UNIVERSIDADE FEDERAL DO MATO GROSSO DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

VANESSA RODRIGUES LOPES

APRENDIZAGEM EM UM AMBIENTE CONSTRUCIONISTA: explorando conhecimentos de Cálculo I em espaços virtuais

Campo Grande - MS
2015

VANESSA RODRIGUES LOPES

APRENDIZAGEM EM UM AMBIENTE CONSTRUCIONISTA: explorando conhecimentos de Cálculo I em espaços virtuais

Dissertação de Mestrado apresentada ao Curso de Mestrado em Educação Matemática da Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, como requisito parcial para a obtenção título de Mestre em Educação Matemática.
Orientadora: Suely Scherer

Campo Grande - MS

2015

VANESSA RODRIGUES LOPES

APRENDIZAGEM EM UM AMBIENTE CONSTRUCIONISTA: explorando conhecimentos de Cálculo I em espaços virtuais

Dissertação de Mestrado apresentada ao Curso de Mestrado em Educação Matemática da Universidade Federal do Mato Grosso do Sul como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

BANCA EXAMINADORA:

____

Profa. Dra. Suely Scherer
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

____

Prof. Dr. Marcus Vinicius Maltempi
Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho

____

Prof. Dr. José Luiz Magalhães de Freitas
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

Campo Grande, 26 de fevereiro de 2015.

Dedico este trabalho à DEUS, pois sua presença em mim faz com que eu seja mais forte e vá mais longe. Sem Ele esse trabalho não existiria.

AGRADECIMENTOS

Agradeço as pessoas que de alguma forma me ajudaram e que estiveram ao meu lado durante o curso de Mestrado. Faço questão de explicitar meu muito obrigado a algumas em especial:

- ✓ À Deus e Nossa Senhora de Aparecida por estarem ao meu lado sempre, me dando força e aumentando a minha fé.
- ✓ À Profa. Dra. Suely Scherer que caminhou ao meu lado durante todo o curso de Mestrado, e durante essa caminhada soube os momentos exatos de segurar em minha mão e os momentos de acompanhar o meu caminhar. Agradeço pela paciência, dedicação, compreensão e principalmente pelos vários desequilíbrios cognitivos que ela me causou, e que oportunizaram momentos de reflexão e de crescimento como pesquisadora e educadora. Eu a considero uma amiga que me orientou e que contribuiu para o meu desenvolvimento profissional.
- ✓ Aos professores da banca, Marcus Vinícius Maltempi e José Luiz Magalhães de Freitas, pelas leituras e contribuições.
- ✓ À minha família: Laurindo (pai), Maria (mãe), Laurisa (irmã), Valquíria (irmã), Marcelo (irmão), pelo apoio, pela força e pelo amor.
- ✓ Aos meus amigos: Luciano, Mirian, Darlysson, Renan, Maxlei, Jonas e Deise, pelo apoio e compreensão.
- ✓ À Capes pelo financiamento da pesquisa.

Se um homem tem fome, você pode dar-lhe um peixe, mas é melhor dar-lhe uma vara e ensiná-lo a pescar. (Seymour Papert)

RESUMO

Esta pesquisa teve por objetivo analisar a aprendizagem de Derivadas de funções em um ambiente construcionista, em uma disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, ofertada em formato de educação bimodal (parte presencial parte a distância). Para tanto, foi criado um ambiente construcionista composto por: uma proposta de atividades desenvolvidas com o software GeoGebra, um Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA) e materiais didáticos. Com vistas a analisar a aprendizagem dos alunos, usamos como referencial teórico estudos sobre o Construcionismo desenvolvidos por Seymour Papert e Marcus Vínicius Maltempi, e reflexões sobre o Ciclo de Ações, espiral de aprendizagem e “Estar Junto Virtual” realizadas por José Armando Valente. Ainda como referencial teórico, optamos pelos estudos de Suely Scherer, em relação às atitudes de educador e educandos em Ambiente Virtual de Aprendizagem: habitantes, visitantes e transeuntes. A análise dos dados foi desenvolvida a partir de registros da professora e/ou dos alunos em três espaços virtuais: AVA, WhatsApp, Facebook, e de uma entrevista semiestruturada com participantes da pesquisa. Entre outros resultados, observamos que a aprendizagem dos alunos nesse processo esteve relacionada à atitude da professora e dos alunos como habitantes no AVA, ao vivenciarem a abordagem do “Estar Junto Virtual”. A aprendizagem ocorreu a partir da/na interação entre professora e alunos e entre alunos em espaços virtuais de aprendizagem. A proposta de ambiente construcionista favoreceu processos de aprendizagem, pois oportunizou momentos de reflexão e interação entre alunos e professora, e entre alunos.

Palavras-chave: Tecnologias Digitais. AVA. WhatsApp. Derivadas. Educação a Distância.

ABSTRACT

This research aimed to analyze functions of Derivatives of learning in a constructionist environment, in a discipline of Differential and Integral Calculus I, offered in format bimodal education (part presencial- E- Learning). To achieve the goal was to create a constructionist environment composed of: a proposal of activities with GeoGebra software; a Virtual Learning Environment and learning materials. To analyze student learning used as the theoretical framework, studies on constructionism developed by Seymour Papert and Marcus Vinicius Maltempi, and studies on the cycle of Shares, learning spiral and "Being Virtual Together" José Armando Valente. Even as the theoretical framework, we chose the studies of Suely Scherer, on the educator and students attitudes in Virtual Learning Environment residents, visitors and passers-by. Data analysis was developed from teacher records and / or students in three virtual spaces: Virtual Learning Environment, WhatsApp, Facebook, and semi structured interview with research participants. What we observe is that student learning in this process was related to the attitude of the teacher and the students as inhabitants in Virtual Learning Environment, when they experience the approach of "Being Virtual Together". Learning occurred from the / in the interaction between teacher and students and between students in virtual learning spaces. The proposed constructionist environment favored learning processes, as provided an opportunity moments of reflection and interaction between students and teacher, and between students..

Passwords: Digital Technologies. Virtual Learning Environment. WhatsApp. Derivatives. E-Learning.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral é uma das mais tradicionais nos inúmeros cursos da área de Ciências Exatas. Muitos pesquisadores e estudiosos usaram e usam os conceitos do Cálculo Diferencial Integral na busca de solução para os mais diversos problemas, como analisar crescimento de epidemias e de população calcular velocidade e aceleração de um corpo, calcular área e volume, prever o mínimo de gasto para obter maior lucro, dentre outros.

Segundo Boyer (1992), o Cálculo Diferencial e Integral, ou simplesmente Cálculo, como denominaremos nesta pesquisa, foi criado no século XVII por Issac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Newton e Leibniz desenvolveram estudos relacionados à determinação da reta tangente a uma dada curva, que atualmente é chamando de Cálculo Diferencial, e estudos relativos a cálculos de áreas e volumes delimitados por curvas e sólidos, o chamado Cálculo Integral. Doravante, muitos estudiosos como Leonhard Euler (1707-1783), Augustin Louis Cauchy (1789-1857) e Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) enriqueceram estudos nessa área ao ponto de hoje o campo do Cálculo ser muito importante para o desenvolvimento científico em diversas áreas das Ciências Exatas.

Ao olharmos para o cenário de ensino e aprendizagem de Cálculo em cursos de Ensino Superior, vê-se que os índices de reprovação e evasão são altos (NASCIMENTO, 2000; CABRAL, CATAPANI, 2001). Além disso, observa-se que as dificuldades que originam tais índices são frequentes objetos de pesquisas, tanto em nível nacional quanto internacional.

Segundo Stewart (2011), o marco inicial da preocupação com ensino e aprendizagem do Cálculo em nível internacional ocorreu em janeiro de 1986, na conferência de *Tulane*, realizada nos Estados Unidos, durante o evento *Lean and Lively Calculus*. Nessa conferência, deu-se origem à "reforma do Ensino do Cálculo". Esse movimento teve como objetivo principal a compreensão dos conceitos pelo aluno.

> Nesta conferência foram discutidos conteúdos, métodos de ensino e estratégias para implementar mudanças. Porém a direção da mudança não estava clara naquele momento, nem se haveria empenho e esforço dos departamentos para realizar alterações significativas na disciplina. (MORELATTI, 2001, p. 6- 7).

Tucker e Leitzel (1995) afirmam que, durante a conferência, a problemática apresentada era a de que os cursos de Cálculo não favoreciam a compreensão dos conceitos pelos estudantes, não lhes oferecendo os fundamentos necessários para disciplinas posteriores que tinham por base o Cálculo.

Em 1988, o movimento ganhou força, pois passou a contar com o apoio financeiro do *The National Science Foundation's Calculus* para ações que visavam à reforma do ensino do Cálculo em muitas universidades.

No Brasil, há um número significativo de pesquisas que já foram desenvolvidas sobre a temática em questão, como afirma Baldinho (1995, p. 03): "recentemente tem se notado crescente preocupação de pesquisadores em Educação Matemática com o cenário dos cursos de Cálculo". No mesmo sentido, Morelatti posiciona que:

> [...] observa-se nos últimos anos uma maior abertura para discussão deste tema em congressos específicos de Matemática e Educação Matemática. Atualmente vários grupos ligados a universidades estão utilizando computadores para enfrentar a problemática da aprendizagem em Cálculo. (MORELATTI, 2001, p. 7).

Ademais, a autora afirma que muitas pesquisas desenvolvidas em torno dessa temática focam o uso de tecnologias, conforme exemplos que apresentaremos no estado da arte desta pesquisa.

Para Nascimento (2000), a disciplina de Cálculo está presente em vários cursos superiores e apresenta elevados índices de reprovação e evasão. Esse autor salienta que estes problemas estão relacionados com "a falta de base dos alunos, as diferenças metodológicas do 2º grau para o curso superior e as dificuldades intrínsecas da matéria" (NASCIMENTO, 2000, p. 2).

Silva *et al.* (2010), em um estudo de caso realizado com alunos do curso de Química de uma universidade pública do Ceará, investigaram as dificuldades apontadas pelos alunos na aprendizagem da disciplina de Cálculo. O resultado da pesquisa evidenciou que os principais obstáculos foram: metodologia utilizada em sala aula e dificuldades anteriores na disciplina de Matemática, oriundas do Ensino Fundamental e Médio. Segundo os autores, o ensino de forma mecânica e tradicional dificulta a compreensão dos conceitos da disciplina.

Para Morelatti (2001, p. 21), a dificuldade nessa disciplina, que não se restringe apenas a ela, está relacionada à metodologia utilizada pelo professor que:

> [...] prioriza a aula expositiva, é centrada na fala do professor, e os conceitos são apresentados como verdades inquestionáveis, como algo pronto e acabado, sem a preocupação de torná-los significativos. Os alunos, após a aula, resolvem uma série de exercícios que, muitas vezes, não exigem criatividade, reflexão e novos conceitos.

As causas apontadas por Morelatti (2001), Nascimento (2000) e Silva *et al.* (2010) estão diretamente relacionadas com as ações docentes. O fato de tais ações gerarem dificuldades de aprendizagem evidencia a importância fundamental de um ensino que oportunize ao aluno, e futuro profissional, construir conhecimentos compreendendo os conceitos, para que possa usá-los na prática de sua futura profissão.

Nesse sentido, torna-se importante desenvolver pesquisas que investiguem tanto o ensino quanto a aprendizagem de Cálculo com foco na construção de conhecimento dos educandos, como demonstram as pesquisas realizadas por Morelatti (2001), Gonçalves (2012) e Melo (2002), dentre outras. Essas pesquisas discutiram processos de ensino nos quais os alunos têm o direito à voz, ao diálogo, à investigação e interação com o objeto matemático, favorecendo processos de construção de conhecimento. Ou seja, nesses casos, foi concedida ao aluno a oportunidade de falare de se expressar, e o foco da aula não estave centrada na fala do professor. Os conceitos que antes eram transmitidos como verdades prontas e acabadas passaram a ser material para investigações realizadas pelos alunos.

A presente pesquisa de mestrado igualmente buscou oportunizar um ambiente que favoreça a construção de conhecimento dos alunos. O foco deste estudo foi investigar uma proposta de ensino para a disciplina de Cálculo I a distância, mais especificamente sobre o conteúdo de Derivadas, que favorecesse a construção de conhecimento dos alunos, usando Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC), e que não fosse centrada em ações de repetição, de reprodução de exercícios com uso de fórmulas, o que observamos comumente em diferentes cenários das aulas de Cálculo em experiências anteriores como aluna e/ou professora desta disciplina.

Durante minha[1] graduação em Licenciatura Matemática na Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, quando cursei as disciplinas de Cálculo I e Cálculo II, presenciei situações de reprovação, desistência e dificuldades de aprendizagem. De uma forma geral, os alunos da turma enfrentavam problemas em relação à compreensão dos conceitos, pois foram inúmeras as vezes em que nos reuníamos em horários extraclasse para fazermos os exercícios e tentarmos compreender a teoria. Porém, sempre dedicávamos a maior parte desse tempo

[1] A partir deste parágrafo o texto será redigido na primeira pessoa do singular, pois se trata de um relato de experiência da autora da pesquisa.

para a resolução dos exercícios, "seguindo o modelo" que o professor ou autor do livro havia fornecido. Os exercícios para os quais não tínhamos nenhum modelo a seguir, na maioria das vezes, não eram resolvidos, pois desistíamos diante do primeiro impasse que surgia.

À vista disso, sempre me indaguei se realmente havia apreendido o saber relacionado a essa disciplina. Somente no ano de 2012, quando, recém-formada, ingressei para o quadro de professores temporários da instituição onde realizei o curso de graduação, obtive a resposta para minha indagação. Naquele momento, no papel de professora de Cálculo II, descobri que, infelizmente, o que havia compreendido dos conteúdos da disciplina durante o curso de graduação era insuficiente para ministrá-la. Na maioria das vezes, não me lembrava dos conceitos básicos, e nem mesmo dos exercícios que tanto fiz e refiz.

Como professora, ressalto a importância de buscar novas metodologias de ensino que superem tais dificuldades ou as amenizem, usando recursos que mobilizem os alunos a construírem conhecimento e não a reproduzirem informações.

Na busca pelo meu desenvolvimento profissional e o desejo de investigar diferentes metodologias e potencialidades de recursos tecnológicos, me candidatei ao Mestrado em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Obtive aprovação e, em parceria com a minha orientadora, optamos[2] por investigar possibilidades de aprendizagem usando as TDIC em uma disciplina de Cálculo I desenvolvida em espaços virtuais, em um processo de Educação a Distância (EaD).

Pesquisas que investiguem as contribuições do uso da TDIC para a aprendizagem do Cálculo são importantes para a Educação Matemática porque o uso de tecnologias pode ser um caminho a ser seguido na busca de superações ou amenização das dificuldades já mencionadas. Quanto à EaD, julgamos necessária pesquisas que reflitam sobre a aprendizagem também nesta modalidade. Ao olharmos para as pesquisas relacionadas com o ensino de Cálculo e o uso de TDIC, observamos que processos na modalidade presencial têm sido muito estudados, mas ainda são poucas as pesquisas focadas em processos de ensino a distância.

Apresentamos a seguir algumas pesquisas que tratam do ensino e aprendizagem do Cálculo, usando TDIC, no espaço presencial: Morelatti (2001), Melo (2005), Costa e Souza Junior (2007), Costa e Salvador (2004), Gonçalves (2012). Também discutimos algumas pesquisas que envolvem a modalidade de EaD, conforme Bezerra (2012), Côrreia (2012) e

---

[2] Nesse momento o texto será redigido em primeira pessoa do plural, visto que a pesquisa é desenvolvida pela pesquisadora em parceria com a orientadora.

Rosa (2008). A seleção dessas pesquisas se deu a partir da busca de informações por palavras-chave (Tecnologias Digitais, Cálculo, Educação a distância, e Aprendizagem) em bancos de dissertações e teses, e artigos científicos.

Começaremos apresentando a pesquisa de Morelatti (2001) que, em sua tese de doutorado, investigou um ambiente construcionista na disciplina de Cálculo. Segundo a autora, as tecnologias podem se constituir uma alternativa quando se busca a superação de dificuldades relacionadas à compreensão de conceitos de Cálculo. A questão de pesquisa foi "[...] como utilizar os computadores para que a aprendizagem dos conceitos de Cálculo se dê de maneira mais significativa e contextualizada" (MORELATTI, 2001, p. 2).

As TDIC podem ser uma alternativa para a superação das dificuldades enfrentadas no ensino de Cálculo, porém, é importante ressaltar que o uso das TDIC pode também repetir as mesmas ações realizadas no ensino tradicional, ou seja, reproduzir atividades focadas na transmissão da informação. Neste sentido, podemos afirmar que a abordagem do professor é "instrucionista" (PAPERT, 2008). Nessa perspectiva, o computador é usado como "máquina de ensinar", e o aluno recebe passivamente as informações.

As TDIC podem ser usadas de forma a proporcionar um ambiente de aprendizagem que mobilize os alunos a realizarem ações de descoberta, exploração e análise, ou seja, um ambiente construcionista. O termo construcionismo foi utilizado por Seymour Papert, na década de 70 e designa uma abordagem de uso de computador que possibilita ao aluno a construção de seu conhecimento. Para Papert (2008), nessa abordagem o aluno aprende a fazer fazendo, ou seja, sendo sujeito ativo no processo de aprendizagem.

O estudo de Morelatti (2001) teve como objetivo principal identificar princípios para orientar o professor na criação de um ambiente construcionista para a aprendizagem de conteúdos na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, utilizando o computador para construir conhecimento. A pesquisa foi realizada com uma turma de alunos do curso de Estatística, da Faculdade de Ciências e Tecnologia – FCT, da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho".

A referida pesquisa não enfatizou as atividades desenvolvidas pelos alunos, mas a forma como as atividades foram propostas e orientadas pela professora. No que se refere aos resultados da pesquisa, a autora ressalta:

> Os resultados da investigação evidenciam que o ambiente de aprendizagem estabelecido possibilitou uma nova postura e prática docente; uma nova forma de aprender, possibilitando uma abordagem interdisciplinar, mais contextualizada, significativa e prazerosa para o aluno; uma nova maneira de

> trabalhar com os alunos; de contemplar o currículo; de avaliar a aprendizagem, enfim, de desenvolver o processo de ensino e aprendizagem em Cálculo Diferencial e Integral I. (MORELATTI, 2001, p. 2).

Melo (2002), em sua pesquisa de mestrado, investigou o ensino e a aprendizagem do conceito de Integral em um ambiente informatizado. Justificando sua pesquisa, o autor afirma que o uso da metodologia tradicional contribui para o alto índice de reprovação da disciplina. "Umas das possibilidades de reverter este quadro é a utilização das novas tecnologias computacionais como ferramentas didáticas no curso de Cálculo" (MELO, 2002, p. 7). O autor elaborou uma sequência de ensino utilizando o software Maple[3] e a aplicou a uma turma de Cálculo I do curso de Matemática do Centro Universitário São Camilo, em São Paulo.

O referencial teórico dessa pesquisa foi baseado nos estudos de Jean Piaget e de Vygotstky, e do construcionismo de Seymour Papert. O autor ressalta que o desenvolvimento da sequência de ensino contribuiu para a aprendizagem dos alunos, porque "o aluno pensou, raciocinou, agiu, refletiu, trocou ideias com os colegas e construiu um conceito que passou a ter significado para ele." (MELO, 2002, p. 146). A elaboração de uma sequência de ensino que privilegiou o papel ativo do aluno de refletir, agir e argumentar sobre um determinado conceito, constituiu um ambiente propício para a construção do conhecimento. Segundo o autor, o sucesso da sequência didática utilizada está no fato de:

> Construir um conceito a partir daquilo que o aluno já sabe; criar no aluno confiança quanto as suas habilidades e potencialidades; [...] ter claro que os desafios são uma fonte de motivação para elaboração do conhecimento; [...] não "dar resposta" incentivar os alunos a procurarem suas soluções; [...] fazer com que os alunos desenvolvam durante atividade o Ciclo de Ações: descrição-execução-reflexão-depuração-descrição. (MELO, 2002, p. 148).

Em um ambiente construcionista é fundamental que o professor não "dê resposta ao aluno", mas ele deve criar condições para que os alunos investiguem possíveis soluções. A partir dessas investigações, o aluno constrói o conhecimento.

Destacamos ainda que na Universidade Federal de São Carlos (UFSCar), desde 1996, com a implementação do laboratório computacional REENGE[4], iniciou-se um movimento para a melhoria do ensino de Cálculo Diferencial e Integral, usando tecnologias digitais. Costa

---

[3] Maple é um software de computação numérica e gráfica desenvolvido pela Universidade de Waterloo no Canadá. Disponível em: < http://www.maplesoft.com>. Acesso em: 20 Set. de 2013.

[4] Projeto REENGE é um projeto institucional multidisciplinar e interdepartamental do ITA que tem por objetivo elaborar e avaliar técnicas alternativas aplicáveis ao ensino de Física e Matemática em Engenharia.

e Salvador (2004) relatam algumas experiências realizadas com turmas das disciplinas Cálculo Diferencial e Integral I, II e III, do curso de Engenharia Química da UFSCar.

