolveram o segundo problema utilizando novamente o Princípio Fundamental da Contagem, mobilizando o teorema em ação T_3, sendo que os Alunos a6 e c6 não apresentaram registros de terem realizado a listagem. Desse modo, consideraram corretamente que há quatro opções para o primeiro elemento do par ordenado e três opções para o segundo elemento, totalizando $4\ x\ 3 = 12$ pares ordenados distintos.

Semelhante à resolução apresentada pelo Grupo 6, os alunos do Grupo 7 também realizaram a multiplicação $4\ x\ 3 = 12$ para encontrar a quantidade de pares ordenados. Porém, diferentemente do Grupo 6, todos os alunos do Grupo 7 realizaram a listagem dos pares ordenados para verificar a igualdade. Inferimos nesse momento que, assim como no primeiro problema, os alunos utilizaram a listagem das possibilidades como um meio de validação da estratégia realizada em um primeiro instante.

Por fim, apresentamos a resolução do Grupo 2, em específico da Aluna a2, que resolveu o problema da seguinte maneira:

Figura 21 - Protocolo da aluna a2, Sessão 2.



Fonte: dados da pesquisa

Ao iniciar o processo da listagem, a Aluna a2 percebeu uma regularidade no problema. Para cada elemento do conjunto A, sempre é possível formar três pares ordenados distintos com os elementos do conjunto B. Desse modo, como o conjunto A possui quatro elementos distintos, a Aluna a2 não continuou a listagem que estava realizando e realizou a multiplicação de $4\ x\ 3 = 12$ pares ordenados distintos. Em um segundo momento, essa aluna tentou mobilizar a formula do problema anterior para verificar se esse problema também poderia ser resolvido por meio dela, o que não é o caso.

5.2.5 Considerações da segunda sessão

No segundo encontro evidenciamos a participação dos alunos dentro dos grupos, ao vivenciarem os três momentos que compõem uma situação *adidática* (BROUSSEAU, 2008). Verificamos que todos os alunos mobilizaram o teorema em ação $T_{1.1}$ (*dado um problema de contagem, sempre é possível listar todas as possibilidades*) ao realizarem estratégia da listagem de possibilidades, que foi a mais utilizada pelos mesmos para resolverem a primeira situação-problema. Desse modo, em um primeiro momento mais operacional, os alunos tentavam encontrar a resposta do problema realizando a listagem, já que as condições do problema possibilitavam tal estratégia.

Porém, ao analisarmos as produções dos alunos, percebemos que os mesmos não utilizavam a listagem apenas como uma estratégia para encontrar a resposta do problema, o que nos indica a força do teorema em ação $T_{1.1}$. A listagem de possibilidades também foi utilizada como um meio de validação de outras estratégias, como ocorreu com as alunas do Grupo 2 e o Aluno a7 que também mobilizaram o teorema em ação T_2(*se um problema é de combinatória, então existe uma fórmula que resolve e basta utilizá-la para encontrar a solução*). Assim, as alunas do Grupo 2 testaram a fórmula de combinação e ao verificarem a igualdade com o resultado da listagem, reutilizaram a fórmula para os outros itens do problema. O Aluno a7 também utilizou a listagem em um momento de validação, porém, diferentemente das alunas do Grupo 2, por sua listagem estar incompleta, ele refutou o resultado encontrado por meio da fórmula de combinação em detrimento ao da listagem.

Houve os casos dos alunos do Grupo 5 e do Aluno a3, que mobilizaram o teorema em ação $T_{1.3}$ (*se um problema é generalizável, então ao fazer uma listagem sistemática é possível encontrar tal generalidade*) pois, pautados nos resultados encontrado nas listagens conjecturaram, de maneira correta, estratégias que pudessem resolver os problemas que propusemos. Em especial, destacamos os alunos do Grupo 5 que relataram que apesar de utilizarem a estratégia da listagem, há situações nas quais usar somente ela é ineficaz para resolver o problema, como também ocorreu na primeira sessão. Assim, os mesmos perceberam que a estratégia da listagem de possibilidades possui suas limitações, as quais, dependendo do problema, torna-se inviável de ser mobilizada.

Por fim, diferentemente dos demais alunos, ressaltamos que os alunos do Grupo 6 foram os únicos que mobilizaram o teorema em ação T_3 para responder as duas situações-problema que propusemos. Para isso, realizaram a estratégia do Princípio Fundamental da Contagem corretamente e desconsideraram a relevância da ordem dos elementos quando necessário, como no primeiro problema, mobilizando os teoremas em ação $T_{4.1}$(*a ordem dos elementos sempre resulta em novas possibilidades*) e $T_{4.2}$ (*a ordem dos elementos não interfere na quantidade de possibilidades*).

5.3 Sessão 3

A terceira sessão foi composta por uma situação-problema de combinação.

5.3.1 Análise *a priori* do problema

O problema da sessão segue abaixo:

De quantos modos é possível dividir 6 atletas em dois times de 3 jogadores? E se definíssemos os times, sendo Comercial e Operário, como podemos dividir esses jogadores?[31]

Esse problema de combinação continha dois itens para se resolver, sendo que no primeiro item solicitamos que os alunos encontrassem a quantidade de maneiras de dividir os seis jogadores em dois times. Em um segundo momento, inserimos no problema o fato de nomearmos os times, de modo que houvesse uma distinção dos mesmos. Com isso, esperávamos que durante a resolução do problema os alunos percebessem a relevância da ordem das equipes no segundo item, já que no primeiro item não existia a distinção entre as equipes.

Além disso, decidimos continuar com valores pequenos como variável didática do problema, para que os alunos pudessem mobilizar tanto estratégias empíricas, quanto estratégias genéricas. Também era esperado, com esses dois itens, que os alunos percebessem que não há necessidade de realizar uma nova estratégia para o segundo item, e sim, multiplicar

[31] Fonte (adaptado): Lima *et. al.* (2006)

a quantidade encontrada no item a por 2, já que nesse item era possível trocar os jogadores de time.

Possíveis estratégias:

Apresentamos inicialmente as possíveis estratégias para a primeira parte do problema:

E_1*: Listagem de Possibilidades*

Para realizar a listagem, nomeia-se os jogadores em A, B, C, D, E e F, e inicia-se a listagem dos times que irão se enfrentar.

1- ABC x CDF
2- ABD x CEF
3- ABE x CDF
4- ABF x CDE
5- ACD x BEF
6- ACE x BDF
7- ACF x BDE
8- ADE x BCF
9- ADF x BCE
10- AEF x BCD

Desse modo, vemos que é possível separar os times de dez maneiras distintas para realizar o confronto. Uma dificuldade que pode ocorrer, é continuar a listagem com casos repetidos, como o confronto BCD x AEF, e não perceber que o mesmo já foi listado anteriormente (confronto 10), já que não existe a distinção dos times, e o confronto realizado é o mesmo. Então, pode-se continuar a listagem, encontrando um total de vinte possibilidades.

Apesar de se tratar de valores pequenos, na realização da listagem é possível se perder durante a mesma, sendo necessário realizá-la sob certa organização. Nesse momento, por meio dos registros de áudio e protocolos, podemos identificar se os alunos mobilizaram o teorema em ação $T_{1.2}$ (*existe uma maneira sistemática de listar que garante esgotar todos os casos possíveis).*

E_2*: Utilização da Fórmula*

Inicialmente percebe-se que ao separar os jogadores para o time, a ordem dos mesmos dentro do time não é relevante. Desse modo, utiliza-se a fórmula de combinação para encontrar a quantidade de possibilidades de separar os times.

$$C_3^6 = \frac{6!}{3!\,(6-3)!} \Leftrightarrow C_3^6 = \frac{6!}{3!\,3!} \Leftrightarrow C_3^6 = \frac{720}{36} \Leftrightarrow C_3^6 = 20$$

Em um segundo momento, é necessário que se considere que na primeira parte do problema não foram identificados os times que os jogadores farão parte, e sim que se trata apenas de um confronto entre os mesmos. Desse modo, dentre as vinte possibilidades encontradas, há casos nos quais a divisão dos jogadores é a mesma, apenas invertendo a ordem dos times, resultando no dobro de casos possíveis. Ciente disso, divide-se o resultado encontrado por dois, e encontra-se como resposta dez maneiras distintas de separar os jogadores em dois times.

Assim como dito na estratégia anterior, ao não considerar o fato de não ter distinção dos times, é possível que se utilize somente a fórmula de combinação para separar os times, encontrando como resposta vinte possibilidades.

$E_{3:}$ *Princípio Fundamental da Contagem*

Utilizando o Princípio Fundamental da Contagem, é possível resolver o problema em duas etapas. Inicialmente, considera-se que para o primeiro time há seis opções para o primeiro jogador, cinco opções para o segundo jogador e quatro opções para o terceiro jogador. Já para o segundo time restam três opções para o primeiro jogador, duas opções para o segundo, e apenas uma opção para o último jogador. Além disso, como se trata da formação de uma equipe, a ordem de escolha desses três jogadores que compõem o time não interfere na formação do mesmo, sendo necessário desconsiderar as repetições encontradas; nesse problema seis repetições. Então, realiza-se as operações do seguinte modo:

$$PFC = \frac{6\ x\ 5\ x\ 4}{6}\ x\ \frac{3\ x\ 2\ x\ 1}{6} \Rightarrow PFC = 20\ x\ 1 \Rightarrow\ PFC = 20$$

Vemos que ao realizar o PFC na formação do segundo time, o resultado encontrado foi 1. Isso ocorre pois, após montar o primeiro time, o segundo time só pode ser montado de uma maneira, já que sobram apenas os três jogadores que irão compô-lo. Como nas estratégias anteriores, percebe-se que não há relevância na ordem de formação dos times e realiza-se a divisão do resultado encontrado por dois, resultando em dez possibilidades.

Para a segunda parte do problema, é possível que se mobilize alguma das estratégias apresentadas anteriormente. Após perceber que nessa atividade existe uma distinção dos times, ao resolver o problema, pode-se listar todos os casos possíveis. Caso mobilize as estratégias E_2 ou E_3, não tem a necessidade de realizar a divisão por dois, como no item anterior, já que a ordem dos times é relevante nesse momento.

Além das estratégias apresentadas, é possível que se realize a seguinte estratégia para a segunda parte do problema:

E_{b1} *: Relação com o item anterior*

Nessa estratégia, após ter mobilizado alguma das estratégias apresentadas, percebe-se que como se trata de dois times, ou os jogadores estarão no Operário, ou estarão no Comercial. Desse modo, como só há dois casos possíveis, para resolver esse item basta multiplicar o resultado encontrado na primeira parte do problema por dois.

5.3.2 Experimentação

A terceira sessão ocorreu no dia 04 de abril de 2014, das 09h às 11h, e contou com a presença de vinte e seis alunos. Os alunos se organizaram nos mesmos grupos das sessões anteriores, com exceção do Aluno b4 que, por ser o único presente do seu grupo, juntou-se com as alunas do Grupo 2.

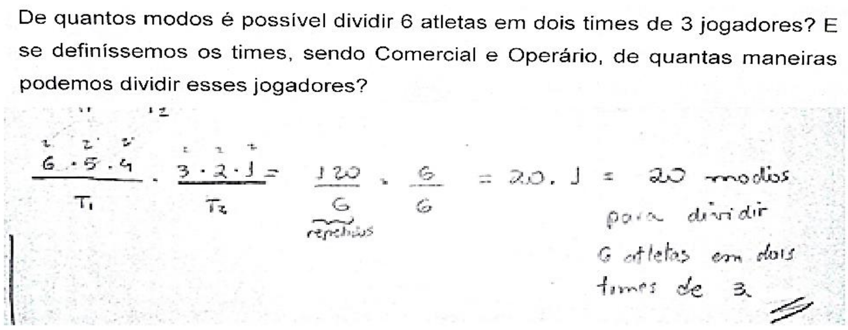
5.3.3 Análise *a posteriori*

Freitas (2008, p. 83) destaca que a devolução "tem o significado de transferência de responsabilidade, uma atividade na qual o professor, além de comunicar o enunciado, procura agir de tal forma que o aluno aceite o desafio de resolvê-lo, como se o problema fosse seu e não somente porque o professor quer". Como nas sessões anteriores, percebemos que ocorreu a devolução do problema pois os alunos, de modo geral, estavam empenhados e, assim que propusemos a situação-problema, os mesmos realizaram ações em busca de resolvê-lo.

Os alunos do Grupo 9 resolveram o problema mobilizando a estratégia E_1, a listagem de possibilidades. Apesar de todos tentarem listar as possíveis maneiras de dividir os atletas nos dois times, esses alunos apresentaram respostas distintas, dentre as quais destacamos a apresentada pelo Aluno b9 que listou as vinte possibilidades para os itens a e b. Ao analisarmos sua resolução, observamos que o Aluno b9 desconsiderou, de maneira errada, o fato de não haver distinção entre os times na primeira parte do problema, listando vinte possibilidades, como previmos na análise *à priori*. No segundo item em que há a distinção entre os times, considerou corretamente as vinte possibilidades como resposta.

Os alunos do Grupo 6, novamente resolvem o problema utilizando somente o PFC, e consequentemente apresentando o teorema em ação T_3 (*Princípio Fundamental da Contagem*).

Figura 22 - Protocolo da Aluna a6, Sessão 3.


De quantos modos é possível dividir 6 atletas em dois times de 3 jogadores? E se definíssemos os times, sendo Comercial e Operário, de quantas maneiras podemos dividir esses jogadores?

$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{T_1} \cdot \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{T_2} = \frac{120}{\underbrace{6}_{\text{repetidos}}} \cdot \frac{6}{6} = 20 \cdot 1 = 20$ modos para dividir 6 atletas em dois times de 3.

Fonte: dados da pesquisa

Nessa resolução observamos que os alunos do Grupo 6, além de apresentarem o teorema em ação T_3, também demonstraram vestígios do teorema em ação $T_{4.2}$ (*a ordem dos elementos não interfere na quantidade de possibilidades*), já que ao utilizarem o PFC levaram em consideração a ordem dos elementos na formação do conjunto e, quando a mesma não interferia, dividiram o resultado encontrado pelo número de repetições de cada conjunto. Apesar de mobilizarem corretamente o PFC, os alunos do Grupo 6 cometeram o mesmo erro do Aluno b9, ao não perceberem que na primeira parte do problema a ordem de formação dos times não possuía relevância, importando apenas o confronto entre as equipes. Desse modo, os alunos consideraram o item a e o item b como sendo a mesma questão, sendo que no item b apenas nomearam os times, respondendo que há vinte possibilidades para os dois itens.

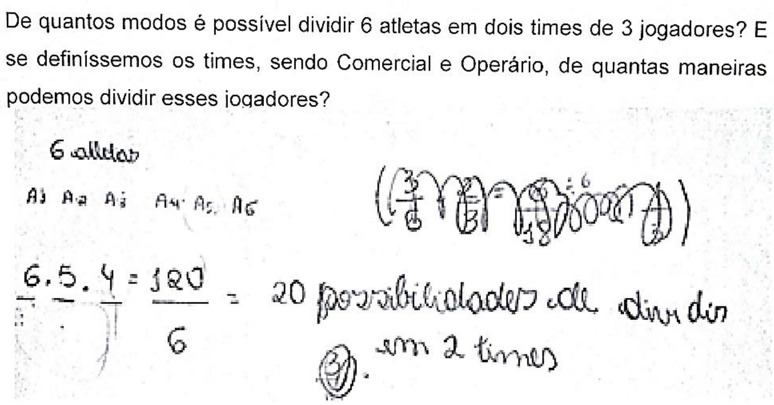
Pessoa (2009) verificou que os problemas de combinação são os que ocasionam a maior quantidade de erros dos alunos nos problemas de combinatória pois, apesar de mobilizarem estratégias eficientes para resolverem os problemas, os mesmos devem levar em consideração a irrelevância da ordem dos elementos na formação dos conjuntos. Diferentemente do problema de combinação do encontro anterior, nesse, os alunos deveriam analisar a propriedade de ordem em dois momentos distintos: na seleção dos atletas na formação de um time e na relevância (ou não) das equipes. Apesar de os resultados apresentados pelos alunos do Grupo 6 e 9 para o item a não estarem corretos, já que os mesmos obtiveram 20 possibilidades ao invés de 10 possibilidades, evidenciamos que esses alunos se valeram de estratégias eficientes para o problema, como o Princípio Fundamental da Contagem e a listagem de possibilidades, respectivamente, além de apresentarem vestígios do teorema em ação $T_{4.2}$, pois no momento em que estavam selecionando os atletas para as equipes perceberam que a ordem não era relevante.

Os Grupos 1 e 5, e a Aluna c7, também resolveram esse problema mobilizando a estratégia E_1, indicando vestígios do teorema em ação $T_{1.1}$ (*dado um problema de contagem, sempre é possível listar todas as possibilidades*) e $T_{1.2}$ (*existe uma maneira sistemática de listar que garante esgotar todos os casos*) pois, não somente nessa sessão mas nos encontros anteriores, também realizaram a listagem de uma maneira sistemática. Desse modo, esses alunos realizaram corretamente a listagem das dez possibilidades para o primeiro item, e para a segunda parte do problema, os alunos mobilizaram a estratégia E_{b1} (relação com o item anterior), encontrando vinte possibilidades como solução desse item, com exceção das Alunas b1 e c1 que encontraram vinte e quarenta opções para os itens a e b, respectivamente. Ao ser questionado pela colaboradora A, o Aluno a1 apresentou a seguinte justificativa:

> Aluno a1: Fiz uma listagem com as possibilidades que podia dar. Eu fui enumerando cada jogador A, B, C, D, E e F, e eu fiz por exemplo: ABC, e o segundo DEF. Aí a segunda possibilidade ABD, e o segundo tinha que ser CEF. Fazendo cada possibilidade assim, eu tenho dez possibilidades.
> Colaboradora A: Mas essas dez possibilidades para a primeira situação?
> Aluno a1: Uhum. Na segunda (situação), já definiu dois times, eu pensei assim: o primeiro time de cada grupo que eu fiz, por exemplo, poderia ser o Comercial. Mas também o Comercial poderia ser esse (o segundo grupo dos times), e isso dobraria a quantidade de possibilidades, totalizando vinte, tanto para o Comercial, quanto para o Operário.

Apesar de os Alunos do Grupo 1 utilizarem a listagem na busca da solução do problema, destacamos que tanto o Aluno a1, quanto as Alunas b1 e c1 apresentaram estratégias semelhantes às apresentadas pelos demais alunos no momento de discussão da sessão anterior, utilizando novas estratégias que não haviam mobilizado nos encontros anteriores. No caso do Aluno a1, ele utilizou o PFC do seguinte modo:

Figura 23 - Protocolo do Aluno a1, Sessão 3



Fonte: dados da pesquisa

Ao iniciar a resolução do problema, o Aluno a1 mobilizou o PFC no momento em que considerou que há seis opções para o primeiro jogador, cinco opções para o segundo, e quatro opções para o terceiro atleta, resultando em cento e vinte possibilidades. Então, assim como o apresentado pelos alunos do Grupo 6 na sessão anterior, ao mobilizar o teorema em ação $T_{4.2}$ (*a ordem dos elementos não interfere na quantidade de possibilidades*), o Aluno a1 percebeu que a ordem dos jogadores não é relevante na formação de uma equipe, sendo necessário desconsiderar as repetições dividindo por seis. Até esse momento, essa resolução está correta, porém é necessário dividir o valor encontrado por dois, já que não há distinção dos times. Ainda que o Aluno a1 tenha percebido que dentre essas 20 possibilidades obtidas por meio do PFC continham casos em excesso, o mesmo não continuou com essa estratégia, optando pela realização da listagem de possibilidades, a qual justificou corretamente para a Colaboradora A.

Enquanto isso, apesar de as demais alunas do Grupo 1 também mobilizarem o teorema em ação $T_{4.2}$, não levando em consideração a ordem dos jogadores no momento de formar uma equipe, as mesmas realizaram a listagem de vinte possibilidades para o item a, pois não levaram em consideração que não existia distinção entre os times nesse item. Após essa listagem, as Alunas b1 e c1 utilizaram a fórmula conjecturada pelo Aluno a3 no encontro anterior, $\frac{6!}{3!\ x\ 3!}$, se pautando na mesma justificativa, ao relatarem que tinham ao todo seis jogadores, os quais foram divididos em dois grupos: os três escolhidos e os três restantes. Destacamos que apesar de incorreta a resposta, ao vivenciarem o momento *adidático* de validação, as Alunas b1 e c1 acreditaram que seus resultados estavam corretos pois utilizaram a listagem de possibilidades como uma ferramenta de validação, verificando a igualdade dos resultados, como ocorrido na sessão anterior.

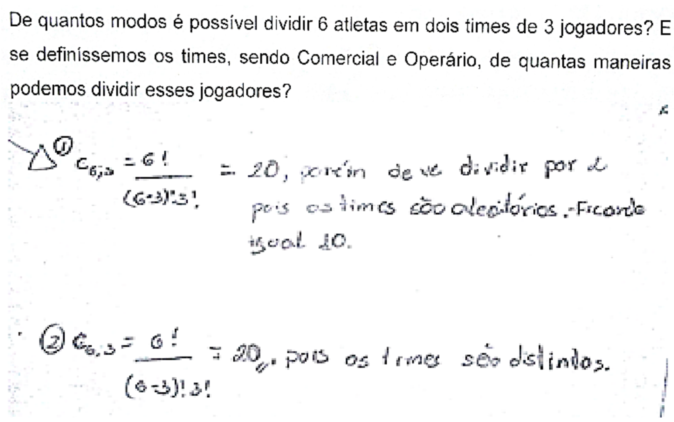
Apesar de terem resolvido esse problema pela listagem de possibilidades, consideramos relevante o fato de os alunos do Grupo 1 utilizarem estratégias que foram apresentadas por outros alunos nos encontros anteriores. Creditamos esse fato ao modo que organizamos as sessões, nas quais havia um momento para a discussão do problema e das estratégias mobilizadas pelos alunos, possuindo características do momento de institucionalização (BROUSSEAU, 2008). Assim, os mesmos eram estimulados a irem ao quadro negro e apresentarem suas estratégias para toda a turma, ao invés de apenas passarmos a solução do problema. Desse modo, esse momento de discussão é mais um no qual os alunos podem superar suas dificuldades, além de incorporarem novas estratégias, como ocorreu com os alunos do Grupo 1.

Os alunos do Grupo 3, e o Aluno a7, apresentaram vestígios do teorema em ação T_2 (*se um problema é de combinatória, então existe uma fórmula que resolve e basta utilizá-la para encontrar a solução*), pois buscaram resolver o problema utilizando algum tipo de regra ou fórmula. Para resolver o item a do problema, o Aluno a3 recorreu à fórmula conjecturada na sessão anterior, $\frac{6!}{3!\,x\,3!}$, encontrando vinte possibilidades como resposta, semelhante à estratégia realizada pelas alunas do Grupo 1. Apesar de incorreta, pois o aluno não desconsiderou a ordem dos times, ao analisarmos esse evento confirmamos as contribuições de os alunos vivenciarem situações *adidáticas,* tendo em vista que nela "o aluno [...] por seu próprio mérito, conseguiu sintetizar algum conhecimento" (FREITAS, 2008, p. 86), além de que "Não só pode como deve, pois não terá adquirido, de fato, esse saber até que o consiga usar [...] sem nenhuma indicação intencional" (BROUSSEAU, 2008, p. 35) como ocorreu com o Aluno a3 nessa sessão.

Diferentemente de seu colega de grupo, as Alunas b3 e c3 realizaram a permutação dos seis atletas, e dividiram por dois, afirmando que se tratavam de apenas dois times. Para o segundo item, os três alunos do Grupo 3, após encontrarem a quantidade de permutação dos seis jogadores, dividiram esse valor por dois, já que eram dois times. Depois dividiram por três, devido ao fato de cada time contar com três jogadores, e, por fim, dividiram por seis para excluir as repetições dos três jogadores dentro de cada time, totalizando 60 possibilidades.

O Aluno a7 utilizou a fórmula de combinação para resolver o problema, do seguinte modo:

Figura 24 - Protocolo do Aluno a7, Sessão 3.



De quantos modos é possível dividir 6 atletas em dois times de 3 jogadores? E se definíssemos os times, sendo Comercial e Operário, de quantas maneiras podemos dividir esses jogadores?

① $C_{6,3} = \frac{6!}{(6-3)!3!} = 20$, porém deve dividir por 2 pois os times são aleatórios. Ficando igual 10.

② $C_{6,3} = \frac{6!}{(6-3)!3!} = 20$, pois os times são distintos.

Fonte: dados da pesquisa

Vemos que apesar de utilizar a fórmula de combinação, o Aluno a7 percebeu a diferença entre os itens a e b, em relação à distinção ou não dos times. Como no primeiro item os times não são identificados, foi necessário dividir o resultado por dois. No segundo item, no qual identificamos esses times como Comercial e Operário, não foi necessário realizar essa divisão, sendo possível formar vinte equipes distintas para o primeiro time, e consequentemente ficando formada a equipe para o segundo.

Assim como nas sessões anteriores, observamos que o Aluno a7 tem conhecimento das propriedades dos tipos de problemas de combinatória e de suas respectivas fórmulas. Devido a esse conhecimento, o mesmo frequentemente mobiliza o teorema em ação T_2 (*se um problema é de combinatória, então existe uma fórmula que resolve e basta utilizá-la para encontrar a solução*) pois, sempre que possível, busca classificar o problema e utilizar a fórmula correspondente, indicando a estabilidade desse teorema em ação no momento que está diante de uma situação de combinatória.

Por fim, as alunas do Grupo 2 não conseguiram resolver o problema, apesar das inúmeras tentativas, como a listagem e a utilização de fórmulas combinatórias. Porém, para a segunda parte do problema, destacamos que a Aluna a2 identificou que a quantidade de possibilidades seria o dobro da quantidade da primeira parte do problema, relatando a estratégia E_{b1}. Ao ser questionada pela colaboradora A, a Aluna a2 narrou a seguinte reflexão:

> Aluna a2: A primeira parte eu não fiz. Eu tentei fazer por combinação, mas não sei explicar o porquê. Eu tentei fazer por diagramas, mas vi que iria dar muita possibilidade acabei desanimando, e não consegui chegar ao resultado. No item b, se eu tivesse conseguido chegar no resultado na letra a, eu iria multiplicar por dois, justamente porque não tem nenhuma restrição. Se eu monto alguma quantidade x de time, então ele pode ser ou do Comercial, ou do Operário, e, como não tem nenhuma restrição eu posso trocar, por isso eu multiplico o resultado por dois. Só que como eu não achei resultado em a (item a), eu também não achei resultado em b (item b).
> Colaboradora A: Mas quando você coloca ali, nessa combinação, que o resultado é igual a vinte, você tem um resultado.
> Aluna a2: Tenho
> Colaboradora A: Você não está confiante nisso?
> Aluna a2: É, eu tenho uma dificuldade muito grande em análise combinatória. Não consigo diferenciar arranjo, combinação. Só permutação (que sabe diferenciar). É uma dificuldade minha.

Assim como nesse excerto, ao longo da experimentação outros alunos também destacaram que possuíam dificuldades em combinatória, em especial na diferenciação dos tipos de problemas e em lembrar das respectivas fórmulas. Essa fala da Aluna a2 vai ao encontro dos resultados que encontramos ao longo da análise preliminar, nos quais verificamos de acordo com pesquisas (PESSOA, 2009; SANTOS-WAGNER; BORTOLOTI; FERREIRA, 2013; MIGUEL; MAGINA, 2003), que apesar de estudarem esse conteúdo no ensino médio, caso tenham estudado, os alunos sentem dificuldades no momento de resolver problemas de combinatória. Apesar disso, nesse evento vivenciado pela Aluna a2, percebemos que mesmo enfrentando dificuldades, ela esteve empenhada na busca pela resposta, mobilizando diversas estratégias, como listagens e fórmulas combinatórias, além de tentar validá-las, vivenciando então, momentos *adidáticos* (BROUSSEAU, 2008). Além disso, ela conjecturou corretamente a relação existente entre a primeira e a segunda parte do problema, relacionada à estratégia E_{b1}. Porém, essa dificuldade relatada e a sua insegurança a levaram a não apresentar resposta numérica para o problema, apenas explicitando oralmente seu pensamento.