Segundo esses autores, os professores dessas disciplinas usam o software Maple em suas aulas desenvolvendo atividades que incentivam a reflexão por parte do educando. Uma das experiências citadas foi a utilização das tecnologias digitais para explorar o conteúdo de Funções de Várias Variáveis.

> [...] funções de várias variáveis, na maioria das vezes difíceis de serem visualizadas. Nestas a maior riqueza e contribuição que o computador propicia está na construção espacial de domínios envolvendo interseção de regiões, na visualização gráfica e animações das curvas de nível, superfícies, figuras espaciais coloridas, seções e cortes das mesmas com cores diferentes, etc. Para evitar a contemplação do aluno apenas com a beleza gráfica e o mundo colorido que o computador oferece, as simulações e conjecturas são feitas com o questionamento contínuo do professor-orientador que propicia uma análise crítica e favorece o tão desejado aprendizado significativo. (COSTA; SALVADOR, 2004, p. 6).

Observa-se nessa pesquisa que a sua ênfase não está no computador ou no software usado, mas nos conteúdos explorados e na abordagem do professor. Concordamos com os autores, pois de fato o uso de alguns softwares de geometria dinâmica possibilita ao aluno melhor visualização da representação geométrica de conceitos do Cálculo, como a representação da derivada como a reta tangente a uma curva, porém, o uso da TDIC para visualização da representação de um objeto matemático e para contemplação de possibilidades tecnológicas não implica necessariamente na aprendizagem dos alunos.

Costa e Souza Junior (2007) desenvolveram um trabalho colaborativo com alunos de Cálculo do curso de Química, da Universidade Federal de Uberlândia, para buscar compreender como o uso das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) pode enriquecer a produção de projetos dos alunos. Propondo a disciplina em um formato de Educação Bimodal (parte presencial e parte a distância), foi usada a plataforma Moodle[5] e o software Modellus[6]. Em relação à bimodalidade, Costa e Souza Junior (2007, p. 238) afirmam que: “esta prática de ensino a distância faz com que os alunos se sintam mais à vontade, se abram mais, pois a aula virtual é de certa forma equiparada com as aulas presenciais”.

---

[5] A Plataforma Moodle possui recursos para o desenvolvimento de atividades: agenda, Fórum, produção, tarefa, *webfólio* individual, *webteca* e *e-mail*.

[6] O Modellus é um software de simulação, bastante usado para criar e explorar modelos matemáticos. Disponível em: <http://modellus.fct.unl.pt/>. Acesso em: 20 Set. de 2013.

A dissertação de mestrado de Bezerra (2012), realizada na Universidade Federal do Ceará, teve como objetivo analisar o uso das ferramentas de TDIC como possibilidade pedagógica na disciplina de Cálculo I oferecida a uma turma de Licenciatura em Matemática na modalidade semipresencial do Instituto Federal do Ceará – IFCE. O método utilizado nessa pesquisa constituiu-se de buscar na história a identificação de possíveis obstáculos epistemológicos da aprendizagem e, a partir disso, trabalhar a superação desses obstáculos com o uso de tecnologias e recursos de comunicação de EaD em uma experiência desenvolvida com a referida turma. O referencial teórico fundamentou-se nos estudos de Ausubel sobre a Aprendizagem Significativa.

> Os resultados apontam que a utilização do fórum, chat e videoaula, quando bem planejados, sob a perspectiva da Aprendizagem Significativa poderá contribuir na superação de muitas dificuldades. Conclui-se, portanto, que o uso adequado das ferramentas de aprendizagem tecnológica poderá repercutir na melhoria da qualidade do ensino, consolidando uma aprendizagem efetivamente que faça sentido para o aluno e ofereça meios para que este possa intervir positivamente na sociedade em que vive. (BEZERRA, 2012, p. 6).

Destacamos ainda a pesquisa de doutorado de Rosa (2008) que investigou como a construção de identidades *online* em um curso a distância se mostra no processo de ensino e aprendizagem do conceito de integral definida. O ambiente virtual do curso foi o RPG (*Role Playing Game),* um jogo que visa à interpretação e na qual os personagens possuem identidades próprias. Os personagens foram alunos de diversas universidades do Brasil. A pesquisa teve como referencial teórico o constructo Seres-humanos-com-mídias e o Construcionismo de Seymour Papert. No que se refere aos resultados da pesquisa, o autor afirma que cada personagem construiu suas identidades *online* na/a partir das ações que foram desenvolvidas e que tais ações por vezes implicaram em aprendizagem de integrais.

> Entre as coisas que aprenderam, está o fato de compreender as relações existentes entre o problema que possuíam, o qual era proveniente de uma personagem conceitual, mas que se transformou em um problema coletivo de todos os personagens, e o plano em que habitavam. Ou seja, construíram pontes entre eles e o conhecimento matemático no decorrer de suas ações [...]. Discutiram matemática em relação às suas necessidades e frente à performance matemática de entender o conceito de integral definida na pele de outro. [...]. Há, assim, uma episteme diferenciada, pois a hiperrealidade possibilita perceber, imaginar e manipular objetos matemáticos de forma a relacionar personagens conceituais e planos de imanência, os quais são potencializados pelo ciberespaço, enquanto se constrói o conceito matemático. (ROSA, 2008, p. 237).

Ressaltamos também a pesquisa de Côrreia (2012) que investigou o uso de TDIC em um curso de Licenciatura em Matemática na modalidade EaD. Quando a autora analisou o uso de softwares na disciplina de Cálculo, observou que esses eram pouco usados no curso e, quando eram usados, o objetivo era a familiarização com o software e o treino de exercícios, em encontros presenciais das disciplinas. Ou seja, os indícios apontavam para o uso dos softwares em uma abordagem instrucionista e sem evidências de uso nas aulas desenvolvidas em ambiente virtual.

Dentro desse contexto de pesquisas, optamos por investigar a aprendizagem na disciplina de Cálculo, em especial, conhecimentos sobre Derivadas, em um ambiente construcionista, no espaço virtual. O que se propôs foi a criação de um ambiente de aprendizagem virtual construcionista para uma disciplina oferecida no formato de Educação Bimodal (parte presencial e parte a distância). Investigamos apenas as ações desenvolvidas a distância norteadas pela seguinte questão de pesquisa: Quais as possibilidades de aprendizagem sobre Derivadas de funções a partir de interações em um ambiente construcionista?

A partir dessa questão, definimos como objetivo geral: Analisar processos de aprendizagem sobre Derivadas de funções em um ambiente construcionista. Em termos de objetivos específicos destacamos os seguintes:

- Identificar e analisar atitudes do professor e dos alunos que favorecem processos de aprendizagem sobre Derivadas de funções a partir de interações no espaço virtual;
- Identificar e analisar possíveis contribuições do ambiente construcionista para aprendizagem dos alunos.

A pesquisa foi desenvolvida com uma turma de alunos da disciplina de Cálculo I de uma universidade pública do Estado do Mato Grosso do Sul. Dentre os procedimentos metodológicos, foi elaborada uma proposta de atividades utilizando o software GeoGebra em um ambiente virtual de aprendizagem [7] (AVA), a partir da Plataforma Moodle. Esse ambiente foi organizado a partir dos estudos sobre o construcionismo proposto por Papert (2008) de modo a favorecer a aprendizagem de alguns conhecimentos sobre aplicações de Derivada. Com relação às interações no espaço virtual, a proposta foi orientada pela abordagem do "Estar Junto Virtual" de Valente (2005) por esta potencializar as interações entre professor e

[7] Nesta pesquisa, definimos que, ao falarmos em Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA), estamos nos referindo ao ambiente formal, criado a partir da plataforma Moodle, para o desenvolvimento da disciplina de Cálculo I . Embora tenhamos ações e/ou interações desenvolvidas e /ou que aconteceram em outros dois ambiente virtuais, o WhatsApp e o Facebook.

alunos e entre os próprios alunos, e pelas reflexões de Scherer (2005) sobre atitudes de educadores e educandos em espaço virtual.

A análise dos dados foi realizada a partir de duas categorias. A primeira aborda a aprendizagem na/a partir da interação e a segunda aborda a aprendizagem e o ambiente construcionista.

A dissertação está organizada por capítulos. No capítulo 1 apresentamos uma introdução à pesquisa que envolve o contexto, a experiência profissional da pesquisadora e o estado da arte com pesquisas relacionadas à temática abordada.

No capítulo 2 destacamos o referencial teórico que norteia essa investigação: a abordagem construcionista de Papert (2008), as dimensões do construcionismo de Maltempi (2004), o Ciclo de Ações e espiral de aprendizagem de Valente (2005), a abordagem do “Estar Junto Virtual” de Valente (2005) e as atitudes de professores e alunos em espaço virtual segundo Scherer (2005).

No capítulo 3 discutimos sobre o Cálculo Diferencial pelo fato da pesquisa estar relacionada à aprendizagem de derivadas e, para isso, foram usados os estudos de Stewart (2001).

No capítulo 4 apresentamos a metodologia, o caminho metodológico percorrido, o contexto da pesquisa, os participantes, a proposta de atividades, o AVA e os materiais didáticos.

No capítulo 5 detalhamos a análise dos dados produzidos durante a experimentação e, no Capítulo 6, tecemos as considerações finais.

2 A EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA E AMBIENTES VIRTUAIS DE APRENDIZAGEM CONSTRUCIONISTAS

Neste capítulo apresentamos o referencial teórico da pesquisa que são os estudos sobre o “Estar Junto Virtual” realizados por Valente (2005), sobre as atitudes de professores e alunos em AVA realizados por Scherer (2005). Também discutimos a aprendizagem na perspectiva da abordagem construcionista a partir dos estudos de Papert (2008), as dimensões do construcionismo discutidas em Maltempi (2004), e estudos sobre o ciclo de ações e a espiral de aprendizagem desenvolvidos por Valente (2005).

2.1 EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA E INTERAÇÃO: HABITAR ESPAÇOS E O “ESTAR JUNTO VIRTUAL”

Para discutirmos sobre a modalidade de EaD, regulamentada em 20 de dezembro de 1996 pela Lei de Diretrizes e Bases (LDB) da Educação Nacional com a Lei nº 9394, partimos do Decreto nº 562219 de dezembro de 2005 que a caracteriza como:

> Modalidade educacional na qual a mediação didático-pedagógica nos processos de ensino e aprendizagem ocorre com a utilização de meios e tecnologias de informação e comunicação, com estudantes e professores desenvolvendo atividades educativas em lugares ou tempos diversos. (BRASIL, 2005).

A EaD é uma modalidade na qual a educação acontece com alunos e professores não estando fisicamente em um mesmo lugar, mas podem estar juntos virtualmente, com a utilização de TDIC, em espaços virtuais. É nessa caracterização que focamos os estudos realizados nesta pesquisa.

Um espaço virtual tem como principal característica a não presença física de quem o habita, como afirma Lévy (1998) ao caracterizá-lo como o espaço da desterritorização, ou da “não- presença”. Não presença no sentido físico, pois no espaço virtual alunos e professores podem sim estar presentes e juntos, a depender de suas ações, envolvimentos e movimentos.

> O espaço virtual oferece uma nova caracterização para o “estar juntos”, podemos estar juntos em uma sala de aula em um prédio, como podemos estar juntos em uma “sala de aula virtual”. Para estarmos juntos na sala de aula de um prédio, [...] temos de nos locomover de nossas casas [...], em um determinado horário; para estarmos juntos em uma “sala de aula virtual” [...], podemos permanecer em diferentes lugares, distantes ou não (poucos metros ou milhões de quilômetros) e nos unirmos independente de horário. (SCHERER, 2005, p. 52).

Segundo Scherer (2005, p.51) “um espaço para ensinar e aprender a distância deve constituir-se em um espaço aconchegante, convidativo, um espaço que todos queiram habitar”. Para Scherer (2005, p.59-60), em espaços virtuais:

> Os habitantes são aqueles que se responsabilizam pelas suas ações e pelas dos parceiros, buscando o entendimento mútuo, a ação comunicativa, o questionamento reconstrutivo; [...] o encontramos sempre no ambiente [...] observando, falando, silenciando, postando mensagens, refletindo, questionando, produzindo, sugerindo, contribuindo com a história do ambiente, do grupo e dele.

Segundo a autora, um espaço virtual que se caracteriza favorável para a construção de conhecimentos dos envolvidos no processo é aquele em que as ações dos participantes são orientadas pela abordagem construcionista e todos assumem uma atitude de habitante do ambiente. Mas, nos ambientes virtuais temos também os visitantes.

> Os visitantes são aqueles alunos(as) e professores(as) que participam do ambiente de aprendizagem com a intenção de visitar. As visitantes participaram apenas para observar o que estava acontecendo, sem se co-responsabilizar com o ambiente, com o outro, ou com a produção coletiva. Alguns deles chegam a colaborar, mas sem chegar a cooperar com o grupo, pois são parte (sentido estático, momentâneo) [...]. (SCHERER, 2005, p.60).

Ao entrar em um fórum virtual de discussão, por exemplo, um visitante é considerado aquele que, posta mensagem sem se importar com o que os demais colegas ou professor postou; às vezes lê e comenta algo sobre o que o outro (professor e/ ou aluno) postou, mas sem muito envolvimento. A produção coletiva não é uma preocupação de um visitante. Um visitante pode acessar o AVA por livre e espontânea vontade, na intenção de buscar alguma informação, e outras vezes a visita pode dar por uma obrigação para obtenção de nota em uma disciplina ou curso, por exemplo.

Scherer (2005, p.60) apresenta ainda uma terceira atitude de educadores e educandos em espaço virtual, a de transeunte.

> Os transeuntes passam pelo ambiente em um ou mais momentos, às vezes param para observar, mas sem se deter em nenhum espaço em especial, sem se responsabilizar, sem apreender para si o ambiente, sem colaborar ou cooperar. [...] eles se relacionam alheios ao grupo e ao ambiente, pois são apenas passantes.

Um ambiente virtual favorável a aprendizagem se constituiu um local de diálogo, de discussão, que todos habitam e se comprometem com as ações realizadas no ambiente, independente das tecnologias de comunicação utilizadas (AVA, WhatsApp, Facebook, dentre outros). Nesse sentido concordamos com Scherer (2005, p. 52).

> São vários espaços, constituindo o espaço virtual, que pela inteligibilidade na comunicação privilegiam a proximidade entre os sujeitos, desses com os objetos cognoscíveis e o ambiente; são espaços que, pelo diálogo, garantem a leitura do grupo, das suas histórias, das suas curiosidades sejam elas ingênuas ou epistemológicas, dos seus "eus".

Em um espaço virtual os habitantes tem oportunidade de encontrar outros habitantes, um ouvinte/leitor que esteja interessado em suas histórias, investigações, dúvidas e certezas (talvez provisórias). O AVA ou o WhatsApp podem ser constituir nesse espaço, desde que, os participantes sejam habitantes, e como habitantes sintam-se envolvidos com o grupo, um envolvimento capaz de dar uma sensação híbrida entre a solidão e o acompanhamento.

> O sentimento de "estar só" se revela quando percebemos que não há expressões faciais ou palavras para "aprovar" ou "recriminar" o nosso posicionamento ao escrever/falar. É um "estar só" vigiado, mas acolhedor, temporário. O sentimento de "estar acompanhado" se revela ao percebermos que outros estão lá, em um espaço acessado a qualquer momento, que seremos "lidos/ouvidos", que estamos sendo ao mesmo tempo em que constituímos os outros, o todo; criando, aprendendo, questionando, mudando... Estando só, em um diálogo com o "eu" e com os outros; estando acompanhado, em um diálogo com os outros e com o "eu". (SCHERER 2005, p. 52).

Em um espaço virtual, a depender do modelo de abordagem adotada, o aluno tem oportunidade de falar, se expressar, ou seja, "no ambiente virtual, podemos ouvir a todos, a cada um em especial, compreendendo as suas construções, aprendendo juntos e sozinhos, nos tornando mais atores e autores do processo de aprendizagem individual e coletivo." (SCHERER, 2005, p.53). Nesse sentido, nesta pesquisa buscaremos explorar as potencialidades de TDIC como softwares, *applet*, os recursos de comunicação do AVA criado a partir da plataforma Moodle, com o objetivo de proporcionar estudos que privilegiem um alto grau de interação entre o professor e o aluno, bem como, entre os alunos.

> A interação não significa simplesmente um ato social de o professor relacionar-se com o aluno. A interação, segundo Piaget, envolve os dois polos – professor e aluno. O professor pode criar situações ou agir com o aluno da maneira mais adequada possível; se o aluno não reagir, não responder a essa ação do professor, não houve interação. (VALENTE, 2011, p. 24).

Para que haja interação em cursos na modalidade EaD não basta dispormos de tecnologias sofisticadas, é fundamental definir um modelo de EaD focada na interação. "[...] o sucesso do ensino e da aprendizagem nessa modalidade não depende apenas das tecnologias utilizadas, mas do modelo de EaD oferecido, da concepção de educação de todos os envolvidos no processo” (SCHERER, 2005, p. 34). Nesse sentido, Valente (2005) discute três abordagens de EaD a partir da interação entre sujeitos: *Broadcast*, Virtualização da Escola Tradicional e “Estar Junto Virtual”.

Broadcast é uma abordagem focada na transmissão da informação. O papel do professor se resume em preparar o material que será disponibilizado via internet ao aluno “[...] O ponto principal nessa abordagem é que não existe nenhuma interação entre professor e aluno, e mesmo entre alunos” (VALENTE, 2011, p.27). Essa abordagem não possibilita ao professor conhecer e compreender as dúvidas e dificuldades de seus alunos. Pela ausência de interação, não é possível que o professor desafie-os, instigue-os, questione-os, para que estes possam construir conhecimento. Segundo Valente (2011, p.28), a abordagem *Broadcast* [...] “tem sido vista como uma possibilidade de solução para o problema da educação em nosso país: espalha-se a informação a milhares de pessoas e espera-se que ela seja processada, convertida em conhecimento”.

A *Escola Virtual* ou *Virtualização da Escola Tradicional*, como o próprio nome sugere, é um modelo de EaD, ou abordagem de interação, próximo daquilo que se vê em um escola tradicional focada na transmissão de informação, com a diferença de ocorrer em ambiente virtual.

> Assim, o professor passa a informação ao aluno que a recebe e pode simplesmente armazená-la ou processá-la, convertendo-a então em conhecimento. Para verificar se a informação foi ou não processada, o professor pode apresentar ao aprendiz situações- problema, em que ele é obrigado a usar as informações fornecidas. No entanto, na maioria das vezes, a interação professor-aluno resume-se em verificar se o aprendiz memorizou a informação fornecida ou dele solicitar uma aplicação direta um domínio muito restrito, na forma de um teste ou exercício. (VALENTE, 2005, p.85).

Apesar dessa abordagem de EaD apresentar interação entre professor-aluno, ainda é um modelo de interação que não privilegia a construção do conhecimento, o foco é a transmissão da informação. Considerando a proposta de oferta da disciplina de Cálculo, na modalidade de EaD, orientada pelo modelo de Escola Virtual, teríamos uma proposta focada na apresentação, em materiais digitais (escritos ou em vídeo), de definições, demonstrações e fórmulas, apresentadas como verdades inquestionáveis aos alunos. O aluno provavelmente teria um “material de apoio” com exercícios modelos para serem seguidos. Em caso de dúvidas, essas seriam enviadas ao professor e/ou tutor, que por sua vez, retornaria com uma resposta.

A terceira abordagem de EaD apresentada por Valente (2011) é o “Estar Junto Virtual”, que é orientada pelos estudos sobre o construcionismo. Essa abordagem prevê um alto grau de interação entre professor-aprendizes e entre os aprendizes. Diferente das duas abordagens apresentadas, nesta o papel do professor não é mais de transmissor da informação. Segundo Valente (2011), nesse modelo explora-se as potencialidades da TDIC para que o professor possa “estar junto”, acompanhando, interagindo, questionando seus alunos, em ambiente virtual.

> A abordagem do *“Estar Junto Virtual”* apresenta características próprias de educação a distância, contribuindo para uma aprendizagem que também pode ser explicada por intermédio de uma espiral. O ponto central é que essa aprendizagem está fundamentada na reflexão sobre a própria atividade que o aprendiz realiza no seu contexto de vida ou ambiente de trabalho (VALENTE, 2005, p. 85).

Dessa forma, é fundamental que se mantenha o ciclo de ações (será discutido no próximo subcapítulo), que ocorre nas interações entre professor-alunos e entre os alunos. Por essas características, nesta pesquisa a abordagem de EaD adotada será a do *“*Estar Junto Virtual*”*. Na Figura 1, apresentamos o movimento proposto por Valente (2005) para o *“*Estar Junto Virtual*”*.

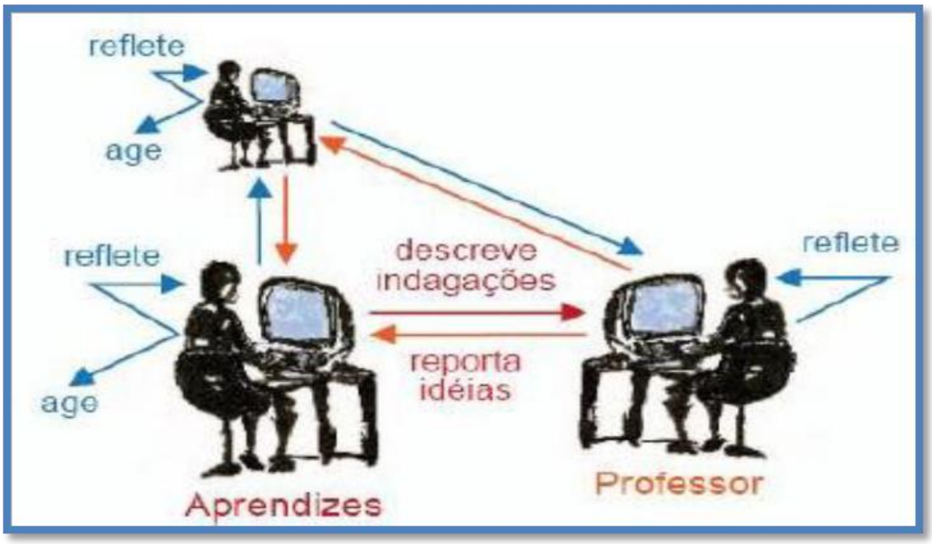


Figura 1 – Ciclo de ações na abordagem “Estar Junto Virtual”
Fonte: Valente (2005).

Podemos observar que quando o professor propõe uma atividade, um problema ao grupo de alunos, esses podem reportar uma ideia ou questão ao professor e colegas. Ao receber esse registro, o professor e/ou aprendizes podem refletir e terão a oportunidade de compreender melhor o problema proposto, podendo questionar ou reportar novas ideias ao grupo, e possibilitar novas reflexões. Pode-se entender o "reportar ideias" como enviar um material em formato de vídeo ou imagens, enviar questões ou considerações sobre o exposto por algum colega do grupo. Porém, é importante que o professor se atente para que não "dê a resposta" ao problema, ou induza os alunos a uma resposta. O docente precisa propor questionamentos que desafiem os alunos para que estes vivenciem momentos de reflexão e aprendizagem. Nesse sentido, Valente (2005, p.86) salienta que:

> Os desequilíbrios e conflitos fornecidos pelo professor e por outros colegas têm a função de provocar o aprendiz para realizar as equilibrações em patamares majorantes, como proposto por Piaget. Nesse sentido, a aprendizagem também está acontecendo como produto de uma espiral, proporcionada não mais pela interação aprendiz-computador (como na programação), mas pela rede de aprendizes mediados pelo computador.

As interações entre professor e aluno consideradas na abordagem "Estar Junto Virtual" permitem ao professor conhecer melhor os processos de aprendizagem dos alunos e consequentemente fazer inferências sobre o saber em construção. O educador cria situações em que o aluno se sinta desafiado, pois a aprendizagem só acontece quando o sujeito se sente desafiado, desequilibrado cognitivamente, em dúvida sobre suas certezas e conjecturas.

> É neste processo de busca pelo equilíbrio, ao compreender e apreender a novidade, acomodando o desconhecido ao que é conhecido, que o sujeito aprende. Ele coopera, opera mentalmente com e sobre as suas certezas, e com e sobre as certezas de outros e do meio, busca o equilíbrio, que é sempre provisório, pois deixa de existir ao surgir um novo desequilíbrio. (SCHERER, 2005, p.89).

O que concluímos é que para que o movimento proposto pelo "Estar Junto Virtual" aconteça, se faz necessário que educadores e educandos sejam habitantes do AVA (SCHERER, 2005), e que as ações sejam orientadas pela abordagem construcionista. Para discutir o que compreendemos por esta abordagem, na próxima seção serão discutidas algumas características da abordagem construcionista (PAPERT, 2008) que orientaram a organização do ambiente virtual construcionista criado para o desenvolvimento da experimentação da pesquisa, além de estudos sobre o Ciclo de ações e a espiral de aprendizagem (VALENTE, 2005) que contribuíram para discutir a aprendizagem em espaço virtual.

2.2 CONSTRUCIONISMO, CICLO DE AÇÕES E A ESPIRAL DE APRENDIZAGEM

Na década de 60, no *Massachusetts Institute of Technology*, Seymour Papert iniciou o estudo sobre o construcionismo, que tem como raiz teórica o construtivismo proposto por Jean Piaget, com dois diferenciais: o primeiro é a presença do computador, e o segundo é o envolvimento afetivo do aluno em realizar uma atividade de seu interesse (VALENTE, 1999). Como a abordagem construcionista é fundamentada no construtivismo, se postula que o aluno constrói o seu conhecimento e não é um receptor de informações que lhe foram transmitidas.

> [...] o aprendiz deve processar a informação que obtém interagindo com o mundo dos objetos e das pessoas. Essa interação coloca o aprendiz diante de problemas e situações que devem ser resolvidos e, para tanto, é necessário buscar certas informações. No entanto, para aplicar estas informações é necessário a interpretação e o processamento das mesmas, o que implica a atribuição de significado e, portanto, de construção de novos conhecimentos. (VALENTE, 2003, p.2).

Na abordagem construcionista considera-se que o aluno constrói conhecimento interagindo com o computador a partir da resolução de uma problemática proposta. Assim, o aluno ensina a máquina, e não o contrário. Maltempi (2004, p.265) ressalta que o construcionismo

> [...] é tanto uma teoria de aprendizado quanto uma estratégia para a educação, que compartilha a ideia construtivista de que o desenvolvimento cognitivo é um processo ativo de construção e reconstrução das estruturas mentais, no qual o conhecimento não pode ser simplesmente transmitido do professor para o aluno. O aprendizado deve ser um processo ativo, em que os aprendizes “colocam a mão na massa” (*hands-on*) no desenvolvimento de projetos, em vez de ficarem sentados atentos à fala do professor.

O papel ativo do aluno se reflete em um lema pregado por Papert (1987) que afirma que a abordagem construcionista consiste em obter o máximo de aprendizagem a partir do mínimo de ensino. O mínimo de ensino está relacionado com a atitude do professor, de não dar respostas às questões que propõe ao aluno, ou que esse tenha proposto. Ou seja, a aula não é centrada na ação do professor em explicar algo, mas na ação do aluno em resolver problemas, questões, cabendo ao professor orientar, questionar, acompanhar para que o aluno encontre soluções.

Com o uso da linguagem digital, o aluno constrói o seu conhecimento agindo sobre o objeto em estudo, “é o aprendizado por meio do fazer, do colocar a mão na massa” (VALENTE, 2005, p.34). Dessa forma, o aluno aprende sendo sujeito ativo, reflexivo e crítico no processo educacional. Para Valente (1999), a nossa sociedade exige cidadãos críticos, que reflitam diante de situações vivenciadas, que saibam argumentar, produzir, trabalhar em grupo e que almeja o desenvolvimento individual e coletivo. E esse autor ressalta ainda que:

> Cabe à educação formar esse profissional. Por essa razão, a educação não pode mais restringir-se ao conjunto de instruções que o professor transmite a um aluno passivo, mas deve enfatizar **a construção do conhecimento pelo aluno** e o desenvolvimento de novas competências necessárias para sobreviver na sociedade atual. (VALENTE, 1999, p.152, grifo nosso).

Concordamos com o autor, pois se o aluno tem um papel passivo diante do processo educacional, sendo apenas ouvinte de seu professor e repetindo aquilo que lhe é apresentado como será possível que esse cidadão se torne crítico e reflexivo se o que ele aprendeu foi repetir? Ao focar na disciplina de Cálculo, como docentes, temos que pensar em que tipo de cidadão queremos educar, aquele que repete, que segue o modelo de livros, ou aquele que reflete, que saberá usar os conceitos do Cálculo em sua futura profissão? E com o uso de computadores na Educação temos também os dois caminhos: o da transmissão de informação (abordagem instrucionista) e o da construção de conhecimento (abordagem construcionista).

Maltempi (2004, p.265) ressalta que:

> Papert posiciona o computador como algo que viabiliza a criação de situações mais propícias, ricas e específicas para a construção de conhecimento. Estas situações geralmente estão relacionadas com o desenvolvimento de projetos, pois o aprendiz tem mais oportunidade de aprender quando está ativamente engajado na construção de um artefato sobre o qual possa refletir e mostrar a outras pessoas.

Nesse sentido, criamos para a experimentação da pesquisa, uma proposta de atividades, com o uso do computador, mais especificamente com o software GeoGebra, abordando o conteúdo de Derivadas, com o objetivo que ao desenvolverem essas atividades produzindo algo com o uso do software; os alunos tivessem espaço para investigação e análise do objeto matemático em estudo. Ou seja, o que se intencionou foi a criação de situações em que os alunos pudessem vivenciar momentos de reflexões, para que os conceitos do Cálculo não fossem trabalhados como verdades prontas e finalizadas, mas como resultados de investigações realizadas pelo educando ao interagir com o computador, com o professor e demais alunos.

Para caracterizarmos melhor um ambiente construcionista, proposta desta pesquisa, resgatamos estudos de Maltempi (2004) em que o autor discute cinco dimensões do construcionismo, sendo elas, a pragmática, a sintônica, a sintática, a semântica e a social.

A **dimensão pragmática** está relacionada à utilização ou aplicabilidade de conceitos explorados na atividade proposta no momento presente do aluno e não apenas em um futuro distante. O aluno precisa desenvolver uma atividade que lhe seja útil e que lhe possibilite contato com conceitos novos. Dominar esses conceitos e poder dialogar sobre eles, desperta no aprendiz, segundo Maltempi (2004), uma sensação de poder e praticidade, sensação essa que lhe dá animo para que este busque aprender cada vez mais.

A motivação e o diálogo se constituem elementos que caracterizam um ambiente de aprendizagem construcionista. Com relação ao elemento motivação, o aluno, ao conseguir sucesso na solução de um problema de seu interesse, proposto pelo professor ou levantado por ele, e desenvolvido com o uso de linguagem digital, obtém como resultado um sentimento de *empowerment* (satisfação). Esse sentimento impulsiona o educando a enfrentar novas situações desafiadoras e assim continuar aprendendo e melhorando suas estratégias de resolução das tarefas. Segundo Valente (1999, p.106):

> [...] quando é dada a oportunidade para essas pessoas compreenderem o que fazem, elas experienciam o sentimento do *empowerment* – a sensação de que são capazes de produzir algo considerado impossível. Além disso, conseguem um produto que eles não só construíram, mas compreenderam como foi realizado. Eles podem falar sobre o que fizeram e mostrar esse produto para outras pessoas. É um produto da mente deles e isso acaba propiciando um grande massagem no ego.

O diálogo se constituiu um elemento importante de um ambiente construcionista de aprendizagem, pois a aprendizagem ocorre também na/a partir da interação entre professor e alunos e entre alunos. Em ambientes construcionistas de aprendizagem enfatiza-se o diálogo entre professor e alunos, para que assim o professor possa agir como um mediador e acompanhar seus alunos com o objetivo que estes construam conhecimento interagindo com o computador.

A dimensão **sintônica** está relacionada ao desenvolvimento de projetos que sejam contextualizados e em sintonia com algo de importância para o aluno.

> Nesse sentido, é importante dar ao aprendiz a oportunidade de participar da escolha do tema do projeto a ser desenvolvido — o professor deve mediar o processo de escolha, a fim de se chegar a algo, ao mesmo tempo, factível e desafiador. O computador, muitas vezes, viabiliza projetos que seriam impossíveis no ambiente real devido a limitações físicas de materiais e do meio. (MALTEMPI, 2004, p.265).

Nessa dimensão consideramos que o importante é o aluno se sentir desafiado, interessado, envolvido com a proposta de atividade, cujas ações podem ser indicadas pelo aluno, conforme sugere o autor, ou pelo professor. No caso da proposta partir do professor, consideramos que o aluno precisa “entrar no jogo” e tomar o problema para si, conforme a fundamentos da teoria construtivista e da Teoria das Situações Didáticas (TSD), propostas por Jean Piaget e Guy Brousseau, respectivamente. Pois em ambas teorias se postula que o aluno aprende se adaptando a um meio, que precisa provocar nele desequilíbrios cognitivos, ou seja, o educando aprende quando ele se sente desequilibrado cognitivamente, e tal desequilíbrio, pode ser gerado pela própria proposta de atividades, bem como, na interação com professor e demais alunos.

Dessa forma, buscamos fundamentos na TSD e no Construtivismo para compreendermos melhor a dimensão sintônica, destacada por Maltempi (2004). Assim o professor pode pensar em uma atividade que ele considere importante que o aluno desenvolva e que envolva os conceitos em estudo na disciplina, por exemplo. Ao propor essa atividade ao educando, este necessariamente precisa entrar no jogo, ou seja, ele precisa tomar o problema como se fosse seu, mesmo ele não tendo participado efetivamente da elaboração do problema. Nesse momento, o aluno inicia uma trajetória para resolver o problema, no caso específico dessa pesquisa essa trajetória se dá usando o computador, e esse início tem que acontecer por um desejo do aluno em resolver o problema que torna-se “seu”, e não por uma obrigação ou por ordem do professor.

Compreendemos assim que se o aluno tomar o problema para si, ou seja, sentir que tal resolução é importante para ele, a dimensão sintônica do ambiente construcionista é atendida. Dessa forma, ao elaboramos atividades sobre a Regra de L’Hospital e Máximos e Mínimos de Funções, buscamos propor questões que pudessem despertar o interesse do aluno, em um primeiro momento, pois ele teria como agir sobre o problema e manter-se na busca pela solução a partir dos questionamentos feitos pela professora. E ainda elaboramos atividades contextualizadas, ora com outras áreas do conhecimento, ora com a própria Matemática, como foi o caso, das atividades sobre Máximos e Mínimos e Regra de L’Hospital, respectivamente.

Dando continuidade, outra dimensão (MALTEMPI, 2004) **é a sintática**, que diz respeito ao fácil acesso e uso, pelo aluno, de elementos constituintes do ambiente construcionista de aprendizagem e a interação com esses elementos, de forma a favorecer a sua aprendizagem. Dessa forma, em um ambiente construcionista o aluno tem a possibilidade de acessar e interagir com diferentes materiais. Materiais esses que precisam favorecer a aprendizagem. Assim não basta apenas disponibilizar ao aluno diferentes tecnologias, ou materiais didáticos, mas se torna fundamental a exploração feita pelo educando, de forma a favorecer sua aprendizagem.

Uma quarta dimensão de um ambiente construcionista é a **semântica**, que diz respeito ao trabalho com atividades que façam sentido para o aluno, ou seja, que tenha significado, evitando o uso de uma série de símbolos e fórmulas que valorizam as técnicas de uso e não a compreensão de conceitos.

Por fim, temos a quinta dimensão de um ambiente construcionista, a **social,** que

> [...] aborda a integração da atividade com as relações pessoais e com a cultura do ambiente no qual ela se encontra. O ideal é criar ambientes de aprendizagem que utilizem materiais valorizados culturalmente. Nesse sentido, a programação de computadores e o domínio da tecnologia em geral representam bons materiais a serem aproveitados, uma vez que são bem valorizados na sociedade atual. A questão é aproveitá-los de modo educacionalmente produtivo. (MALTEMPI, 2004, p.5)

Assim o alcance da dimensão social se dá através da valorização cultural e social no ambiente construcionista. Como o próprio autor pontua, o uso de computadores se constituem materiais interessantes para tal valorização. Mas ressaltamos que na criação de um ambiente construcionista de aprendizagem, não basta apenas um aluno e um computador, a questão é como usar o computador para favorecer a construção do conhecimento do aluno.

Resumidamente é necessário que o ambiente seja “acolhedor que proporcione a motivação do aprendiz a continuar aprendendo, um ambiente que seja rico em materiais de referencia que incentive a discussão e a descoberta e que respeite as características especificas de cada um” (MALTEMPI, 2004, p.3). As atividades propostas devem ser matéticamente ricas, sendo desafiadoras, para que o aluno sinta-se cada vez mais motivado a aprender. Porém não basta apenas o cuidado na elaboração de atividades e escolha do software, pois se constitui também um elemento fundamental para a elaboração de um ambiente construcionista, as ações do educador em não “dar respostas”, mas propor questionamento e desafios que oportunize aos educandos a construção do seu conhecimento.

As ações do professor são fundamentais para a manutenção do ambiente construcionista, pois o professor, “[...] tem que entender as ideias do aprendiz e sobre como atuar no processo de construção do conhecimento para intervir apropriadamente na situação, de modo a auxiliá-lo nesse processo.” (VALENTE, 1999, p. 95).

Na busca da compreensão, na abordagem construcionista, da construção do conhecimento do aprendiz com o uso do computador e do papel do professor nessa abordagem, Valente (2005) desenvolveu estudos sobre o “ciclo de ações” e a “espiral de aprendizagem”.

Na interação entre aluno e computador, diante de uma tarefa a ser realizada, é possível analisar a aprendizagem a partir do ciclo de ações: descrição- execução- reflexão- depuração, conforme Figura 2.

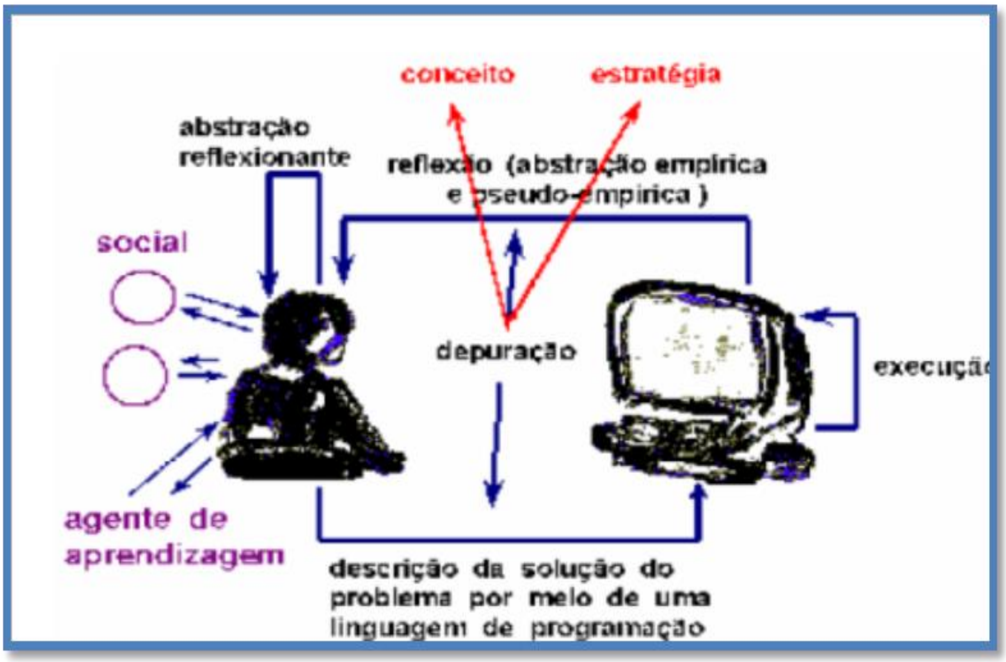


Figura 2 – Ciclo de ações na interação do aprendiz com o computador

Fonte: Valente (2005, p.64)

Quando o aluno está diante de um problema, ele mobiliza conceitos que podem solucionar o problema, e desenvolve uma estratégia de solução. A **descrição** da solução é feita usando uma linguagem de programação, ou os comandos próprios do software ou *applet*. Nessa fase de descrição, o aluno age sobre o problema e “ensina” ao computador uma solução. O computador realiza a **execução** a partir da descrição e apresenta uma resposta na tela (*feedback*). Essa resposta permite ao aluno **refletir** sobre a descrição apresentada e sobre a solução do problema em estudo, ao observar se a resposta obtida é coerente ou não com aquela que esperava.

A etapa da reflexão pode envolver abstrações empíricas, pseudo-empíricas e reflexionantes que VALENTE (2005, p.62) justifica a partir dos estudos de Piaget:

> A abstração mais simples é a empírica, que permite ao aprendiz extrair informações do objeto ou das ações sobre o objeto, tais como a cor e a forma do mesmo. A abstração pseudo-empírica permite ao aprendiz deduzir algum conhecimento da sua ação ou do objeto. [...]. Já a abstração reflexionante possibilita a projeção daquilo que é extraído de um nível mais baixo (por exemplo, o fato de a Figura obtida ser um quadrado) para um nível cognitivo mais elevado ou a reorganização desse conhecimento em termos de conhecimento prévio (por exemplo, pensar sobre as razões que levaram a descrição fornecida produzir um quadrado). No caso da abstração reflexionante, o aprendiz está pensando sobre suas próprias ideias.

A abstração empírica e pseudo-empírica refere-se às propriedades que o aluno retira do objeto em estudo a partir do observável. Nesse estágio de abstrações "[...] o aprendiz ainda está muito dependente do resultado empírico obtido e as depurações decorrentes podem ser vistas como pequenos ajustes, nunca como grandes mudanças conceituais." (VALENTE, 2005, p. 68).

Na abstração reflexionante, o aluno está em um nível mais complexo de reflexão. Diante de uma situação desafiadora, ele age sobre os conhecimentos já construídos por ele, ao utilizar conhecimentos anteriores, em patamar inferior, incluindo novas informações e depurando-as para construir o conhecimento, agora em patamar superior. Nesse caso, envolve mudanças conceituais do aprendiz.