5.3.4 Considerações da terceira sessão

Nessa sessão, verificamos que os alunos mobilizaram as estratégias E_1, a listagem de possibilidades; E_2, utilização de fórmula; e, E_3, Princípio Fundamental da Contagem. Além disso, notamos uma dificuldade nos alunos em relação à característica que adotamos para o problema. Diferentemente dos anteriores, escolhemos para esse problema dois itens que se diferenciavam pela relevância da ordem dos times no momento da divisão. No primeiro item não havia distinção entre os times, enquanto no segundo existia, pois nomeamos os times como Comercial e Operário. Porém, houve alunos, como o Aluno b9 e os alunos do Grupo 6, apesar de mobilizarem o teorema em ação $T_{4.2}$ (*a ordem dos elementos não interfere na quantidade de possibilidades*) no momento de selecionar os jogadores, não consideraram essa diferença em relação às equipes, resolvendo os dois itens da mesma maneira.

Evidenciamos também certa regularidade nas resoluções apresentadas pelos alunos do Grupo 6, os quais utilizaram novamente o PFC, mobilizando o teorema em ação T_3 (*Princípio Fundamental da Contagem*). O Aluno a7 apresentou conhecimentos acerca das fórmulas de combinatória e, sempre que possível, as utilizou para resolver as situações-problema, apresentando vestígios do teorema em ação T_2 (*se um problema é de combinatória, então existe uma fórmula que resolve e basta utilizá-la para encontrar a solução*).

Por fim, verificamos que os alunos do Grupo 1 mobilizaram estratégias apresentadas em sessões anteriores por outros alunos, dando indícios de incorporação de novas estratégias, àquelas que já utilizavam. Enquanto o Aluno a1 mobilizou o PFC realizando a exclusão dos casos repetidos, semelhante ao realizado pelos alunos do Grupo 6 no encontro anterior, as Alunas b1 e c1 utilizaram a fórmula conjecturada pelo Aluno a3, e para validar essa estratégia, apresentaram até a mesma justificativa do aluno do Grupo 3.

5.4 Sessão 4

A quarta sessão foi composta por uma situação-problema de arranjo, que continha dois itens para resolver.

5.4.1 Análise *a priori* do problema

O enunciado do problema da sessão segue abaixo:

Quantos são os números de três algarismos distintos? E se for somente números pares, quantos são ao todo?[32]

Diferentemente dos problemas anteriores, para esse problema de contagem adotamos como primeira variável didática uma quantidade grande de elementos. Apesar de ser possível resolver a situação-problema por meio da listagem de possibilidades, com essa escolha esperávamos que os alunos percebessem a inviabilidade dessa estratégia, que não é eficaz para todos os problemas, e assim, recorressem a outras estratégias. Como segunda variável, adotamos como restrição a necessidade de o número ser formado por três algarismos distintos, escolha que restringe a possibilidade de colocar o algarismo 0 no algarismo das centenas, pois o número formado só teria dois algarismos, como os números 82, 45 e 61. Além disso, no segundo item, solicitamos que o número formado fosse par. Tal decisão poderia levar os alunos a separar o problema em duas etapas distintas, e consequentemente, utilizar o Princípio Aditivo para resolvê-lo.

Possíveis estratégias:

Apresentamos inicialmente possíveis estratégias para a primeira parte do problema:

E_1*: Listagem de Possibilidades*

Apesar de inviável e ineficaz, é possível recorrer à estratégia da listagem de possibilidades para resolver o problema, do seguinte modo: 102; 103; 104; 105; ...; 987, e assim, lista-se as 648 possibilidades.

---

[32] Fonte (adaptado): Lima *et. al.* (2006)

Como destacamos, nesse problema adotamos uma grande quantidade de elementos do conjunto, resultando em seiscentos e quarenta e oito possibilidades, com o objetivo dos alunos utilizarem outras estratégias, em detrimento da listagem. Porém, caso os alunos insistam nessa estratégia, é provável que tenham dificuldades na execução da mesma, e que fique faltando elementos na listagem.

$E_{2:}$ *Princípio Fundamental da Contagem*

Um primeiro ponto que se deve levar em consideração para utilizar o PFC para resolver esse problema é a restrição de colocar o algarismo 0 na ordem das centenas. Caso considere a possibilidade de colocar o 0 nessa posição e outros algarismos nas demais, estará formando números do tipo: 034, 076, 095, 098, etc. Tais números, apesar de escritos com três algarismos, podem ser escritos somente por 34, 76, 95, 98, o que leva os mesmos a terem apenas dois algarismos, não atendendo a restrição do problema. Desse modo, ao utilizar o PFC, deve-se considerar que para a ordem das centenas há nove possibilidades, uma vez que não pode utilizar o algarismo 0. Para a ordem das dezenas também há nove possibilidades, pois não é possível repetir o algarismo usado na primeira etapa, porém pode utilizar o algarismo 0 a partir de agora. E para a ordem das unidades há oito as opções de algarismos, resultando em $9\ x\ 9\ x\ 8 = 648$ possibilidades de números.

Nesse primeiro item, é possível ocorrer dificuldades em relação às restrições impostas no problema, ao não levar em consideração a necessidade de os algarismos serem distintos, além de considerar o algarismo 0 na casa das centenas. Assim, lista-se casos em excesso, ou, ao utilizar o PFC, apresenta-se soluções do tipo: $10\ x\ 10\ x\ 10 = 1000$ possibilidades; $10\ x\ 9\ x\ 8 = 720$ possibilidades.

Para o segundo item do problema, prevemos as seguintes estratégias:

E_{b1}*: Listagem de Possibilidades*

Consonante ao apresentado na primeira parte do problema, lista-se os possíveis números que atendem o problema: 102; 104; 106; 108; 120; 124; ...; 986, totalizando os 328 números possíveis.

$E_{b2:}$ *Princípio Fundamental da Contagem*

Ao solicitarmos somente números pares, no momento de utilizar o PFC é possível ocorrer dificuldade na identificação de quantas opções há em cada etapa do problema.

Conforme destaca Lima *et. al.* (2006), inicia-se a resolução do problema pela maior restrição, nesse caso, a necessidade de o número ser par. Assim, tem-se apenas cinco opções para o algarismo das unidades. E para o algarismo das centenas, quantas opções temos? Oito? Nove? **Depende**. Caso fossem colocados os algarismos 2, 4, 6 ou 8 na primeira etapa, tem-se oito opções, considerando que não pode repetir o algarismo selecionado, e nem colocar o algarismo 0 na ordem das centenas. Porém, caso fosse escolhido o algarismo 0 na ordem das unidades, tem-se nove opções para a segunda etapa do problema, podendo escolher qualquer algarismo de 1 a 9.

Destacamos que nessa resolução não se pode utilizar o PFC diretamente, pois a quantidade de opções para a segunda etapa depende da escolha realizada na primeira etapa. Para utilizar o Princípio Fundamental da Contagem é necessário dividir o problema em dois casos: quando o número termina com o algarismo 0 e quando não termina com o algarismo 0.

Ao realizar essa divisão, para o primeiro caso há apenas uma opção para a ordem das unidades (o próprio 0), na ordem das centenas há nove opções, podendo escolher qualquer algarismo de 1 à 9, e, por fim, na ordem das dezenas há oito opções, resultando em $9\ x\ 8\ x\ 1 = 72$ números pares com três algarismos distintos que terminam em 0. No segundo caso, verifica-se que há quatro opções para a primeira etapa, oito opções para a segunda, pois não pode utilizar o 0 e nem o algarismo escolhido anteriormente, e na terceira etapa também há oito opções, resultando em $8\ x\ 8\ x\ 4 = 256$ números pares com três algarismos distintos que não terminam com o 0. Portanto, ao somar os resultados dos dois casos, é possível formar 328 números que atendem as restrições impostas.

$E_{b3:}$ *Exclusão dos casos indesejados*

Após ter resolvido o primeiro item encontrando 648 possibilidades, percebe-se que um número só pode ser par ou ímpar, sendo que se forem retirados os números ímpares desses 648 números, irão restar apenas os números pares de três algarismos distintos, conforme solicitado.

A partir disso, identifica-se que existem cinco possibilidades para a ordem das unidades, oito possibilidades para a ordem das centenas, já que não pode utilizar o 0 e o algarismo da primeira etapa, e oito opções para a ordem das dezenas, resultando em $8\ x\ 8\ x\ 5 = 320$ números ímpares com três algarismos distintos. Desse modo, obtém-se $648 - 320 = 328$ números pares com três algarismos distintos.

Em relação à interpretação do enunciado do problema, uma possível dificuldade nesse item é considerar somente números formados com algarismos pares, como 246 ou 482 e não todos os números pares, excluindo números como 146, 238, entre outros. Além disso, após ter resolvido a primeira parte do problema, pode-se considerar de maneira errônea que a resposta desse segundo item é metade do anterior, já que os números só podem ser pares ou ímpares.

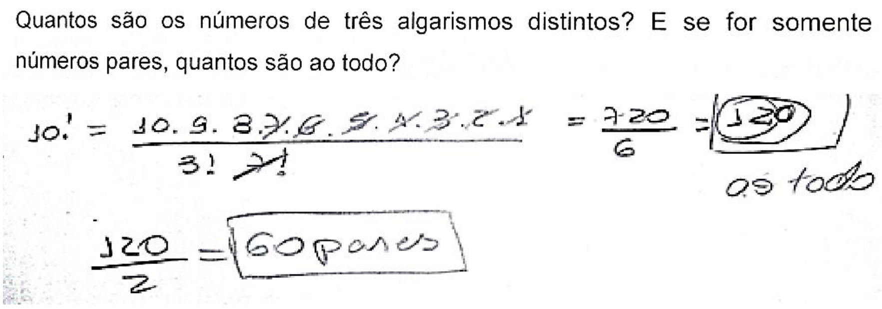
5.4.2 Experimentação

A quarta sessão ocorreu no dia 11 de abril de 2014, das 9h às 11h na sala de aula do curso de Licenciatura em Matemática onde os licenciandos têm aulas. Essa sessão teve a presença de vinte e nove alunos, sendo que estavam presentes pelo menos dois alunos de cada grupo, não havendo a necessidade de juntar grupos para as discussões, como na sessão anterior.

5.4.3 Análise *a posteriori*

Para a resolução do problema proposto, identificamos que os licenciandos utilizaram as estratégias da listagem de possibilidades, PFC e as fórmulas, sendo que o PFC foi a estratégia predominante na turma. Os alunos do Grupo 3 resolveram o problema utilizando a fórmula conjecturada pelo Aluno a3 na segunda sessão, da seguinte maneira:

Figura 25 - Protocolo do Aluno a3, Sessão 4.



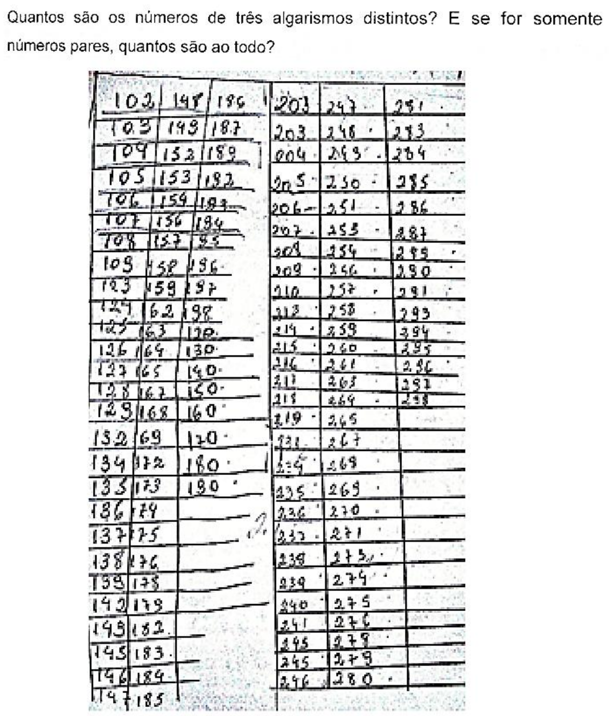
Fonte: dados da pesquisa

Como nos encontros anteriores, os alunos do Grupo 3 recorreram a essa fórmula, pois acreditaram que esse problema era semelhante ao problema de combinação da segunda sessão, sendo que neste caso haviam dez algarismos disponíveis, dos quais deveriam ser escolhidos três para compor o número e restariam sete que não seriam utilizados. Dessa maneira, utilizaram a fórmula conjecturada pelo Aluno a3 e chegaram 120 números distintos como resposta. Como previsto na análise *a priori*, para o item b, os alunos consideram que um número só poderia ser par ou ímpar e, desse modo, a quantidade de números pares seria a metade do encontrado no item anterior, resultando em 60 números pares com três algarismos distintos.

Ao analisarmos as produções do Grupo 3, inferimos que os alunos, em especial o Aluno a3, apresentaram vestígios do teorema em ação T_2 (*se o problema é de combinatória, então existe uma fórmula que resolve e basta utilizá-la para encontrar a solução*) pois, a partir do segundo encontro em que conjecturaram a fórmula para resolução, os mesmos sempre a utilizaram ou buscaram outras fórmulas para resolver o problema. No caso do Aluno a3, esse conhecimento se manifestou de maneira consistente, de modo que, mesmo quando questionado pelas demais alunas do grupo, ele não hesitou e continuou a utilizar a fórmula que conjecturou. Assim, verificamos que esse conhecimento apresentado pelo Aluno a3 está sendo aplicado a uma classe excessivamente grande, fora de seu domínio de validade, e de acordo com Vergnaud, "o sujeito tem de restringir o seu alcance" (VERGNAUD, 1996, p. 161). Portanto, a fórmula conjecturada tem seu domínio de validade, os problemas de combinação, e fora dele tal conhecimento apresentou-se incorreto, como ocorreu no terceiro e quarto encontro. Refletindo essa situação vivenciada pelo Aluno a3, verificamos que o meio *adidático* se mostrou ineficaz para desestabilizar o teorema em ação mobilizado por esse aluno, sendo necessário elaborar novas situações que propiciem isso.

Como nos encontros anteriores, os alunos do Grupo 9 apresentaram dificuldades em resolver o problema proposto e apesar de termos adotado uma grande quantidade de elementos como variável didática, os mesmos utilizaram novamente a listagem de possibilidades para resolvê-lo. Devido à escolha dessa estratégia, nenhum dos alunos do grupo apresentou uma resposta final, sendo que temos apenas registros das listagens realizadas, dos quais destacamos a seguinte produção da Aluna e9:

Figura 26 - Protocolo da Aluna e9, Sessão 4.



Fonte: dados da pesquisa

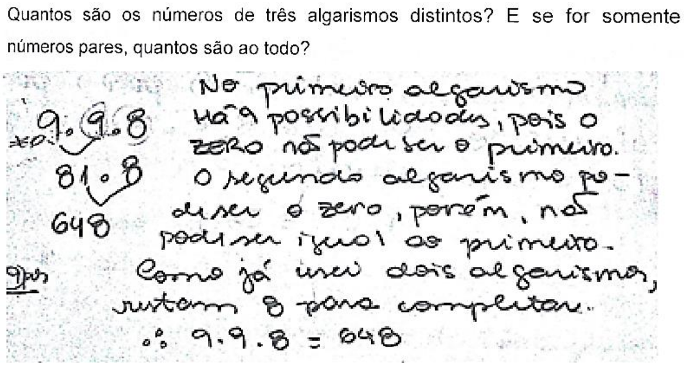
Nessa resolução, observamos que apesar de ter uma grande quantidade de elementos, a Aluna e9 listou de maneira sistemática 143 números possíveis, do número 102 ao 298. Pautados nessa listagem, vemos que a Aluna e9 interpretou corretamente o problema listando somente números com três algarismos, não iniciando com o algarismo 0, além de serem distintos, atendendo as restrições do problema. Porém, ao perceber que a listagem das possibilidades seria trabalhosa, ela desistiu dessa estratégia e realizou outras operações matemáticas, como adições e multiplicações, sem apresentar uma resposta para a situação-problema. Como nos encontros anteriores, percebemos o quão forte é o teorema em ação $T_{1.1}$ (*dado um problema de contagem, sempre é possível listar todas as possibilidades*), mobilizado pelos alunos do Grupo 9 pois, em todos os problemas até então, utilizaram com frequência a listagem das possibilidades para resolvê-los. Além disso, não encontramos indícios de resolução do segundo item, nas produções e gravações dos alunos do Grupo 9.

Os demais grupos da turma utilizaram o PFC para resolver os dois itens do problema proposto, com exceção do Aluno a1 que realizou uma generalização indevida. No primeiro item, todos os alunos realizaram produções semelhantes, dentre as quais, apresentamos as discussões e produções das alunas do Grupo 2. Pautadas nas informações fornecidas pelo problema e nos diálogos que realizaram, que compõem a formação do meio *adidático*, as Alunas a2 e b2 perceberam a restrição do algarismo 0 do problema, como no seguinte diálogo:

> Aluna a2: Pode começar com o 0?
> Aluna b2: Pode.
> Aluna a2: Não, senão ele não tem três algarismos. Então aqui eu tenho quantas opções? De 1 a 9. Eu não posso começar com o 0.
> [...]
> Aluna a2: E se formos por partes?
> Aluna b2: Aqui não pode ser 0 (ordem das centenas), aqui pode (ordem das dezenas), aqui pode (ordem das unidades).
> Aluna a2: Mas aí são distintos, né?!

Destacamos que ao lerem e interpretarem o problema, as alunas do Grupo 2 perceberam as duas restrições que a primeira parte do problema tem: a distinção dos algarismos e não poder iniciar o número com o algarismo 0. Além disso, a Aluna a2 fez a sugestão de analisarem o problema por partes, dividindo-o em etapas, fato que possibilitou a utilização do PFC.

Figura 27 - Protocolo da Aluna a2, Sessão 4



Fonte: dados da pesquisa

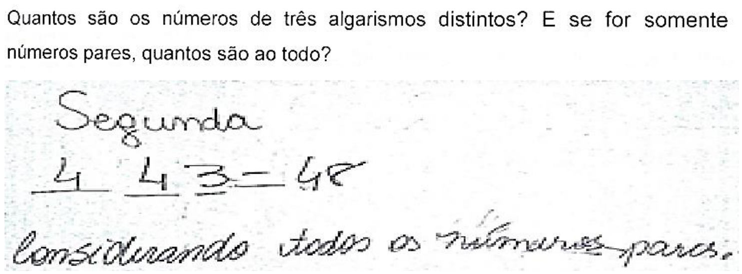
Ao realizarem a divisão em três etapas, as alunas do Grupo 2, assim como os demais licenciandos, consideraram corretamente a possibilidade de utilizar nove algarismos na ordem das centenas. Para a ordem das dezenas, elas teriam também nove possibilidades, como justificaram na resolução apresentada, e por fim, teriam oito possibilidades na ordem das unidades, totalizando $9\ x\ 9\ x\ 8 =\ 648$ números de três algarismos distintos.

Apesar de a Aluna a2 ter expressado na sessão anterior sua dificuldade acerca do conteúdo de combinatória, nesse problema, as Alunas a2 e b2 resolveram o problema e apresentaram vestígios do teorema em ação T_3, o *Princípio Fundamental da Contagem,* ao separarem a situação em etapas distintas, e considerarem as possibilidades de cada etapa. Além disso, a Aluna a2 não ficou preocupada em classificar o problema como sendo uma combinação, arranjo ou permutação para utilizar a fórmula correspondente, sendo outra dificuldade que havia expressado. Elas se colocaram em uma postura ativa na busca da solução do problema, percorrendo momentos *adidáticos* (BROUSSEAU, 2008), além de atender a primeira etapa sugerida por Lima *et. al.* (2006), na qual se colocaram na posição de quem está resolvendo o problema.

Apesar de terem realizado corretamente o primeiro item, no item b os Grupos 2 e 4 avaliaram de maneira incorreta as possibilidades das etapas, dificuldade semelhante à prevista na análise *a priori*. Os alunos dos Grupos 2 e 4, exceto a Aluna a4, consideraram que haviam cinco opções para o algarismo das unidades, pois o número tinha que ser par. Porém, nenhum desses alunos perceberam que para a ordem das centenas a quantidade de opções depende do algarismo utilizado na primeira etapa, e colocaram que sempre teriam nove opções de números. Por fim, o Grupo 2 considerou que havia oito possibilidades para a ordem das dezenas, totalizando 360 números pares, enquanto os alunos do Grupo 4 colocaram nove opções para essa posição, resultando em 405 números pares distintos.

Para a formação dos números pares, o Grupo 1 e as Alunas b7 e c7 utilizaram de maneira incorreta somente algarismos pares, mobilizando o Princípio Fundamental da Contagem, da seguinte maneira:

Figura 28 - Protocolo da Aluna b1, Sessão 4.


Quantos são os números de três algarismos distintos? E se for somente números pares, quantos são ao todo?

Segunda

4 4 3 = 48

considerando todos os números pares.

Fonte: dados da pesquisa

No segundo item solicitamos a formação de números pares, porém a Aluna b1 considerou a necessidade de utilizar somente algarismos pares. A partir disso, para a ordem das centenas havia quatro opções, pois não é possível utilizar o algarismo 0. Para o algarismo das dezenas havia quatro opções, sendo possível utilizar o 0, e, no algarismo das unidades havia três opções, totalizando $4 \ x \ 4 \ x \ 3 = 48$ números de três algarismos pares distintos. Apesar de mobilizar corretamente o PFC, os alunos do Grupo 1 desconsideraram números que possuem algarismos ímpares, mas que atendiam as restrições impostas pelo problema, como os números 324, 436, 672, entre outros. Os alunos do Grupo 5 resolveram o segundo item também mobilizando o PFC, porém apresentaram as mesmas dificuldades que acabamos de citar.

Em um primeiro momento, os alunos do Grupo 6 ao resolverem o segundo item do problema realizaram por meio do PFC, considerarem nove opções para a primeira e segunda posição e cinco opções para a última posição. Porém, os mesmos não tinham percebido que ao realizarem dessa maneira, a quantidade de possibilidades para o algarismo das centenas dependeria da escolha realizada no algarismo das unidades. Dessa maneira, ao notarmos tal fato, realizamos o seguinte questionamento:

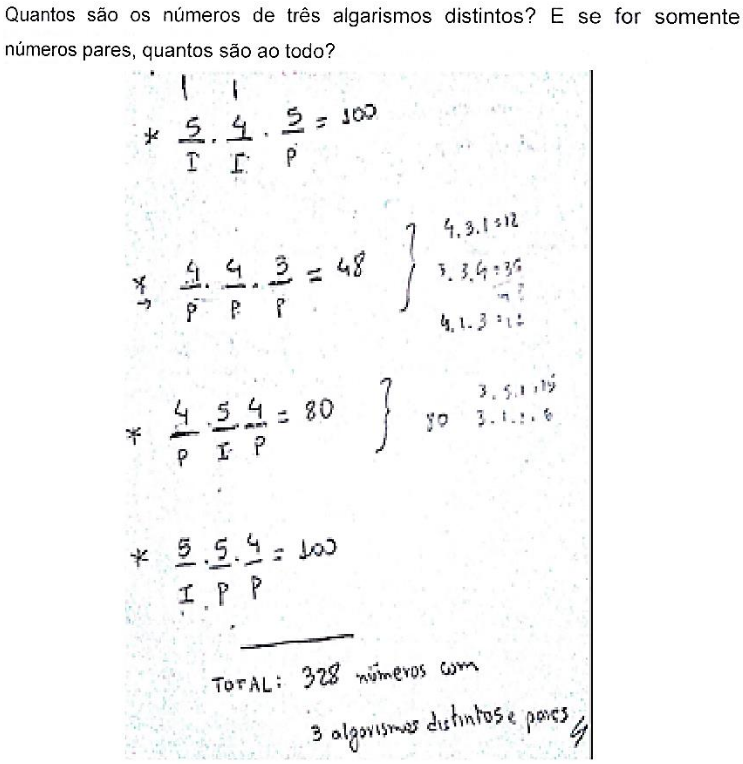
> Aluna a6: O primeiro (algarismo das centenas) não pode ser o zero, o segundo (algarismo das dezenas) já usou um número então não vai ser dez, vai ser nove. E como ele quer números pares, nós só temos cinco números pares possíveis. Multiplica os três. Três algarismos distintos e pares.
> Pesquisador: E se eu colocasse aqui (algarismo das unidades) o algarismo quatro, quantas possibilidades eu teria aqui (algarismo das centenas)?
> Aluna a6: Deixa eu ver ... Ah tá entendi.

Após apresentarmos uma possível situação, a Aluna a6 percebeu que ao realizarem o PFC dessa maneira, a quantidade de possibilidades da ordem das centenas dependeria da escolha realizada na ordem das unidades. A partir de então, os alunos do Grupo 6 voltaram a refletir e buscar outras estratégias para resolver o problema.

> Aluno c6: O que ele falou?
> Aluna a6: Por exemplo, você fez o dos números pares?
> [...]
> Aluna a6: O primeiro algarismo pode ser nove algarismos, o segundo pode ser qualquer um, menos o que repetiu aqui (algarismo das centenas). Só que ai ele falou, se aqui for o número par, o quatro, aqui pode repetir? Agora eu fiquei meio assim ...

Verificamos nesse evento a influência do meio antagonista perante os alunos do Grupo 6, uma vez que o questionamento que realizamos ocasionou desequilíbrios cognitivos nos mesmos, fato que possibilitou aos mesmos vivenciarem momentos *adidáticos*, perpassando por processos de reflexão e discussão na busca pela resposta (BROUSSEAU, 2008). Assim, os alunos do Grupo 6 apresentaram a seguinte estratégia de resolução, novamente utilizando o PFC:

Figura 29- Protocolo da Aluna a6, Sessão 4



Fonte: dados da pesquisa

Para superar a dificuldade que estavam enfrentando, os alunos separaram o problema em quatro casos distintos, levando em consideração as possibilidades de os algarismos das dezenas e centenas poderem ser pares ou ímpares, e o algarismo das unidades sempre sendo par. Desse modo, no primeiro e no último caso, a restrição do algarismo 0 na ordem das centenas não existe, pois o algarismo da ordem das centenas deveria ser ímpar. Nos demais casos, por terem fixado o algarismo par na primeira posição, os alunos levaram em consideração a restrição de não poder iniciar com o 0, e consequentemente, teriam menos possibilidades para a ordem das unidades. Por fim, os alunos utilizaram corretamente o Princípio Aditivo ao somarem as possibilidades de caso, totalizando nos 328 números pares com três algarismos distintos. Salientamos que a Aluna a4 também apresentou essa estratégia diante da mesma dificuldade e o Aluno a7 resolveu o problema de maneira semelhante, ao separar o problema em três casos, levando em consideração a posição do algarismo 0, que poderia estar na ordem das unidades, dezenas ou poderia não aparecer no número formado.

Assim como em todas as sessões anteriores, os alunos do Grupo 6 iniciaram a resolução do problema dividindo-o em etapas, e a partir dessa divisão, identificaram a quantidade de possibilidades em cada uma das etapas, para poderem aplicar o Princípio Fundamental da Contagem. Desse modo, esses alunos apresentaram o teorema em ação T_3 (*Princípio*

Fundamental da Contagem), o qual mobilizaram com frequência ao resolverem os problemas de combinatória. Além disso, essa mesma organização de separar o problema em etapas, identificar a quantidade de possibilidades de cada uma e utilizar o PFC, mostrou-se ser algo estável ao longo das quatro sessões, independentemente do tipo de problema.