No caso da resposta não ser a esperada, o aluno reflete ao **depurar** conceitos e/ou estratégias usados, e assim mobiliza ou constrói novos conhecimentos para a solução do problema. Segundo Morelatti (2001):

> Na sequência de ações descrição-execução-reflexão-depuração, o erro passa a ter um papel fundamental, pois quando a resposta, ou o *feedback* dado pelo computador não é satisfatório, ou ainda, é diferente do esperado, o aluno vai depurar suas ideias, isto é, passa a refletir, a pensar sobre os conteúdos envolvidos. Os desequilíbrios causados pelos "erros", ou seja, causados pela não verificação de sua hipótese leva o aluno a refletir e a buscar novas informações que devem ser incorporadas como parte de seu conhecimento e aplicadas à resolução do problema. Tanto a reflexão como a busca de novas informações favorecem a construção do conhecimento [...]. (MORELATTI, 2001, p. 98-99).

No movimento de o aluno refletir sobre o problema e buscar novas informações contribui para que ele possa (re)construir conhecimento. Segundo Valente (2005, p.53):

> O processo de achar e corrigir o erro constitui uma oportunidade única para o aluno aprender sobre um determinado conceito envolvido na solução do problema ou sobre estratégias de resolução de problemas. O aluno pode também usar seu programa para relacionar com seu pensamento em nível metacognitivo. Ele pode analisar seu programa em termos de afetividade das ideias, estratégias e estilo de resolução de problema. Nesse caso, o aluno começa a pensar sobre suas próprias ideias (abstração reflexiva).

Após a depuração, o aluno poderá assim gerar uma nova descrição do problema. Dessa forma o ciclo reinicia-se e a aprendizagem acontece em forma de espiral ascendente, conforme a Figura 3.

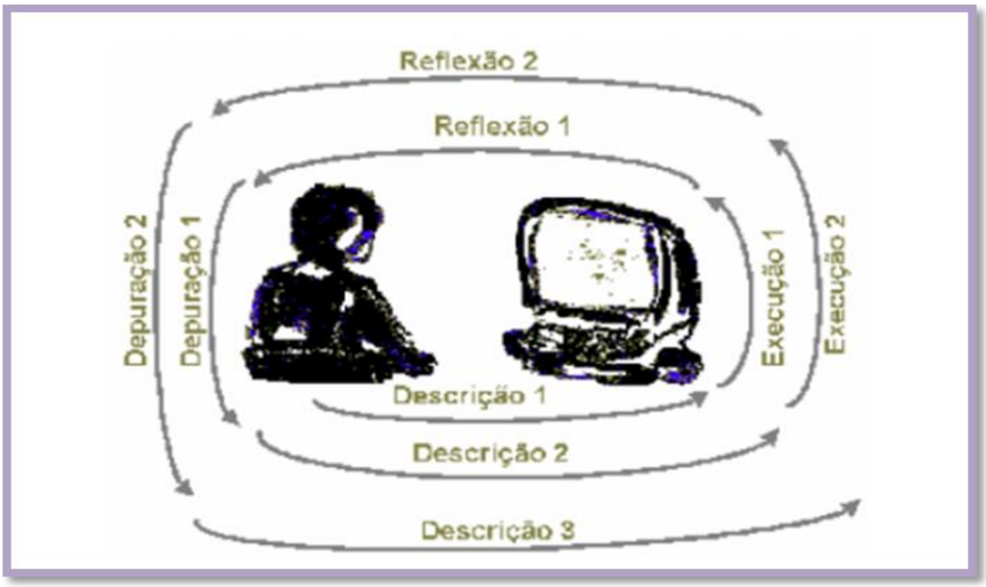


Figura 3 – A espiral da Aprendizagem na interação Aprendiz/computador
Fonte: Valente (2005)

A espiral de aprendizagem é ativada e mantém-se a partir do ciclo de ações, ou seja, “tanto as ações cíclicas quanto a espiral de aprendizagem estão acontecendo também simultaneamente, uma alimentando a outra. Nesse sentido, a espiral não cresce se o ciclo não acontece.” (VALENTE, 2005, p.72).

Na Figura 2, nas ações do ciclo descrição- execução-reflexão-depuração, existem dois aspectos que são de fundamental importância: **o mediador** ou **agente de aprendizagem** e o **contexto social**.

O mediador, que pode ser o professor, caso desta pesquisa, é o responsável em propor problemas, em fazer bons questionamentos e intervenções que contribuam para que o aluno construa conhecimento. Dessa forma, podemos entender que o papel do professor é manter o ciclo de ações em movimento e consequentemente o crescimento da espiral de aprendizagem. Ele precisa desafiar o aluno, com o objetivo de fazer com que ele reflita sobre o problema proposto, para assim encontrar e testar estratégias que o solucione.

Outro aspecto que ganhou destaque no ciclo de ações foi **o contexto social**, porque o aluno possui contato com colegas, pais, amigos, professor, ou seja, ele é um ser social, que possui história e conhecimentos construídos que influenciam em suas novas aprendizagens. E o aluno pode recorrer a esse contexto, meio social como “fonte de ideias, de conhecimento ou de problemas a serem resolvidos através do uso do computador.” (VALENTE, 2005, p.54).

Em nossa pesquisa, a análise dos dados foi realizada também a partir dos estudos sobre a espiral de aprendizagem e o ciclo de ações de Valente (2005). As ações e produções fundamentaram-se na abordagem construcionista, tanto para a criação do ambiente de aprendizagem e elaboração da proposta de atividades, quanto para a definição da atitude do professor o longo da experimentação.

Assim, finalizamos a apresentação do referencial teórico da investigação. No próximo capítulo apresentaremos alguns estudos sobre Derivadas que foram contemplados na proposta de atividades.

3 ALGUMAS APLICAÇÕES DE DERIVADAS DE FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL: REGRA DE L'HOSPITAL E MÁXIMOS E MÍNIMOS

Neste capítulo serão apresentados estudos sobre Cálculo Diferencial e Integral, abordando sua importância tanto para a Matemática, quanto para outras áreas. A maior ênfase será no Cálculo Diferencial por ser o foco de nossa pesquisa, mais especificamente estudos sobre Derivadas de funções de uma variável: a Regra de L'Hospital e Máximos e Mínimos.

Atualmente estudos sobre o Cálculo Diferencial e Integral são realizados em disciplinas de alguns cursos do Ensino Superior, em especial, na área de Ciências Exatas, como os cursos de Matemática, Física e Engenharias. Esse fato se dá principalmente pela a presença de conceitos de Cálculo em problemas vinculados às profissões em que atuam os egressos desses cursos.

Por ser importante na futura profissão dos estudantes desses cursos, segundo Lachini (2001), é importante que o ensino do Cálculo oportunize ao aluno a compreensão e a reflexão sobre os conceitos fundamentais, e não ações de reprodução de exercícios, que por vezes são descontextualizados, não fazendo sentido para o aluno. O fato é que o processo de ensino e de aprendizagem em tal disciplina é uma problemática, perceptível pelos altos índices de reprovação e evasão, como ressaltam Cabral e Catapani (2003). Para Almeida, Souza e Fatori (2007, p. 3),

> [...] o que se pode perceber é que o insucesso dos alunos está fortemente relacionado com a não adequação dos conteúdos que compõe os programas das disciplinas de Cálculo à realidade dos estudantes e às necessidades do sistema social, cultural e econômico, com uma metodologia que, em geral, prioriza operações, técnicas e repetição de algoritmos, entre outros fatores.

Nesse sentido, em nossa pesquisa, criamos um ambiente construcionista, voltado para o ensino de conteúdos relacionados ao conceito de Derivadas, no qual o aluno possa ter espaço para a aprendizagem, a partir da reflexão, exposição e discussão de suas descobertas. As técnicas, os procedimentos e fórmulas não devem ser prioridade no processo de ensino, mas decorrência de resultados dos estudos dos alunos no processo de aprendizagem. E foi nesse sentido que elaboramos e desenvolvemos uma proposta de atividades sobre Derivadas, que resultou na experimentação da pesquisa, e contemplou estudos sobre a regra de L'Hospital e Máximos e Mínimos de Funções de uma variável.

Um dos conceitos chaves do Cálculo é o da Derivada. A Derivada surgiu na tentativa solucionar problemas reais como

> [...] calcular a distância percorrida por um corpo em movimento, sua velocidade e aceleração; comprimentos de curvas; áreas; volumes; analisar os valores de máximo e mínimo de uma função; relacionar declividade de uma curva e taxa de variação, são alguns dos problemas, entre muitos outros, que levaram ao desenvolvimento do Cálculo (ZUIN, 2001, p. 14).

Atualmente seus conceitos são de grande valia para solucionar diversos problemas, desde os mais simples até aos de alta complexidade. O ensino do conceito de derivada pode ser realizado por meio da interpretação geométrica, ou seja, a derivada como inclinação da reta tangente a uma curva em um determinado ponto, como uma taxa de variação, ou ainda a derivada como um limite de função. Segundo Leithold (1994, p.138), a interpretação da derivada como uma taxa de variação demonstra sua importância em diversos campos do conhecimento, como "por exemplo, em Física, a velocidade no movimento retilíneo é definida em termos de uma derivada [...]. A taxa de crescimento de bactérias é uma aplicação da derivada em Biologia."

Vejamos primeiramente a definição e a interpretação da derivada como um limite de função.

> A derivada de uma função f em um número a, denotado por $f'(a)$, é
>
> $$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$
>
> Se o limite existe. Ou ainda chamando $x = a + h$, temos:
> $f'(a) = lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. (STEWART, 2001, p.157).

Vejamos agora a definição e a interpretação da derivada como a inclinação da a reta tangente a uma curva em um ponto.

> A reta tangente a $y = f(x)$ em $(a, f(a))$ é a reta que passa em $(a, f(a))$, cuja inclinação é igual a $f'(a)$, a derivada de f em a. Sendo
>
> $f'(a) = lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. (STEWART, 2001, p.158).

Na Figura 4 apresentamos a interpretação geométrica da Derivada.

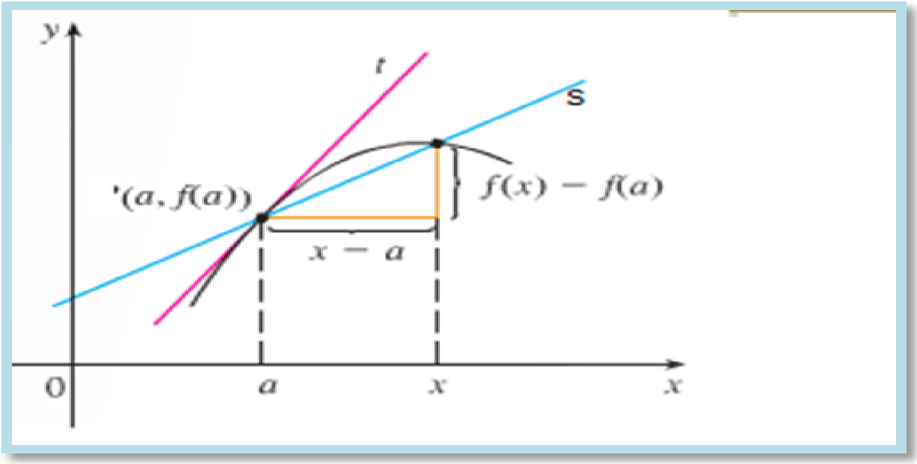


Figura 4 - Interpretação geométrica da Derivada de $f(x)$.

Fonte: (STEWART, 2001, p.159).

Observe na Figura 4, que à medida que diminuirmos a distância $|x - a|$, ou seja, fazendo o $x \to a$, a reta secante s definida pelos pontos $(a, f(a))$ e $(x, f(x))$, se aproxima da reta tangente t que passa pelo ponto $(a, f(a))$.

Como a inclinação da reta secante s, exceto no caso dela ser vertical, é dada por: $m = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, temos que a inclinação da tangente em $(a, f(a))$ é:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Ou ainda, se usamos a equação da reta podemos escrever da seguinte forma:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Para a interpretação e definição da derivada como uma taxa de variação, iremos considerar $y = f(x)$, uma função de variável x, e uma variação em x, de x_1 para x_2. Uma variação ou incremento em x será denotado por $\Delta x = x_2 - x_1$, de forma análoga, a variação ou incremento em y, será denotado por $\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1)$. Assim, a interpretação da derivada como uma taxa de variação será:

O quociente de Diferença entre

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

> é denominado taxa media de variação de y em relação à x no intervalo $[x_{1,}x_2]$. Considerando a taxa de media de variação em intervalos cada vez menores fazendo x_2 tender a x_1, ou seja, fazendo $\Delta x \to 0$. Temos então a definição de taxa instantânea de variação, sendo:
> $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$. (STEWART, 2001, p.158)

Definida a derivada de uma função, podemos discutir algumas aplicações, iniciando com a regra de L'Hospital. A regra de L'Hospital é uma aplicação das derivadas que é usada para cálculo de limites em alguns casos de indeterminações. A regra foi descoberta por Johann Bernoulli, porém foi publicada em 1696, no livro de Analyse des Infiniment Petits, pelo marquês L'Hospital. "A explicação para esse fato é que esses dois matemáticos fizeram um curioso acordo, que dava ao marquês de L'Hospital os direitos das descobertas de Bernoulli" (STEWART, 2001, p.313). A Regra de L'Hospital pode ser enunciada da seguinte forma:

> Sejam que f e g são funções diferenciáveis e que $g(x) \neq 0$, próximo de a (exceto possivelmente em x=a). Suponha que
> $$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \quad e \ \lim_{x \to a} g(x) = 0$$
> Ou que
> $$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \quad e \ \lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$$
> (Em outras palavras temos uma forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$ $e \frac{\infty}{\infty}$). Então
> $$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$
> Se o limite do lado direito existir ou ainda poderá ser $\pm\infty$. (STEWART, 2001, p.306).

Para discutirmos essa Regra, vamos supor que estejamos analisando o comportamento da função $F(x) = \frac{x^5-6x^3+8x-3}{x^4-1}$ quando x se aproxima de 1. Embora $x = 1$ não pertença ao domínio da F, ou seja, a F não está definida para $x = 1$, é possível analisar esse comportamento tão próximo, quanto se queira desse valor. Em outras palavras, é possível determinar o valor do limite da função:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^5-6x^3+8x-3}{x^4-1}.$$

A substituição direta de tal limite na função resulta em uma indeterminação:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 1} \frac{x^5 - 6x^3 + 8x - 3}{x^4 - 1} = \frac{\lim_{x \to 1} x^5 - 6x^3 + 8x - 3}{\lim_{x \to 1} x^4 - 1}$$

$= \frac{1^5-6.1^3+8.1-3}{1^4-1}$ (indeterminação do tipo 0/0).

Logo essa estratégia de solução não pode ser usada no cálculo do limite da função dada. Mas, analisando o gráfico da $F(x)$ o limite existe, conforme observamos na Figura 5.

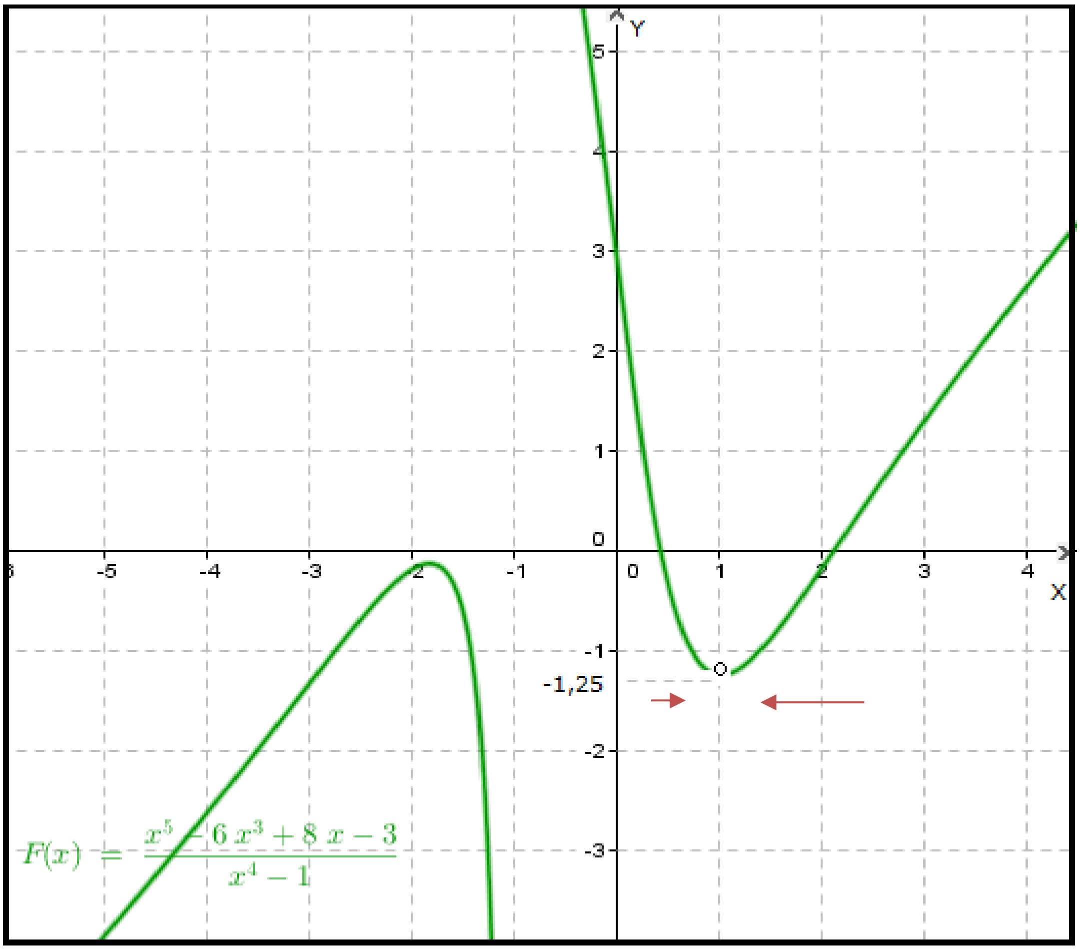


Figura 5 - Curva que representa a $F(x) = \frac{x^5-6x^3+8x-3}{x^4-1}$.

Fonte: Dados da pesquisa.

O que observamos na Figura 5, é que o limite da função dada, quando x tende a 1, é -1,25 (ver setas). Em casos como esse pode-se usar como estratégia de para o cálculo de limite da F(x), quando $x \to 1$, a regra de L'Hospital:

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^5-6x^3+8x-3}{x^4-1} = \lim_{x\to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{5x^4-18x^2+8}{4x^3} = -\frac{5}{4} = -1{,}25$$

Na Figura 6 seguinte é possível analisar o $\lim_{x\to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

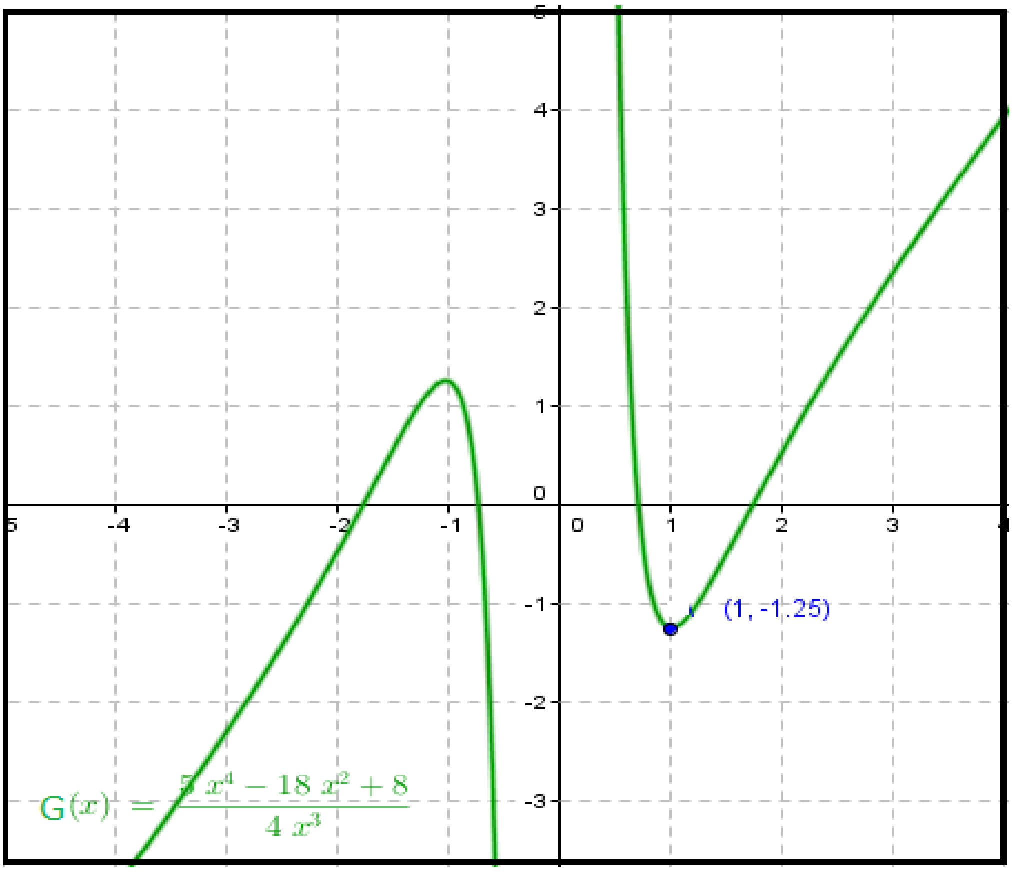


Figura 6 - Representação gráfica da função $\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{5x^4-18x^2+8}{4x^3}$.

Fonte: Dados da pesquisa.

Com base nas Figuras 5 e 6, concluímos que quando $x \to 1$, tanto a $\frac{f(x)}{g(x)} \to -1{,}25$ quanto a $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ →-1,25. Portanto, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$. Esse exemplo mostra como a regra de L'Hospital é uma estratégia útil em alguns cálculos de limites de funções.

Quanto à aplicação de máximos e mínimos de funções de uma variável, Stewart (2001, p.277) afirma que "algumas das mais importantes aplicações do Cálculo Diferencial são os problemas de otimização". E resolvê-los consiste em encontrar uma maneira ótima para se realizar algo que é descrito por meio de uma função matemática. São exemplos de soluções de problemas de otimização o cálculo para uma empresa obter maior lucro em uma produção de determinado produto; o cálculo do melhor período para efetuar a venda de uma criação de gado de corte; dentre outros.

Solucionar esses problemas consiste em encontrar valores de Máximos ou de Mínimos de uma função. Apresentamos então a definição de ponto e valores de máximos e mínimos globais.

> Uma função f tem máximo absoluto (ou máximo global) em c se $f(c) \geq f(x)$, para todo x em D, sendo D o domínio da f. O número $f(c)$ é chamado de valor máximo de f em D. Analogamente, f tem um mínimo absoluto em c se$f(c) \leq f(x)$, para todo x em D, e o número $f(c)$ é chamado de valor mínimo de f em D. Os valores máximo e mínimo de f são chamados de valores extremos de f. (STEWART, 2001, p.277).

Na Figura 7 apresentamos esboço de um gráfico de uma função com máximo global em $x = d$, sendo o valor de máximo global $f(d)$, e como mínimo global em $x = a$, analogamente o valor de mínimo global é $f(a)$.

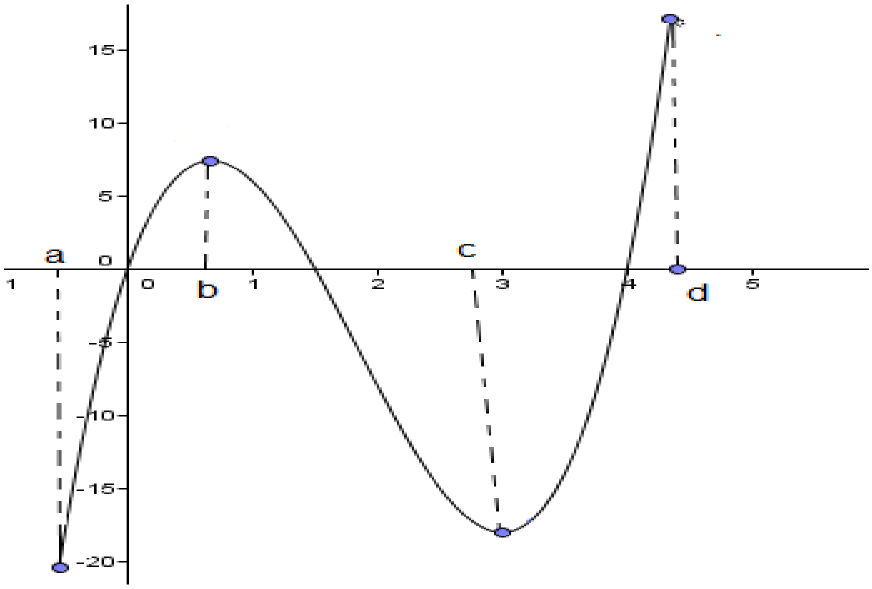


Figura 7 - Representação gráfica de Máximo e Mínimo local e Global

Fonte: Dados da Pesquisa.

Agora consideramos na Figura 7 apenas os valores de x entre $]0,4[$, ou seja, em um intervalo aberto que contém b e c. Dessa forma $f(b)$ é o maior valor que a função assume nesse intervalo. De forma análoga $f(c)$ é o menor valor que a função assume nesse intervalo. Então essa é uma função com máximo local em $x = b$, sendo o valor de máximo local é $f(b)$ e como mínimo local em $x = c$, analogamente o valor de mínimo local é $f(c)$.

> Uma função f tem um máximo local (ou máximo relativo) em s se f(c)≥ $f(x)$, quando x estiver nas proximidades de c. [isso significa que $f(c)$≥ $f(x)$ para todo x em algum intervalo aberto contendo c.] Analogamente, f tem um mínimo local em c se $f(c)$≤ $f(x)$ quando x estiver nas proximidades de c. (STEWART, 2001, p.278).

Como a derivada pode ser interpretada como a inclinação da reta tangente a uma curva, então em um ponto (a, f(a)) de máximo ou de mínimo, se a reta tangente existir nesse ponto, ela será paralela ao eixo das abscissas. Em decorrência disso tem-se o teorema de Fermat. Enunciamos então o teorema e na sequência a definição de números críticos.

> Teorema de Fermat: Se f tiver um máximo ou um mínimo local em c, e suponha que $f'(c)$ exista, então $f'(c) = 0$.
> **[...]** Um número crítico de uma função f é um número c no domínio de f onde ou $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe. (STEWART, 2001, p.280).

O teorema de Fermat é bastante útil para o Cálculo de alguns números críticos, porém essa condição não é suficiente para que c seja um ponto de máximo ou de mínimo local.

Representamos na Figura 8 os três casos que representam a função $f(x)$ e suas respectivas derivadas $f'(x)$. Sendo c um número crítico de f então $f(c) = 0$ (caso I e II) ou $f(c)$ não existe (caso III).

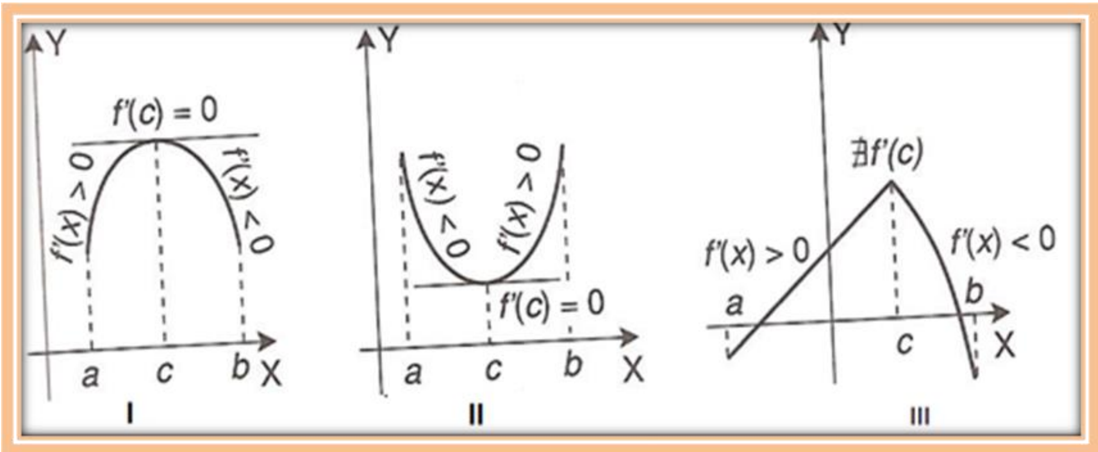


Figura 8: Representação de números críticos e derivadas de algumas funções

Fonte: (FLEMMING; GONÇALVES, 2006, p.202).

Com base na Figura 8 tem-se que se $f'(x) > 0$ sobre um intervalo, então f é crescente nele. Se $f'(x) < 0$ sobre um intervalo, então f é decrescente nele. Como consequência desse fato tem-se o teste da Derivada Primeira:

> Seja c um número crítico de uma função f continua.
>
> - Se o sinal da derivada for positivo à esquerda do número crítico c e negativo à direita dele, o ponto A =(c, f(c)) é um máximo local.
>
> - Se o sinal da derivada for negativo à esquerda do número crítico c e positivo à direita dele, o ponto A =(c, f(c)) é um mínimo local.
>
> - Se o sinal da derivada for o mesmo em ambos os lados do ponto crítico, o ponto não é máximo nem mínimo local. Fonte: (STEWART, 2001, p.295).

Analisando o teste da Derivada primeira, observamos que é um teste importante para determinação de máximos e mínimos. Apresentaremos na sequência, como a derivada segunda ajuda no Cálculo desses pontos e valores. Mas para isso primeiramente apresentamos algumas definições.

> Se o gráfico de f estiver acima de todas as suas tangentes no intervalo I, então ele é chamado de côncavo para cima em I. Se o gráfico de f estiver abaixo de todas as suas tangentes no intervalo I, então ele é chamado de côncavo para baixo em I. (STEWART, 2001, p.297).

A derivada segunda também é um instrumento importante e fundamental para o estudo da concavidade de uma curva, pois se f' é uma função crescente em um intervalo I, então $f'' > 0$, analogamente, se f' é uma função decrescente em um intervalo I, então $f'' < 0$. Como consequência desse fato tem-se a seguinte propriedade:

> I. Se $f''(x) > 0$, para todo x em I, então o gráfico de f é côncavo para cima em I.
> II. .Se $f''(x) < 0$, para todo x em I, então o gráfico de f é côncavo para baixo em I. (STEWART, 2001, p.298).

Lembrando que "[...] um ponto P sobre uma curva é chamado de ponto de inflexão se a curva mudar de côncava para cima para côncava para baixo ou vice-versa em P." (STEWART, 2001, p.298). A concavidade da curva é uma característica importante que pode ser usada no estudo de máximos e mínimos, assim surge o teste da derivada segunda:

> Sejam f uma função que admite derivada segunda continua no intervalo aberto I, e p$\in I$.
> a. $f'(c) = 0\ e\ f''(c) > 0$ então c é ponto de mínimo local .
>
> b. $f'(c) = 0\ e\ f''(c) < 0$ então c é ponto de máximo local. (STEWART, 2001, p.298).

Assim, finalizamos a apresentação de algumas definições e aplicações de derivadas de funções exploradas na experimentação da pesquisa. No próximo capítulo apresentamos a metodologia da pesquisa.

4 METODOLOGIA DE PESQUISA

Neste capítulo apresentaremos a metodologia da pesquisa, como ela foi organizada e realizada. Apresentaremos o caminho metodológico, os participantes e o contexto da pesquisa, a proposta de atividades utilizada na experimentação, o ambiente virtual de aprendizagem, o material didático e as categorias de análise.

4.1 CAMINHO METODOLÓGICO

Esta pesquisa é de abordagem qualitativa. Lüdke e André (1986) elencam cinco características da pesquisa qualitativa. A primeira característica é que em uma pesquisa de caráter qualitativo a fonte direta dos dados produzidos é o ambiente natural e o instrumento que se caracteriza como fundamental é o pesquisador. Nesta pesquisa, o ambiente natural investigado foi o ambiente virtual de aprendizagem de uma turma de alunos da disciplina de Cálculo I, oferecido no curso de Licenciatura em Matemática, de uma universidade pública do estado de Mato Grosso do Sul. A pesquisadora, que também foi a professora durante os encontros que corresponderam à experimentação da pesquisa, se inseriu nesse ambiente, e mais especificamente, ao participar desse ambiente, a intenção foi a de estudar o processo de aprendizagem desses alunos nesse cenário.

A segunda característica da pesquisa qualitativa é que os dados são preponderantemente descritivos. Como buscamos compreender os processos de aprendizagens dos alunos, a análise dos dados se constituiu da descrição do vivenciado/registrado durante a experimentação e uma entrevista. A terceira característica da pesquisa qualitativa citada por Lüdke e André (1986) é que preocupação com o processo é maior do que com o produto. De fato, essa característica foi marcante em nossa investigação, pois a todo o momento, desde o estudo do referencial teórico, perpassando pela elaboração da proposta de atividades, pela organização do AVA e experimentação, tivemos como principais preocupações o processo da pesquisa. Muito mais que responder a questão de pesquisa, estávamos preocupadas em compreender os processos de aprendizagem dos alunos.

A quarta característica da pesquisa qualitativa é que o pesquisador se atenta para a significação que os pesquisados dão a sua vida e às coisas, e como quinta característica tem-se que “a análise dos dados tende a seguir um processo indutivo” (LÜDKE; ANDRÉ, 1986, p.11). Nesse sentido, nessa pesquisa buscou-se a observação e análise cuidadosa e criteriosa dos dados, os registros de interações entre participantes, e de todo material elaborado para o desenvolvimento da pesquisa, na busca de compreender a aprendizagem dos alunos no AVA.

Esta pesquisa foi desenvolvida a partir das características mencionadas e seguindo um caminho metodológico definido a partir da questão e objetivos da pesquisa. Esse caminho iniciou com o estudo do referencial teórico da pesquisa. Dessa forma, estudou-se sobre o Construcionismo de Papert (2008); ciclo de ações e a espiral de aprendizagem desenvolvidas por Valente (2005; 2011); o “Estar Junto Virtual” de Valente (2005; 2011); as atitudes de educadores e educandos em AVA de Scherer (2005).

O passo seguinte do caminho metodológico foi a escolha dos participantes da pesquisa (discutiremos no subcapítulo 4.2) e do conteúdo a ser explorado (apresentado no capítulo 3). O conteúdo explorado foi definido pelo professor regente da turma de alunos, que foram os participantes da pesquisa. Assim, chegou-se ao conteúdo relacionado às aplicações da Derivada de Funções de uma variável, especificamente Máximos e Mínimos e Regra de L’ Hospital. Para a exploração desses conteúdos foram disponibilizados pelo professor regente da disciplina sete aulas, e optamos por desenvolver seis delas a distância e uma presencialmente.

A partir desses dados, a etapa seguinte da pesquisa foi a elaboração de uma proposta de atividades a ser desenvolvida em AVA, com atividades relacionadas à disciplina de Cálculo, com o uso do software de geometria dinâmica, o GeoGebra. O GeoGebra[8] é um software gratuito que permite trabalhar com a geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e Cálculo. Especificamente, para o Cálculo, possui recurso de representação gráfica e algébrica de funções, possibilitando estudo de limites, derivadas e integrais. A escolha do software se deu por ele possuir as características mencionadas e possuir interface conjunta: álgebra e geometria.

Após a elaboração da proposta de atividades, organizamos o Ambiente Virtual de Aprendizagem para o desenvolvimento da experimentação. Para tal usamos a plataforma Moodle, considerando o perfil dos participantes da pesquisa e orientados pelo referencial teórico da pesquisa. O perfil dos alunos foi identificado a partir de observações de oito aulas do professor regente, quando esse iniciou o ensino do conteúdo de Derivadas. Nessas observações, tivemos a oportunidade de conhecer melhor dificuldades que a turma apresentava em relação ao conteúdo e nos aproximar dos alunos.

---

[8] Disponível em: <http://www.geogebra.org/cms/pt_BR/download/>.

Na sequência do caminho metodológico foi iniciada a coleta de dados da pesquisa a partir de gravações de áudio e filmagem da aula presencial (apenas uma aula aconteceu presencialmente), registros postados nos fóruns do AVA, produções desenvolvidas com o software GeoGebra. Após a experimentação, surgiu a necessidade de dialogarmos com os participantes da pesquisa sobre suas postagens, aprendizagem e interações, para complementação de dados. Sendo assim, elaboramos uma entrevista semiestruturada (apêndice B).

Durante a entrevista alguns alunos mencionaram que na fase da experimentação eles haviam se organizado e criado um grupo no WhatsApp[9] para discussões sobre estudos que estavam realizando na disciplina de Cálculo. Outros alunos disseram que utilizavam o Facebook[10] para trocarem mensagens. Dessa forma, como estávamos interessadas em analisar a interação entre eles, solicitamos aos alunos acesso aos registros desses ambientes, e esses registros também se configuraram como dados da pesquisa.

Ao final da experimentação e entrevistas, em posse dos dados da pesquisa, foram definidos os critérios de análise a partir do referencial teórico, e realizada a análise. Considerando o referencial teórico e os dados produzidos definiram-se as seguintes categorias: Aprendizagem na/a partir da interação e Aprendizagem e o Ambiente Construcionista.

Na primeira categoria o objetivo é analisar se e como a interação entre professora e alunos e entre alunos favoreceu a aprendizagem dos participantes da pesquisa. Nessa categoria caracterizamos os alunos entre habitantes, visitantes e transeuntes do AVA da disciplina e outros ambientes virtuais, segundo Scherer (2005), pois a atitude indica o envolvimento dos alunos em seus processos de aprendizagem. A partir dessa caracterização discutimos a aprendizagem dos participantes da pesquisa a partir da abordagem do “Estar Junto Virtual” (VALENTE, 2005).

Na segunda categoria discutimos as contribuições do ambiente construcionista para o processo de aprendizagem dos participantes da pesquisa. Sendo assim, analisamos como a

---

[9] WhatsApp é um aplicativo para Smartphones, para troca de mensagens instantâneas. Os usuários podem enviar mensagens de textos, imagens, vídeos e mensagem de áudio em mídia a outros usuários.

[10] O Facebook é uma rede social que conta com ferramentas para comunicação, como "Feed de Notícias", bate papo (comunicação síncrona), mensagens (comunicação assíncrona). O "Face", como é mais conhecido, possui também aplicativos para telefones celulares e Smartphones.

proposta dos encontros, o material didático organizado na disciplina, as ações da professora e a organização do AVA favoreceram a aprendizagem dos alunos.

4.2 CONTEXTO E PARTICIPANTES DA PESQUISA

A escolha dos participantes da pesquisa se deu pela disponibilidade de um professor da disciplina de Cálculo I, ofertada em Universidade pública de Mato Grosso do Sul, em aceitar que a pesquisa fosse desenvolvida na disciplina e turma que estava sob sua responsabilidade e ceder aulas para a regência da pesquisadora.

Os participantes da pesquisa foram acadêmicos da disciplina de Cálculo I, oferecida no segundo semestre de 2013, no curso de Licenciatura em Matemática, de uma instituição pública de Mato Grosso do Sul. Apesar de a disciplina ser ofertada para acadêmicos do curso de Licenciatura em Matemática, havia alunos de um curso de Engenharia matriculados na disciplina.

Essa disciplina sempre foi ofertada no curso presencialmente, mas, em caráter experimental, e de acordo com legislação nacional e regulamentada em projeto de curso, para a experimentação da pesquisa, no segundo semestre de 2013 foi realizada em um processo de Educação Bimodal (parte presencial e parte a distância).

Quanto à legislação nacional, de acordo com a Portaria 4.059, de 10 de dezembro de 2004 podem ser ofertadas disciplinas, integrantes do currículo, integral ou parcialmente, na modalidade de educação a distância, formato semipresencial de curso, desde que essa oferta não ultrapasse vinte por cento da carga horária total do curso. No contexto da pesquisa, o curso não oferta disciplina na modalidade de EaD e nem em formato semipresencial (Bimodal), portanto a carga horária ofertada experimentalmente a distância não atinge os 20% da carga horária total do curso, nem mesmo 20% da carga horária da disciplina. A disciplina tem carga horária de 102 horas, sendo que 6 horas foram ofertadas a distância.

Quanto à regulamentação interna da instituição para o processo bimodal, no projeto de curso consta que:

> De acordo com a Portaria 4.059, de 10 de dezembro de 2004, poderão ser ofertadas disciplinas, integrantes do currículo, integral ou parcialmente, na modalidade de educação a distância, formato semipresencial de curso, desde que esta oferta não ultrapasse vinte por cento da carga horária total do curso. (IES, 2009, p.7).

A disciplina foi ofertada experimentalmente em um processo bimodal, mas, nesta pesquisa nos dedicamos apenas em analisar a aprendizagem dos alunos na parte a distância, ministrada pela autora desta pesquisa. A parte da disciplina presencial foi ministrada pelo professor regente. Os momentos presenciais e a distância aconteceram de forma intercalada durante um período da disciplina, nos meses de novembro e dezembro de 2013, como apresentamos no subcapítulo 4.3.

Na elaboração e no desenvolvimento de nossa proposta de atividades, procuramos agir de acordo com o previsto no projeto pedagógico do curso quanto ao desenvolvimento no acadêmico de habilidades e competências como:

> [...] compreender, criticar e utilizar tecnologias digitais em processos de ensino e aprendizagem da matemática. b) propor e desenvolver estratégias de ensino que favoreçam a criatividade e a autonomia do educando, objetivando mais a construção de conceitos que a repetição de regras e algoritmos. (IES, 2009, p.9).

Os conteúdos previstos na ementa da disciplina são: Funções de Uma Variável; Limite e Continuidade; Derivada e Aplicações. Para o conteúdo de Derivada e Aplicações, foco da experimentação da pesquisa, foram destinadas 40 horas de estudo sobre: Conceito de derivada e sua interpretação geométrica; Técnicas para cálculo de derivadas; Regra da Cadeia; Derivadas de ordem superior; Derivação implícita; Taxa de variação; Teorema de Rolle e Teorema do Valor Médio; Estudo e esboço de gráficos de funções usando a derivada e suas propriedades, Máximos e Mínimos; Regra de L'Hospital. Sendo os dois últimos conteúdos os indicados pelo professor regente da disciplina para fazerem parte da experimentação da pesquisa, com carga horária de 7 horas.