5.4.4 Considerações da quarta sessão

Diferentemente das sessões anteriores, nesse problema adotamos uma quantidade alta para o número de elementos do problema, de modo que resultasse em uma grande quantidade de possibilidades na solução. Com isso, esperávamos que os alunos percebessem a inviabilidade da listagem de possibilidades para o problema e recorressem a outras estratégias. De modo geral, verificamos que nossa escolha surtiu efeito pois, diferentemente dos encontros anteriores nos quais a listagem de possibilidades foi a estratégia mais mobilizada, nesse encontro os alunos mobilizaram a estratégia do Princípio Fundamental da Contagem.

Destacamos que quase todos os grupos apresentaram vestígios do teorema em ação T_3 (*Príncipio Fundamental da Contagem*), realizando a estratégia do PFC, ao separarem o problema em etapas e identificarem as possibilidades de cada uma. Contudo, apesar de o problema conter uma quantidade grande de possibilidades, os alunos do Grupo 9 optaram pela estratégia da listagem de possibilidades, dos quais destacamos a resolução da Aluna e9 que listou 143 casos distintos. Assim, inferimos a estabilidade do teorema em ação $T_{1.1}$ (*dado um problema de contagem, sempre é possível listar todas as possibilidades*) nesses alunos pois recorreram com frequência a estratégia listagem de possibilidades para buscar a solução nos problemas até então.

Por fim, no segundo item adotamos uma restrição na qual os alunos tinham a necessidade de separar o problema em dois casos distintos, e, utilizar o Princípio Aditivo para resolvê-lo. Entretanto, como previmos na análise *a priori*, de modo geral os alunos não realizaram essa divisão e aplicaram o PFC, encontrando resultados diferentes do correto. Essa separação em casos distintos foi realizada pelos alunos do Grupo 6 e os Alunos a4 e a7, que novamente utilizaram corretamente o PFC.

5.5 Sessão 5

A quinta sessão foi composta por duas situações-problema, uma de arranjo e outra de produto cartesiano.

5.5.1 Análise *a priori* do primeiro problema

O primeiro problema da sessão foi:

Um celular está configurado com um sistema de senhas que é composta por 3 algarismos distintos, dentre os 10 algarismos possíveis de escolher. Além disso, o celular está configurado de modo que a cada senha errada é necessário esperar 30 segundos para inserir uma nova senha. Sabendo disso, qual é o tempo máximo que uma pessoa leva para desbloquear o celular, supondo que ela não conhece a senha?

Semelhante ao problema do encontro anterior, nesse problema de arranjo, adotamos como primeira variável didática uma quantidade grande de elementos, escolha que resultou em 720 possibilidades diferentes de senhas, tendo em vista que tínhamos como objetivo analisar estratégias que os alunos mobilizaram após terem resolvido um problema semelhante na sessão anterior. Contudo, por se tratar de formação de senhas para um celular, esperávamos que os alunos percebessem que nesse problema não havia a restrição do algarismo 0 na ordem das centenas, sendo necessário considerar apenas a distinção dos algarismos.

Possíveis estratégias:

Apresentamos inicialmente as possíveis estratégias para o primeiro problema:

E_1: Listagem de Possibilidades

Apesar de uma quantidade grande de elementos, ao realizar essa estratégia, inicialmente lista-se as senhas que atendam a restrição do problema, por exemplo: 012; 013; 014; ...; 985; 986; 987, listando as 720 senhas distintas. Posteriormente, é necessário observar que o problema solicita o tempo máximo que será gasto para descobrir a senha correta no aparelho, sabendo que para cada senha errada é necessário esperar 30 segundos para inserir uma nova. Desse modo, ao considerar essa restrição e supondo que a senha correta seja a última, tem-se que o tempo máximo para desbloquear o celular é $719\ x\ 30 = 21570$ segundos, equivalente a 5 horas 59 minutos e 30 segundos.

$E_{2:}$ *Utilização de Fórmula*

Ao mobilizar o teorema em ação T_2 (*se um problema é de combinatória, então existe uma fórmula que resolve e basta utilizá-la para encontrar a solução*), identifica-se que essa situação-problema pode ser classificada como um arranjo, pois serão selecionados elementos de um conjunto para a formação de um subconjunto menor e a ordem dos elementos é relevante nesse subconjunto (PESSOA; BORBA, 2010), e aplica-se a fórmula correspondente:

$$A_3^{10} = \frac{10!}{(10-3)!} \Leftrightarrow A_3^{10} = \frac{10!}{7!} \Leftrightarrow A_3^{10} = \frac{3628800}{5040} \Leftrightarrow A_7^{10} = 720$$

Então, percebe-se que dessas 720 senhas distintas, em uma delas não será necessário esperar os 30 segundos de bloqueio, resultando em $719\ x\ 30 = 21570$ segundos, equivalente à 5 horas 59 minutos e 30 segundos.

$E_{3:}$ *Princípio Fundamental da Contagem*

Para realizar a estratégia do PFC, considera-se três etapas distintas para a formação da senha, de modo que para o primeiro dígito da senha há 10 possibilidades, pois pode-se utilizar todos os algarismos de 0 à 9. Para o segundo dígito há 9 opções, desconsiderando o algarismo utilizado anteriormente, e por fim, há 8 opções para utilizar no terceiro dígito, resultando em $10\ x\ 9\ x\ 8$ possibilidades. Assim, desconsiderando 30 segundos que não é necessário esperar para inserir a primeira senha, o tempo máximo para desbloquear o celular é $719\ x\ 30 = 21570$ segundos, equivalente à 5 horas 59 minutos e 30 segundos.

Salientamos que nesse problema pode ocorrer dificuldade em considerar que o algarismo 0 não pode ocupar a ordem das centenas, semelhante ao problema da quarta sessão. Entretanto, por se tratar de formação de senhas essa restrição não existe, tendo que levar em consideração apenas que os algarismos tenham que ser distintos. Além disso, outra possível dificuldade é não desconsiderar que em uma das senhas não será necessário esperar os 30 segundos para inserir uma nova, resultando em $720\ x\ 30 = 21600$ segundos, equivalente à 6 horas.

5.5.2 Análise *a priori* do segundo problema

O segundo problema da quinta sessão é o seguinte:

Uma companhia de transporte rodoviário intermunicipal estuda as 15 possíveis rotas para a realização de viagens do município A ao município C, com passagem obrigatória pelo município B. Sabendo que de A à B existem três possíveis trajetos, quantos trajetos existem entre B e C?[33]

Nesse problema de produto cartesiano adotamos como primeira variável didática uma quantidade pequena de elementos tendo em vista que, após vivenciarem situações com uma quantidade grande de elementos, desejávamos verificar como os alunos resolveriam esse problema que tinha apenas 5 possibilidades como solução. Contemplando a segunda classe de problemas de produto de medidas (VERGNAUD, 2009a), a segunda variável didática está relacionada ao fato de o mesmo ser um problema inverso pois, diferentemente dos problemas anteriores nos quais foram informadas as possibilidades de cada etapa e desejava-se as possibilidades totais, nesse, informamos a quantidade de rotas da cidade A à cidade B e da cidade A à cidade C, passando pela cidade B, e foi solicitado a quantidade de rotas existentes da cidade B à cidade C.

Possíveis estratégias:

E_1*: Listagem de Possibilidades*

Podendo utilizar diagramas para representar a situação, enumera-se as rotas da cidade A à cidade B de 1, 2 e 3 e inicia-se a listagem com as possíveis rotas da cidade B à cidade C verificando a quantidade necessária para atingir 15 rotas possíveis da cidade A à cidade C, passando pela cidade B.

1. 1 – 4	6. 3 – 5	11. 2 – 7
2. 2 – 4	7. 1 – 6	12. 3 – 7
3. 3 – 4	8. 2 – 6	13. 1 – 8
4. 1 – 5	9. 3 – 6	14. 2 – 8
5. 2 – 5	10. 1 – 7	15. 3 – 8

[33] Fonte: Souza, J. (2010)

Então, verifica-se que com 5 rotas distintas da cidade B à cidade C (rotas 4, 5, 6, 7 e 8) existem 15 possibilidades diferentes de ir da cidade A à cidade C, passando pela cidade B.

E_2*: Princípio Fundamental da Contagem*

Para a realização dessa estratégia, divide-se o problema em duas etapas: 3 possíveis trajetos da cidade A à cidade B e m trajetos da cidade B à cidade C, sabendo que existem 15 possíveis trajetos da cidade A à cidade C, passando pela cidade B. Desse modo, ao aplicar o PFC verifica-se que a quantidade total de trajetos da cidade B à cidade C é igual a 5, como a seguir:

$$PFC: 3\ x\ m = 15\ \Leftrightarrow m = 5$$

E_3*: Busca de Regularidades*

Ao mobilizar o teorema em ação $T_{1.3}$ (*se o problema é generalizável, então ao fazer uma listagem sistemática é possível encontrar tal generalidade)* inicia-se uma listagem sistemática e verifica-se que, para cada trajeto existente da cidade B à cidade C, há 3 possibilidades distintas de ir da cidade A à cidade C, passando pela cidade B. Portanto, sabendo que existem 15 trajetos diferentes da cidade A à cidade C, tem-se que $3\ x\ m = 15$, então há 5 trajetos distintos da cidade B à cidade C.

Conforme destaca Pessoa (2009) em sua investigação, houve problemas em que os alunos do ensino básico utilizaram operações indevidas com os valores disponibilizados no enunciado do problema, as quais ocasionaram erros nas resoluções dos mesmos. De tal modo, uma possível dificuldade para esse problema é a realização de operações indevidas como multiplicar os trajetos da cidade A à cidade C e da cidade A à cidade B, por exemplo, $15\ x\ 3 = 45$ trajetos, ou subtrair esses valores, por exemplo, $15 - 3 = 12$ trajetos.

5.5.3 Experimentação

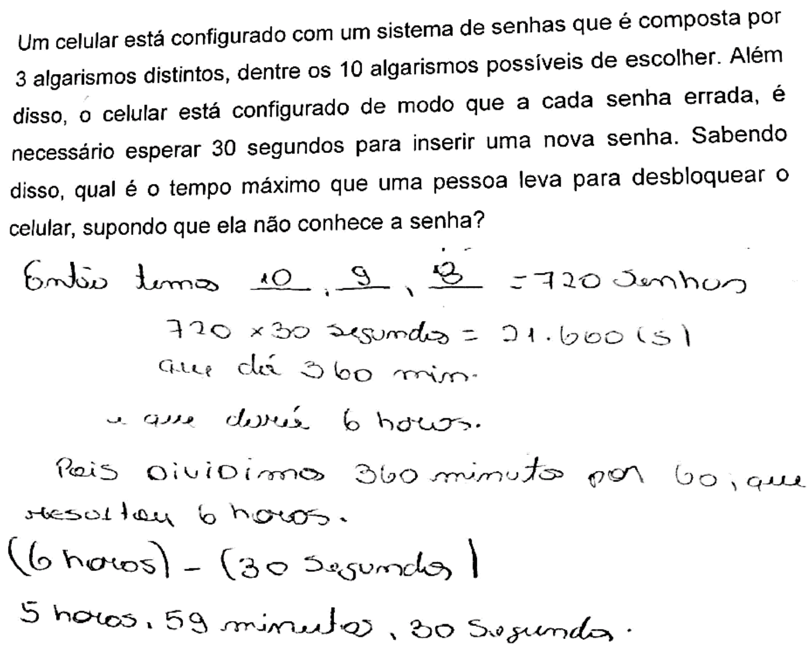
A quarta sessão ocorreu no dia 25 de abril de 2014, das 9h às 11h na sala de aula do curso de Licenciatura em Matemática onde foram as sessões anteriores. Essa sessão teve a presença de vinte e seis alunos, sendo que a Aluna a8 compôs o Grupo 1 já que, dentre os integrantes de seu grupo, somente ela compareceu.

5.5.4 Análise *a posteriori*

Para a resolução da primeira situação-problema, verificamos a ocorrência de apenas duas estratégias nas produções dos alunos: o Princípio Fundamental da Contagem e a fórmula de arranjo. Dentre elas, constatamos que o PFC foi a estratégia predominantemente utilizada, já que todos os grupos a realizaram em algum momento resolução.

Como apresentamos na análise da quarta sessão em que escolhemos um problema com uma quantidade grande de elementos como variável didática, com o objetivo de que os alunos percebessem que apesar de ser possível resolver os problemas de contagem por meio da estratégia da listagem, existem situações que somente ela é inviável, sendo necessário realizar outras estratégias genéricas. Apesar disso, verificamos que os alunos do Grupo 9 buscaram resolvê-lo utilizando a estratégia da listagem de possibilidades, escolha que impossibilitou a obtenção de uma resposta para o problema. Nessa quinta sessão mantivemos a escolha de uma quantidade grande de elementos no primeiro problema porém, diferentemente da sessão anterior, os alunos do Grupo 9 apresentaram vestígios do teorema em ação T_3(*Princípio Fundamental da Contagem*) ao realizarem essa estratégia para resolver o problema, como na resolução do Aluno d9:

Figura 30 - Protocolo do Aluno d9, Sessão 5


Um celular está configurado com um sistema de senhas que é composta por 3 algarismos distintos, dentre os 10 algarismos possíveis de escolher. Além disso, o celular está configurado de modo que a cada senha errada, é necessário esperar 30 segundos para inserir uma nova senha. Sabendo disso, qual é o tempo máximo que uma pessoa leva para desbloquear o celular, supondo que ela não conhece a senha?

Então temos 10 , 9 , 8 = 720 senhas
720 x 30 segundos = 21.600 (s)
que dá 360 min.
o que dará 6 horas.
Pois dividimos 360 minutos por 60, que resultou 6 horas.
(6 horas) - (30 segundos)
5 horas, 59 minutos, 30 segundos.

Fonte: dados da pesquisa

O Aluno d9 considerou corretamente que havia 10 possibilidades para o primeiro dígito da senha, pois poderia utilizar qualquer algarismo de 0 à 9. Para o segundo dígito havia 9 possibilidades, ao desconsiderar o algarismo utilizado na etapa anterior, e para o terceiro dígito 8 possibilidades, resultando em $10\ x\ 9\ x\ 8 = 720$ senhas distintas. Posteriormente, multiplicou a quantidade de senhas encontradas pelos 30 segundos que seriam necessários esperar para cada senha errada e converteu o tempo em horas. Por fim, desconsiderou 30 segundos, já que não é preciso esperar para colocar a primeira senha, encontrando o tempo máximo de 5 horas 59 minutos e 30 segundos. Além dessa resolução, encontramos indícios do teorema em ação T_3 durante o diálogo da Aluna e9 com o Aluno b9, que caracterizamos um momento com características de formulação (BROUSSEAU, 2008):

> Aluna a9: Vê se eu estou certa, acompanha meu raciocínio. Possibilidades de senha são 720.
> Aluno b9: Como você chegou a 720 (senhas)?
> Aluna a9: Aqui eu posso usar 10 números (primeiro dígito). Aqui (segundo dígito) eu posso 9, porque como são distintos e eu não posso repetir. E aqui (terceiro dígito) 8, porque eu já usei dois.

Analisando o diálogo e as produções do Grupo 9, evidenciamos que os alunos dividiram corretamente o problema da formação de senhas em três etapas, identificaram as possibilidades de cada, para então utilizarem o Princípio Fundamental da Contagem. Destacamos que diferentemente das sessões anteriores nas quais esses alunos apresentaram predominantemente vestígios dos teoremas em ação $T_{1.1}$ (*dado um problema de contagem, sempre é possível listar todas as possibilidades*) e $T_{1.2}$ (*existe uma maneira sistemática de listar que garante esgotar todos os casos possíveis*) ao realizarem a listagem de possibilidades, nesse problema os mesmos apresentaram uma nova estratégia, o Princípio Fundamental da Contagem, nos permitindo inferir que mobilizaram vestígios do teorema em ação T_3 (*Princípio Fundamental da Contagem*). Acreditamos que isto foi possível devido a organização da sequência didática, a qual propusemos sob a perspectiva das Teoria dos Campos Conceituais, Teoria das Situações Didáticas e a Engenharia Didática, com diferentes situações que compõem o conceito de combinatória, as escolhas das variáveis didáticas e a organização do meio *adidático* para que os alunos pudessem vivenciar situações *adidáticas,* construindo novos conhecimentos. (BROUSSEAU, 2008; VERGNAUD, 2009b; ARTIGUE, 1996).

Após ocorrer a devolução com alunos do Grupo 3, pois os mesmos se mostraram interessados em resolverem a situação-problema, verificamos que no momento *adidático* de ação, na qual realizaram atos de caráter mais operacional, a Aluna b3 utilizou a estratégia do PFC, obtendo 720 possibilidades. Enquanto isso, apesar de estar fora do seu domínio de validade, o Aluno a3 recorreu novamente à fórmula conjecturada nas sessões, $\frac{10!}{3!\,x\,7!}$, encontrando 120 possibilidades distintas. Posteriormente, no momento *adidático* de validação, em que conforme destaca Brousseau (2008, p. 30) "Cada qual pode posicionar-se em relação a um enunciado e, havendo desacordo, pedir uma demonstração ou exigir que o outro aplique suas declarações na interação com o meio", os alunos apresentaram e debateram suas estratégias, o que possibilitou que o Aluno a3 percebesse a invalidade de sua estratégia para essa situação, como no seguinte diálogo:

> Aluno a3: Ah, esse jeito aqui eu não vou fazer mais não.
> Aluna b3: Não, a gente tem que arrumar um jeito de enxergar (a validade de fórmula) [...] porque esse aqui só dá em algumas possibilidades. Conseguir uma outra forma de fazer que isso aqui (fórmula) dá certo.
> Aluno a3: Eu tenho que achar um jeito de usar ela (fórmula).

Nesse diálogo, evidenciamos que a situação que elaboramos, os *feedbacks* do meio e os diálogos com a Aluna b3 durante os momentos *adidáticos* causaram desequilíbrios cognitivos no Aluna a3, em relação à fórmula que conjecturou nas sessões anteriores (BROUSSEAU, 1996, 2008). Porém, apesar de o Aluno a3 desejar parar de usar a fórmula, durante as discussões os alunos do grupo decidiram buscar o domínio de validade no qual essa fórmula é válida. Ao questionarmos as estratégias mobilizadas por eles, o Aluno a3 apresentou o seguinte pensamento:

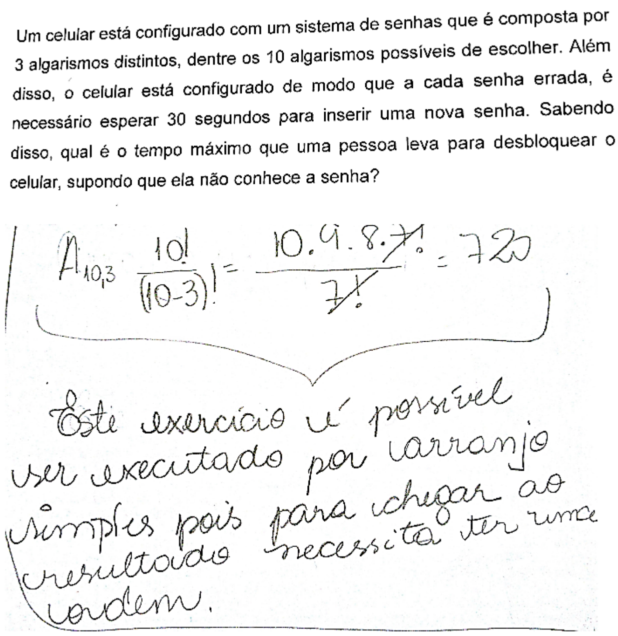
> Pesquisador: E você como fez?
> Aluno a3: Então, foi daquele jeito lá que a gente faz. Pego 10 aqui (total de algarismos), ai eu uso 3 números, sobram 7 (algarismos). [...] Aí deu 120 possibilidades.
> Pesquisador: E por que aqui (resolução da Aluna b3) deram 720 possibilidades?
> Aluno a3: É porque tipo, eu estava meio desacreditado dessa daqui, da minha aqui (estratégia que realizou). Porque o dela chegou à 720 e no meu chegou à 720 dividido por 6. Será que é por que eu tiro as repetições?
> Pesquisador: Repetições do que?
> Aluno a3: Tipo a mesma senha.
> Pesquisador: Em problemas de combinatória, o que é repetir um grupo?
> Aluno a3: É o mesmo número... Ah não! Repetir um número na combinatória é ter os três algarismos, não importa a ordem.
> Pesquisador: Nesse problema tem ou não tem (repetições dos conjuntos)?
> Aluno a3: Ah entendi professor, nesse problema tem que ser 720 no total.

Ao analisarmos o diálogo supracitado, percebemos que com as retroações do meio *adidático*, como as resoluções do grupo e os questionamentos do pesquisador e de sua colega, o Aluno a3 compreendeu que a fórmula que estava utilizando desconsiderava as repetições dos mesmos conjuntos, tendo um domínio de validade somente em problemas que a ordem não é relevante, ou seja, os problemas de combinação (VERGNAUD, 2009b). Dessa maneira, essa situação que o Aluno a3 vivenciou, propiciou que o mesmo verificasse o domínio de validade do conhecimento conjecturado nas sessões anteriores, superando uma dificuldade que havia enfrentado nas sessões três e quatros.

Assim como os Grupos 3 e 9, os demais grupos também resolveram a primeira situação-problema mobilizando os teoremas em ação T_3 (*Princípio Fundamental da Contagem*) e $T_{4.1}$ (*a ordem dos elementos não interfere na quantidade de possibilidades*) ao realizarem a estratégia do Princípio Fundamental da Contagem, além de levarem em consideração a relevância da ordem dos algarismos na formação das senhas. Observamos que no decorrer das resoluções, de modo geral, os alunos focaram em questões procedimentais para o desenvolvimento das estratégias, sem considerarem aspectos conceituais da combinatória. Essa postura está consonante ao resultado evidenciado no estudo do desenvolvimento histórico da combinatória, no qual verificamos que os povos ancestrais apresentavam conhecimentos aplicados aos problemas de suas respectivas épocas, como no problema existente no Papiro de Rhind (1650 a. C.) e com os chineses que sabiam construir quadrados mágicos (no período de 1182 – 1135 a.C), mas não aprofundavam nos conceitos da combinatória. Assim, a combinatória só recebeu caráter de objeto matemático, com o estudo de aspectos conceituais, a partir dos trabalhos de Leibniz e Bernoulli no século XVII (BIGGS, 1979; VASQUEZ, 2011; BATANERO, GODINO, PELAYO, 1996). Em face ao que presenciamos, solicitamos que os alunos classificassem, se possível, essa situação-problema de acordo com as classes de problemas que conheciam (arranjo, permutação e combinação), para que pudéssemos analisar suas reflexões em relação aos conceitos do tema.

O problema das senhas tratava-se de um arranjo simples, pois deveriam ser utilizados 3 algarismos dentre os 10 possíveis, levando em consideração a relevância da ordem dos mesmos. Os Grupos 1, 4, 5, 6 e 7 classificaram corretamente o problema, como na resolução da Aluna b1:

Figura 31- Protocolo da Aluna b1, Sessão 5



Um celular está configurado com um sistema de senhas que é composta por 3 algarismos distintos, dentre os 10 algarismos possíveis de escolher. Além disso, o celular está configurado de modo que a cada senha errada, é necessário esperar 30 segundos para inserir uma nova senha. Sabendo disso, qual é o tempo máximo que uma pessoa leva para desbloquear o celular, supondo que ela não conhece a senha?

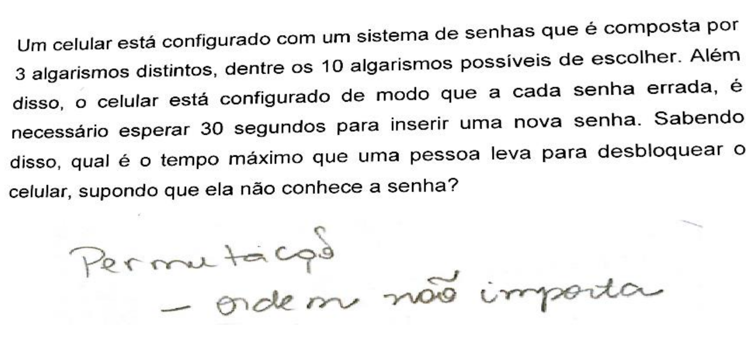
$$A_{10,3}\ \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10.9.8.\cancel{7!}}{\cancel{7!}} = 720$$

Este exercício é possível ser executado por arranjo simples pois para chegar ao resultado necessita ter uma ordem.

Fonte: dados da pesquisa

Pautados na classificação de Pessoa e Borba (2010) que distinguem as situações combinatórias a partir de duas propriedades para cada, evidenciamos que tanto a Aluna b1, quanto os demais grupos que classificaram corretamente o problema e mobilizaram a fórmula correspondente, destacaram apenas a relevância da ordem dos elementos, não considerando a segunda propriedade: que se tratava da formação de um subconjunto menor que o conjunto dado. Apesar de corretas, ao considerarem apenas que *ordem dos elementos gera novas possibilidades,* os alunos poderiam confundir esse problema de arranjo com os de permutação, que possuem a mesma propriedade, como ocorreu com as alunas do Grupo 2:

Figura 32 - Protocolo da Aluna a2, Sessão 5.



Um celular está configurado com um sistema de senhas que é composta por 3 algarismos distintos, dentre os 10 algarismos possíveis de escolher. Além disso, o celular está configurado de modo que a cada senha errada, é necessário esperar 30 segundos para inserir uma nova senha. Sabendo disso, qual é o tempo máximo que uma pessoa leva para desbloquear o celular, supondo que ela não conhece a senha?

Permutação
— ordem não importa

Fonte: dados da pesquisa

Além dessa resolução, por meio dos diálogos, observamos dificuldades que essas alunas possuem em relação aos aspectos conceituais da combinatória, quando tentam identificar as propriedades de cada classe de situações:

> Aluna a2: Como que a gente faz agora a divisão do que é permutação, combinação ou arranjo? Eu não sei fazer.
> Aluna c2: O arranjo é tipo uma premiação, o primeiro vai ganhar um prêmio, o segundo vai ganhar outro prêmio e o terceiro não pode ganhar o prêmio do primeiro. Cada um tem sua posição fixa
> [...]
> Aluna b2: Na permutação a ordem não importa. Tira um, o outro diminui... (referindo-se as possibilidades de cada etapa que são decrescentes)

Inferimos que tais dificuldades podem ser inerentes das vivências que essas alunas percorreram durante a educação básica, com uma padronização de situações, como os problemas de arranjo estarem sempre relacionados a classificações e os de combinação a formação de comissões. No desenvolvimento do tema não há destaque das propriedades que diferenciam as classes de problemas de combinatória, e, conforme relatou a Aluna b2, foca-se em procedimentos, como as fórmulas e o PFC, de modo que os alunos se pautam apenas em aspectos procedimentais (SANTOS-WAGNER; BORTOLOTI; FERREIRA, 2013).

Para a continuidade da sessão, apresentamos a segunda situação-problema para os alunos: *Uma companhia de transporte rodoviário intermunicipal estuda as 15 possíveis rotas para a realização de viagens do município A ao município C, com passagem obrigatória pelo município B. Sabendo que de A à B existem três possíveis trajetos, quantos trajetos existem entre B e C?*

Nessa situação adotamos como variáveis didáticas a característica de o problema ser inverso, além de conter uma quantidade baixa de elementos. Apesar disso, ao analisarmos as resoluções dos alunos, verificamos que a estratégia predominante foi o Princípio Fundamental da Contagem, em detrimento da listagem de possibilidades. Ressaltamos esse resultado pois, por se tratar de um problema que tem apenas 5 possibilidades como solução, a estratégia da listagem de possibilidades seria viável para resolvê-lo, semelhante aos problemas do início da sequência didática em que os alunos optaram pela mesma.

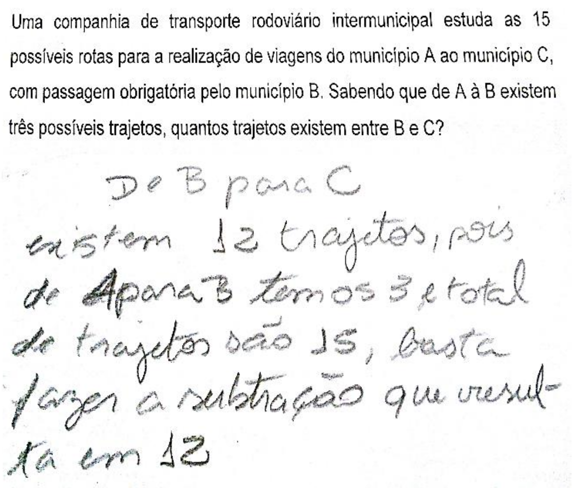
As alunas do Grupo 2 ao resolverem o problema apresentaram o teorema em ação $T_{1.3}$ (*se o problema é generalizável, então ao fazer uma listagem sistemática é possível encontrar tal generalidade*), além dos teoremas em ação $T_{1.1}$ (*dado um problema de contagem, sempre é possível listar todas as possibilidades*) e $T_{1.2}$ *(existe uma maneira sistemática de listar que garante esgotar todos os casos possíveis*), como observamos na fala da Aluna a2:

> Aluna a2: Eu tenho quinze possíveis rotas de A para C, mas antes de chegar a C eu tenho que passar obrigatoriamente por B. Eu tenho de A à B três trajetos. Se eu tenho quinze trajetos de A à C, então aqui eu tenho, um, dois, três, quatro, cinco (trajetos de B à C). Para cada trajeto de B à C eu tenho três (trajetos) em A, então 3 x 5 - 15.

Conforme apontamos na análise *à priori* desse problema, as alunas iniciaram a listagem sistemática das possibilidades, destacando que para cada trajeto existente da cidade B à cidade C existiam três possibilidades distintas de ir da cidade A à cidade B, concluindo que só poderiam existir 5 trajetos da cidade B à cidade C para o total dar 15 trajetos. Como nas sessões anteriores, as alunas do Grupo 2 optaram pela listagem de possibilidades, com o objetivo de encontrar uma possível regularidade no problema, demonstrando vestígios do teorema em ação $T_{1.3}$. Dessa maneira, verificamos a estabilidade desses teoremas em ação ($T_{1.1}$, $T_{1.2}$ e$T_{1.3}$) nas alunas, tendo em vista que, diante de situações que possuem uma quantidade pequena de elementos, as mesmas realizaram a listagem sistemática de possibilidades com o intuito de generalizar o problema (VERGNAUD, 2009b).

Consonante ao resultado evidenciado na pesquisa de Pessoa (2009), os alunos do Grupo 3 resolveram o problema por meio de uma subtração indevida dos valores contidos no enunciado dos problemas:

Figura 33 - Protocolo do Aluno a3, Sessão 5.


Uma companhia de transporte rodoviário intermunicipal estuda as 15 possíveis rotas para a realização de viagens do município A ao município C, com passagem obrigatória pelo município B. Sabendo que de A à B existem três possíveis trajetos, quantos trajetos existem entre B e C?

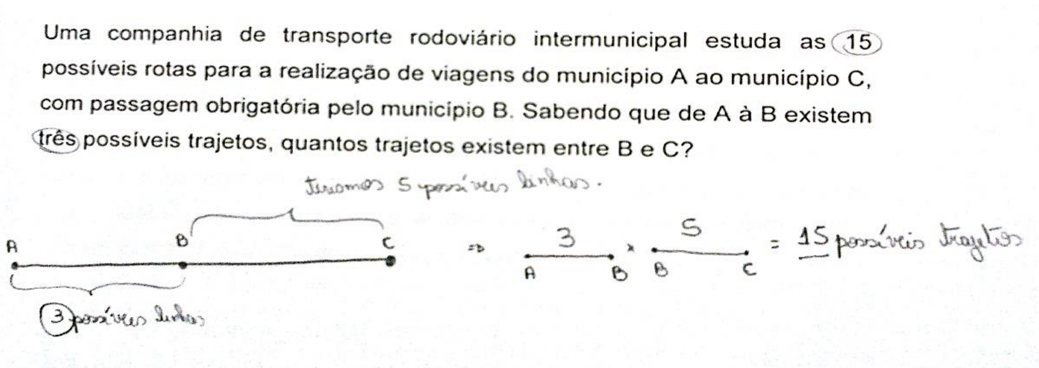
De B para C existem 12 trajetos, pois de A para B temos 3 e total de trajetos são 15, basta fazer a subtração que resulta em 12

Fonte: dados da pesquisa

Ao realizar essa subtração, os alunos do Grupo 3 não observaram que para cada trajeto existente da cidade B à cidade C, poderiam ter escolhidos três possibilidades distintas de ir da cidade A à cidade B. Os mesmos consideraram a existência de 15 caminhos da cidade A à cidade C, e, como existiam 3 trajetos de A a B, consequentemente teriam 12 de B a C. Essa dificuldade pode ser oriunda das situações vivenciadas pelos alunos durante a formação escolar, pois os mesmos acreditam que, “em geral, apenas os números a serem utilizados na resolução de problemas fazem parte dos enunciados e, assim, é preciso operar com estes dois valores por meio de uma das operações aritméticas.” (PESSOA, 2009, p. 182 - 183).

Por fim, apresentamos a resolução dos alunos do Grupo 1 que mobilizaram o teorema em ação T_3 (*Princípio Fundamental da Contagem*) para resolver a situação-problema, semelhante aos demais grupos:

Figura 34 - Protocolo do Aluno b4, Sessão 5.



Fonte: dados da pesquisa

Observamos que o Aluno a1 separou o problema em duas etapas distintas (trajetos da cidade A à cidade B e da cidade B à cidade C) e analisou as possibilidades de cada uma delas, sabendo que haviam 15 possibilidades de viajar da cidade A à cidade C, passando pela cidade B. Como não sabia quantos trajetos existiam de B à C, o aluno considerou uma quantidade x, e ao desenvolver essa estratégia, encontrou como resposta para o problema 5 possibilidades viajar da cidade B à cidade C.

5.5.5 Considerações da quinta sessão

Nessa sessão, destacamos a mobilização do teorema em ação T_3 (*Princípio Fundamental da Contagem*) diante das situações que propusemos, pois todos os alunos realizaram essa estratégia no primeiro problema, além de ser predominante na resolução do segundo. Também não observamos dificuldades dos alunos em relação a ordem dos elementos na resolução da primeira situação-problema, uma vez que os mesmos apresentaram vestígios do teorema em ação $T_{4.1}$ (*a ordem dos elementos sempre resulta em novas possibilidades*), que estava dentro do seu domínio de validade.

Em específico, ressaltamos os alunos do Grupo 9, os quais até a quarta sessão apresentavam com frequência a estratégia da listagem de possibilidades para resolver os problemas, porém nessa, realizaram a estratégia do Princípio Fundamental da Contagem tanto na situação com uma quantidade grande de elementos (primeiro problema), quanto na que continha uma quantidade pequena (segundo problema). O Aluno a3 também conseguiu superar uma dificuldade que apresentou nas sessões anteriores, quando utilizava com recorrência a fórmula que conjecturou em problemas que estava fora de seu domínio de validade. Ao defrontar com uma situação que causou desequilíbrios cognitivos e vivenciar as situações *adidáticas*, o mesmo foi capaz de verificar o domínio de validade no qual sua fórmula fornece resultados verdadeiros (BROUSSEAU, 1996, 2008; VERGNAUD, 1996, 2009b).

Por fim, observamos que apesar de resolverem os problemas da sessão, os alunos apresentaram dificuldades no momento em que solicitamos que os classificassem, consonante à pesquisa de Santos-Wagner, Bortoloti e Ferreira (2013). Os alunos que conseguiram classificar corretamente a primeira situação-problema como um arranjo, pautaram-se apenas na propriedade inerente à ordem dos elementos, e, para validar essa classificação, os mesmos utilizavam a fórmula de arranjo e comparavam-na com o resultado que haviam encontrado por meio do PFC.

5.6 Sessão 6

A sexta sessão foi composta por dois problemas, sendo um de produto cartesiano e o outro de combinação.

5.6.1 Análise *a priori* do primeiro problema

O primeiro problema da sessão foi:

Um restaurante tem a opção de fazer prato feito como refeição, no qual, o cliente pode escolher um prato principal (bife com fritas, peixe com purê, frango com legumes ou lasanha), uma salada (dentre salada verde, salada russa ou salpicão) e a sobremesa é opcional (salada de frutas ou pudim). Quantas refeições são possíveis formar sabendo que o cliente pode escolher no máximo um tipo de sobremesa?

Esse problema de produto cartesiano tinha como característica a possibilidade da utilização do Princípio Aditivo durante a resolução pois, conforme apresentado no enunciado, no momento de formar a refeição a escolha da sobremesa era opcional, ficando a cargo do cliente escolher uma salada de frutas, pudim ou não comer a sobremesa. Desse modo, ao resolver o problema, o aluno poderia considerar dois casos: uma refeição com sobremesa e outra sem, para então, calcular as possibilidades de cada e somá-las para encontrar a quantidade de refeições que o cliente pode formar. Além dessa maneira de resolver o problema, também era possível considerar que no momento de escolher a sobremesa, o cliente tem 3 opções (salada de frutas, pudim ou não pegar sobremesa), e assim, aplica-se o PFC apenas uma vez.

Possíveis estratégias:

E_1*: Listagem de Possibilidades*

Ao mobilizar o teorema em ação $T_{1.1}$ (*dado um problema de contagem, sempre é possível listar todas as possibilidades*) e $T_{1.2}$ *(existe uma maneira sistemática de listar que garante esgotar todos os casos possíveis*), e considerar as opções de escolher ou não uma sobremesa, inicia-se essa a listagem sistemática das possibilidades do seguinte modo: 1. Bife com fritas – salada verde – sem sobremesa; 2. Bife com fritas – salada verde – salada de frutas; 3. Bife com fritas – salada verde – pudim; ... ; 35. Lasanha - salpicão – salada de frutas; 36. Lasanha – salpicão – pudim, obtendo 36 possibilidades.

E_2*: Princípio Fundamental da Contagem*

Com o intuito de realizar essa estratégia, considera-se que para escolha do prato principal há 4 possibilidades, para a salada há 3 possibilidades e para a sobremesa também há 3 possibilidades, pois o cliente pode escolher a salada de frutas, o pudim ou não escolher uma sobremesa, e, ao aplicar o PFC tem-se $4\ x\ 3\ x\ 3 = 36$ possibilidades de refeições.

Caso se utilize o Princípio Aditivo, separa-se o problema em duas etapas: refeições sem sobremesa e refeições com sobremesa. Para o primeiro caso há $4\ x\ 3 = 12$ possibilidades de refeições sem sobremesa e para o segundo caso há $4\ x\ 3\ x\ 2 = 24$ possibilidades de refeições com sobremesa. Logo, somando as possibilidades dos dois casos distintos há o total de 36 possibilidades de refeições.

E_3*: Busca de Regularidades*

Relacionada ao teorema em ação $T_{1.3}$ (*se o problema é generalizável, então o fazer uma listagem sistemática é possível encontrar tal generalidade*), inicialmente fixa-se como prato principal o bife com fritas e realiza-se a listagem sistemática das 9 refeições que são possíveis formar com esse prato principal (com sobremesa e sem sobremesa). Em um segundo momento, percebe-se que há 4 opções para o prato principal, e sabendo que para cada prato há 9 opções de refeições, obtém-se $4\ x\ 9 = 36$ refeições distintas.

E_4 *: Árvore de Possibilidades*

Semelhante ao problema dos anagramas da sigla UFMS, ao realizar a estratégia da árvore de possibilidades nesse problema, constrói-se quatro árvores de possibilidades distintas, de modo que, cada uma inicia-se com um prato principal distinto, resultando em 36 possibilidades de refeições distintas.

Durante a resolução do problema, uma possível dificuldade é o fato de considerar apenas duas possibilidades no momento de escolher a sobremesa (salada de frutas ou pudim), sem perceber que a mesma é opcional. Caso isso ocorra, ao realizar algumas das estratégias anteriores, como o PFC, obtém-se $4\ x\ 3\ x\ 2 =\ 24$ refeições distintas.

5.6.2 Análise *a priori* do segundo problema

O segundo problema da sexta sessão foi:

Uma faculdade realiza seu vestibular em dois dias de provas, com quatro disciplinas em cada dia. Uma possibilidade de formação da prova seria: Matemática, Português, Biologia e Inglês, no primeiro dia, e Geografia, História, Física e Química, no segundo dia. Quantas possibilidades de provas existem com quatro disciplinas em cada dia, dentre as oito possíveis?

Para esse problema de combinação elencamos uma quantidade grande de elementos, diferentemente dos problemas de combinação das sessões anteriores que continham, no máximo, 20 possibilidades como resposta. Realizamos essa escolha pois desejávamos analisar as estratégias que os alunos mobilizaram nesse problema em que a ordem não é relevante, tendo em vista que, nesse caso, a listagem de possibilidades é inviável.

Possíveis estratégias:

E_1*: Listagem de Possibilidades*

Inicialmente, percebe-se que ao selecionar as disciplinas que irão compor as provas no primeiro dia, consequentemente as provas do segundo dia já estarão formadas. Assim, inicia-se a listagem das provas do primeiro dia, por exemplo: 1. Matemática – Português – Biologia – Inglês; 2. Matemática – Português – Biologia – Geografia; ... ; 70. Geografia – História – Física – Química, obtendo 70 possibilidades.

E_2*: Utilização da Fórmula*

Conforme apresenta Lima *et. al.* (2006), uma das etapas para resolver problemas de combinatória é colocar-se no papel de quem vai realizar a ação solicitada. Dessa maneira, por se tratar de uma prova de vestibular, percebe-se que a ordem das disciplinas não é relevante no momento de resolvê-la, característica relacionada ao teorema em ação $T_{4.2}$ (*a ordem dos elementos não interfere na quantidade de possibilidades*). Desse modo, como das 8 disciplinas disponíveis deve-se selecionar 4 para o primeiro dia, e sabendo que a ordem das mesmas não é relevante, classifica-se o mesmo como uma combinação e aplica-se a fórmula correspondente.

$$C_4^8 = \frac{8!}{4!\,(8-4)!} \Leftrightarrow C_4^8 = \frac{8!}{4!\,4!} \Leftrightarrow C_4^8 = \frac{40320}{576} \Leftrightarrow C_4^8 = 70$$

Portanto, como as disciplinas do segundo dia de prova ficam automaticamente escolhidas quando selecionadas as disciplinas do primeiro dia, encontra-se o total de 70 possibilidades de provas distintas.

E_3*: Princípio Fundamental da Contagem*

Ao utilizar PFC na formação de provas do primeiro dia, percebe-se que há 8 opções de escolha para a primeira disciplina, para a segunda disciplina há 7 opções, para a terceira há 6 opções e para a quarta disciplina há 5 opções, resultando em $8\,x\,7\,x\,6\,x\,5 = 1680$ possibilidades. Posteriormente, verifica-se que é necessário desconsiderar as repetições das provas, tendo em vista que a ordem das disciplinas não é relevante, e, escolhidos 4 disciplinas quaisquer, é possível organizá-las de $4\,x\,3\,x\,2\,x\,1 = 24$ maneiras distintas. Assim, retira-se as repetições de provas, encontrando $1680\ \div 24 = 70$ provas distintas.

Caso utilize o teorema em ação $T_{4.1}$ (*a ordem dos elementos sempre resulta em novas possibilidades*) durante a resolução do problema, é possível que classifique-o como um arranjo simples e utilize a fórmula correspondente, encontrando 1680 possibilidades. Além disso, se realizar o PFC, não se retira as repetições dos elementos, resultando também nas 1680 possibilidades de provas distintas.

5.6.3 Experimentação

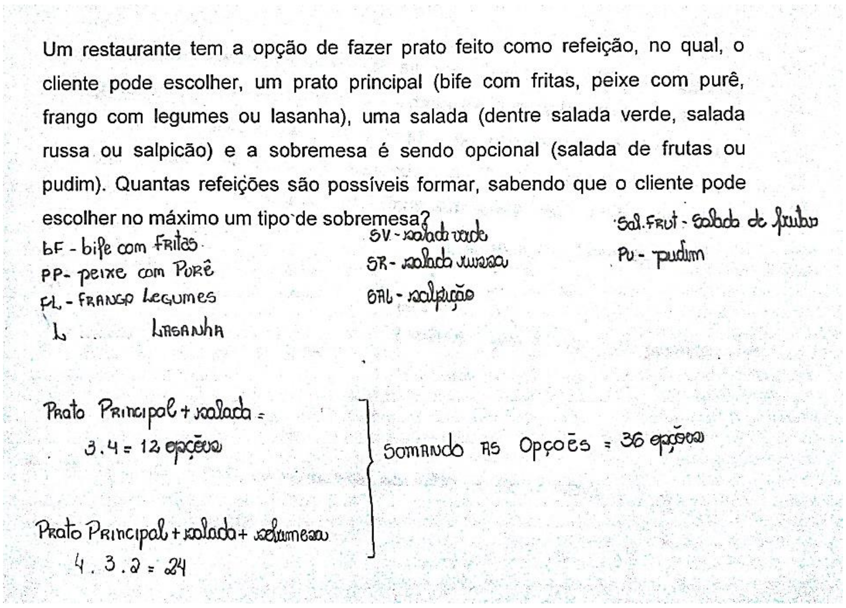
A sessão foi realizada no 16 de maio de 2014 e contou com a presença de 25 alunos, ocorrendo novamente na sala de aula do curso de Matemática-Licenciatura. Devido as faltas de alguns alunos, o Aluno a3 realizou as atividades com as alunas do Grupo 2 e a Aluna a8 em conjunto com o Grupo 1.

5.6.4 Análise *a posteriori*

Semelhante aos encontros anteriores, apresentamos aos alunos o primeiro problema da sessão: *um restaurante tem a opção de fazer prato feito como refeição, no qual, o cliente pode escolher um prato principal (bife com fritas, peixe com purê, frango com legumes ou lasanha), uma salada (dentre salada verde, salada russa ou salpicão) e a sobremesa é opcional (salada de frutas ou pudim). Quantas refeições são possíveis formar sabendo que o cliente pode escolher no máximo um tipo de sobremesa?* Ao analisar as produções dos alunos, verificamos que o Princípio Fundamental da Contagem foi a estratégia mais mobilizada, sendo realizada pelos Grupos 1, 3, 4, 6, 7 e 9.

Como previmos na análise *a priori*, os alunos do Grupo 1 ao realizarem a estratégia E_2, o PFC, separaram o problema em dois casos distintos: as refeições com sobremesa e as sem sobremesas.

Figura 35 - Protocolo da Aluna c1, Sessão 6.


Um restaurante tem a opção de fazer prato feito como refeição, no qual, o cliente pode escolher, um prato principal (bife com fritas, peixe com purê, frango com legumes ou lasanha), uma salada (dentre salada verde, salada russa ou salpicão) e a sobremesa é sendo opcional (salada de frutas ou pudim). Quantas refeições são possíveis formar, sabendo que o cliente pode escolher no máximo um tipo de sobremesa?

bF - bife com Fritas
PP - peixe com Purê
FL - Frango Legumes
L ... Lasanha

SV - salada verde
SR - salada russa
SAL - salpicão

Sal.Frut - Salada de frutas
Pu - pudim

Prato Principal + salada =
3.4 = 12 opções

Prato Principal + salada + sobremesa
4.3.2 = 24

Somando as Opções = 36 opções

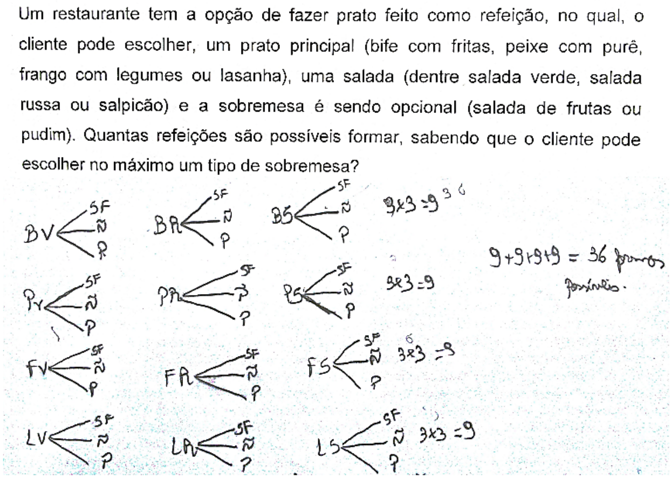
Fonte: dados da pesquisa

Analisando os protocolos e as gravações de áudios dos alunos do Grupo 1, identificamos que os mesmos apresentaram o teorema em ação T_3 (*Princípio Fundamental da Contagem*). Assim, para resolver o problema, consideraram que havia 4 possibilidades para o prato principal, 3 possibilidades para a salada, além de terem 2 possibilidades de escolha da sobremesa, para o caso das refeições que continham a mesma. Ao utilizar o PFC, os alunos encontraram 12 opções de refeições sem sobremesa e 24 opções com sobremesa, e ao somarem esses resultados, obtiveram um total de 36 possibilidades de refeições distintas. Destacamos também os Alunos a4 e c4 que também mobilizaram o PFC para resolver o problema, porém diferentemente dos demais Grupos, não recorreram ao Princípio Aditivo durante as resoluções. Desse modo, para atender as condições do problema em relação à sobremesa, consideraram que o cliente teria 3 opções de escolha da mesma (pudim, salada de frutas ou não comer a sobremesa), e ao aplicar o PFC encontraram $4\ x\ 3\ x\ 3 = 36$ refeições distintas.

Evidenciamos na quarta, quinta e sexta sessões a mobilização predominante da estratégia do Princípio Fundamental da Contagem pelos alunos no momento de resolver as situações-problema. Acreditamos que isso foi possível devido às escolhas que realizamos na elaboração da sequência didática, por exemplo, as variáveis didáticas, tendo em vista que as mesmas são “elementos da situação que, ao serem alterados implicam em mudanças de estratégias de resolução por parte dos alunos.” (BITTAR, no prelo, p. 4). Desse modo, iniciamos a sequência didática com situações-problema que tinham uma quantidade pequena de elementos, para que os alunos pudessem mobilizar diversas estratégias, desde as mais empíricas como a listagem de possibilidades, quanto as que requerem certa generalização como o Princípio Fundamental da Contagem. Durante os encontros os alunos puderam vivenciaram momentos *adidáticos* que, de acordo com Brousseau (1996, 2008), contribuem para que os mesmos construam o próprio conhecimento, além de momentos de institucionalização nos quais os alunos, em conjunto conosco, apresentavam e discutiam as estratégias que realizaram com os demais grupos, as quais eram (in)validadas por nós, pesquisador e colaboradora. Assim, a partir da quarta sessão, que apresentamos problemas com uma quantidade grande de elementos, os alunos passaram a recorrer às estratégias genéricas, em detrimento da listagem de possibilidades, como ocorreu com os alunos do Grupo 9. Nesse problema em específico, observamos que apenas os Alunos a5 e d5 realizaram a estratégia da listagem de possibilidades, de maneira correta, apresentando vestígios dos teoremas em ação $T_{1.1}$ (*dado um problema de contagem, sempre é possível listar todas as possibilidades*) e $T_{1.2}$ (*existe uma maneira sistemática de listar que garante esgotar todos os casos possíveis*).

Em relação à estratégia da árvore de possibilidades, verificamos que apenas os Alunos b1, c5, a6 e c9 mobilizaram o diagrama de árvores em algum momento da resolução, por exemplo:

Figura 36 - Protocolo do Aluno c5, Sessão 6.


Um restaurante tem a opção de fazer prato feito como refeição, no qual, o cliente pode escolher, um prato principal (bife com fritas, peixe com purê, frango com legumes ou lasanha), uma salada (dentre salada verde, salada russa ou salpicão) e a sobremesa é sendo opcional (salada de frutas ou pudim). Quantas refeições são possíveis formar, sabendo que o cliente pode escolher no máximo um tipo de sobremesa?

Fonte: dados da pesquisa

Nesse problema de produto cartesiano, o Aluno c5 considerou as possíveis combinações dos pratos principais e das saladas, colocando-as no primeiro elemento do diagrama, como BV (bife com fritas e salada verde), BR (bife com fritas e salada russa), BS (bife com fritas e salpicão), sucessivamente. Posteriormente, percebeu que o cliente tinha 3 opções no momento de escolher a sobremesa, pois a mesma é opcional, e por fim, realizou 12 árvores de possibilidades, encontrando as 36 refeições possíveis de serem formadas. Esse resultado de poucos alunos mobilizarem o diagrama de árvores está consonante ao encontrado em pesquisas do tema, como a de Esteves (2001) que destaca o fato de os alunos pouco mobilizarem essa estratégia na resolução de problemas de combinatória. Além disso, Pessoa (2009, p. 199) acredita que a árvore de possibilidades "aparece pouco, mas sua maior percentagem ocorre nos problemas de produto cartesiano, provavelmente porque quando esses problemas são trabalhados na escola, uma das estratégias ensinadas para a sua solução é a árvore de possibilidades.".

As alunas do Grupo 2 e o Aluno A3, que se sentaram juntos nessa sessão, resolveram o problema sem perceber que a sobremesa era opcional no momento da formação das refeições. Dessa maneira, o Aluno a3 realizou a estratégia do Princípio Fundamental da Contagem, mobilizando o teorema em ação T_3. Já as alunas do Grupo 2 apresentaram vestígios do teorema em ação $T_{1.3}$ (*se um problema é generalizável, então ao fazer uma listagem sistemática é possível encontrar tal generalidade*) ao realizarem uma listagem e generalizarem o problema, como explica a Aluna a2 no seguinte diálogo:

> Aluna a2: Deram quantas? Deram 24 (possibilidades)?
> Aluno a3: Eu tenho 24 opções, né?
> Aluna a2: É! Olha só, eu fiz assim, peguei só o bife: bife, verde (salada), frutas (salada); bife, verde (salada), pudim; bife, russa (salada russa), frutas (salada); bife, russa (salada), pudim; bife, salpicão, frutas (salada); bife, salpicão, pudim. Tenho 6 (possibilidades) e como eu tenho 4 jeitos (opções de pratos principais).

Apesar de esse problema ser generalizável, pelo fato de não perceber que a sobremesa era opcional, a Aluna a2 realizou tal generalização de maneira incorreta, pois encontrou 6 possibilidades para cada prato principal, ao invés de 9 possibilidades. Dessa maneira, ao multiplicar a quantidade de possibilidades de pratos principais pelas possibilidades de refeições formadas com cada, encontrou 24 possibilidades, resultado semelhante ao do Aluno a3 que usou o PFC. Nessa resolução, presenciamos novamente a estabilidade do teorema em ação $T_{1.3}$ na Aluna a2, que conforme apontamos na análise da sessão anterior, diante de uma problema com uma quantidade pequena de elementos busca realizar um generalização a partir da listagem de possibilidades.

No momento de discussão da situação-problema[34], em que lemos o mesmo e os alunos discutiram algumas estratégias, evidenciamos que as alunas do Grupo 2 e o Aluno a3 perceberam que suas resoluções estavam erradas.

> Pesquisador: O que o problema pediu? Montar o prato feito, certo? Quantas possibilidades de prato principal?
> Alunos da turma: Quatro
> Pesquisador: E de saladas?
> Alunos da turma: Três
> Pesquisador: E de sobremesa?
> Aluno b4: Três.
> Aluno a3: Duas.
> Aluno c5: Duas, opcionais.