O plano de ensino a disciplina apresenta como objetivos geral e específicos:

> **Objetivo geral**: Propiciar campo ao desenvolvimento do raciocínio lógico e do pensamento matemático, apresentando aos alunos os conceitos de Limite e Derivada de forma integrada a ideias relacionadas a esses conceitos. **Específicos** – Propiciar campo ao aprofundamento de conhecimentos sobre funções de uma variável; à identificação de propriedades de funções com base em esboços de seus gráficos; ao conhecimento e à aplicação de técnicas de cálculos de limites e de derivadas; à resolução de problemas usando os conceitos de limite e de derivada e ao desenvolvimento da capacidade de esboçar gráficos de funções usando os conceitos de limite e de derivada. (IES, 2013, p.1, grifo nosso).

A disciplina foi ofertada em 2013, no período de agosto a dezembro, todas as segundas-feiras, quartas-feiras e sextas-feiras, no horário das 7:00 às 8:40 horas. A experimentação foi desenvolvida no período de 21 de novembro a 12 de dezembro de 2013, intercalada com encontros presenciais do professor regente.

Quanto aos participantes da pesquisa, é importante mencionar que deveriam ser todos os alunos matriculados na disciplina de Cálculo I, oferecida no curso de Matemática Licenciatura, no segundo semestre do ano de 2013. Ou seja, um total de 52 alunos, sendo que 7 os acadêmicos de um curso de Engenharia da mesma instituição. No entanto, desse total de alunos, participavam efetivamente das aulas de Cálculo I, no período em que iniciamos as observações para definição do perfil dos alunos, segundo o professor regente da disciplina, 26 alunos. Das aulas correspondentes à experimentação da pesquisa, participaram 15 alunos, que iremos considerar como sendo os participantes da pesquisa.

Nós esperávamos que todos os 26 alunos participassem das ações a distância, porém isso não aconteceu. Na aula presencial que antecedeu ao início do primeiro encontro a distância, a pesquisadora se reuniu com todos os alunos para explicar a propostas dos encontros, a dinâmica, as ações e objetivos da pesquisa. Naquela aula apresentamos os espaços do AVA e dialogamos com os alunos sobre a importância da participação deles para a aprendizagem na disciplina, a liberdade que eles teriam para expor suas opiniões, propor, contrapor, discutir com a professora e os colegas. Nos momentos em que a pesquisadora acompanhou as aulas presenciais do professor regente, que acontecerem em momentos intercalados com as ações a distância, foram reservados alguns minutos para dialogar com os alunos, a fim de que eles participassem das atividades propostas no AVA, mas não houve mais adesões, e encerramos a pesquisa com 15 participantes..

Dos participantes da pesquisa, 8 eram acadêmicos do curso de Matemática Licenciatura e 7 eram acadêmicos de um curso de Engenharia. Na Figura 9 apresentamos como chegamos aos participantes dessa pesquisa, bem como, seus nomes fictícios.

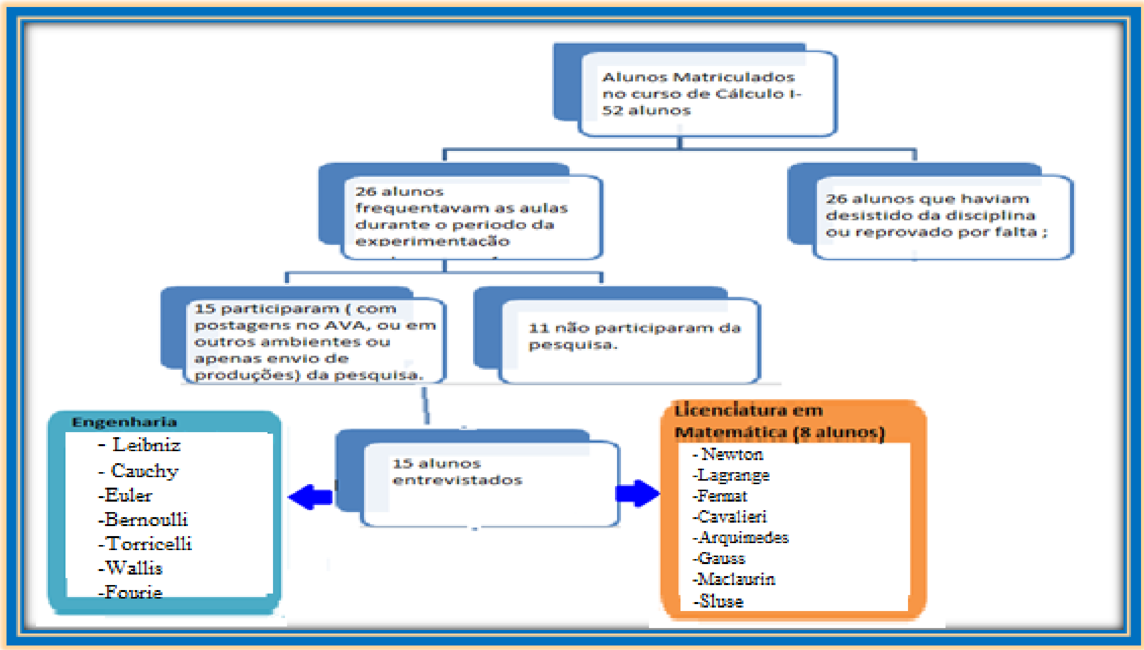


Figura 9 - Participantes da pesquisa

Fonte: Dados da pesquisa.

A partir da entrevista, selecionamos os alunos que fariam parte da análise de dados dessa investigação. Decidimos selecionar os alunos que participaram com postagens em pelo menos dois fóruns da disciplina, pois uma das categorias de análise era com foco na interação entre sujeitos. Assim, os dados dos alunos Maclaurin, Sluse, Arquimedes e Fourie não foram analisados, pois não eram suficientes para discutir os seus processos de aprendizagem, e também esses alunos afirmaram que não fizeram uso de nenhum outro espaço, como por exemplo o Facebook e o WhatsApp, para interagirem com seus colegas. Pelos dados apresentados na entrevista, esses alunos usaram o AVA apenas para busca de materiais didáticos, ou acompaharam alguns fóruns de discussão mas preferiram não manisfestar suas opiniões e resultados.

Assim, foram analisados os dados de 11 acadêmicos, cujas características apresentamos no Quadro 1.

Quadro 1- Características de participantes da pesquisa

Nome do Aluno	**Curso que está vinculado**	**Gênero (F- Feminino e M- Masculino)**	**Idade**	**Número de vezes que está cursando a Disciplina**
Leibniz	Engenharia	M	21 anos	2ª
Euler	Engenharia	M	20 anos	1ª
Cauchy	Engenharia	M	20 anos	1ª
Torricelli	Engenharia	M	22 anos	2ª
Wallis	Engenharia	F	23 anos	1ª
Bernoulli	Engenharia	M	22 anos	2ª
Gauss	Licenciatura em Matemática	M	22 anos	1ª
Newton	Licenciatura em Matemática	M	23 anos	1ª
Lagrange	Licenciatura em Matemática	F	19 anos	1ª
Fermat	Licenciatura em Matemática	F	19 anos	1ª
Cavalieri	Licenciatura em Matemática	M	18 anos	1ª

Fonte: Dados da pesquisa.

No próximo subcapítulo apresentamos a proposta de atividades elaborada para a experimentação.

4.3 A PROPOSTA DE ATIVIDADES DA EXPERIMENTAÇÃO DA PESQUISA

O desenvolvimento da proposta de atividades, experimentação da presente pesquisa, ocorreu nos meses de novembro e dezembro de 2013. Foram seis aulas a distância e uma aula presencial, em um total de quatro encontros com os alunos. A pesquisadora atuou como professora da turma durante essas aulas.

No Quadro 2 apresenta-se os dados da proposta de atividades.

Quadro 2: proposta de atividades

1ª Encontro (2 aulas em EaD – Agenda de 21/11/2013 à 30/11/2013)	
Objetivo de Aprendizagem	Compreender a Regra de L'Hospital e seu uso em cálculo de Limites que apresentam indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$.

Conteúdo abordado	Regra de L'Hospital.
Ações no AVA	**Questões iniciais dos Fóruns**
Produção 1: No GeoGebra plote o gráfico da função H(x)=f(x)/g(x). Sendo $f(x)=4x^3+x^2+3$ e $g(x)=x^5+1$. Em seguida, marque um ponto A sobre a curva que representa a função H(x) e o mova para identificar o valor de H(x) quando x tende a -1. Da mesma forma plote o gráfico da função P(x)= f´(x)/g´(x), marque um ponto B sobre a curva que representa a função P(x) e o mova para identificar o valor de P(x) quando x tende a -1 **Fórum 1:** "Dialogando sobre os gráficos das funções H(x) e P(x)".	**Fórum 1**- O que você observou nas representações gráficas das funções em relação ao limite da função P(x) e da função H(x) quando x tende a -1, ao mover os pontos das curvas?
Produção 2: No GeoGebra plote o gráfico da função V(x)=k(x)/l(x). Sendo k(x)=x e l(x)=x+6. Em seguida, marque um ponto A sobre a curva que representa a função V(x) e o mova para identificar o valor de V(x) quando x tende ao infinito positivo. Da mesma forma plote o gráfico da função R(x)= k´(x)/l´(x), marque um ponto B sobre a curva que representa a função R(x) e o mova para identificar o valor de R(x) quando x tende ao infinito positivo. **Fórum 2:** "Dialogando sobre os gráficos das funções V(x) e R(x)".	**Fórum 2**- O que você observou nas representações gráficas das funções, em relação ao limite da função V(x) e da função R(x) quando $x \to \infty$, ao mover os pontos das curvas?
Leitura do Material didático- Regra de L'Hospital. **Produção 3: Calculando Limites** 1. Calcule o valor dos limites das seguintes funções: a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$ b) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-x-2}{3x^2-5x-2}$ c) $\lim_{x\to +\infty} \frac{2x-9}{6x+7}$ d) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-9x+4}{3x^2+7x+8}$ **Fórum 3:** "Atividades sobre Limites".	**Fórum 3**- Olá pessoal. Este é um espaço para dialogarmos sobre as "Atividades sobre Limites", propostas no material didático.
2ª Encontro – (2 aulas em EaD – Agenda de 01/12/2013 à 05/12/2013)	

Objetivo de aprendizagem	Relacionar os pontos de máximos e mínimos de uma função com a derivada dessa função nesses pontos.
Conteúdo abordado	Máximos e Mínimos Locais e Globais e Teorema de Fermat.
Ações no AVA	**Questões iniciais nos fóruns**
Produção 4*:* “Após várias experiências em laboratório, observou-se que a concentração de certo antibiótico no sangue de cobaias varia de acordo com a função $f(x)=12x-2x^2$, em que x é o tempo decorrido, em horas, após a ingestão do antibiótico e f(x) é a concentração de tal antibiótico no sangue”. No GeoGebra, plote o gráfico da função $f(x)=12x-2x^2$ e insira um ponto A sobre a curva que representa a função e mova o ponto, observando em quanto tempo a concentração de antibiótico atinge o nível máximo. No mesmo arquivo que você plotou a f(x), plote também a f '(x). **Fórum 4:** “Dialogando sobre o problema antibiótico”	**Fórum 4**- Movimentando o ponto A, na função f(x) determine as coordenadas de um ponto (x_1, $f(x_1)$), sabendo que x_1 representa o tempo necessário para que o antibiótico atinja nível máximo de concentração no sangue dessas cobaias, qual o valor da $f'(x_1)$?
Produção 5: “Em uma fazenda um funcionário deve construir um galinheiro de forma retangular com área igual a $50m^2$. Então, o funcionário decide aproveitar um velho muro como uma das laterais do galinheiro." Click no link: "O galinheiro" para ver a Figura que representa tal problema. Escreva a função P(x) que expressa o perímetro em função do lado x”. Logo após no GeoGebra, plote a função P(x) e insira um ponto sobre essa curva e observe qual deve ser a medida x, para obter-se o menor perímetro. No mesmo arquivo que você plotou a P(x), plote também a P’(x). **Fórum 5:** “Dialogando sobre o problema do galinheiro".	**Fórum 5** - Quais as coordenadas do ponto (x_1, $f(x_1)$) que representam a medida x_1 para se obter o perímetro mínimo para construir o galinheiro? Qual o domínio válido dessa função na situação dada? Qual o valor da $f'(x_1)$?
Leitura do Material didático- “Máximos e Mínimos de Funções”. **Produção 6:** 1. (CMPA-RS) A temperatura t de uma estufa (em graus Celsius) é determinada, em função da hora x do dia, pela expressão $f\ (x) = \ -x^2 + \ 22x - \ 85$. Responda: a) Em quais horários a temperatura é 0° C ? b) Em que horário a temperatura é máxima ? Qual é a temperatura máxima ? 2) Durante várias semanas, o departamento de trânsito de certa cidade vem registrando a velocidade dos veículos que passam por certo cruzamento. Os resultados mostram que	**Fórum 6** - Olá pessoal. Este é um espaço, para dialogarmos sobre os "Problemas de Otimização", propostos no material didático.

<table>
<tr><td>entre 13 e 18 horas, a velocidade média neste cruzamento é dada aproximadamente por $v(t) = t^3 - 10{,}5\,t^2 + 30\,t + 20$ km/h, onde t é o número de horas após o meio-dia. Qual o instante, entre 13 e 18 horas, em que o trânsito é mais rápido? E qual o instante em que ele é mais lento?
Fonte:
<http://wwwp.fc.unesp.br/~arbalbo/arquivos/problemasdeotimizacao.pdf>.

3) Encontre os valores absolutos máximo e mínimo locais e globais da função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1\ definida\ em\ \left[-\frac{1}{2}, 4\right]$.

Fórum 6: “Problemas de Otimização”.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Terceiro Encontro (01 aula presencial em laboratório de informática) (06/12/2013).</td></tr>
<tr><td>Conteúdo abordado</td><td>Gráficos de funções de uma variável.</td></tr>
<tr><td>Objetivo de aprendizagem</td><td>Compreender algumas propriedades gráficas da $f(x)$, a partir do estudo da derivada primeira e a derivada segunda da $f(x)$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ações</td></tr>
<tr><td colspan="2">1. Seja $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x - 2$, responda as seguintes questões:
a) No GeoGebra plote o gráfico da $f(x)$ e da $f'(x)$. Analisando o gráfico da $f'(x)$, há intervalos em que $f'(x) > 0$? $Qual\ (is)$? Há intervalos em que a $f'(x) < 0$? Qual (is)?
____
____

b) Faça um estudo do crescimento de decrescimento da f(x) nos intervalos encontrados no item a?
____
____
c) Você consegue perceber alguma relação entre o item a e o item b, ou seja, entre a f’(x) e a f(x)? Qual (is)? Como essa relação pode ser usada para encontrar um ponto de máximo local? Como essa relação pode ser usada para encontrar um ponto de mínimo local?

____
____

d) No GeoGebra plote o gráfico da $f''(x)$. Analisando esse gráfico responda: há intervalo(s) em que a $f''(x) > 0$? Qual (is)? Há intervalos em que a $f''(x) < 0$? Qual (is)?
____</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">

e) Nos intervalos encontrados no item d, o que você observa com relação a concavidade da $f(x)$?

f) Nos intervalos encontrados no item d, o que você observa com relação à concavidade da f(x).?

g) Com base nas atividades anteriormente desenvolvidas, você consegue estabelecer alguma relação entre a $f(x)\ e\ a\ f''(x)$? Qual (is)?

</td></tr>
<tr><th colspan="2">4ª encontro – 02 aulas - (EaD – Agenda de 06/12/2013 à 10/12/2013)</th></tr>
<tr><td>Objetivo de Aprendizagem</td><td>Determinar pontos de máximo e de mínimo identificando o sinal da derivada segunda e os pontos críticos de funções.</td></tr>
<tr><td>Conteúdo</td><td>Teste da Derivada segunda</td></tr>
<tr><td>Ações no AVA</td><td>Questões iniciais dos fóruns</td></tr>
<tr><td>

Produção 7: Sendo f(x)= $2x^3$-$12x^2$+18x -2, construa no GeoGebra o gráfico da f(x), f'(x) e f"(x).

Produção 8: “Tabela e Registros”-Após realizar a produção 5, preencha a seguinte tabela.

<table>
<tr><td>Número crítico (x_n)</td><td>Valor da f’(x_n). (observação do gráfico e cálculo da $f'(x_n)$).</td><td>$f''(x_n) < 0\ ou\ f''(x_n) > 0$? (observação do gráfico e cálculo da $f''(x_n)$).</td><td>O ponto (x_n, f(x_n)) é de máximo ou de mínimo?</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Fórum 7: "dialogando sobre os gráficos f, f’ e f’’ ”

</td><td>

Fórum 7 - Analisando os dados da tabela você observou algo em relação ao valor da $f'(x_n)$, sendo x_n os números críticos encontrados? E, qual a relação existente entre a $f''(x_n)$,) e o ponto de máximo ou de mínimo locais da f(x)?

</td></tr>
</table>

Fonte: Dados da pesquisa.

Nos encontros a distância, inicialmente os alunos realizavam as produções mencionadas no Quadro 1 e em seguida ou ao mesmo tempo participavam dos fóruns a partir das questões iniciais e outras que surgiam ao longo do período de cada agenda. Sendo uma proposta de abordagem construcionista, as outras questões surgiam dos alunos e professora ao realizarem os estudos e interações, essas serão apresentadas e discutidas na análise de dados, sempre que necessário. Após discussão nos fóruns era disponibilizado o material didático para leitura, que continha algumas produções que também deveriam ser enviadas e discutidas no AVA.

No próximo tópico apresentamos o AVA e os materiais didáticos que foram organizados para a experimentação.

4.4 O AMBIENTE VIRTUAL DE APRENDIZAGEM E OS MATERIAIS DIDÁTICOS DA DISCIPLINA DE CÁLCULO I

Para o desenvolvimento das aulas a distância foi disponibilizado pela Universidade um ambiente a partir da plataforma Moodle. A Figura 10 apresenta a interface do AVA organizado para a experimentação da pesquisa.

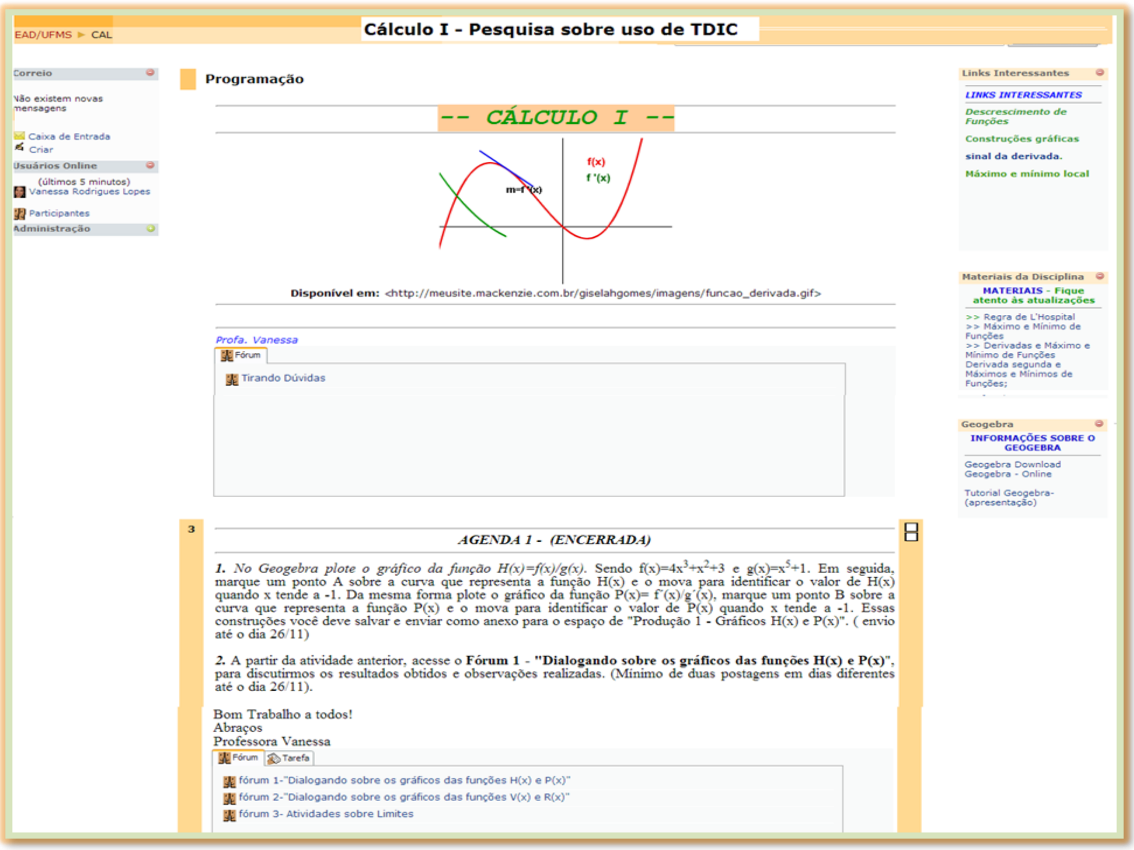


Figura 10 - Interface do AVA da disciplina de Cálculo I

Fonte: Dados da pesquisa

Esta é área de visualização do aluno. No frame à esquerda da tela, há o espaço de correio e usuários *online*. No espaço de correio os usuários podem enviar *e-mail*. E no espaço de usuários *online* é possível que, o aluno identifique que outros colegas estão *online* e/ou professora.