Tais questionamentos causaram desequilíbrios nas alunas do Grupo 2 e o Aluno a3, de modo que os mesmos voltaram a refletir sobre suas resoluções, pautadas nas novas informações propiciadas pelo meio *adidático*, o que possibilitou que percebessem que haviam errado, como verificamos a seguir:

> Aluno a3: Posso escolher então a sobremesa? Mas qualquer uma (das etapas de formação da refeição) eu posso escolher.
> Aluno c2: A sobremesa é opcional.
> [...]
> Aluno a3: Então está errado, são 3 opções de sobremesas.

Brousseau (1996, 2008) ao modelar a Teoria das Situações Didáticas destacou o meio *adidático* como um elemento fundamental da teoria, tendo em vista que esse meio é autônomo e antagonista, de modo que provoque desequilíbrios cognitivos no aluno. Nessa situação vivenciada pelas alunas do Grupo 2 e pelo Aluno a3, destacamos a influência dos elementos constituintes do meio *adidático*, dentre eles os conhecimentos dos demais alunos e do pesquisador pois, a partir dos diálogos nos quais os demais alunos expuseram suas estratégias e interpretações do problema, os Alunos a2, c2 e a3 puderam refletir sobre suas estratégias e verificarem que haviam considerado apenas 2 possibilidades de escolha da sobremesa, o que ocasionou o erro nas suas resoluções.

Após os alunos terem resolvido o primeiro problema da sessão, demos continuidade ao encontro apresentando a segunda situação-problema: *Uma faculdade realiza seu vestibular em dois dias de provas, com quatro disciplinas em cada dia. Uma possibilidade de formação da prova seria: Matemática, Português, Biologia e Inglês, no primeiro dia, e Geografia, História,*

---

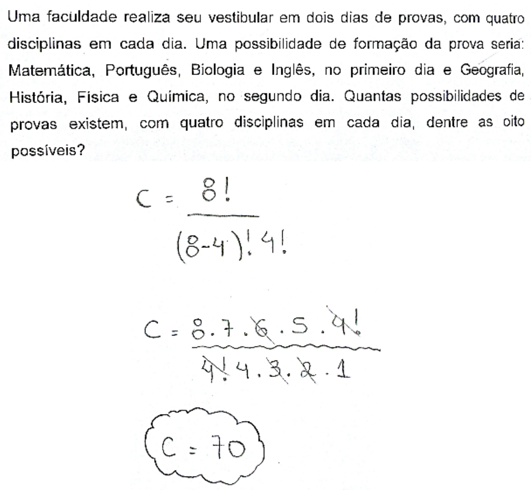
[34]Essas discussões ocorreram no final da sessão, após os alunos terem resolvido a segunda situação-problema. Porém, apresentamo-las nesse momento da análise para melhor compreensão do leitor.

Física e Química, no segundo dia. Quantas possibilidades de provas existem com quatro disciplinas em cada dia, dentre as oito possíveis?

Evidenciamos que durante as resoluções do segundo problema, os alunos mobilizaram as estratégias E_2 e E_3, utilização de fórmulas e Princípio Fundamental da Contagem, respectivamente. Novamente verificamos que para esse problema com uma quantidade grande de elementos, a estratégia da listagem de possibilidades foi preterida por outras mais genéricas, como mencionamos. Porém, apesar de mobilizarem essas estratégias, esse problema gerou uma quantidade alta de erros nas resoluções dos alunos, tendo em vista que somente os Grupos 5 e 6, e os Alunos b4 e a7 obtiveram corretamente 70 possibilidades de provas distintas.

Em relação a estratégia da utilização de fórmulas, os alunos do Grupo 5 e os Alunos b4 e a7 apresentaram vestígios do teorema em ação T_2 (*se um problema é de combinatória, então existe uma fórmula que resolve e basta utilizá-la para encontrar a solução*) ao mobilizarem a fórmula de combinação, como na resolução do Aluno b4:

Figura 37 - Protocolo do Aluno b4, Sessão 6.


Uma faculdade realiza seu vestibular em dois dias de provas, com quatro disciplinas em cada dia. Uma possibilidade de formação da prova seria: Matemática, Português, Biologia e Inglês, no primeiro dia e Geografia, História, Física e Química, no segundo dia. Quantas possibilidades de provas existem, com quatro disciplinas em cada dia, dentre as oito possíveis?

$$C = \frac{8!}{(8-4)!\,4!}$$

$$C = \frac{8.7.\cancel{6}.5.\cancel{4!}}{\cancel{4!}\,4.3.\cancel{2}.1}$$

$$C = 70$$

Fonte: dados da pesquisa

Observamos que esses alunos consideraram corretamente a irrelevância da ordem das disciplinas na formação da prova de cada dia, apresentando indícios do teorema em ação $T_{4.2}$ (*a ordem dos elementos não interfere na quantidade de possibilidades*), classificando corretamente o problema como uma combinação e utilizando a fórmula correspondente. Já as alunas do Grupo 2 e o Aluno a1, também apresentaram vestígios do teorema em ação T_2, porém ao classificarem o problema como um arranjo simples, mobilizaram a fórmula que estava fora de seu domínio de validade, ocasionando um erro na resolução.

Durante a resolução da situação-problema, os alunos do Grupo 6 mobilizaram o teorema em ação T_3 (*Princípio Fundamental da Contagem*), como vemos no protocolo da Aluna b6:

Figura 38 - Protocolo da Aluna b6, Sessão 6.

Uma faculdade realiza seu vestibular em dois dias de provas, com quatro disciplinas em cada dia. Uma possibilidade de formação da prova seria: Matemática, Português, Biologia e Inglês, no primeiro dia e Geografia, História, Física e Química, no segundo dia. Quantas possibilidades de provas existem, com quatro disciplinas em cada dia, dentre as oito possíveis?

$$\underbrace{8\ 7\ 6\ 5}_{1^{\circ}\text{ dia}} \cdot \underbrace{4\ 3\ 2\ 1}_{2^{\circ}\text{ dia}} = \frac{1680}{24} \cdot \frac{24}{24} = 70 \cdot 1 = 70 \text{ possibilidades}$$

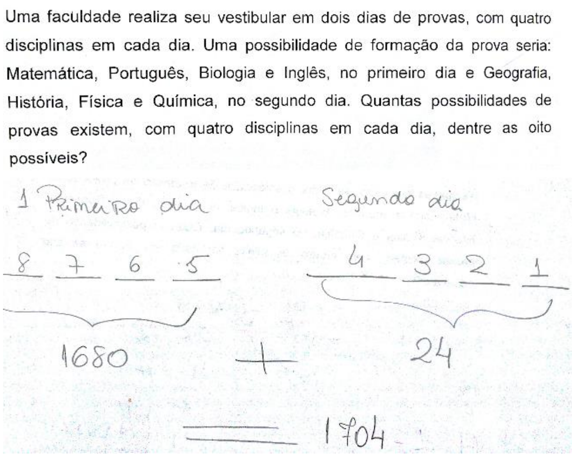
Fonte: dados da pesquisa

Inicialmente, os alunos desse grupo consideraram que para a formação da prova do primeiro dia haveria 8 opções para a primeira disciplina, 7 opções para a segunda disciplina, 6 opções para a terceira disciplina e 5 opções para a quarta disciplina. Após escolhidas as disciplinas que iriam compor a prova do primeiro dia, ao formarem a prova para o segundo dia os alunos perceberam que restariam 4 opções para a primeira disciplina, 3 opções para a segunda disciplina, 2 opções para a terceira disciplina e apenas 1 opção para a quarta disciplina, aplicando então o Princípio Fundamental da Contagem. Em um segundo momento, verificamos que os alunos apresentaram vestígios do teorema em ação $T_{4.2}$ (*a ordem dos elementos não interfere na quantidade de possibilidades*), no momento em que consideraram que a ordem não é relevante na formação das provas de cada dia e dividiram os valores encontrados por 24 (quantidade de repetições da prova de cada dia), encontrando um total de 70 possibilidades de provas distintas.

Destacamos que os alunos do Grupo 6 foram os únicos que realizaram corretamente a estratégia do Princípio Fundamental da Contagem, e como nos problemas anteriores da sequência didática, demonstraram novamente a estabilidade dos teoremas em ação T_3 (*Princípio Fundamental da Contagem*), $T_{4.1}$ (*a ordem dos elementos sempre resulta em novas possibilidades*) e $T_{4.2}$ (*a ordem dos elementos não interfere na quantidade de possibilidades*), na perspectiva apresentada por Vergnaud (1996, 2009b). Realizamos tal afirmação tendo em vista que diante das diversas situações de combinatória que propusemos, os alunos do Grupo 6 sempre levavam em consideração a relevância ou irrelevância da ordem dos elementos na formação dos conjuntos e ao realizarem de maneira recorrente a estratégia do PFC para resolver os problemas, desconsideram as repetições dos elementos quando necessário.

Os alunos do Grupo 4 (exceto o Aluno b4) e os alunos b1, c1 e a3 também realizaram a estratégia do Princípio Fundamental da Contagem durante a resolução do problema, por exemplo:

Figura 39 - Protocolo da Aluna b1, Sessão 6.


Uma faculdade realiza seu vestibular em dois dias de provas, com quatro disciplinas em cada dia. Uma possibilidade de formação da prova seria: Matemática, Português, Biologia e Inglês, no primeiro dia e Geografia, História, Física e Química, no segundo dia. Quantas possibilidades de provas existem, com quatro disciplinas em cada dia, dentre as oito possíveis?

1 Primeiro dia   Segundo dia

8 7 6 5   4 3 2 1

1680 + 24

= 1704

Fonte: dados da pesquisa

Esses alunos realizaram um processo semelhante aos alunos do Grupo 6, no momento de identificar a quantidade de possibilidades de cada etapa do problema para a utilização do PFC. Porém, verificamos nos protocolos que apresentaram vestígios do teorema em ação $T_{4.1}$ (*a ordem dos elementos sempre resulta em novas possibilidades*), mesmo que de modo implícito, pois não desconsideraram a repetição das provas repetidas, já que a ordem dos elementos era irrelevante nesse problema. Assim, ao utilizar o PFC, as alunas obtiveram 1680 possibilidades de provas para o primeiro dia e 24 possibilidades para o segundo dia, e ao aplicar o Princípio Aditivo, encontraram 1704 provas distintas para os dois dias.

As resoluções incorretas apresentadas pelos alunos nesse problema, tanto pela utilização da fórmula de arranjo, quanto pelo PFC, vão ao encontro de resultados que encontramos no decorrer do estudo do quadro teórico-didático acerca da combinatória. Pesquisas como a de Navarro – Pelayo, Batanero e Godino (1996) verificaram que um dos erros comuns dos alunos ao resolverem problemas de combinatória ocorrem quando os mesmos confundem os problemas que a ordem interfere no resultado, com os problemas que a ordem não interfere, como os problemas de combinação e arranjo. Essa dificuldade pode ser proveniente do fato de que os problemas de combinação

> Além de serem trabalhados explicitamente apenas no Ensino Médio, apresentam um invariante que possivelmente dificulta a formação das combinações, pois a mudança na ordem dos elementos não gera novas possibilidades e os alunos, em grande parte das vezes, não se dão conta dessa característica e acabam repetindo possibilidades e, assim, extrapolando-as. (PESSOA, 2009, p. 160).

Assim, verificamos que esses alunos apresentaram, mesmo de maneira implícita durante suas ações, vestígios do teorema em ação $T_{4.1}$ (*a ordem dos elementos sempre resulta em novas possibilidades*) fora de seu domínio de validade, sendo necessário que os mesmos vivenciem mais situações que possam desestabilizá-los, para que percebam em quais situações que esse teorema em ação é válido.

5.6.5 Considerações da sexta sessão

Evidenciamos novamente nesse encontro que com o decorrer da sequência didática a estratégia do Princípio Fundamental da Contagem foi a mais utilizada na resolução da situação-problema. No problema da formação das refeições, verificamos que apenas os Alunos a5 e d5 realizaram a estratégia da listagem de possibilidades para a resolução do problema, apresentando vestígios dos teoremas em ação $T_{1.1}$ (*dado um problema de contagem, sempre é possível listar todas as possibilidades*) e $T_{1.2}$ (*existe uma maneira sistemática de listar que garante esgotar todos os casos possíveis*). Além disso, também destacamos a utilização do diagrama de árvores durante a resolução de alguns alunos (Alunos b1, c5, a6 e c9), que construíram corretamente os diagramas, seja para obter a resposta do problema, ou para verificar a validade do resultado encontrado por outra estratégia.

No segundo problema da sexta sessão, observamos a dificuldade que diversos alunos apresentaram na resolução desse problema de combinação, que tinha uma quantidade alta de elementos como primeira variável didática. Devido a escolha dessa primeira variável didática, verificamos que os alunos recorreram a estratégias eficientes como o Princípio Fundamental Contagem e a utilização de fórmulas. Porém, os mesmos apresentaram dificuldades em relação a irrelevância da ordem dos elementos no momento de formação dos subconjuntos, no momento em que demonstraram vestígios do teorema em ação$T_{4.1}$ (*a ordem dos elementos sempre resulta em novas possibilidades),* que estava fora de seu domínio de validade.

5.7 Sessão 7

A sétima sessão foi composta por duas situações-problema, sendo a primeira de combinação e a segunda de permutação.

5.7.1 Análise *a priori* do primeiro problema

O primeiro problema é o seguinte:

O conjunto {1, 2, 3, 4, 5} possui quantos subconjuntos?

Para a resolução desse problema de combinação, evidenciamos a necessidade de mobilizar o teorema em ação $T_{4.2}$ (*a ordem dos elementos não interfere na quantidade de possibilidades*), em detrimento ao teorema em ação $T_{4.1}$ (*a ordem dos elementos sempre resulta em novas possibilidades),* pois durante a formação dos subconjuntos a ordem dos elementos era irrelevante. Adotamos como variáveis didáticas uma grande quantidade de elementos, de modo que a listagem fosse realizada sob uma organização sistemática para o controle de todas as possibilidades. Além disso, ao mobilizar as estratégias da utilização de fórmulas e/ou do Princípio Fundamental da Contagem, esse problema tinha como característica a utilização do Princípio Aditivo durante a realização, pois deveria ser considerado os subconjuntos com diferentes quantidades de elementos, por exemplo: subconjunto vazio, subconjunto unitário, subconjunto com dois elementos, subconjunto com três elementos, subconjunto com quatro elementos e subconjunto com cinco elementos.

Possíveis estratégias:

E_1*: Listagem de Possibilidades*

Cientes da possibilidade de formar subconjuntos com quantidades distintas de elementos, inicia-se a listagem de possibilidades da seguinte maneira: 1- $\{\emptyset\}$, 2- {1}, 3- {2}, 4- {3}, 5- {4}, 6- {5}, 7- {1,2}, 8- {1,3}, ..., 29- {1,2,4,5}, 30- {1,3,4,5}, 31- {2,3,4,5}, 32- {1,2,3,4,5}, listando as 32 possibilidades distintas.

E_2*: Utilização de Fórmula*

Inicialmente, mobiliza-se o teorema em ação $T_{4.2}$ (*a ordem dos elementos não interfere na quantidade de possibilidades*) e percebe-se que a ordem dos elementos é irrelevante na formação dos subconjuntos, classificando o problema como uma combinação. Em um segundo momento, considera-se a possibilidade da formação de subconjunto com diferentes quantidades de elementos e utiliza-se a fórmula de combinação para cada caso, por exemplo:

$$C_0^5 + C_1^5 + C_2^5 + C_3^5 + C_4^5 + C_5^5 \Rightarrow 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32$$

E_3*: Princípio Fundamental da Contagem*

Ao mobilizar o teorema em ação T_3 (*Princípio Fundamental da Contagem*), é possível realizar essa estratégia de duas maneiras. A primeira maneira é utilizar o PFC para encontrar as possibilidades de subconjuntos com um elemento, dois elementos, três elementos, quatro elementos e cinco elementos, além do subconjunto vazio. Por exemplo, para os subconjuntos com dois elementos, percebe-se que há 5 possibilidades para o primeiro elemento e 4 possibilidades para o segundo, encontrando $5\ x\ 4 = 20$ possibilidades. Posteriormente, relacionado ao teorema em ação $T_{4.2}$ (*a ordem dos elementos não interfere na quantidade de possibilidades*), desconsidera-se as repetições dos subconjuntos, nesse caso dividindo por 2, resultando em 10 possibilidades de subconjuntos com dois elementos. De maneira análoga, realiza-se essa estratégia para encontrar a quantidade de subconjuntos que é possível formar com as demais quantidades de elementos, e ao utilizar o Princípio Aditivo, soma-se todas as quantidades obtendo 32 possibilidades.

A segunda maneira de resolver o problema realizando a estratégia do PFC é considerar as possibilidades de cada elemento no momento da formação dos subconjuntos. Percebe-se que cada elemento tem duas possibilidades: de estar presente no subconjunto ou estar ausente no subconjunto, sendo que, quando todos os elementos estão ausentes forma-se o subconjunto vazio e quando todos estão presentes forma-se o próprio conjunto. Assim, para o número 1 há 2 possibilidades, para o número 2 há 2 possibilidades, e assim sucessivamente. Portanto ao aplicar o PFC, encontra-se $2\ x\ 2\ x\ 2\ x\ 2\ x\ 2 = 32$ possibilidades de subconjuntos distintos.

E_4*: Relação com a Teoria dos Conjuntos*

É possível relacionar esse problema com a Teoria dos Conjuntos, sendo que para encontrar a quantidade de subconjuntos existentes a partir de um conjunto com n elementos, basta mobilizar a fórmula, do seguinte modo:

$$P_{(n)} = 2^n \Rightarrow P_{(5)} = 2^5 \Rightarrow P_{(5)} = 32$$

Porém, é possível que durante as resoluções desse problema, que se mobilize o teorema em ação $T_{4.1}$ (*a ordem dos elementos sempre resulta em novas possibilidades)* e classifique-o como um arranjo, para posteriormente utilizar a fórmula correspondente. Também é possível que ao realizar a estratégia do PFC, não desconsidere as repetições dos subconjuntos, não realizando a divisão dos mesmos.

5.7.2 Análise *a priori* do segundo problema

Apresentamos o segundo problema dessa sessão:

Cinco casais de amigos vão ao cinema e desejam sentar-se em uma fileira de 10 lugares, de maneira que os integrantes de cada casal permaneçam sempre lado a lado. De quantas maneiras distintas esses casais podem acomodar-se no cinema?[35]

Diferentemente do problema de permutação dos anagramas da sigla UFMS que continha uma quantidade pequena de elementos, para esse problema de permutação mantivemos a escolha das últimas sessões, nas quais adotamos uma grande quantidade de elementos, de maneira que a estratégia da listagem fosse inviável para resolvê-lo. Além disso, objetivávamos analisar como os alunos resolviam esse problema de permutação que tinha como característica a necessidade considerar de duas etapas: a primeira era que os pares de cada casal deveriam estar juntos e a segunda, o modo que cada casal poderia se sentar. Porém deixamos claro, de antemão, a dificuldade que tivemos em observar isso, devido a maneira como enunciamos o problema, pois o mesmo solicitava as diferentes possibilidades que os casais poderiam se sentar, e não como as dez pessoas poderiam se sentar, possibilitando interpretar apenas a primeira parte do problema, já que mesmo se trocar as duas pessoas do casal de lugar, continua se tratando do mesmo casal.

Possíveis estratégias:

E_1*: Listagem de Possibilidades*

Para a primeira etapa do problema, nomeia-se os cinco casais, por exemplo, A, B, C, D e E, para então iniciar o processo de listagem. 1. A-B-C-D-E; 2. A-B-C-E-D; 2. A-B-D-C-E; ...; 119. E-D-C-A-B; 120. E-D-C-B-A. Posteriormente, considera-se na listagem como cada pessoa do casal pode se sentar na fila, por exemplo: Homem-Mulher do casal A ou Mulher-Homem do casal A, Homem-Mulher do casal B ou Mulher-Homem do casal B, e assim

[35] Fonte (adaptado): Souza, J. (2010)

sucessivamente. Desse modo, para cada possibilidade encontrada no primeiro processo de listagem, lista-se as maneiras que os casais podem ser organizar, obtendo 3840 possibilidades.

E_2*: Utilização de Fórmula*

Inicialmente, percebe-se que nesse problema são utilizados todos os elementos e ao mobilizar o teorema em ação $T_{4.1}$ (*a ordem dos elementos sempre resulta em novas possibilidades)*, verifica-se que a ordem dos mesmos é relevante durante sua organização, classificando o problema como uma permutação (PESSOA; BORBA, 2010). Assim, mobiliza-se a fórmula correspondente da seguinte maneira:

$$P! = 5! \Leftrightarrow P! = 5\ x\ 4\ x\ 3\ x\ 2\ x\ 1 \Leftrightarrow P! = 120$$

Posteriormente, definidos os locais onde cada casal irá se sentar, constata-se que cada casal pode se organizar de duas maneiras: Homem-Mulher do casal A ou Mulher-Homem do casal A, Homem-Mulher do casal B ou Mulher-Homem do casal B, e assim sucessivamente, obtendo $2\ x\ 2\ x\ 2\ x\ 2\ x\ 2 = 32$ maneiras distintas. Portanto, é possível organizar essas 10 pessoas de $120\ x\ 32 = 3840$ maneiras distintas[36].

E_3*: Princípio Fundamental da Contagem*

Nessa estratégia, verifica-se que para o primeiro casal há 5 opções de lugares para se sentar, para o segundo casal há 4 opções, para o terceiro casal há 3 opções, para o quarto casal há 2 opções e para o quinto casal há apenas 1 opção de lugar, obtendo $5\ x\ 4\ x\ 3\ x\ 2\ x\ 1 = 120$ maneiras distintas dos cinco casais se sentarem. Em seguida, assim como apresentamos na estratégia anterior, percebe-se que cada casal pode se sentar de duas maneiras distintas, de modo que pode-se organizar os integrantes dos casais de $2\ x\ 2\ x\ 2\ x\ 2\ x\ 2 = 32$ maneiras distintas. Por fim, ao utilizar o PFC nessas duas etapas distintas, obtém-se $120\ x\ 32 = 3840$ maneiras distintas.

Outra possibilidade de resolver esse problema utilizando o PFC é considerar diretamente as maneiras de se organizar as 10 pessoas nos lugares, e não os casais, como fizemos anteriormente. Assim, para o primeiro assento da fila há 10 opções, sendo que pode se sentar

[36]Apesar de enunciarmos essa estratégia como utilização de fórmulas, durante a realização da mesma faz-se necessário recorrer ao Princípio Fundamental da Contagem, como na etapa de encontrar as possibilidades que os integrantes de cada casal podem se sentar. Porém, por essa estratégia ter classificado o problema como uma permutação e recorrido a uma fórmula combinatória, decidimos enquadrá-la como a estratégia E_2: *Utilização de Fórmulas*.

qualquer das 10 pessoas. Para o assento do lado há apenas 1 possibilidade, pois deve ser justamente o par da primeira pessoa. No terceiro assento há 8 possibilidades para se sentar e no quarto assento há apenas 1 possibilidade, pois deve ser o acompanhante da pessoa escolhida anteriormente, e assim sucessivamente. Desse modo, ao utilizar o PFC, encontra-se $10\ x\ 1\ x\ 8\ x\ 1\ x\ 6\ x\ 1\ x\ 4\ x\ 1\ x\ 2\ x\ 1 = 3840$ possibilidades distintas de organizar as 10 pessoas de modo que os casais fiquem sempre juntos.

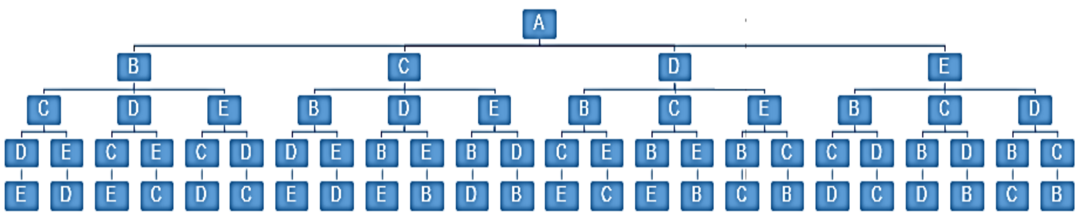
E_4 *: Busca de Regularidades*

Ao mobilizar o teorema em ação $T_{1.3}$ (*se o problema é generalizável, então ao fazer uma listagem sistemática é possível encontrar tal generalidade),* inicia-se a listagem, de maneira organizada, das possíveis maneiras que os casais podem se sentar na fila do cinema, percebendo que ao fixar o casal A nos primeiros dois lugares há 24 possibilidades de organizar os demais casais. Desse modo, como há 5 casais diferentes que podem ser colocados nos primeiros lugares, tem-se $5\ x\ 24 = 120$ possibilidades de organizar os 5 casais nos assentes. Como nas estratégias anteriores, ao considerar as possibilidades de trocas de lugares dos integrantes de cada casal entre si (32 maneiras distintas), encontra-se $120\ x\ 32 = 3840$ maneiras distintas de organizar as 10 pessoas nos assentos do cinema.

E_5 *: Árvore de Possibilidades*

Apesar de ser pouco mobilizada para a resolução de problemas de combinatória (ESTEVES, 2001; PESSOA, 2009), a árvore de possibilidades é uma estratégia possível de ser mobilizada nesse problema de permutação. Nessa estratégia, fixa o primeiro casal e constrói a árvore de possibilidades dos demais casais, encontrando 24 possibilidades, como a seguir:

Figura 40 - Resolução utilizando a Árvore de Possibilidades



Fonte: dados da pesquisa

De maneira análoga, constrói-se outras quatro árvores de possibilidades, selecionando os outros casais para a primeira posição, obtendo 120 possibilidades de organizar os 5 casais nos assentos, de modo que os mesmos fiquem juntos. Posteriormente, considera-se as diferentes maneiras que os integrantes podem se sentar, 32 maneiras distintas, para então encontrar as $120\ x\ 32\ = 3840$ possibilidades distintas de organizar os 10 amigos, sabendo que os casais estão sentados juntos.

5.7.3 Experimentação

A sétima sessão ocorreu no dia 30 de maio de 2014 e contou com a participação de 20 alunos. Com a falta dos alunos, a Aluna a8 que se sentou com o Grupo 7, porém como nos demais grupos haviam no mínimo dois integrantes presentes, não houve a necessidade de reorganizá-los.

5.7.4 Análise *a posteriori*

Para a resolução do primeiro problema da sétima sessão, "*o conjunto {1, 2, 3, 4, 5} possui quantos subconjuntos? "*, diferentemente das últimas sessões, verificamos que nenhum aluno mobilizou a estratégia do Princípio Fundamental da Contagem, ao optarem pelas estratégias E_1: listagem de possibilidades, E_2: utilização de fórmula e E_4: relação com a Teoria dos Conjuntos.