No frame à direita da tela foram criados os espaços para disponibilizar Links Interessantes e Materiais da Disciplina, além de informações sobre o uso do *software* GeoGebra. Nos *Links* Interessantes disponibilizamos links para alguns objetos de aprendizagem disponíveis na internet e que foram usados com o objetivo de apoio aos estudos dos alunos, alguns só foram disponibilizados após o encerramento do fórum, como uma forma de formalização de conceitos. Como exemplo de objetos, apresentamos "Reta Tangente"[11] desenvolvido pela Unesp - Araraquara, em que se explora o conceito de reta secante para determinar a reta tangente a uma curva, conforme a Figura 11. Ressaltamos que nossa intenção com a disponibilização desses objetos, bem como de outros, foi de oferecer, ao aluno, material de apoio, além dos materiais didáticos produzidos. Pontuamos também que no próprio material didático sinalizamos momentos que julgávamos interessantes de acesso a tais objetos, para assim o aluno explorá-lo.

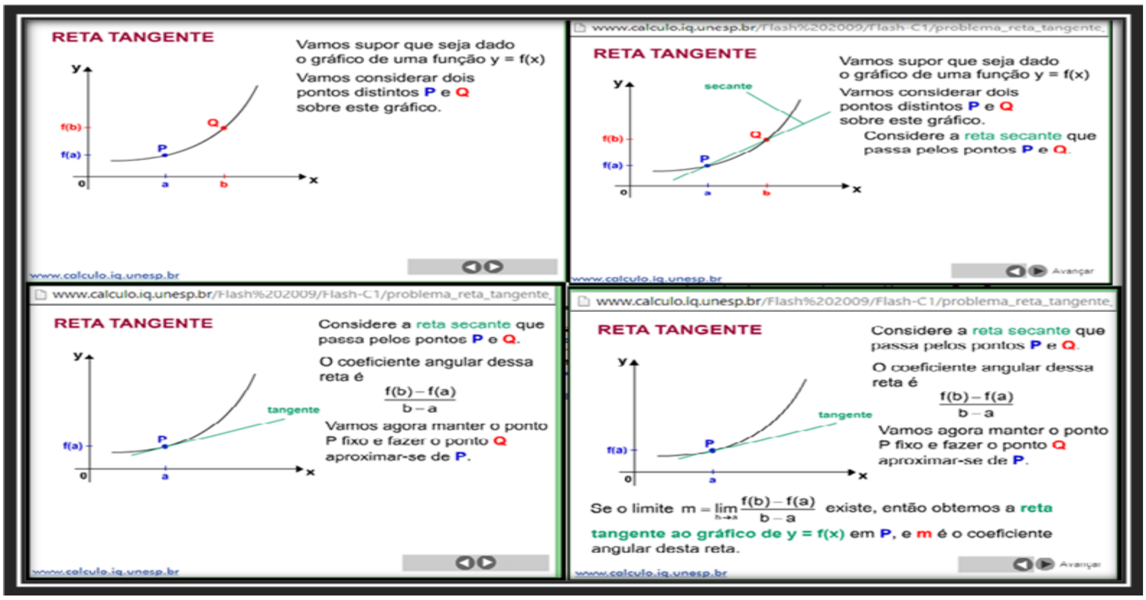


Figura 11- Objeto de aprendizagem sobre reta tangente a uma curva

Fonte: Disponível em:

<http://www.cálculo.iq.unesp.br/Flash%202009/FlashC1/problema_reta_tangente_novo.swf>.

[11] Este material foi desenvolvido como apoio didático para a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral 1 do Curso de Bacharelado em Química do IQ – UNESP – Araraquara (SP).[...] O desenvolvimento desses materiais tem como objetivo oferecer ao educando um ambiente no qual possa aprofundar o que aprendeu durante a aula, além de propor a visualizar várias situações envolvendo a teoria importantes para estudo de Cálculo I.

No link “Materiais da Disciplina” disponibilizamos os materiais didáticos produzidos para desenvolvimento de estudos da disciplina. Esses materiais foram produzidos a partir dos estudos de Scherer (2005) e de Papert (2008).

Segundo Scherer (2005), para habitar um ambiente, esse necessariamente tem de ser aconchegante, agradável, convidativo e provocativo. Assim, “com a intenção de tornar o espaço virtual um ambiente ‘habitado’ e não um espaço de passagem, ao construí-lo temos de usar o diálogo, a comunicação, como materiais essenciais para a obra que se cria” (SCHERER, 2005, p. 51). E assim, a autora considera que o Ambiente Virtual precisa possuir algumas características para que os alunos queiram habitá-lo, como por exemplo:

> I. os sujeitos usem as tecnologias da informação e comunicação;
> II. a atitude interdisciplinar seja a estética das ações planejadas, praticadas e almejadas;
> III. o diálogo, o inacabamento, a pergunta, a criticidade, a liberdade, a cooperação e a colaboração configurem os movimentos de comunicação no processo de ensino e de aprendizagem;
> IV. os ambientes presenciais, o ambiente virtual e os materiais usados no processo sejam criados a partir dos itens anteriores; (SCHERER, 2005, p.37).

Segundo a autora, tanto no ambiente presencial quanto no virtual (caso da pesquisa apresentada neste artigo), os materiais criados devem possuir uma linguagem dialógica, com um movimento de desafios e perguntas. A estética desses materiais didáticos tem que ter como foco central a aprendizagem e a comunicação, que pode ser estabelecida pelo aluno que irá ler e interagir com tal material.

A ação de questionar o aluno no material didático tem como objetivo desafiá-lo e desequilibrá-lo cognitivamente para que esse possa agir a partir daquilo que ele leu. Por isso é importante que o material estabeleça uma comunicação entre professor/autor – aluno/leitor.

> O charme da comunicação não é o que comunica frontalmente, mas o que faz pela metade, insinua, provoca, deixa em suspense. O que se comunica frontalmente implica petição de obediência em sua linearidade canhestra, enquanto o que se comunica pela insinuação provoca o sujeito que colabora e reinterpreta a seu modo. (DEMO, 2002, p.128).

Ao escrever um material que estabelece uma comunicação não frontalmente, direta e completa, oportunizamos aos alunos/leitores serem também autores, pois eles podem agir e navegar em diferentes espaços, favorecendo sua aprendizagem. Assim buscou-se na escrita desses materiais didáticos o não acabamento, algo não palestrado.

> [...] os diferentes materiais devem ser menos “palestrados” e mais comunicados, ou seja, devem ser mais comunicação do que extensão, mais movimento dialógico de aprender e de ensinar. Devem ser dinâmicos, vivos, coloridos, sempre convidando

> para o diálogo curioso, questionador; de pergunta e não apenas de resposta; de criação e não de cópia; de fala, de gestos, de olhares, de sentimentos, enfim, de vida e de aprendizagem, "molhados" com rigor, alegria e tecnologias. (SCHERER, 2005, p.85).

Foram elaborados materiais didáticos para quatro estudos a distância que fizeram parte da experimentação da pesquisa: Regra de L'Hospital; Máximos e Mínimos de Funções; Derivada e Máximos e Mínimos de Funções, e Derivada segunda e Máximos e Mínimos de Funções.

Na elaboração dos materiais sempre iniciávamos com algum problema que envolvia conceitos a serem estudados no período, com o objetivo de colocar o aluno em ação, para que ele chegasse na formulação dos conceitos. Como exemplo, no material em que abordamos o conteúdo de Máximos e Mínimos de Funções, começamos com problemas de otimização, conforme Figura 12.

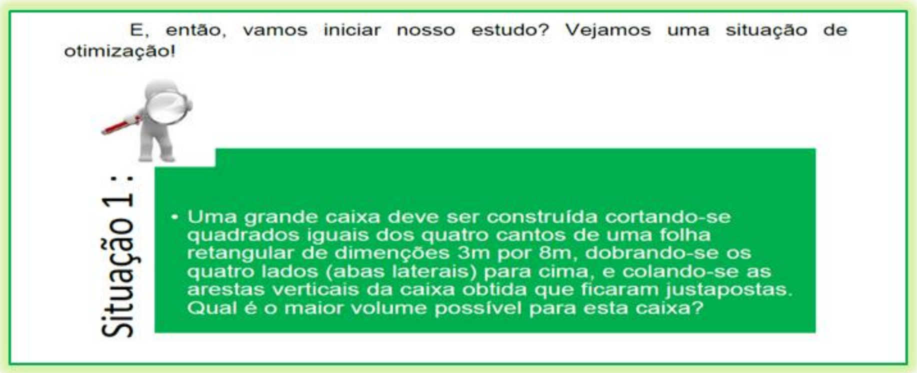


Figura 12- Situação problema presente no Material Didático

Fonte: Dados da pesquisa.

Observe ainda na Figura 12, como o material é apresentado em forma de diálogo com o aluno: "E então, vamos iniciar nosso estudo? Vejamos uma situação de otimização". Essa escrita em forma de diálogo perpassou todos os materiais produzidos.

As tecnologias também precisam ser exploradas em materiais didáticos para EaD, pois seu uso pode enriquecer esse material. Podemos, por exemplo, propor o uso de software, applet ou objetos digitais, para que o aluno possa conjecturar, estudar, explorar e construir conceitos. Esses objetos podem favorecer que os alunos façam visitas a outros espaços, aprendam de forma hipertextual. Ou seja, esses objetos podem provocar "links com outros contextos que convidassem o aluno a pensar". (SCHERER, 2005, p.134).

O material também foi organizado favorecendo a hipertextualidade, pois em todos os materiais colocamos links para objetos de aprendizagem disponíveis na internet, conforme exemplo apresentado na Figura 13.

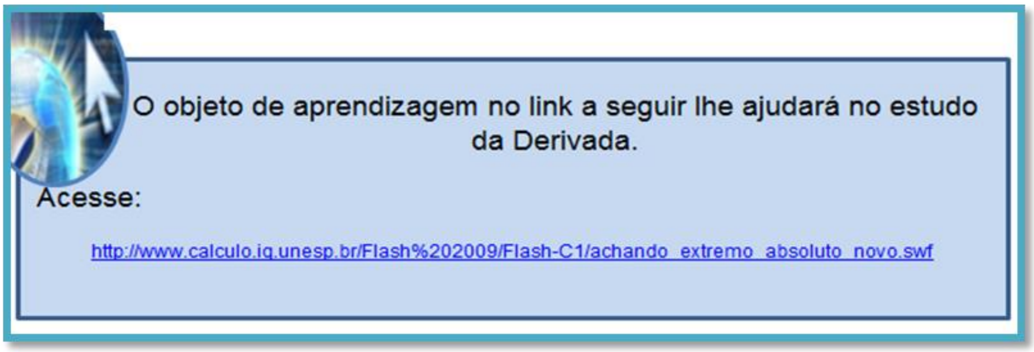


Figura 13: Hipertextualidade presente no Material Didático

Fonte: Dados da pesquisa.

Nos materiais produzidos fizemos questionamentos que poderiam favorecer a reflexão dos alunos nos momentos de leitura, pois a estética desses materiais: “[...] consiste na comunicação com o aluno e com quem é este aluno, não se esquecendo do movimento da pergunta. Afinal, o material precisava despertar o interesse do aluno, desafiá-lo a questionar e questionar-se [...]” (SCHERER, 2005, p.134). Ilustramos na Figura 14 questionamentos presentes em dois materiais produzidos, o primeiro recorte faz parte do material produzido para estudos sobre a Regra de L’Hospital, e o segundo sobre a Derivada segunda e Máximos e Mínimos de Funções.

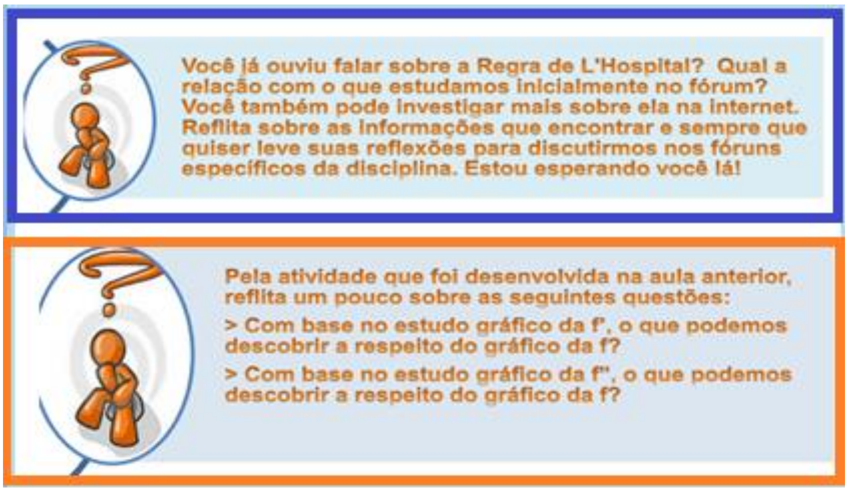
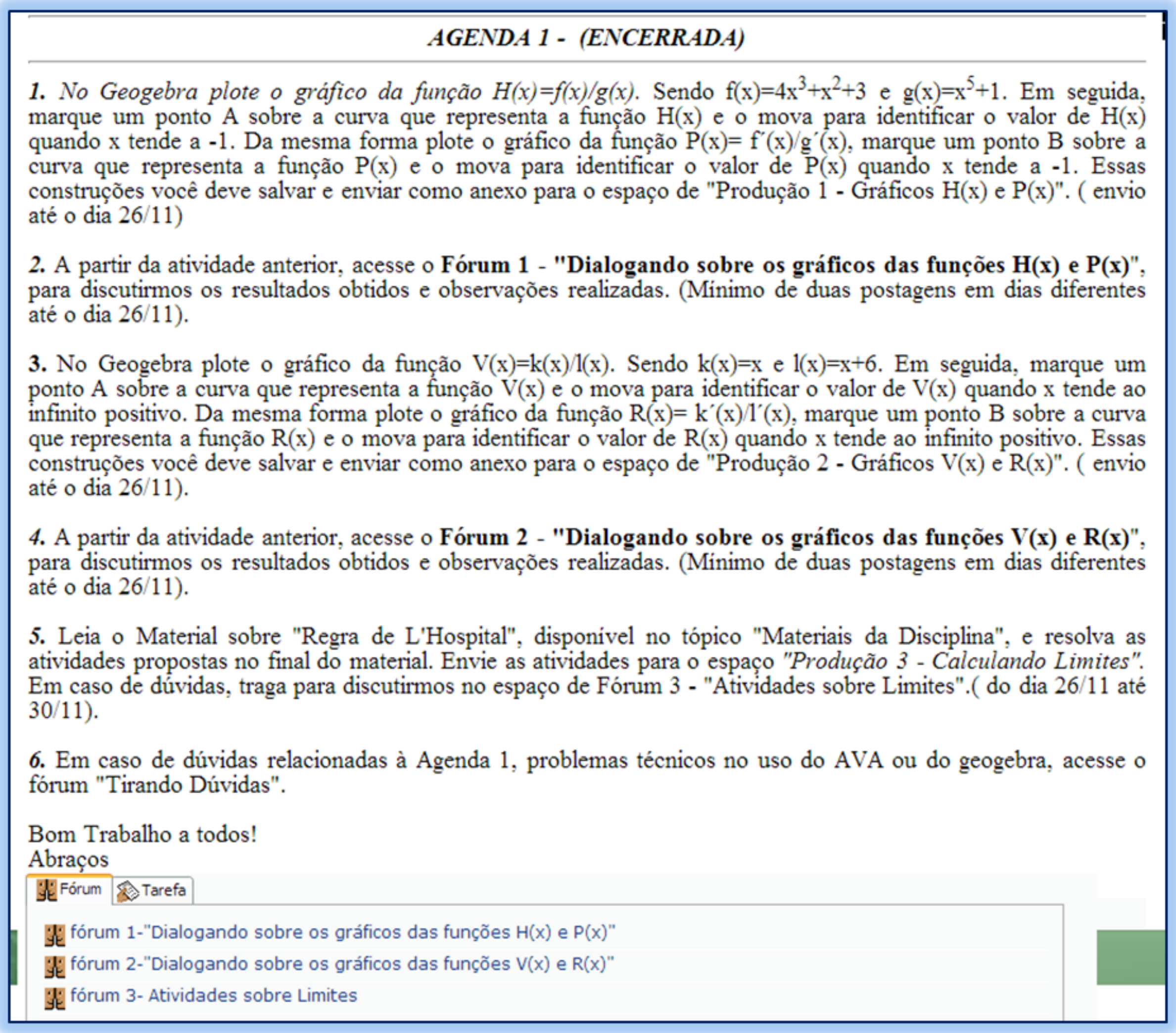


Figura 14: Questionamentos presentes nos materiais didáticos

Fonte: Dados da pesquisa.

Retomando a descrição do AVA da disciplina, na parte central da interface do AVA (Figura 10) encontram-se as agendas, com fóruns de discussões, espaço para envio de produções, e fórum específico para tirar dúvidas relacionadas à agenda e problemas técnicos com relação ao GeoGebra. Em cada tópico foram disponibilizadas as agendas, por período e ações constantes no Quadro 2. Na agenda apresentávamos as produções que os alunos deveriam desenvolver, bem como os fóruns que deveriam ser acessados para desenvolver-se o encontro virtual. Para ilustrar apresentamos a Figura 15, a Agenda 1.



AGENDA 1 - (ENCERRADA)

1. *No Geogebra plote o gráfico da função H(x)=f(x)/g(x).* Sendo $f(x)=4x^3+x^2+3$ e $g(x)=x^5+1$. Em seguida, marque um ponto A sobre a curva que representa a função H(x) e o mova para identificar o valor de H(x) quando x tende a -1. Da mesma forma plote o gráfico da função P(x)= f´(x)/g´(x), marque um ponto B sobre a curva que representa a função P(x) e o mova para identificar o valor de P(x) quando x tende a -1. Essas construções você deve salvar e enviar como anexo para o espaço de "Produção 1 - Gráficos H(x) e P(x)". (envio até o dia 26/11)

2. A partir da atividade anterior, acesse o **Fórum 1 - "Dialogando sobre os gráficos das funções H(x) e P(x)"**, para discutirmos os resultados obtidos e observações realizadas. (Mínimo de duas postagens em dias diferentes até o dia 26/11).

3. No Geogebra plote o gráfico da função V(x)=k(x)/l(x). Sendo k(x)=x e l(x)=x+6. Em seguida, marque um ponto A sobre a curva que representa a função V(x) e o mova para identificar o valor de V(x) quando x tende ao infinito positivo. Da mesma forma plote o gráfico da função R(x)= k´(x)/l´(x), marque um ponto B sobre a curva que representa a função R(x) e o mova para identificar o valor de R(x) quando x tende ao infinito positivo. Essas construções você deve salvar e enviar como anexo para o espaço de "Produção 2 - Gráficos V(x) e R(x)". (envio até o dia 26/11).

4. A partir da atividade anterior, acesse o **Fórum 2 - "Dialogando sobre os gráficos das funções V(x) e R(x)"**, para discutirmos os resultados obtidos e observações realizadas. (Mínimo de duas postagens em dias diferentes até o dia 26/11).

5. Leia o Material sobre "Regra de L'Hospital", disponível no tópico "Materiais da Disciplina", e resolva as atividades propostas no final do material. Envie as atividades para o espaço *"Produção 3 - Calculando Limites"*. Em caso de dúvidas, traga para discutirmos no espaço de Fórum 3 - "Atividades sobre Limites".(do dia 26/11 até 30/11).

6. Em caso de dúvidas relacionadas à Agenda 1, problemas técnicos no uso do AVA ou do geogebra, acesse o fórum "Tirando Dúvidas".

Bom Trabalho a todos!
Abraços

Figura 15: Agenda 1 do AVA de Cálculo I

Fonte: Dados da pesquisa.

Como podemos observar na Figura 15, em cada tópico, período de agenda, além dessa, estavam disponíveis os espaços de interação em que as aulas do período eram desenvolvidas (Fórum), e os espaços em que enviavam produções (Atividades).

O AVA dispõe de várias tecnologias para serem usadas em aulas a distância. Na experimentação usamos tecnologias de comunicação como fóruns, espaço tarefa, e-mail, bate papo. Os espaços de *Fórum* foram os locais em que aconteceram os estudos dos conteúdos, as interações entre professora-alunos, e entre alunos. Para Bairral (2007, p.80),

> [...] o Fórum é um espaço de socialização contínua de práticas nas quais os interlocutores podem utilizar e integrar, diferentemente, informações do próprio cenário ou de fora dele. Além de ser um local com possibilidade temporal flexível, é também um espaço de imersão colaborativa na discussão, que pressupõe uma confiabilidade no coletivo virtual e exige dos profissionais sensibilidade e aceitação para propor e discutir perspectivas educacionais variadas.