Ao apresentarmos o primeiro problema, evidenciamos que os alunos, de modo geral, o resolveram rapidamente utilizando a estratégia E_4 (relação com a Teoria dos Conjuntos), mobilizando a fórmula $2^5 = 32$ subconjuntos. Após percebermos que exceto o Grupo 7, todos os grupos mobilizaram essa fórmula, os questionamos a fim de sabermos a justificativa dessa estratégia:

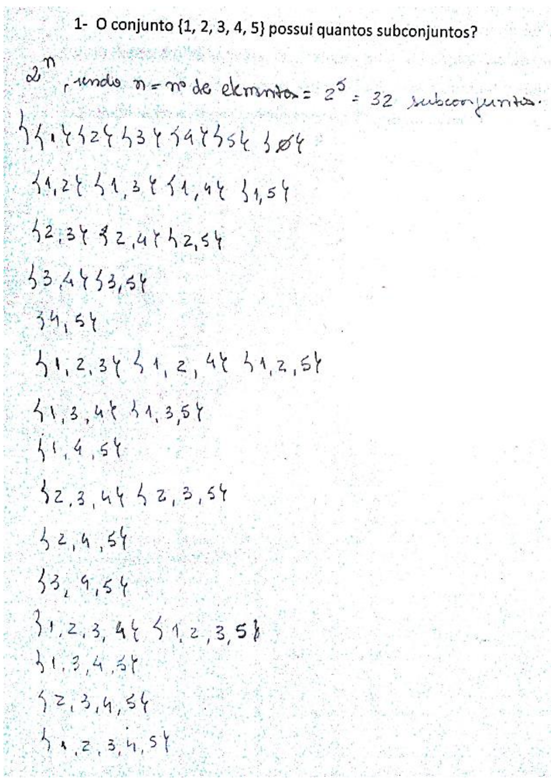
> Pesquisador: Fizeram?
> Aluna a4: Fizemos.
> Pesquisador: Como vocês fizeram?
> Aluna a4: Pela fórmula do Professor A[37].
> Pesquisador: Em um primeiro momento por 2^n.
> Aluno c4: É que o Professor A passou quarta-feira (28 de maio de 2014).
> Pesquisador: Tudo bem.
> Aluno c4: Eu não tenho o que falar.
> [...]
> Pesquisador: Se vocês não soubessem essa regra, como vocês fariam?
> Aluna a4: Eu faria por lista
> Aluno c4: Deixa eu pensar uma outra forma.

[37] Professor da disciplina de Introdução à Lógica, alocada no primeiro semestre do curso de Matemática-Licenciatura

Nesse caso nos deparamos com uma situação na qual os alunos conheciam *a priori* uma estratégia que resolvia corretamente o problema, pois um professor já havia explicitado em uma disciplina do curso de Matemática-Licenciatura. Apesar de os mesmos já terem resolvido o problema por meio da estratégia E_4, influenciados pela aula desse professor, solicitamos que os licenciandos buscassem outras possíveis estratégias que o resolvessem a situação-problema. Assim, evidenciamos que após essa solicitação, os alunos assumiram a responsabilidade de buscar novas estratégias de resolução do problema, como expressado pelos Alunos a4 e c4, caracterizando então a devolução do problema (BROUSSEAU, 2008).

Semelhante aos alunos do Grupo 4, os Grupos 1, 3 e 9, e os Alunos c5 e b6 resolveram o problema utilizando a estratégia da listagem de possibilidades, como na resolução da Aluna a4:

Figura 41 - Protocolo da Aluna a4, Sessão 7.



Fonte: dados da pesquisa

Inferimos que os alunos apresentaram vestígios dos teoremas em ação $T_{1.1}$ (*dado um problema de contagem, sempre é possível listar todas as possibilidades*) e $T_{1.2}$ (*existe uma maneira sistemática de listar que garante esgotar todos os casos possíveis*), pois os mesmos além de recorrerem a listagem de possibilidades para resolver o problema, a realizaram sob uma organização sistemática, como na resolução apresentada anteriormente. Em específico a resolução da Aluna a4, apesar de a mesma ter listado 31 subconjuntos, faltando o subconjunto $\{1, 2, 4, 5\}$, os alunos do Grupo 4 perceberam esse fato, porém não identificaram o conjunto que estava faltando.

Em relação à estratégia E_2 (utilização de fórmula), verificamos que a Aluna a6 e os Grupos 2, 5 e 7 mobilizaram a fórmula de combinação para encontrar a quantidade de subconjuntos que eram possíveis de formar a partir do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. As alunas do Grupo 7, em conjunto com a Aluna a8, não utilizaram a fórmula 2^n relacionada à estratégia E_4 (relação com a Teoria dos Conjuntos), iniciando a busca pela resposta do problema com o seguinte diálogo:

> Aluna d7: Nesse caso a ordem não importa. Vamos supor: tem quatro pessoas, vamos fazer dois grupos (de duas pessoas). Vai contar eu e você, a outra pessoa e a outra pessoa. Vão ser somente dois grupos, porque se for eu e você, e você e eu tanto faz, porque é o mesmo grupo. Então aqui (na situação-problema) é a mesma coisa. Vai ser fatorial né?
> [...]
> Aluna d7: Não, espera... Eu vou fazer daquele jeito aberto (listagem). Porque pode ser subconjunto.
> Aluna a8: E a ordem não importa.
> Aluna d7: Pode ser de 2 em 2, de 3 em 3, de 4 em 4 e de 5 em 5 e de 1 em 1.

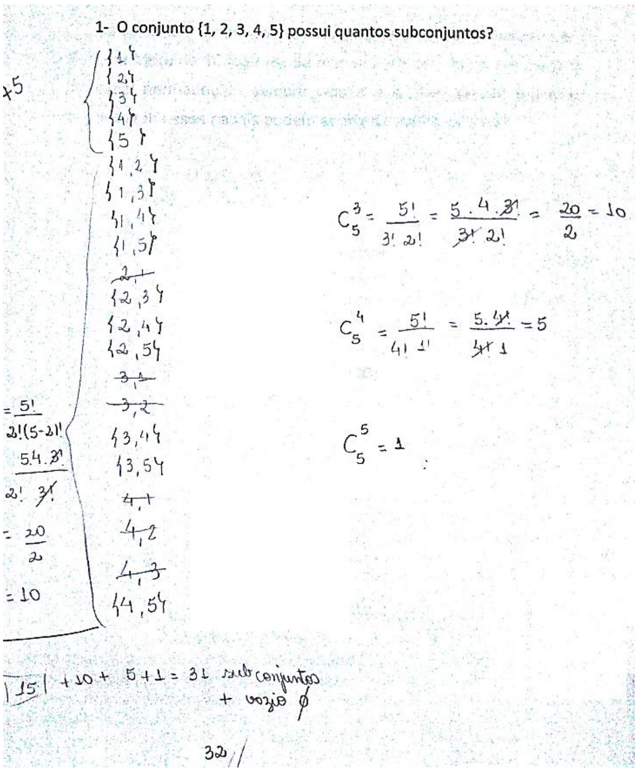
Analisando o excerto anterior, evidenciamos que as alunas do Grupo 7 e a Aluna a8 mobilizaram o teorema em ação $T_{4.2}$ (*a ordem dos elementos não interfere na quantidade de possibilidades*), pois perceberam que por se tratar da formação de subconjuntos a ordem dos elementos não resulta em novos subconjuntos. Além disso, a Aluna d7 destacou a necessidade da utilização do Princípio Aditivo durante a resolução do problema, no momento que relatou que era necessário considerar os subconjuntos com diferentes quantidades de elementos. Assim, após ter ocorrido a devolução do problema, quando as alunas aceitaram a responsabilidade de resolvê-lo, conforme destaca Brousseau (1996) as mesmas começaram a vivenciar uma situação *adidática*, passando inicialmente pelo momento *adidático* de ação, no qual realizaram ações de caráter operacional, como a estratégia da listagem de possibilidades. Posteriormente, ao questionarmos à resolução utilizada, as alunas apresentaram a seguinte estratégia:

> Aluna d7: Quantos (subconjuntos) deram ao total?
> Aluna b7: 15.
> Aluna d7: Mas você fez o subconjunto de 3 em 3, de 4 em 4 e de 5 em 5? Tem esses também. Vai dar mais (subconjuntos).
> Aluna b7: É
> Pesquisador: E ai, o que vocês fizeram?
> Aluna b7: Aqui (listei) os conjuntos de 2 em 2, os conjuntos unitários. Então se tiver que fazer de 3 em 3, de 4 em 4 e de 5 em 5, só usar a fórmula de combinação, porque não importa a ordem.

> Aluna d7: Sim, porque os subconjuntos {1, 2} e {2,1} são iguais.
> Aluna b7: E tipo, eu abri ele e fui riscando os que deram iguais. Deram 15 (listagem).
> Pesquisador: E agora você vai fazer como?
> Aluna b7: Agora vou fazer somente por combinação.

Constatamos que durante a vivência dos momentos *adidáticos,* as alunas levaram em consideração as características do problema, ao perceberem que ordem dos elementos não é relevante e conjecturaram a possibilidade da utilização da fórmula de combinação, perpassando pelo momento *adidático* de formulação. Dessa maneira, as alunas do Grupo 7 e a Aluna a8 apresentaram a seguinte resolução:

Figura 42 - Protocolo da Aluna b7, Sessão 7.



Fonte: dados da pesquisa

Ao analisarmos os protocolos e os diálogos apresentados, verificamos que essas alunas no momento de validação, legitimaram a estratégia da utilização de fórmulas de duas maneiras distintas: inicialmente destacaram que a fórmula de combinação poderia ser usada pois a ordem dos elementos não era relevante, considerando corretamente que a mesma estava dentro de seu domínio de validade. Além disso, como ocorrido nos encontros anteriores, as alunas utilizaram a fórmula de combinação para os subconjuntos com dois elementos, compararam o resultado com a estratégia da listagem de possibilidades e perceberam que ambas resultaram em 10 possibilidades, validando assim a fórmula de combinação.

Para a continuidade do encontro, apresentamos o segundo problema da sessão: *Cinco casais de amigos vão ao cinema e desejam sentar-se em uma fileira de 10 lugares, de maneira que os integrantes de cada casal permaneçam sempre lado a lado. De quantas maneiras distintas esses casais podem acomodar-se no cinema?*

Nesse problema de permutação que continha uma grande quantidade de elementos como variável didática, não encontramos indícios da utilização da listagem de possibilidades para resolução do problema dentre os protocolos das produções dos alunos. Os mesmos recorreram ao Princípio Fundamental da Contagem, estratégia eficiente para a resolução do mesmo, apresentando vestígios do teorema em ação T_3(*Princípio Fundamental da Contagem*), como no diálogo dos alunos do Grupo 3:

> Aluna b3: Eu fiz assim: primeiro casal é A, segundo casal é B, o terceiro casal é C ... E aí muda somente a ordem.
> Aluno a3: Eu entendi... [...] De maneira que os integrantes de cada casal permaneçam sempre lado a lado. Aqui estão, mas poderiam estar aqui (inverteu os casais)?
> Aluna b3: Pode, mas ai seria o casal A no lugar do B e o B no lugar do A.
> Aluno a3: Ah entendi, se ele (casal) mudar (de lugar) vai manter (os integrantes dos casais juntos).
> [...]
> Aluna b3: O (casal) A tem cinco lugares. Então se ele fica no primeiro, sobram quantas possibilidades para o (casal) B? Quatro. Para o C, três (possibilidades). Para o D, dois. Para o E, um.
> [...]
> Aluno a3: 120.

Semelhante ao observado no diálogo do Grupo 3, os demais grupos também nomearam os casais e utilizaram o Princípio Fundamental da Contagem para organizá-los na fila do cinema, como apresentamos na análise *a priori*. Essa decisão de distribuir os casais ao invés das pessoas, contribuiu para que a restrição do problema (os integrantes dos casais permanecessem juntos) fosse atendida pois, mesmo invertendo-os de posição, os integrantes continuariam juntos.

Refletindo sobre o desenvolvimento da sequência didática, observamos que o Princípio Fundamental da Contagem passou a ser mais utilizado durante a resolução das situações propostas, em especial nos problemas de permutação, arranjo e produto cartesiano que continham uma quantidade grande de elementos, em detrimento da listagem de possibilidades ou da utilização de fórmulas. Nessas situações os alunos apresentaram vestígios do teorema em ação T_3(*Princípio Fundamental da Contagem*), no momento em que consideravam as possibilidades de cada etapa do problema e utilizavam o PFC corretamente. Porém, também evidenciamos que nas situações de combinação essa estratégia foi menos utilizada, como nos problemas do calendário de provas e da formação dos subconjuntos, nos quais os mesmos recorreram a listagem de possibilidades ou à fórmula de combinação. Conforme destaca Pessoa (2009), uma possível justificativa para essa escolha é o fato que nos problemas de combinação a ordem dos elementos não é relevante na formação dos subconjuntos. Mesmo cientes dessa característica, ao utilizarem o Princípio Fundamental da Contagem, os alunos, exceto os integrantes do Grupo 6, não desconsideravam as repetições dos subconjuntos, resultando em resultados incorretos. Dessa maneira, é necessário que esses licenciandos vivenciem diversas situações que lhes permitam refletir e superar essas dificuldades (VERGNAUD, 1996, 2008).

Após os alunos apresentarem soluções semelhantes das apresentadas pelo Grupo 3, notamos que todos só haviam realizado a primeira etapa do problema, sem considerar que os integrantes de cada casal poderiam trocar de lugar entre si. Entretanto, ao questionarmos os mesmos, percebemos que essa resolução pode ter sido resultante da maneira que enunciamos o problema, pois o mesmo solicitou como os casais poderiam se sentar, e não como as 10 pessoas poderiam se sentar. Dessa maneira, alguns alunos ainda questionaram que mesmo se trocassem os lugares dos integrantes de cada casal não faria diferença, já que continuaria sendo o mesmo casal, nos mesmos dois assentos.

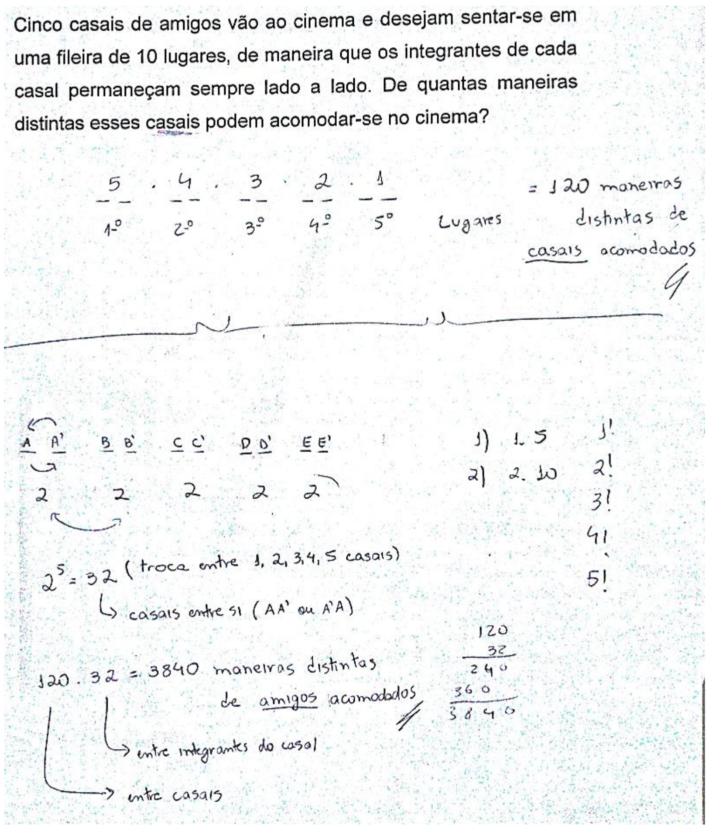
Inicialmente, na escolha da segunda variável didática (*características do problema*) para esse problema, tínhamos o objetivo de analisar como os alunos resolveriam um problema com duas etapas de decisão. Desse modo, julgamos (Colaboradora A e Pesquisador) necessário intervir perante os grupos, esclarecendo o enunciado do problema, como no diálogo com as alunas do Grupo 3:

> Pesquisador: Fizeram? Explica porque deu essa resposta de vocês (120 possibilidades).
> Aluna b2: A gente pegou a quantidade de casais.
> Pesquisador: Beleza. Agora vamos pensar nas pessoas da fileira, a fileira composta com 10 pessoas. Como elas podem se sentar?
> Aluna b2: Em casais.
> [...]
> Aluna b2: Ah você quer o que? Homem-Mulher, Mulher-Homem?
> Aluna a2: Ah, a mulher pode trocar aqui né (com o homem).
> Aluna b2: Tipo assim: pode ficar Homem-Mulher, Homem-Mulher. Aí depois pode ficar Homem-Mulher, Mulher-Homem.
> Aluna a2: Aqui é um homem, aqui uma mulher (casal 1). Aqui no (casal) 2, o homem e a mulher, mas pode ser a mulher e o homem. É o mesmo casal e estão juntos.
> Aluna b2: Então cada casal tem duas possibilidades de ordem.
> Pesquisador: Continua atendendo (a restrição) o problema?
> Aluna a2: Sim.

Destacamos que apesar de realizarmos tais diálogos, os alunos continuaram vivenciando uma situação *adidática*, pois não interferimos diretamente nas resoluções dos alunos e no saber em jogo. De acordo com Brousseau (1996), durante as situações *adidáticas* o professor não é um sujeito ausente da situação, e sim mais um elemento integrante do meio *adidático,* que tem o papel de mediador realizando questionamentos para os alunos, com o intuito de mantê-los no “jogo”. Posterior aos diálogos com os grupos, os mesmos buscaram responder o problema considerando as maneiras que as 10 pessoas poderiam se sentar, sendo que os casais deveriam continuar sentados juntos.

As alunas do Grupo 6, que tinham resolvido a primeira parte do problema utilizando o Princípio Fundamental da Contagem, recorreram novamente ao PFC para encontrar quantas possibilidades que as 10 pessoas poderiam se sentar:

Figura 43 - Protocolo da Aluna a6, Sessão 7.


Cinco casais de amigos vão ao cinema e desejam sentar-se em uma fileira de 10 lugares, de maneira que os integrantes de cada casal permaneçam sempre lado a lado. De quantas maneiras distintas esses casais podem acomodar-se no cinema?

$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ = 120 maneiras distintas de casais acomodados

1º 2º 3º 4º 5º Lugares

A A' B B' C C' D D' E E'

2 2 2 2 2

1) 1. 5 — 1!

2) 2. 10 — 2!

3!

4!

5!

$2^5 = 32$ (troca entre 1, 2, 3, 4, 5 casais)

casais entre si (AA' ou A'A)

$120 \cdot 32 = 3840$ maneiras distintas de amigos acomodados

entre integrantes do casal

entre casais

Fonte: dados da pesquisa

Inicialmente, a Aluna a6 considerou que após definidos o local onde cada casal iria se sentar, havia 2 possibilidades de organizá-los nas poltronas: A-A’ ou A’-A, B-B’ ou B’-B, e assim sucessivamente. Ao utilizar o PFC, a mesma encontrou 32 possibilidades de trocar os integrantes dos casais de lugares. Posteriormente, a Aluna a6 utilizou novamente o PFC ao considerar a primeira etapa do problema na qual distribuiu os casais nos lugares e a segunda etapa na qual considerou a troca entre os integrantes de cada casal, encontrando $120\ x\ 32 = 3840$ possibilidades distintas, semelhante ao Grupo 4. Os Grupos 1 e 2 também consideraram corretamente que havia 2 possibilidades de cada casal se sentar, porém ao considerarem as duas etapas do problema, os Grupos recorreram ao Princípio Aditivo, em detrimento ao Princípio Multiplicativo, somando as possibilidades das duas etapas, resultando em uma resposta incorreta.

Por fim, os Grupos 3,7 e 9, que haviam respondido corretamente a primeira parte da questão utilizando a estratégia do Princípio Fundamental da Contagem, na segunda parte do problema fizeram uso de operações indevidas para respondê-lo, como dividir as 120 possibilidades encontradas anteriormente por 5 (quantidade de casais) ou multiplicar por 10 (quantidade de pessoas), estratégia semelhante à encontrada por Pessoa (2009) em sua investigação.

5.7.5 Considerações da sétima sessão

Destacamos a diferença da mobilização do teorema em ação T_3 (*Princípio Fundamental da Contagem*) nas situações-problema da sétima sessão. Para o problema de permutação que continha uma quantidade grande de elementos e a característica de duas etapas, verificamos que todos os alunos apresentaram vestígios do teorema em ação T_3 durante a resolução, ao considerarem as possibilidades de distribuir os casais nas poltronas e utilizar a estratégia do PFC (estratégia E_3). Além disso, para a segunda etapa da questão, os Grupos 1, 2, 4 e 6 também perceberam corretamente que cada casal poderia se sentar de duas maneiras distintas, porém apenas os Grupos 4 e 6 utilizaram o Princípio Multiplicativo corretamente para encontrar a solução do problema, enquanto os Grupos 1 e 2 utilizaram o Princípio Aditivo, somando as possibilidades das duas etapas.

Diferentemente do problema dos casais, verificamos que no problema dos subconjuntos nenhum aluno mobilizou o teorema em ação T_3 durante a resolução. Inicialmente, os licenciandos recorreram à fórmula 2^n, relacionada à Teoria dos Conjuntos, que haviam visto durante a semana nas disciplinas do curso de Matemática-Licenciatura. Posteriormente, solicitamos que os mesmos buscassem outras estratégias que resolvessem o problema e verificamos a mobilização do teorema em ação $T_{4.2}$ (*a ordem dos elementos não interfere na quantidade de possibilidades*) pois todos os alunos identificaram e relataram que a ordem dos elementos era irrelevante no problema. Em relação às estratégias, constatamos que os licenciandos apresentaram vestígios dos teoremas em ação $T_{1.1}$ (*dado um problema de contagem, sempre é possível listar todas as possibilidades*) e $T_{1.2}$ (*existe uma maneira sistemática de listar que garante esgotar todos os casos possíveis*) ao recorrerem à estratégia da listagem sistemática de possibilidades para resolver o problema, e do teorema em ação T_2 (*se um problema é de combinatória, então existe uma fórmula que resolve e basta utilizá-la para encontrar a solução)* ao classificarem o mesmo como uma combinação e utilizar a fórmula correspondente.

Portanto, analisando o desenvolvimento da sequência didática, evidenciamos que os alunos passaram a utilizar o Princípio Fundamental da Contagem na resolução das situações-problema, em especial nos problemas de permutação, arranjo e produto cartesiano. Nesses problemas em que há a característica da relevância da ordem dos elementos, os licenciandos separavam a situação proposta em etapas, nas quais identificavam as possibilidades de escolha de cada, para então utilizar o PFC. Já nos problemas de combinação, a utilização dessa estratégia foi menos frequente, tendo em vista que nesses problemas os alunos apresentaram uma dificuldade em desconsiderar as repetições dos conjuntos formados, quando utilizavam o PFC. A exceção se aplicou aos integrantes do Grupo 6, pois eles sempre dividiam o resultado encontrado pela quantidade de repetições de cada conjunto, quando a ordem dos elementos era irrelevante.

5.8 Sessão 8

A oitava sessão foi composta por uma situação-problema, que envolvia o conceito dos problemas combinatórios.

5.8.1 Análise *a priori* do problema

O problema dessa sessão segue abaixo:

Doze times se inscreveram em um torneio de futebol amador. O jogo de abertura do torneio foi escolhido da seguinte maneira: primeiro foram sorteados 4 times para compor o Grupo A, foram sorteados 2 times para realizar o primeiro jogo de abertura do torneio, sendo que o primeiro deles jogaria em seu próprio campo e o segundo seria no campo do adversário.

Então, a quantidade total de escolhas possíveis para o Grupo A e a quantidade total de escolhas dos times do jogo de abertura pode ser calculada através de:

a) *Uma combinação e um arranjo, respectivamente.*
b) *Um arranjo e uma combinação, respectivamente.*
c) *Um arranjo e uma permutação, respectivamente.*

d) *Duas combinações.*
e) *Dois arranjos.*[38]

Diferentemente das sessões anteriores nas quais selecionamos problemas que tinham como foco as estratégias de resoluções, com o intuito de encontrar a quantidade de possibilidades dos conjuntos solicitados, nesse problema o foco estava relacionado aos aspectos conceituais das situações combinatórias. Para a sua resolução, era necessário levar em consideração as propriedades de cada situação combinatória e analisar quais delas estavam presentes no enunciado do problema.

Possível estratégias:

E_1*: Classificação do problema a partir de suas propriedades*

Inicialmente, percebe-se que na primeira etapa do problema é necessário sortear 4 equipes dentre as 12 disponíveis para a composição do Grupo A. Além de formar um subconjunto a partir de um conjunto dado, ao mobilizar o teorema em ação $T_{4.2}$ *(a ordem dos elementos não interfere na quantidade de possibilidades)* constata-se que a ordem das equipes não é relevante na formação dos grupos pois, mesmo que inverta as 4 equipes de posição, trata-se do mesmo grupo. Dessa maneira, ao considerar essas duas propriedades, classifica-se a primeira parte do problema como uma combinação (PESSOA; BORBA, 2010). Posteriormente, classifica-se a segunda etapa do problema como um arranjo, uma vez que serão sorteados 2 times dentre os quatros e a ordem dos mesmos é relevante, já que o primeiro time realizará o jogo em seu próprio campo, mobilizando vestígios do teorema em ação $T_{4.1}$ (*a ordem dos elementos sempre resulta em novas possibilidades*). Portanto, verifica-se que a alternativa correta é o item a: uma combinação e um arranjo, respectivamente (PESSOA; BORBA, 2010).

Durante a análise das propriedades do problema, é possível que se considere a ordem dos times relevante na primeira etapa e/ou irrelevante na segunda etapa, classificando-o de maneira incorreta as situações, por exemplo: um arranjo e uma combinação, duas combinações ou dois arranjos, assinalando os itens b, d ou e, respectivamente. Além disso, caso não se perceba que na segunda etapa o subconjunto formado possui menos elementos que o conjunto

[38] Fonte: Exame Nacional do Ensino Médio, Ministério da Educação, 2009.

inicial é possível que o classifique como uma permutação, assinalando a alternativa c (PESSOA; BORBA, 2010).

5.8.2 Experimentação

A oitava sessão ocorreu no dia 06 de junho de 2014 e contou com a participação de 28 alunos. Como nesse encontro estiveram presentes pelo menos dois integrantes de cada grupo, não houve a necessidade de alocar alunos em outros grupos, como em encontros anteriores.

5.8.3 Análise *a posteriori*

Após apresentarmos o problema, os alunos iniciaram a resolução discutindo características e propriedades das diferentes situações combinatórias, com o intuito de classificá-lo e respondê-lo. Porém, apesar de o problema não solicitar a quantidade de possibilidades de formar o Grupo A e a abertura do campeonato, destacamos que durante a resolução os alunos mobilizaram diversas fórmulas combinatórias, para encontrar respostas numéricas. Inferimos que esse fato pode ser oriundo das escolhas didáticas que os licenciandos vivenciaram durante o ensino básico, com a apresentação de situações-problema que têm o foco apenas nas reproduções de fórmulas, sem a preocupação de discutir aspectos conceituais da combinatória (SANTOS-WAGNER; BORTOLOTI; FERREIRA, 2013)

Consonante ao relatado pela Aluna a2 na terceira sessão, as alunas do Grupo 2, além dos Alunos c4 e e9, apresentaram dificuldades no momento de classificar o problema em alguma das situações combinatórias, como podemos perceber no diálogo a seguir:

> Aluna c2: Será que na combinação dos grupos não irá mudar a ordem?
> Aluna a2: Como?
> Aluna c2: São 12 times. Será que não vai mudar a ordem. Qual a diferença de uma combinação? Será que não é Grêmio, Inter, Caxias... Depois vai ficar Inter, Grêmio, Caxias... Será que não irá somente inverter a posição deles?
> Aluna a2: Mas aí é diferente. Está certo, tem que inverter, vai e volta.
> Aluna c2: Não, mas eu pensei somente no grupo.
> Aluna a2: Ah. Tem a opção um arranjo e uma combinação. [...] Porque um arranjo não pode repetir. Dentro de um grupo eu não posso ter duas vezes o mesmo time. Tenho uma vez só.
> Aluna c2: Se falasse que ia importar que lugar que eles ficariam, aí seria combinação.
> [...]
> Aluna c2: Qual a diferença de fazer um arranjo?

Verificamos que as alunas destacaram duas características para classificar o problema: a ordem e a repetição dos elementos. Inicialmente, as mesmas consideraram que como não poderia haver a repetição de elementos, a primeira parte do problema o problema seria um arranjo. Porém, caso levassem em consideração somente essa propriedade, a segunda parte do problema também teria que ser um arranjo, pois não é possível haver a repetição, já que um time não pode jogar contra ele mesmo. Posteriormente, no momento em que classificaram a segunda parte do problema (sorteio do jogo de abertura), inferimos que as alunas apresentaram vestígios do teorema em ação $T_{4.1}$ (*a ordem dos elementos sempre resulta em novas possibilidades*), pois as mesmas acreditavam que como a ordem dos times era importante na formação do primeiro jogo, o mesmo seria uma combinação. Apesar de a ordem dos times ser relevante no sorteio do jogo de abertura, as alunas classificam erroneamente essa etapa como uma combinação, dificuldade semelhante ao que encontramos em pesquisas do tema (MIGUEL; MAGINA, 2003; BATANERO; GODINO; NAVARRO – PELAYO, 1996). Ao serem questionadas sobre a resposta encontrada, as integrantes do Grupo 2 apresentaram a seguinte solução:

> Pesquisador: Fizeram?
> Aluna b2: Confusão?
> Pesquisador: O que vocês chegaram?
> Aluna a2: A gente assim: arranjo e combinação.
> Pesquisador: Por que?
> Aluna c2: Fizemos (a primeira etapa) por permutação, mas não tinha (opção). Então o arranjo deu a mesma resposta.
> Aluna a2: Para selecionar dois times dentre quatro, nós fizemos combinação porque eu posso ter Palmeiras e Corinthians, e depois Corinthians e Palmeiras.
> Pesquisador: É diferente isso?
> Aluna a2: É, porque é campo diferente.

Ao analisarmos o processo de resolução apresentado pelo Grupo 2, evidenciamos que as alunas estavam em conflito (cognitivo) em relação às propriedades das situações combinatórias. No momento de realizarem a classificação do problema, elas consideraram diversas características, como a ordem e a repetição dos elementos, porém sem atingir um consenso sobre a resposta adequada. Além desses, constatamos que os Alunos b6 e c9 não responderam a questão, justificando que possuiam dificuldades sobre aspectos conceituais da combinatória. Diante desse contexto, inferimos que para esses alunos a situação-problema que propusemos se enquadra a uma “Classe de situações para as quais o sujeito não dispõe de todas as competências necessárias, o que o obriga a um tempo de reflexão e de exploração, a hesitações, a tentativas abortadas, conduzindo-o, quer ao êxito, quer ao fracasso.” (VERGNAUD, 1996, p. 156). Portanto, novamente destacamos a necessidade de os mesmos vivenciarem mais situações que lhe permitam refletir e superar tais dificuldades, corroborando com a perspectiva apresentada por Vergnaud (1996).

Constatamos que os demais Grupos assinalaram corretamente a alternativa a: uma combinação e um arranjo, respectivamente. Porém, apesar de assinalarem a alternativa correta, verificamos que isso não ocorreu de maneira imediata, sendo necessário que os alunos passassem por diversas discussões, como ocorrido no Grupo 7:

> Aluna b7: Cheguei a uma conclusão. Deram duas combinações.
> Aluno a7: Deram dois arranjos.
> Pesquisador: São dois arranjos ou duas combinações?
> Aluna b7: Por que dois arranjos?
> Aluno a7: Combinação a ordem não importa. Porque (no problema) a ordem vai importar. [...] Vamos pensar assim, quantos times eu posso escolher aqui? (primeiro time do Grupo A)
> Aluna d7: Doze.
> Aluno a7: E aqui? (segundo time do Grupo A)
> Aluna d7: Onze, dez, nove. (possibilidades para os demais times)
> Aluna b7: Beleza, e aí? Você pode embaralhar. Não vai alterar.
> [...]
> Aluno a7: Se eu pegasse os times A, B, C e D. Tem diferença se eu escolher (a ordem dos times) A-B-C-D ou então D-C-B-A?
> Aluna b7: Não
> Aluno a7: Por isso que (a ordem) vai importar. [...] Se eu sortear o time A e B ou o time B e A, eles não vão jogar um contra o outro do mesmo jeito?
> Aluna b7: Então! A ordem não vai importar.
> Aluna c7: Aí (formação do Grupo A) vai ser uma combinação. Já esse aí (sorteio do jogo de abertura) vai importar (a ordem) porque um time vai jogar primeiro no seu campo.
> Aluna d7: Vai ser um arranjo e uma combinação?
> Aluna b7: Uma combinação e um arranjo.
> Aluno a7: Não é. Deixa eu ver aqui...

Inicialmente, constatamos que os Alunos a7 e b7 apresentam vestígios dos teoremas em ação $T_{4.1}$ (*a ordem dos elementos sempre resulta em novas possibilidades*) e $T_{4.2}$ *(a ordem dos elementos não interfere na quantidade de possibilidades)* dentro do seu domínio de validade, no momento em que explicitam corretamente que nos problemas de arranjo a ordem dos elementos é relevante na formação dos conjuntos, enquanto nos problemas de combinação a ordem dos elementos não interfere na formação dos agrupamentos. Apesar disso, diante da situação que propusemos, os mesmos apresentaram dificuldades na identificação da relevância ou irrelevância dos elementos no momento de formação do Grupo A e do sorteio dos times para a abertura. Desse modo, os alunos passaram a debater suas respostas até chegarem a um consenso:

> Pesquisador: Está bem. Você (Aluno a7) acha que é o quê? E por que?
> Aluno a7: Eu acho que é arranjo.
> Pesquisador: Então vão ser dois arranjos?
> Aluno a7: Sim, porque não é a ordem. Quando fala a ordem importar não é A-B-C-D ou então D-C-B-A, e sim que time vai vir (no Grupo A).
> Pesquisador: Aluna b7, o que você acha?
> Aluna b9: Não sei, ele (Aluno a7) confundiu minha cabeça toda. Eu achava que era duas combinações porque não importava a ordem.

> Aluna c7: O primeiro (formação do Grupo A) eu acho que seria arranjo, porque não importaria (a ordem), se eu pegar A-B-C-D ou então D-C-B-A dá na mesma. Mas o segundo (sorteio do jogo de abertura) seria uma combinação, porque o primeiro deles jogaria em seu próprio campo. Então que importaria A-B ou B-A.
> Aluna d7: Primeiro um arranjo e depois uma combinação
> Aluna b7: Não, mas esse de dois (sorteio do jogo de abertura) vem primeiro.
> Aluna d7: Não. Vem primeiro o de quatro times (formação do Grupo A).
> [...]
> Pesquisador: Vamos ler o enunciado de novo. [...]
> Aluna d7: Então é uma combinação e um arranjo.
> Aluna b7: Tipo o de quatro (formação do Grupo A) vai ser uma combinação, porque não vai importar a ordem. Agora o de dois (sorteio do jogo de abertura) vai importar a ordem então vai ser um arranjo, porque já especifica que tem que ser na casa de um e no de outro. Então vai ser uma combinação e um arranjo.
> Aluna c7: Eu concordo.
> Aluno a7: Eu acho que vai ser uma combinação mesmo (formação do Grupo A), porque a ordem não vai importar.
> Aluna b7: O do arranjo vocês me convenceram, porque eu não tinha prestado atenção na parte de jogar na casa de um ou do outro.

Nesse cenário, ao aceitarem a responsabilidade do problema, caracterizando a devolução, percebemos que os alunos iniciaram a percorrer os momentos *adidáticos* de ação, formulação e validação. Constatamos que eles buscaram suas respostas iniciais pautadas em informações fornecidas pelo problema, que lhes propiciaram condições de elaborarem conjecturas, as quais comunicaram perante os demais integrantes do Grupo[39]. Além disso, os mesmos tentavam validar suas estratégias com justificativas, enquanto os demais alunos tentavam refutá-las ao não concordarem com ela, percorrendo o momento *adidático* de validação, pois nesse momento “Cada qual pode posicionar-se em relação a um enunciado e, havendo desacordo, pedir uma demonstração ou exigir que o outro aplique suas declarações na interação com o meio” (BROUSSEAU, 2008, p. 30). Também destacamos a influência do meio antagônico que gerou desequilíbrios (cognitivos), proporcionou que os alunos discutissem e refletissem sobre as informações do problema, suas conjecturas e justificativas, até chegarem a resposta correta.

Como nos encontros anteriores, realizamos a discussão do problema em conjunto com os alunos, de modo que todos pudessem expor suas respostas e justificativas para as mesmas. Por fim, realizamos um momento de institucionalização[40], tanto da sessão, quanto da sequência didática, no qual apresentamos para os licenciandos a classificação dos problemas

---

[39]Para Brousseau (2008), uma das características do momento *adidático* de formulação é a elaboração de conjecturas e a comunicação delas para outro sujeito, seja ele real ou fictício. Nessa situação, presenciamos uma comunicação efetiva, no momento que os alunos do Grupo 7 apresentavam suas respostas e justificativas perante os demais.

[40]Apesar de nomearmos como momento de institucionalização, deixamos claro que o mesmo não se trata de um momento *adidático*, pois houve a interferência explícita do pesquisador sobre as produções dos alunos e o saber que estava em jogo (BROUSSEAU, 1996).

combinatórios de Pessoa e Borba (2010), explicitando e esclarecendo as propriedades presentes em cada tipo de situação, que nos orientaram ao longo da sequência didática. Além disso, debatemos com os mesmos as diversas estratégias de resolução dos problemas que apareceram ao longo da sequência didática, como a listagem de possibilidades, utilização de fórmulas, Princípio Fundamental da Contagem, entre outras. Esse momento foi fundamental, pois ao realizarmos a institucionalização tentamos "conferir um *status* aos eventos da classe em questão e do processo de ensino; determinar um objeto de ensino e identificá-lo; aproximar as produções dos conhecimentos de outras criações (culturais ou do programa) e identificar quais poderiam ser reutilizadas" (BROUSSEAU, 2008, p. 31).

5.8.4 Considerações da oitava sessão

Com o desenvolvimento da análise preliminar, encontramos como resultados de pesquisas que envolvem a combinatória (PESSOA, 2009; MIGUEL; MAGINA, 2003; ESTEVES, 2001, BATANERO; GODINO; NAVARRO – PELAYO, 1996, SANTOS-WAGNER; BORTOLOTI; FERREIRA, 2013) que uma das principais dificuldades dos alunos em relação ao tema estão ligadas aos aspectos inerentes ao conceito da combinatória. Os alunos consideram a ordem dos elementos relevantes em situações que não são, ou o inverso, além da dificuldade em classificar o problema combinatório a partir de suas características. Consonante ao relatado, verificamos que as licenciandas do Grupo 2 e os Alunos c4, b6, c9 e e9 apresentaram dificuldades semelhantes, tendo em vista que não conseguiram identificar as propriedades do problema e relacioná-las com as situações combinatórias, para então classificá-las.

Verificamos que os demais licenciandos mobilizaram corretamente os teoremas em ação $T_{4.1}$ (*a ordem dos elementos sempre resulta em novas possibilidades*) e $T_{4.2}$ *(a ordem dos elementos não interfere na quantidade de possibilidades)* dentro do seu domínio de validade, classificando corretamente a formação do Grupo A como uma combinação e o sorteio do jogo de abertura como um arranjo. Apesar de responderem corretamente o problema, constatamos que durante o processo de resolução os alunos relataram dificuldades e conflitos em relação aos conceitos e classificação dos problemas, sendo possível superá-las durante as discussões e reflexões dos momentos *adidáticos* que vivenciaram (BROUSSEAU, 2008).

5.9 Teoremas em ação mobilizados pelos alunos: uma síntese do desenvolvimento da sequência didática

Tendo em vista que o objetivo da nossa pesquisa é *investigar aspectos da construção do conceito de combinatória de alunos de licenciatura em Matemática, quando resolvem problemas do tema* e após analisarmos a sequência didática voltados, de modo geral, às ações desenvolvidas pelos Grupos, apresentamos nesse momento um quadro que contém os teoremas em ação que cada aluno mobilizou durante a resolução das situações-problema. Com isso, é possível acompanhar os alunos de maneira individual, ao analisarmos os teoremas em ação que mobilizaram para cada tipo de situação combinatória, além da sua evolução no decorrer da sequência didática.

Organizamos o quadro a partir dos protocolos das produções dos alunos e das gravações de áudio dos grupos, de modo que buscamos identificar vestígios dos teoremas em ação que os mesmos mobilizaram, tendo o foco nos teoremas em ação que modelamos anteriormente, sendo eles:

$T_{1.1}$*: Dado um problema de contagem, sempre é possível listar todas as possibilidades*

$T_{1.2}$*: Existe uma maneira sistemática de listar que garante esgotar todos os casos possíveis.*

$T_{1.3}$*: Se o problema é generalizável, então ao fazer uma listagem sistemática é possível encontrar tal generalidade.*

T_2*: Se um problema é de combinatória então existe uma fórmula que o resolve e basta utilizá-la para encontrar a solução.*

T_3*: Se uma decisão* d_1 *pode ser tomada de* a *maneiras e se, uma vez tomada a decisão* d_1*, a decisão* d_2 *puder sempre ser tomada de* b *maneiras então o número de maneiras de se tomarem as decisões* d_1 *e* d_2 *é* $a \ x \ b$. *(Princípio Fundamental da Contagem)*

$T_{4.1}$*: A ordem dos elementos sempre resulta em novas possibilidades.*

$T_{4.2}$: *A ordem dos elementos não interfere na quantidade de possibilidades.*

A seguir apresentamos o quadro dos teoremas em ação que os 29 alunos que analisamos ao longo da pesquisa mobilizaram para cada situação combinatória.

Quadro 7 - Teoremas em ação mobilizados pelos alunos nas situações combinatórias

	Sessão 1		Sessão 2		Sessão 3	Sessão 4	Sessão 5		Sessão 6		Sessão 7		Sessão 8
Alunos	**Problema Arranjo ($T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{1.3}$ - T_2 - T_3 - $T_{4.1}$)**[41]	**Problema Permutação ($T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{1.3}$ - T_2 - T_3 - $T_{4.1}$)**	**Problema Combinação ($T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{1.3}$ - T_2 - T_3 - $T_{4.2}$)**	**Problema Produto Cartesiano ($T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{1.3}$ - T_3 - $T_{4.1}$)**	**Problema Combinação ($T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{1.3}$ - T_2 - T_3 - $T_{4.2}$)**	**Problema Arranjo ($T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - T_3 - $T_{4.1}$)**	**Problema Produto Cartesiano ($T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{1.3}$ - T_3)**	**Problema Arranjo ($T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - T_2 - T_3 - $T_{4.1}$)**	**Problema Produto Cartesiano ($T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{1.3}$ - T_3)**	**Problema Combinação ($T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - T_2 - T_3 - $T_{4.2}$)**	**Problema Combinação ($T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - T_2 - T_3 - $T_{4.2}$)**	**Problema Permutação ($T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{1.3}$ - T_2 - T_3 - $T_{4.1}$)**	**Problema Conceito ($T_{4.1}$ - $T_{4.2}$)**
Aluno a1	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - T_2 - $T_{4.1}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - T_3 - $T_{4.1}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{4.2}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - T_3 - $T_{4.1}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - T_3 - $T_{4.2}$	$T_{1.2}$ - T_3 - $T_{4.1}$	T_3	T_2 - T_3 - $T_{4.1}$	T_3	T_2 - $T_{4.1}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{4.2}$	T_3 - $T_{4.1}$	$T_{4.1}$ - $T_{4.2}$
Aluna b1	T_2 - T_3 - $T_{4.1}$	T_3 - $T_{4.1}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{4.1}$ - $T_{4.2}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{4.1}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{4.2}$	T_3 - $T_{4.1}$	T_3	T_2 - T_3 - $T_{4.1}$	T_3 – Diagrama de Árvores[42]	T_3 - $T_{4.1}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{4.2}$	T_3 - $T_{4.1}$	$T_{4.1}$ - $T_{4.2}$
Aluna c1	T_2 - $T_{4.1}$	T_3 - $T_{4.1}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{4.1}$ - $T_{4.2}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{4.1}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{4.2}$	T_3 - $T_{4.1}$	-----[43]	-----	T_3	T_3 - $T_{4.1}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{4.2}$	T_3 - $T_{4.1}$	$T_{4.1}$ - $T_{4.2}$
Aluna a2	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - T_3 - $T_{4.1}$	T_3 - $T_{4.1}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - T_2 - $T_{4.2}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - T_3 - $T_{4.1}$	$T_{1.1}$ - T_2	T_3 - $T_{4.1}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$	T_3 - $T_{4.1}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{1.3}$	T_3 - $T_{4.1}$	T_2 - $T_{4.2}$	T_3 - $T_{4.1}$	$T_{4.1}$ - $T_{4.2}$
Aluna b2	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - T_2 - $T_{4.1}$	T_3 - $T_{4.1}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - T_2 - $T_{4.2}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{4.1}$	-----	T_3 - $T_{4.1}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$	T_3 - $T_{4.1}$	-----	-----	T_2 - $T_{4.2}$	T_3 - $T_{4.1}$	$T_{4.1}$ - $T_{4.2}$
Aluna c2	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - T_2 - $T_{4.1}$	T_3 - $T_{4.1}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - T_2 - $T_{4.2}$	$T_{1.3}$ - T_2- $T_{4.1}$	$T_{1.1}$	-----	T_3	T_3 - $T_{4.1}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{1.3}$	T_3 - $T_{4.1}$	-----	-----	$T_{4.1}$ - $T_{4.2}$
Aluno a3	$T_{1.3}$ - $T_{4.1}$	T_3 - $T_{4.1}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{1.3}$ - T_2 - $T_{4.2}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{1.3}$ - $T_{4.1}$	T_2 - $T_{4.2}$	T_2 - $T_{4.1}$	Operação Indevida[44]	T_2 - T_3 - $T_{4.1}$	T_3	T_3 - $T_{4.1}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{4.2}$	T_2 - T_3 - $T_{4.1}$	$T_{4.1}$ - $T_{4.2}$
Aluna b3	$T_{1.3}$ - $T_{4.1}$	T_3 - $T_{4.1}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{1.3}$ - $T_{4.2}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{1.3}$ - $T_{4.1}$	T_2 - $T_{4.2}$	T_2 - $T_{4.1}$	Operação Indevida	T_3 - $T_{4.1}$	-----	-----	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{4.2}$	T_3 - $T_{4.1}$	$T_{4.1}$ - $T_{4.2}$
Aluna c3	$T_{1.3}$ - $T_{4.1}$	T_3 - $T_{4.1}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{4.2}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{4.1}$	$T_{1.1}$ - T_3 - $T_{4.2}$	T_2 - $T_{4.1}$	-----	-----	-----	-----	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{4.2}$	T_3 - $T_{4.1}$	$T_{4.1}$ - $T_{4.2}$
Aluna a4	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{1.3}$ - $T_{4.1}$	T_3 - $T_{4.1}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{4.2}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - T_3 - $T_{4.1}$	-----	T_3 - $T_{4.1}$	T_3	T_3 - $T_{4.1}$	T_3	T_3 - $T_{4.2}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{4.2}$	T_3 - $T_{4.1}$	$T_{4.1}$ - $T_{4.2}$

[41]Possíveis teorema em ação que estão dentro de seu domínio de validade e poderiam ser utilizados pelos alunos durante a resolução do problema.
[42]Como não modelamos um teorema em ação voltados para o diagrama de árvores, no momento que o aluno recorreu a essa estratégia explicitamos o fato preenchendo o quadro como Diagrama de Árvores.
[43] Caso o aluno tenha faltado na sessão preenchemos o quadro com essa simbologia.
[44] Situações nas quais o aluno recorreu a uma operação indevida para o problema, como uma subtração dos valores presentes no enunciado do problema

Aluno b4	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{4.1}$ - $T_{4.2}$	T_3 - $T_{4.1}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{1.3}$ - $T_{4.2}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{4.1}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - T_3 - $T_{4.1}$	T_3 - $T_{4.1}$	T_3	T_2 - T_3 - $T_{4.1}$	T_3	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - T_2 - $T_{4.2}$	-----	-----	$T_{4.1}$ - $T_{4.2}$
Aluno c4	-----	-----	-----	-----	-----	T_3 - $T_{4.1}$	T_3	T_3 - $T_{4.1}$	T_3	T_3 - $T_{4.1}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{4.2}$	T_3 - $T_{4.1}$	$T_{4.1}$ - $T_{4.2}$
Aluno a5	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{4.1}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{1.3}$ - T_3 - $T_{4.1}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{1.3}$ - $T_{4.2}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{4.1}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{4.2}$	T_3 - $T_{4.1}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$	T_2 - T_3 - $T_{4.1}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$	T_2 - $T_{4.2}$	-----	-----	$T_{4.1}$ - $T_{4.2}$
Aluno b5	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{4.1}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{1.3}$ - T_3 - $T_{4.1}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{1.3}$ - $T_{4.2}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{4.1}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{4.2}$	T_3 - $T_{4.1}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$	T_3 - $T_{4.1}$	T_3	T_2 - $T_{4.2}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - T_2 - $T_{4.2}$	T_3 - $T_{4.1}$	$T_{4.1}$ - $T_{4.2}$
Aluno c5	-----	-----	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{1.3}$ - $T_{4.2}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{4.1}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{4.2}$	T_3 - $T_{4.1}$	T_3	T_3 - $T_{4.1}$	Diagrama de Árvores	T_2 - $T_{4.2}$	T_2 - $T_{4.2}$	T_3 - $T_{4.1}$	$T_{4.1}$ - $T_{4.2}$
Aluno d5	T_3 - $T_{4.1}$	$T_{1.3}$ - T_3 - $T_{4.1}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{1.3}$ - $T_{4.2}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{4.1}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{4.2}$	T_3 - $T_{4.1}$	T_3	T_3 - $T_{4.1}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$	T_2 - $T_{4.2}$	-----	-----	$T_{4.1}$ - $T_{4.2}$
Aluna a6	T_3 - $T_{4.1}$	T_3 - $T_{4.1}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - T_3 - $T_{4.2}$	T_3- $T_{4.1}$	T_3- $T_{4.2}$	T_3 - $T_{4.1}$	T_3	T_2 - T_3 - $T_{4.1}$	T_3 – Diagrama de Árvores	T_2 - T_3 - $T_{4.2}$	T_2 - $T_{4.2}$	T_3 - $T_{4.1}$	-----
Aluna b6	T_3 - $T_{4.1}$	T_3 - $T_{4.1}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - T_3 - $T_{4.2}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - T_3 - $T_{4.1}$	T_3- $T_{4.2}$	T_3 - $T_{4.1}$	T_3	T_2 - T_3 - $T_{4.1}$	T_3	T_2 - T_3 - $T_{4.2}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{4.2}$	T_3 - $T_{4.1}$	$T_{4.1}$ - $T_{4.2}$
Aluno c6	-----	-----	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - T_3 - $T_{4.2}$	T_3- $T_{4.1}$	T_3- $T_{4.2}$	T_3 - $T_{4.1}$	T_3	T_2 - T_3 - $T_{4.1}$	T_3	T_2 - T_3 - $T_{4.2}$	-----	-----	$T_{4.1}$ - $T_{4.2}$
Aluno a7	T_2 - T_3 - $T_{4.1}$	T_2 - T_3 - $T_{4.1}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - T_2 - $T_{4.2}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - T_3 - $T_{4.1}$	T_2 - $T_{4.2}$	T_2 - T_3 - $T_{4.1}$	T_3	T_2 - T_3 - $T_{4.1}$	T_3	T_2 - $T_{4.2}$	-----	-----	$T_{4.1}$ - $T_{4.2}$
Aluna b7	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - T_3 - $T_{4.1}$	T_3 - $T_{4.1}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{4.2}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - T_3 - $T_{4.1}$	T_3- $T_{4.2}$	-----	T_3	T_2 - T_3 - $T_{4.1}$	-----	-----	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - T_2 - $T_{4.2}$	T_3 - $T_{4.1}$	$T_{4.1}$ - $T_{4.2}$
Aluna c7	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{4.1}$	T_3 - $T_{4.1}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{4.2}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - T_3 - $T_{4.1}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{4.2}$	T_3 - $T_{4.1}$	-----	-----	T_3	T_3	-----	-----	$T_{4.1}$ - $T_{4.2}$
Aluna d7	T_2 - T_3 - $T_{4.1}$	T_3 - $T_{4.1}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{4.2}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{4.1}$	-----	T_3 - $T_{4.1}$	-----	-----	-----	-----	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - T_2 - $T_{4.2}$	T_3 - $T_{4.1}$	$T_{4.1}$ - $T_{4.2}$
Aluno a9	$T_{1.3}$	$T_{1.1}$	$T_{1.1}$ - $T_{4.2}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{1.3}$ - $T_{4.1}$	-----	T_3 - $T_{4.1}$	T_3	T_3 - $T_{4.1}$	T_3	T_3 - $T_{4.1}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{4.2}$	T_3 - $T_{4.1}$	$T_{4.1}$ - $T_{4.2}$

Aluno b9	-----	-----	$T_{1.1}$ - $T_{4.2}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{1.3}$ - $T_{4.1}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{4.2}$	BRANCO [45]	T_3	T_3 - $T_{4.1}$	T_3	T_3 - $T_{4.1}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{4.2}$	T_3 - $T_{4.1}$	$T_{4.1}$ - $T_{4.2}$
Aluno c9	BRANCO	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{4.1}$	$T_{1.1}$ - $T_{4.2}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{1.3}$ - $T_{4.1}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{4.2}$	$T_{1.1}$	T_3	T_3 - $T_{4.1}$	Diagrama de Árvores	Diagrama de Árvores	$T_{1.1}$	T_3 - $T_{4.1}$	$T_{4.1}$ - $T_{4.2}$
Aluno d9	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{1.3}$ - $T_{4.1}$	T_3 - $T_{4.1}$	$T_{1.1}$ - $T_{4.2}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{1.3}$ - $T_{4.1}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{4.2}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.3}$ - $T_{4.1}$	T_3	T_3 - $T_{4.1}$	T_3	T_3 - $T_{4.1}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{4.2}$	T_3 - $T_{4.1}$	$T_{4.1}$ - $T_{4.2}$
Aluna e9	$T_{1.3}$	T_3 - $T_{4.1}$	$T_{1.1}$ - $T_{4.2}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{1.3}$ - $T_{4.1}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{4.2}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{4.1}$	T_3	T_3 - $T_{4.1}$	T_3	T_2 - $T_{4.2}$	BRANCO	BRANCO	$T_{4.1}$ - $T_{4.2}$
Aluna f9	-----	-----	-----	-----	-----	T_3 - $T_{4.1}$	T_3	T_3 - $T_{4.1}$	T_3	T_3 - $T_{4.1}$	$T_{1.1}$ - $T_{1.2}$ - $T_{4.2}$	T_3 - $T_{4.1}$	$T_{4.1}$ - $T_{4.2}$

Fonte: dados da pesquisa

[45] Colocamos Branco para situações em que o aluno estava presente na sessão porém não resolveu o problema, além de não conseguirmos identificar vestígios de algum teorema em ação.

Ao analisarmos o quadro, evidenciamos a diferenciação do teorema em ação T_3 (*Princípio Fundamental da Contagem*) nas diferentes situações combinatórias, pois os alunos recorriam com frequência ao PFC nos problemas de arranjo, produto cartesiano e de permutação, enquanto nos problemas de combinação o PFC foi pouco utilizado. Inferimos que isso pode ocorrer pelo fato de os licenciandos perceberem, mesmo que implicitamente, a necessidade de utilizar o PFC mais de uma vez nos problemas de combinação. Observamos que nos problemas de permutação e de arranjo, mesmo com uma pequena quantidade de elementos, todos os alunos apresentaram vestígios desse teorema em ação durante a resolução, ao realizarem a estratégia do Princípio Fundamental da Contagem. Entretanto, nos problemas de combinação, com exceção dos licenciandos do Grupo 6, os alunos mobilizaram outros teoremas em ação, como o $T_{1.1}$ *(dado um problema de contagem, sempre é possível listar todas as possibilidades)* e o $T_{1.2}$ *(existe uma maneira sistemática de listar que garante esgotar todos os casos possíveis).* Além disso, quando os mesmos apresentaram vestígios do teorema em ação T_3 nos problemas de combinação, não desconsideraram as repetições dos conjuntos, apresentando vestígios do teorema em ação $T_{4.1}$ *(a ordem dos elementos sempre resulta em novas possibilidades)* fora de seu domínio de validade, como na sexta sessão.

Também foi possível observar que com o desenvolvimento da sequência didática diminuiu a frequência da utilização do teorema em ação $T_{1.1}$ e $T_{1.2}$ durante a resolução dos problemas. A partir da quarta sessão, na qual passamos a selecionar problemas com uma quantidade grande de elementos, os licenciando privilegiaram outras estratégias em detrimento da listagem de possibilidades, como o Princípio Fundamental da Contagem e a utilização de fórmulas. Inferimos então que conseguimos atingir um dos objetivos da sequência didática, a qual desejávamos que os licenciandos percebessem a viabilidade da estratégia da listagem de possibilidades na resolução dos problemas. Além disso, conforme encontramos no desenvolvimento da análise preliminar, verificamos em pesquisas do tema (BATANERO, GODINO, NAVARRO-PELAYO, 1996; MIGUEL; MAGINA, 2003) que uma das dificuldades que os alunos apresentam ao realizarem a listagem é o fato de a realizarem sem uma organização sistemática. Porém, ressaltamos que esse fato pouco ocorreu dentre os licenciandos, pois os mesmos quase sempre realizaram a listagem de possibilidades de maneira sistemática, apresentando em conjunto vestígios dos teoremas em ação $T_{1.1}$ e $T_{1.2}$.

Ao acompanharmos a evolução dos alunos no decorrer da sequência didática, observamos que os alunos do Grupo 9 apresentaram dificuldades durante a resolução dos problemas. Um exemplo dessas dificuldades ocorreu com o Aluno c9, que recorreu com frequência a estratégias mais operacionais, como a construção de árvores de possibilidades, além da realização de listagens de possibilidades, mesmo em problemas que continham uma quantidade grande de elementos, apresentando vestígios do teorema em ação $T_{1.1}$ *(dado um problema de contagem, sempre é possível listar todas as possibilidades).*

O Aluno a7 apresentou com frequência o teorema em ação T_2 (*se um problema é de combinatória então existe uma fórmula que o resolve e basta utilizá-la para encontrar a solução*), tendo em vista que em todos as situações-problema, exceto as de produto cartesiano, buscou classificar o problema para então utilizar a fórmula correspondente do mesmo. Em contrapartida, as alunas do Grupo 2 apresentaram dificuldades na classificação dos problemas combinatórios, como a Aluna a2 relatou em diversos momentos durante a sequência didática. Dessa maneira, essas alunas quando utilizavam o teorema em ação T_2, faziam uso de outros conhecimentos para validar sua resolução, apresentando também vestígios do teorema em ação $T_{1.1}$ *(dado um problema de contagem, sempre é possível listar todas as possibilidades).*

Acompanhando a evolução dos alunos do Grupo 4, verificamos que os mesmos apresentaram vestígios dos teoremas em ação T_3 (*Princípio Fundamental da Contagem*) ao realizarem a estratégia do Princípio Fundamental da Contagem, e dos teoremas em ação $T_{1.1}$ *(dado um problema de contagem, sempre é possível listar todas as possibilidades)* e o $T_{1.2}$ *(existe uma maneira sistemática de listar que garante esgotar todos os casos possíveis)* ao recorrerem à listagem sistemática das possibilidades. Dessa maneira, os mesmos tentavam resolver o problema realizando ações procedimentais, como a listagem ou identificação das possibilidades de cada etapa. Por apresentarem com frequência esses teoremas em ação, os alunos não tinham a preocupação de determinar uma classificação para ele, e consequentemente, não apresentando indícios do teorema em ação T_2.

Além disso, presenciamos que diante de situações com uma quantidade pequena de elementos, tanto as alunas do Grupo 2, quanto os alunos do Grupo 5, apresentaram vestígios do teorema em ação $T_{1.3}$ *(se o problema é generalizável, então ao fazer uma listagem sistemática é possível encontrar tal generalidade),* pois realizavam a listagem de possibilidades com o intuito de encontrar um generalidade para o problema, caso houvesse.

Por fim, identificamos a estabilidade do teorema em ação T_3 (*Princípio Fundamental da Contagem*) nos alunos do Grupo 6 pois, ao analisarmos o quadro, verificamos que os mesmos utilizavam com frequência esse teorema em ação para a resolução dos problemas, além de desconsiderar as repetições quando foi necessário, conhecimento relacionado aos teoremas em ação $T_{4.1}$ *(a ordem dos elementos sempre resulta em novas possibilidades)* e $T_{4.2}$ *(a ordem dos elementos não interfere na quantidade de possibilidades).*

6 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

As inquietações que tínhamos acerca do ensino e da aprendizagem da combinatória e as dificuldades que os alunos, tanto do ensino básico, quanto do ensino superior, apresentam sobre o tema, conforme apontam as pesquisas de Pessoa (2009), Miguel e Magina (2003), Santos-Wagner, Bortoloti e Ferreira (2013), nos levaram à realização desta pesquisa que tem como foco a combinatória. Escolhemos como público-alvo alunos de um curso de Matemática-Licenciatura, pois acreditamos que tendo os mesmos como sujeitos da pesquisa, estamos contribuindo para a formação inicial de futuros professores de Matemática que irão ministrar aulas sobre este tema. Desse modo, tentamos atingir o seguinte objetivo geral: *investigar aspectos da construção do conceito de combinatória de alunos de licenciatura em Matemática, quando resolvem problemas do tema.*

Com esse objetivo em vista, adotamos como referencial teórico na elaboração, desenvolvimento e análise da sequência didática a Teoria das Situações Didáticas, proposta por Brousseau (1996, 2008) e a Teoria dos Campos Conceituais, desenvolvida por Vergnaud (1996, 2009b). Para operacionalizar o desenvolvimento da pesquisa, utilizamos a Engenharia Didática (ARTIGUE, 1996) como referencial metodológico, que fornece um quadro teórico para a elaboração e análise dessa sequência didática, ao percorrer as quatro fases (análise preliminar, análise *à priori*, experimentação e análise *à posteriori*) que a compõem. Assim, elaboramos a sequência didática com o intuito de levar os alunos a vivenciarem momentos de situações *adidáticas* (BROUSSEAU, 1996). Na seleção e elaboração das situações-problema, pautamo-nos na ideia de conceito apresentada por Vergnaud (1996) na TCC, de que o mesmo não se reduz apenas a uma definição, mas que é composto pelo conjunto das situações, dos invariantes e das linguagens relacionados ao conceito. Desse modo, buscamos problemas que contemplassem diferentes tipos de situações que dão sentido ao conceito de combinatória ao longo da sequência, sendo eles: produto cartesiano, arranjo, combinação e permutação, classificação proposta por Pessoa e Borba (2010).

Nessa perspectiva, com o intuito de termos um quadro teórico-didático acerca da combinatória, realizamos a primeira fase da Engenharia Didática, a análise preliminar. Por meio dela, verificamos a importância de trabalhar o conteúdo de combinatória com os alunos desde os anos iniciais da escolarização, conforme orientam documentos oficiais (BRASIL, 1997, 1998; 2006) pois, além de ser uma ferramenta importante para o cotidiano, a combinatória contribui para o desenvolvimento de outras competências, por exemplo, criatividade, organização, habilidades em resolução de situações-problema e o desenvolvimento do raciocínio combinatório. (PESSOA, 2009; SOUZA, A., 2010).

Além disso, ao analisarmos pesquisas que investigaram o ensino e/ou a aprendizagem do conceito de combinatória, notamos que os alunos apresentam dificuldades ao resolverem situações-problema do tema, tais como a utilização de listagens não-sistemáticas, que os levam a listagens que faltam ou repetem casos, e, na relevância ou não da ordem dos elementos (PESSOA, 2009; ROA *et. al.*, 1997). Além disso, como aponta a pesquisa de Santos-Wagner, Bortoloti e Ferreira (2013), os alunos também apresentam dificuldades em questões relativas aos conceitos de combinatória, no momento de distinguir e classificar os diferentes tipos de problemas, e a utilização excessiva de fórmulas combinatórias, aplicando-as sem necessariamente compreender o problema. Tais dificuldades podem ocorrer pelas escolhas didáticas de se trabalhar o tema exclusivamente em módulos, com o uso excessivo de fórmulas, e sem estimular a utilização de outras estratégias.

Diante desse cenário, propusemos um curso de extensão intitulado "U*ma proposta de estudo de problemas de Combinatória com acadêmicos de Matemática*", para todos os alunos ingressantes em um curso de Licenciatura em Matemática de uma Universidade Federal no estado de Mato Grosso do Sul, de modo que contribuísse para a formação inicial dos mesmos. Concluíram o curso 31 alunos cujos dados, originados das produções escritas e gravações de áudio e vídeo, utilizamos para a análise. O curso de extensão foi estruturado em oito sessões, sendo que as mesmas continham um ou dois problemas de combinatória, abrangendo as diferentes situações combinatórias (PESSOA; BORBA, 2010). Além disso, adotamos duas variáveis didáticas (quantidade de elementos e restrições do problema), com as quais "jogamos" ao longo da sequência didática.

Ao realizarmos a análise *a posteriori*, identificamos alguns resultados em relação aos conhecimentos dos alunos. Destacamos a força do teorema em ação $T_{1.1}$ (*é possível realizar a listagem de todas as possibilidades)* nas produções dos alunos pois, de modo geral, em algum momento durante a resolução dos problemas, os mesmos realizavam a listagem das possibilidades em busca da resposta. Além disso, ao optarem pela utilização dessa estratégia, destacamos que a realizavam sob uma organização sistemática, apresentando vestígios do teorema em ação $T_{1.2}$ *(existe uma maneira sistemática de listar que garante esgotar todos os casos possíveis).* Também verificamos que a listagem das possibilidades, além de uma estratégia para resolver o problema, também foi utilizada como um meio de controle durante a resolução dos problemas de combinatória, sendo utilizada para a conjectura de novas estratégias, além da validação de outras. Dessa maneira, com frequência os alunos realizavam a listagem e utilizavam seu resultado na busca de regularidades ou em comparações com os resultados de outras estratégias, como as fórmulas e o Princípio Fundamental da Contagem. Presenciamos esse fato com as alunas do Grupo 2 que validaram e o Aluno a7 que refutou fórmulas combinatórias, ao realizarem a comparação com o resultado da listagem na segunda sessão. Destacamos também os alunos do Grupo 5 e o Aluno a3 que utilizaram a listagem das possibilidades como uma ferramenta para conjecturarem outras relações, como a encontrada pelos Grupo 5 no problema dos segmentos de reta e triângulos a partir de pontos contidos em uma circunferência. Portanto, diante do exposto, evidenciamos o quão forte é o conhecimento relativo ao teorema em ação $T_{1.1}$ (*é possível realizar a listagem de todas as possibilidades),* que foi utilizado pelos alunos tanto na realização da estratégia da listagem de possibilidades, quanto como ferramenta de controle e validação de outras estratégias.

Porém, apesar da força desse teorema em ação, ao 'jogarmos' com a primeira variável didática (quantidade de elementos do problema), verificamos que os licenciandos perceberam a pouca viabilidade de utilizar a estratégia da listagem quando o problema tem uma grande quantidade de elementos. No primeiro problema que isso ocorreu, os alunos do Grupo 9 mobilizaram a estratégia da listagem de possibilidades, enfrentado dificuldades durante a resolução. Tais dificuldades e desequilíbrios (cognitivos) proporcionados pelas situações que propusemos, possibilitou que esses licenciandos refletissem sobre a viabilidade das estratégias durante a resolução dos problemas. Dessa maneira, nas demais sessões, que também continham problemas com uma quantidade grande de elementos, os mesmos perceberam que a listagem de possibilidades era inviável e recorreram a outras estratégias, como o PFC.

Um dos elementos para a composição do meio *adidático* foi a organização dos alunos em grupos para que houvessem discussões das situações-problema, com o intuito de que os mesmos vivenciassem os três momentos *adidáticos.* Além disso, programamos um momento que fossem ao quadro-negro e exibissem suas estratégias para toda turma, contribuindo para que os alunos, ao longo das quatro sessões, apresentassem indícios de elaboração e incorporação de novas estratégias. Na terceira sessão, os alunos do Grupo 1 mobilizaram estratégias apresentadas por outros alunos no momento de discussão final, como o Aluno a1 que mobilizou o PFC, apresentado pelos alunos do Grupo 6, e as Alunas a2 e a3 que recorreram à fórmula conjecturada pelos alunos do Grupo 3.

Os licenciandos dos Grupos 2 e 5 apresentaram vestígios do teorema em ação $T_{1.3}$ *(se o problema é generalizável, então ao fazer uma listagem sistemática é possível encontrar tal generalidade)* diante de problemas que continham uma quantidade pequena de elementos, tendo em vista que os mesmos realizavam a listagem de possibilidades para encontrar um generalização, caso fosse possível. Durante a segunda sessão, os alunos do Grupo 3 conjecturaram uma regra idêntica à fórmula de combinação e, a partir de então, a utilizaram na resolução dos problemas. Porém, essa regra possui domínio de validade limitado aos problemas de combinação, e, ao não verificarem esse domínio de validade, os Alunos a3, b3 e c3 mobilizaram essa regra em problemas que não deveriam, obtendo resultados errôneos. Somente na quinta sessão, diante dos desequilíbrios (cognitivos) causados pelo meio *adidático*, esses alunos puderam refletir e conseguiram identificar o domínio de validade dessa regra.

O Aluno a7 foi o que apresentou com mais frequência o teorema em ação T_2 (*se um problema é de combinatória então existe uma fórmula que o resolve e basta utilizá-la para encontrar a solução*), pois sempre que possível, buscou classificar o problema para então utilizar a fórmula correspondente. Destacamos os alunos do Grupo 6 que apresentaram o teorema em ação T_3 (*Princípio Fundamental da Contagem*) ao longo da sequência didática, já que mobilizaram constantemente o PFC como estratégia para resolverem os problemas, mesmo diante de situações que havia a necessidade de utilizar o PFC mais de uma vez. Assim, ao vivenciarem os momentos *adidáticos*, eles puderam refletir e, consequentemente, realizar o PFC para desconsiderar as repetições dos conjuntos formados. Além disso, os mesmos apresentaram uma organização estável quando estavam inseridos nos momentos *adidáticos*, pois sempre dividiam o problema em etapas, buscavam identificar as possibilidades de cada etapa, para então utilizarem o PFC.

Em relação a essa estratégia, presenciamos uma diferenciação na utilização da mesma diante dos diferentes problemas combinatórios. Os licenciandos realizaram com frequência a estratégia do Princípio Fundamental da Contagem nas situações de arranjo, permutação e produto cartesiano, independentemente da quantidade de elementos dos problemas. Dessa maneira, eles dividiam o problema em etapas, identificavam as possibilidades de cada uma e aplicavam o PFC para a obtenção da resposta. Entretanto, nos problemas de combinação essa estratégia não se mostrou eficiente, já que os alunos recorriam a outras estratégias, como a listagem de possibilidades e a utilização de fórmulas combinatórias. Quando recorriam ao Princípio Fundamental da Contagem nos problemas de combinação, os alunos (exceto o Grupo 6) apresentavam vestígios, mesmo que implicitamente, do teorema em ação $T_{4.1}$ *(a ordem dos elementos sempre resulta em novas possibilidades)*, fora de seu domínio de validade, pois não desconsideravam as repetições dos conjuntos formados.

Por fim, ao refletirmos sobre os resultados encontrados na análise a *posteriori*, evidenciamos que os licenciandos mobilizaram com frequência as estratégias da listagem de possibilidades, o Princípio Fundamental da Contagem, as fórmulas combinatórias e a busca de regularidades, como previmos no decorrer da análise a *priori.* Além dos conhecimentos que relatamos, verificamos que os alunos da licenciatura apresentaram dificuldades em relação a questões conceituais da combinatória. Em diversos momentos que os alunos tentaram classificar os problemas, o fizeram de maneira errônea, pois desconheciam as propriedades de cada situação combinatória. Assim, presenciamos os licenciandos mobilizarem fórmulas inadequadas, semelhante ao encontrado em outras pesquisas (ROA *et. al.*, 1997; SANTOS-WAGNER; BORTOLOTI; FERREIRA, 2013). Apesar de previsto essa dificuldade em relação aos aspectos conceituais na análise a *priori*, verificamos o quão forte é essa dificuldade pois, mesmo pensando em situações que pudessem desestabilizar os alunos, isso não ocorreu completamente com o desenvolvimento da sequência didática. Então, consoante à perspectiva apresentada por Vergnaud (1996, 2008), entendemos que a aprendizagem de um conceito se trata de um processo e não uma etapa que o sujeito simplesmente atinge. Dessa forma, acreditamos que é necessário que os licenciandos vivenciem novas situações, perpassando momentos de reflexão, para que os mesmos tenham condições de superar tais dificuldades.

Com o desenvolvimento desta pesquisa, foi possível evidenciar contribuições das escolhas teóricas e metodológicas, não somente para a mesma, mas também na formação do pesquisador. Apesar de percorrermos as etapas propostas da Engenharia Didática, como a análise *a priori* das sessões, houve momentos que ocorreram fatos que não esperávamos, por exemplo: não considerarmos as repetições do sorteio dos professores no problema da primeira sessão e o enunciado do problema de permutação da sétima sessão, que possibilitava a interpretação somente da primeira etapa do problema. Porém, diante da postura teórica-metodológica que assumimos, pudemos refletir sobre esses episódios no momento da experimentação e realizar as adequações necessárias, com o intuito de atingir o objetivo da sessão.

A partir dessas escolhas teóricas e metodológicas, compreendemos melhor elementos do processo cognitivo que o sujeito enfrenta no momento da aprendizagem, tendo condições de realizar escolhas para contribuir nesse processo, como propor situações diversificadas que dão sentido a um conceito, ao invés de focar em um determinado tipo de situação. Além disso, interpretamos os erros dos alunos não pela falta de conhecimentos, e sim pela mobilização de conhecimentos que estão fora de seu domínio de validade. Portanto, cabe a nós, pesquisadores/professores, elaborar situações, pensar nas possíveis dificuldades que os alunos possam enfrentar, e como superá-las, atribuindo aos alunos papel ativo na construção do conhecimento.

Diante de todo o processo que percorremos ao longo dessa investigação, suas influências e contribuições, refletimos e acreditamos serem necessárias outras ações para o aprimoramento da formação do professor de Matemática, tanto inicial, quanto continuada, acerca do conteúdo de combinatória. Acreditamos que uma possibilidade para futuras investigações é o trabalho em conjunto com um grupo de professores, inseridos em um processo de formação continuada, na elaboração e aplicação de uma Engenharia Didática, com o conteúdo de combinatória. Assim, ao estarem inseridos nessa perspectiva, esses professores teriam condições tanto de aprofundar estudos em conteúdos matemáticos, quanto de refletir e reorganizar sua prática pedagógica.

REFERÊNCIAS

ARTIGUE, Michèle. Engenharia Didática. In: BRUN, Jean. (Org.) **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 193-217.

BATANERO, Carmen; GODINO, Juan Diaz; NAVARRO-PELAYO, Virginia. **Razonamiento combinatorio**. Madri: Ed. Sintesis, 1996.

BESSOT, Annie. L'Ingénierie Didactique au coeur de la Théorie Des Situations. In.: **XVe École d'été de didactique des mathématiques**. Clermont-Ferrand, 2009

BIGGS, Norman Linstead. The roots of combinatorics. **Revista Historia Mathematica**, v. 6, 1979. p.109-136.

BITTAR, Marilena. **Contribuições da teoria das situações didáticas e da engenharia didática para discutir o ensino de Matemática.** No prelo.

BRASIL, Ministério da Educação: Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

_______. **Guia de Livros Didáticos PNLD 2012: Matemática. Ensino Médio.** Brasília: MEC 2011.

_______. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Parâmetros Curriculares Nacionais de 5ª a 8ª. séries - Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998

_______. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**. Brasília: MEC, 2006.

_______. **PCN + - Ensino Médio Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais.** Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília. 2007.

BROUSSEAU, Guy. Fundamentos e Métodos da Didáctica da Matemática. In: BRUN, Jean. (Org.) **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 35-113.

BROUSSEAU, Guy. **Introdução ao Estudo das Situações Didáticas: Conteúdos e métodos de ensino**. São Paulo: Ática, 2008.

CAMPOS, Carlos Eduardo de. **Análise Combinatória e Proposta Curricular Paulista**: um estudo dos problemas de contagem. 2011. 143f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo/ PUC-SP, São Paulo, 2011.

CUNHA, Antônio Geraldo. **Dicionário Etimológico da língua portuguesa**. Rio de Janeiro: Lexikon Editora Digital, 2007.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações - vol. 2**. São Paulo, Editora Ática, 2010.

ESTEVES, Inês. **Investigando os fatores que influenciam o raciocínio combinatório em**

adolescentes de 14 anos- 8ªsérie do Ensino Fundamental. 2001. 203 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2001.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2007.

FREITAS, José Luiz Magalhães de. Teoria das Situações Didáticas. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. (Org). **Educação Matemática Uma (nova) Introdução**. 3.ed.rev. São Paulo: Educ, 2010. p. 77-109.

GITIRANA, Verônica; CAMPOS, Tânia Maria Mendonça; MAGINA, Sandra; SPINILLO, Alina. **Repensando multiplicação e divisão: contribuições da Teoria dos Campos Conceituais** -1ª Ed. São Paulo, Editora PROEM, 2014.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto; ALMEIDA, Nilze de. **Matemática: ciências e aplicações - vol. 2**, São Paulo, Editora Saraiva, 2010, 6ª edição.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto de; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César de Oliveira. **A matemática do ensino médio – volume 2.** Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LIMA, Renan Gustavo Araújo de. **Um estudo de problemas de Combinatória na Educação Básica por meio do Princípio Fundamental da Contagem.** 2013. 45 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2013.

MIGUEL, Maria Inez; MAGINA, Sandra. As estratégias de solução de problemas combinatórios: um estudo exploratório. **In: Anais do II Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática,** Santos, 2003.

MORGADO, Augusto César de Oliveira; PITOMBEIRA DE CARVALHO, João Bosco; PINTO CARVALHO, Paulo Cezar; FERNANDEZ, Pedro. **Análise combinatória e probabilidade**. Rio de Janeiro: Graftex, 1991.

MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Tópicos de Matemática Elementar: combinatória – 1. ed.** Rio de Janeiro: SBM, 2012.

NAVARRO-PELAYO, Virginia; BATANERO, Carmen; GODINO, Juan Diaz. Razionamiento Combinatório em Alunos de Secundaria. **In.: Educación Matemática**, n. 8(1), p. 26-39, 1996.

PESSOA, Cristiane Azevedo dos Santos; BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa. O desenvolvimento do raciocínio combinatório na escolarização básica. **In: EM TEIA - Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, vol. 1, n. 1, 2010.

PESSOA, Cristiane Azevedo dos Santos. **Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio.** 2009. 267 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Pernambuco, Recife, 2009.

ROA, Rafael; BATANERO, Carmen; GODINO, Juan Diaz; CAÑIZALES, Maria Jesús. Estrategias de resolución de problemas combinatorios por estudiantes con preparación matemática avanzada. **In.: Epsilon**, n. 36, p. 433-446, 1997.

ROCHA, Cristiane de Arimetéa; BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa. Expectativa e perspectivas docentes sobre o ensino e aprendizagem de combinatória no Ensino Médio. **In: III Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática,** Fortaleza, 2012.

ROCHA, Cristiane de Arimetéa. **FORMAÇÃO DOCENTE E O ENSINO DE PROBLEMAS COMBINATÓRIOS: diversos olhares, diversos conhecimentos.** 2011. 192f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2011.

ROCHA, José de Arimatéa. Investigando a aprendizagem de análise combinatória simples em uma turma de licenciandos em Matemática submetida a uma prática de ensino tradicional**.** In: **IX Encontro Nacional De Educação Matemática,** Belo Horizonte, 2007.

SABO, Ricardo Dezso. **Saberes Docentes: a análise combinatória no Ensino Médio.** 2010. 210f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo/ PUC-SP, São Paulo, 2010.

SANTOS, José Plínio de Oliveira; MELLO, Margarida Pinheiro; MURARI, Idani Theresinha. Calzolari. **Introdução À Análise Combinatória.** Editora: Ciência Moderna, São Paulo, 2007.

SANTOS-WAGNER, Vânia Maria Pereira dos; BORTOLOTI, Roberta D’Angela Menduni; FERREIRA, Juliana. Rodrigues. Análise das resoluções corretas e erradas de combinatória de futuros professores de Matemática**. In: Educação Matemática Pesquisa**, v.15, n.3, pp.692-629, 2013.

SOUZA, Analucia Castro Pimenta de. **Análise combinatória no ensino médio apoiada na metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas.** 2010. 343 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2010.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Novo Olhar: matemática- vol. 2**. São Paulo, Editora FTD, 2010.

TEIXEIRA, Paulo Jorge Magalhães. **Um estudo sobre os conhecimentos necessários ao professor de matemática para a exploração de problemas de contagem no ensino fundamental.** 2012. 458 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Bandeirantes de São Paulo, São Paulo, 2012.

VASQUEZ, Cristiane Maria Roque; NOGUTI, Fabiane Cristina Höpner. Análise Combinatória: alguns aspectos históricos e uma abordagem pedagógica. **In: VIII Encontro Nacional de Educação Matemática,** Recife, 2004.

VASQUEZ, Cristiane Maria Roque. **O ensino de Análise Combinatória no Ensino Médio por meio de atividades orientadoras em uma escola estadual do interior paulista.** 2011.

90 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2011.

VERGNAUD, Gérard. **A criança, a matemática e a realidade: problemas do ensino da matemática na escola elementar**. Tradução: SOARES, Maria Tereza Carneiro. Curitiba: Editora da UFPR, 2009a.

VERGNAUD, Gérard. A Teoria dos Campos Conceituais. In: BRUN, Jean. (Org.) **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 155-191.

VERGNAUD, Gérard. O que é aprender? In: BITTAR, Marilena; MUNIZ, Cristiano. (Orgs). **A aprendizagem Matemática na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais**. Curitiba: Editora CRV, 2009b. p.13-35.

APÊNDICE A – TERMO DE COMPROMISSO

Ministério da Educação

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Instituto de Matemática-INMA

Mestrado em Educação Matemática

TERMO DE COMPROMISSO

O presente termo tem como objetivo esclarecer os procedimentos de nossa pesquisa, principalmente os relativos à utilização dos dados coletados.

O material coletado (atividades realizadas nos encontros do curso de extensão, gravações em áudio e vídeo) servirá de base para as análises da pesquisa cujo objetivo é investigar aspectos da construção do conceito de combinatória de alunos de licenciatura em Matemática, quando resolvem problemas do tema.

As transcrições e registros obtidos nos encontros presenciais, usados como dados para a pesquisa, não terão identificação alunos em nenhuma publicação científica de nossa autoria.

Campo Grande, 06 de junho de 2014.

___________________________________ ___________________________________

Prof. Dr. José Luiz Magalhães de Freitas	Renan Gustavo Araújo de Lima
Orientador	Mestrando

____

Aluno(a) participante da pesquisa