Esse espaço foi usado pelos alunos principalmente para discussão das atividades e reflexões sobre o processo de aprendizagem. O espaço de *tarefa*, tecnologia disponível na plataforma Moodle, foi usada para que o aluno pudesse enviar arquivos com a realização de suas produções. Na maioria das vezes esse arquivo foi resultado de uma produção usando o software GeoGebra. Ao enviar a tarefa, a professora analisava a produção e retornava ao aluno com orientações, possibilitando que o aluno refletisse, e se fosse o caso, retomasse a produção. O *feedback* da professora era enviado para o AVA e também para o e-mail do aluno.

As tecnologias de comunicação, como o e-mail, foram usadas para a professora se comunicar com cada aluno e reportar ideias sobre suas produções, além de ser um espaço usado para convidá-los a participarem dos fóruns.

E assim apresentamos um pouco da organização do AVA e dos Materiais didáticos produzidos para a experimentação, e finalizamos o capítulo a metodologia da pesquisa. No próximo capítulo apresentaremos a análise dos dados.

5 APRENDIZAGEM SOBRE DERIVADAS EM UM AMBIENTE CONTRUCIONISTA

Nesse capítulo apresentaremos a análise dos dados da pesquisa a partir da questão proposta nesta investigação: Quais as possibilidades de aprendizagem sobre Derivadas de funções a partir de interações em espaços virtuais?

Para analisarmos essa questão, foram definidas duas categorias de análise: “Aprendizagem na/a partir da Interação” e “Aprendizagem e o ambiente construcionista”. A análise foi realizada a partir dos registros da professora e dos alunos obtidos no AVA, entrevistas com participantes da pesquisa e registros de diálogos entre alunos ocorridos em outros dois espaços virtuais: o WhatsApp e o Facebook.

5.1 APRENDIZAGEM NA/A PARTIR DA INTERAÇÃO: HABITANTES, VISITANTES E TRANSEUNTES

A interação entre professor e alunos e entre os alunos é importante para o processo de aprendizagem, pois “[...] se o sujeito não está aberto ao encontro com o outro, a se expor, a expor as suas proposições, ele não possibilita que o outro aprenda com ele” (SCHERER, 2005, p. 106). O aluno também aprende em interação com o professor e com os outros alunos, nesse sentido, Kenski (2002, p. 258) ressalta que:

> Interagir com o conhecimento e com as pessoas para aprender é fundamental. Para a transformação de um determinado grupo de informações em conhecimentos é preciso que estes sejam trabalhados, discutidos, comunicados. As trocas entre colegas, os múltiplos posicionamentos diante das informações disponíveis, os debates e as análises críticas auxiliam a sua compreensão e elaboração cognitiva. As múltiplas interações e trocas comunicativas entre parceiros do ato de aprender possibilitam que estes conhecimentos sejam permanentemente reconstruídos e reelaborados.

Nesta categoria de análise nos dedicamos a analisar possibilidades de aprendizagem na\ a partir da interação entre alunos e entre alunos e professora no AVA, criado a partir da plataforma Moodle, e entre alunos nos espaços do WhatsApp e do Facebook. Para a apresentação da análise dos dados, optamos por partir da caracterização da atitude no AVA dos 11 alunos (participantes da pesquisa), conforme estudos de Scherer (2005), em: **habitantes**, **visitantes** e **transeuntes.** Essa caracterização permite analisar a aprendizagem dos alunos ao partir do envolvimento e interação de cada um com os demais colegas e professora, e com as ações propostas na disciplina.

Iniciaremos o capítulo analisando os dados dos alunos que caracterizamos como habitantes: “Newton”, “Leibniz”, “Cauchy” e “Cavalieri”. Na sequência, analisamos dados dos alunos caracterizados como visitantes: “Lagrange”, “Wallis”, “Fermat”, “Torricelli” e “Euler”. E, por fim, fizemos a análise dos dados dos alunos que assumiram atitude de transeuntes no AVA da disciplina: “Gauss” e “Bernoulli”. A justificativa para essa caracterização é apresentada ao longo do capítulo.

5.1.1 Habitando o AVA da Disciplina de Cálculo I: as interações de “Newton”

No Fórum 1 foi proposta uma discussão sobre a Produção 1 que envolvia estudos sobre a Regra de L’Hospital:

No GeoGebra plote o gráfico da função H(x)=f(x)/g(x). Sendo $f(x)=4x^3+x^2+3$ *e* $g(x)=x^5+1$*. Em seguida, marque um ponto A sobre a curva que representa a função H(x) e o mova para identificar o valor de H(x) quando x tende a -1. Da mesma forma plote o gráfico da função P(x)= f´(x)/g´(x), marque um ponto B sobre a curva que representa a função P(x) e o mova para identificar o valor de P(x) quando x tende a -1.*

Com a intenção de iniciar um diálogo no AVA, propusemos algumas questões iniciais e Fermat foi a primeira a apresentar uma proposição a partir do questionado, conforme recorte do Fórum 1 apresentado a seguir:

Olá pessoal,
Neste Fórum iremos dialogar sobre a plotagem das funções H(x) e P(x). Vamos iniciar? O que vocês observaram nas representações gráficas das funções, em relação ao limite da função P(x) e da função H(x) quando x tende a -1, ao mover os pontos das curvas?[...] (PROFESSA VANESSA).

Boa tarde professora, após feito a atividade eu observei que na função H(x), o x=-1 não está definido, já na função P(x), o x=-1 está definido.(FERMAT).

Com foco na aprendizagem dos alunos e com o objetivo de que a interação entre sujeitos intensificasse, a professora realizou um novo questionamento a partir da afirmação de Fermat.

Olá Pessoal,
A Fermat nos diz que, analisando o gráfico da H(x), ela observou que para x=-1 a H(x) não está definida. No caso da função P(x), em x=-1 ela está definida. Alguém mais observou isso? Vocês

concordam com a Fermat? Por quê?Fermat, mova o ponto em cada função, aproximando-o de x=-1, ou seja, identificando os valores da função quando x tende a -1. Vamos tentar?
E os outros colegas, o que observaram? [...] (PROFESSORA VANESSA).

Na sequência do Fórum 1, Newton se manifestou com uma proposição complementar a de Fermat para justificar a concordância com a afirmação da colega:

Boa noite professora, como a Fermat disse a função H(x) não está definida para x=-1, pois para x=-1 o denominador se anula e como não se pode dividir por zero ele gera um conflito não podendo estar definido nessa função. (NEWTON).

Newton evidencia nesse diálogo interesse com a aprendizagem de Fermat não apenas respondendo a questão, mas articulando-se à afirmação da colega, complementando-a. Esse foi o primeiro indício de que Newton poderia se tornar um habitante do AVA. “Ao habitar os ambientes, os alunos percebem-se responsáveis pelo seu processo de aprendizagem e o do grupo, ensinando e aprendendo [...]” (SCHERER, 2005, p. 202). Mas, a atitude de habitante precisa ser observada ao longo do período de encontros com o grupo.

Em outros encontros a distância, Newton evidenciou essa preocupação com a aprendizagem dos demais colegas. Ele pareceu entrar no ambiente não para deixar uma informação ou para responder algum questionamento que possa ter sido realizado pela professora ou pelos colegas. Ele habitou o ambiente, fato que podemos observar na continuidade do diálogo no Fórum 1, pois quando Fermat fez novas afirmações após o questionamento da professora, Lagrange também se posicionou, e Newton se manifestou a partir do que seus colegas disseram, conforme recorte do Fórum 1 a seguir:

Os limites laterais das funções, tanto na função H(x), quanto na P(x) é igual a 2. Portanto o limite dessas funções quando x tende a -1 é igual a 2. (FERMAT).

Nas funções h(x) e p(x) quando x tende a -1 o resultado é 2.(LAGRANGE).

Como a Fermat e a Lagrange notaram os limites das funções tanto de H(x) quanto P(x) é igual a 2 pois os limites laterais das duas são iguais quando x tende a -1, ou seja quando mais próximo de -1 estiver nosso x tanto pela esquerda quanto pela direita mais próximo de 2 vão estar as funções H(x) e P(x). (NEWTON).

Com os recortes de fórum apresentados é possível identificar o movimento proposto pelo “Estar Junto Virtual” (VALENTE, 2005) relacionado à interação entre os alunos, pois Newton busca interagir não só com a professora, mas também com os outros aprendizes, nesse caso Lagrange e Fermat. Newton busca a ação dialógica com os outros participantes, ele apresenta aos poucos a sua observação, resultado de sua análise, e a expõe ao grupo, tratando sobre limites laterais e sobre indeterminação.

Com foco nesse movimento, a professora fez algumas considerações, baseando-se no que foi afirmado pelos alunos, e propôs um novo desafio, que foi aceito por Newton, conforme o recorte que segue.

Olá pessoal. Com base nas observações feitas por vocês, podemos concluir que o limite da H(x) e da P(x) é o mesmo quando x tende a -1. E esse limite é igual a 2. Sendo assim temos que $lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{g(x)} = lim_{x\to-1}\frac{f\prime(x)}{g\prime(x)}$*.Agora, para fecharmos nossa discussão, gostaria que vocês calculassem tanto na H(x), quanto na P(x). E tragam os resultados para debatermos aqui.[...]. (PROFESSORA VANESSA).*

Eu encontrei, substituindo direto, que H(x) = 0/0 e P(x) = 2. (NEWTON).

A partir do que foi apresentado nos recortes de fórum, podemos considerar que Newton inicialmente observou, analisando o movimento dos pontos sobre as curvas, que $lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{g(x)} = lim_{x\to-1}\frac{f\prime(x)}{g\prime(x)}$, mas por meio de cálculo ele não conseguiu chegar a mesma resposta. Além disso, o aluno não menciona em sua mensagem de forma explicita a relação entre as duas representações (gráfica e numérica).

Na continuidade da análise da atitude e da aprendizagem de Newton na interação entre sujeitos, vamos discutir alguns dados obtidos nos registros no Fórum 2, que também envolviam estudos sobre a Regra de L'Hospital. Nesse Fórum, a proposta foi a de que os alunos analisassem e discutissem a produção 2: "No GeoGebra plote o gráfico da função V(x)=k(x)/l(x). Sendo k(x)=x e l(x)=x+6. Em seguida, marque um ponto A sobre a curva que representa a função V(x) e o mova para identificar o valor de V(x) quando x tende ao infinito positivo. Da mesma forma plote o gráfico da função R(x)= k´(x)/l´(x), marque um ponto B sobre a curva que representa a função R(x) e o mova para identificar o valor de R(x) quando x tende ao $+\infty$."

Ao propor essa discussão, esperávamos que os alunos observassem que os limites das funções R(x) e V(x) assumem o mesmo valor quando x tende a $+\infty$. Em meio às discussões, surgiram algumas afirmações equivocadas, como no recorte de Fórum 2 a seguir:

[...] derivando v(x) temos r(x) como uma função constante em 1. E na função v(x) quando x tende ao infinito a função vai tender a 1. (LAGRANGE).

[...]a derivada de V(x) é igual a função R(x). (CAUCHY).

Lagrange e Cauchy afirmam que a $V'(x) = R(x)$, o que é um erro, pois a derivada de V(x) é diferente de derivar a função que está no numerador e dividi-la pela derivada da função que está no denominador. Após identificarmos essa dificuldade matemática desses alunos, fizemos uma intervenção com o objetivo de que os alunos refletissem sobre suas afirmações e, na sequência, Newton se posicionou em relação às afirmações dos colegas e questionamentos da professora:

Lagrange e Cauchy nos dizem que derivando V(x) temos R(x) ou seja (x/x+6)'= 1. Isso é verdade? (PROFESSORA VANESSA).

[...] para calcularmos a derivada do quociente basta usarmos a regra do quociente, separando a função V(x)=x/x+6 em f(x)/g(x) sendo f(x)=x e g(x)=x+6 e aplicando a regra, assim temos que V'(x)=[f'(x).g(x)-g'(x).f(x)]/g(x)² (NEWTON).

Nessa afirmação, Newton parece propor uma solução, ou sugerir de forma indireta um caminho para que Cauchy e Fermat refletissem sobre suas afirmações. Ele evidencia uma atitude de habitante, a de propor ou se contrapor às proposições do grupo. (SCHERER, 2005).

Prosseguindo na análise desse Fórum 2, observamos um diálogo estabelecido entre Newton, Fermat e a professora.

Olá pessoal.
Neste Fórum iremos dialogar sobre a plotagem das funções V(x) e R(x). Vamos iniciar? O que vocês observaram nas representações gráficas das funções, em relação ao limite da função V(x) e da função R(x) quando x tende ao infinito positivo, ao mover os pontos das curvas? (PROFESSORA VANESSA,).

Boa tarde professora, observei que quando x tende ao infinito positivo o limite da função é igual a 1. (FERMAT,).

Olá Pessoal,
A Fermat nos diz que ela observou que quando x tende ao infinito positivo, o limite da função é igual a 1. Mas isso ocorre tanto na R(x), quanto na V(x)? O que vocês observaram? Vocês concordam com a Fermat? (PROFESSORA VANESSA).

Sim funciona tanto na V(x) quando na R(x), a medida que a V(x) cresce com x indo em direção ao infinito ela vai tendendo cada vez mais a 1 mas nunca chegará. Já na R(x) como a função se torna uma constante, para qualquer x que definirmos a função R(x) vai sempre a 1. (NEWTON).

Newton justifica o porquê de concordar com a Fermat e essa justificativa se dá a partir de observações de sua Produção 2. Observamos que Newton enriquece o ambiente com informações novas, por exemplo, em sua mensagem ele fala de forma implícita da própria definição de limite, também do limite de uma função constante, que são conceitos matemáticos fundamentais para compreensão do problema proposto.

Podemos considerar, com relação à aprendizagem desse aluno, que ele concluiu que os limites assumiam o mesmo valor quando x tende ao infinito positivo. Dessa forma, fomos trabalhando os conceitos da Regra de L'Hospital. Vejamos então o que Newton fala sobre essa Regra após as discussões e interações do Fórum 1, Fórum 2 e a leitura do material didático.

Achei bem interessante a regra de L'Hospital, pois facilita o cálculo de limites que acabam em indeterminações como 0/0, e é bem simples de ser aplicada facilitando e encurtando as contas. (NEWTON).

Pelo recorte, Newton fala de um caso de indeterminação em que se pode utilizar a regra de L'Hospital, trata também da utilidade e vantagem em usá-la em cálculos de limites. Mas sabe-se que a regra de L'Hospital não é usada apenas no caso de indeterminação mencionado por Newton, pois existem outros casos de indeterminação em que tal regra se aplica. Assim, como educadora preocupada em manter ciclo de ações por ele vivenciado e intensificar o movimento proposto pelo "Estar Junto Virtual", fiz o seguinte questionamento.

Olá pessoal
O Newton nos traz uma informação interessante quando diz "que a Regra de L'Hospital facilita o cálculo de limites que acabam em indeterminações como 0/0." Mas pergunto a vocês é somente nesse tipo de indeterminação que a regra de L'Hospital pode ser usada? Justifiquem. (VANESSA).

Não funciona apenas em indeterminações como 0/0 mas também em indeterminações do tipo $\frac{-\infty}{-\infty}$ *e* $\frac{+\infty}{+\infty}$. *(NEWTON).*

E com esse recorte inferimos que Newton identifica outros casos em que se pode usar a regra de L'Hospital. Continuando a análise das ações de Newton, no Fórum 5 observamos como a interação com os colegas contribuiu para a sua aprendizagem. Nos fóruns anteriores evidenciamos a preocupação de Newton com o grupo, com a sua aprendizagem e com a dos demais. Ao ser habitante é importante também a abertura para aprender com os outros, pois "[...] se o sujeito não está aberto ao encontro com o outro, a se expor, a expor as suas proposições, ele não possibilita que o outro aprenda com ele" (SCHERER, 2005, p. 106).

O destaque que segue é do Fórum 5, que ocorreu a partir da análise da Produção 5, que chamamos de "Problema do Galinheiro":

Em uma fazenda um funcionário deve construir um galinheiro de forma retangular com área igual a $50m^2$. *Então, o funcionário decide aproveitar um velho muro como uma das laterais do galinheiro. Escreva a função P(x) que expressa o perímetro em função do lado x". Logo após no*

GeoGebra, plote a função P(x) e insira um ponto sobre essa curva e observe qual deve ser a medida x para obter-se o menor perímetro. Plote também a função P'(x).

Com essa atividade esperávamos que os alunos, ao analisarem o movimento proposto, encontrassem o ponto de mínimo $(x, f(x))$ e que observassem que $P'(x) = 0$. Assim, eles concluiriam que em uma função $f(x)$, cuja derivada existe para um determinado x_1 de seu domínio, sendo $(x_1, f(x_1))$ ponto de máximo ou de mínimo, então a $f'(x_1) = 0$. A esse respeito, vejamos uma postagem de Newton no Fórum 5:

Olá pessoal,
Agora que vocês já plotaram a P(x) e analisaram o movimento do ponto, quais as coordenadas do ponto que representam a medida x para se obter o perímetro mínimo para construir o galinheiro? Qual o domínio válido dessa função na situação dada? Vamos dialogando [...]. (PROFESSORA VANESSA).

De acordo com minha análise no gráfico de P(x) o ponto para se obter o perímetro mínimo é (7,28.29), com o domínio {x Є R\x>0}. Pois como se trata do perímetro o x não pode ser menor nem igual a zero. (NEWTON).

Na sequência do Fórum, a Lagrange e o Cavalieri enriquecem o ambiente com suas observações. Essas informações fizeram Newton rever sua afirmação inicial. No recorte a seguir, observamos esse diálogo entre os três e como nessa interação o "Estar Junto Virtual" acontece:

O perímetro mínimo é aproximadamente (7.07,28.28), isto é, a raiz quadrada de 50 e 20 vezes a raiz quadrada de 2 [...].(LAGRANGE).

[...] com o uso da derivada o ponto de mínimo é identificado corretamente, que é (7.07,28.28) aproximadamente. (CAVALIERI).

Corrigindo ponto para se obter perímetro mínimo (7.07, 28.28). (NEWTON).

Com a nova postagem, só conseguimos afirmar que ele retomou a sua afirmação anterior, mas não podemos afirmar dizer que essa alteração foi provocada pela interação dele com os colegas Lagrange e Cavalieri no fórum. No entanto, quando o entrevistamos, nós questionamos sobre as suas interações no AVA e ele mencionou ações do Fórum 5, considerando que esse oportunizou que ele mudasse sua certeza anterior. Da entrevista apresentamos um recorte que evidencia que Newton aprendeu em interação com os colegas:

> **Newton:** No começo, quando eu vi essa atividade eu achei bem complexa, pois não tinha a função [se referindo à lei de formação da função].

> Tínhamos que entender o problema para depois descobrir qual era a função. Confesso que tive ajuda.
> **Pesquisadora:** Quem te ajudou?
> **Newton:** A Lagrange e o meu irmão mais velho, que cursa o quinto semestre em Matemática. [...]. A gente [Newton e Lagrange] sempre discutia sobre as atividades. Ela me explicou como havia feito a atividade e eu entendi.[...].
> **Pesquisadora:** Então foi isso que levou você a mudar de opinião no Fórum 5? [Nesse momento a pesquisadora mostra o Fórum e ele observa as suas duas postagens].
> **Newton:** É... no começo eu não tinha entendido porque tinha que postar a derivada da P(x), mas depois conversando com a Lagrange entendi que para aquele x, a derivada era zero, porque no caso a reta tangente era paralela a x [referindo-se ao eixo das abscissas]. Ai na hora eu entendi que a derivada ajuda a solucionar muitos problemas. Porque nessa atividade, só analisando o gráfico ficava impossível de parar o ponto no local exato [referindo-se ao ponto de mínimo na representação gráfica], movia um pouquinho e passava. Eu cheguei bem próximo do ponto, mas não era exatamente ele. E com a derivada [referindo-se ao cálculo], basta fazer as contas e já descobre o ponto certinho.

Pelo exposto, podemos inferir que Newton compreendeu como a derivada pode ajudar a determinar pontos de máximos e de mínimos de uma função, pois ele explica a partir do conceito de reta tangente. E essas reflexão e aprendizagem foram possíveis a partir da atitude de habitante de Newton que, ao acessar o Fórum e ver a postagem dos colegas, mesmo não sendo no AVA, interagiu com um deles na busca pela compreensão das diferentes proposições. Não temos detalhes dessa interação, pois ela ocorreu em um momento presencial e não no AVA. Contudo, podemos afirmar que a interação com os colegas possibilitou a Newton diferentes momentos de aprendizagem, o que podemos concluir também ao observar alguns recortes de sua fala na entrevista.

> **Newton**: às vezes o Cavalieri, ou a Lagrange, ou qualquer outro comentava alguma coisa, dai eu comentava outra. Sabe! um complementa o outro, porque através da deles [referindo-se às postagens dos colegas], você revê a sua [referindo-se à própria postagem no Fórum]. Dai se você percebe que tem algo errado, dá para ajudar os colegas. [...] Você consegue ver a ideia do outro e como ele está pensado e assim melhorar a sua, porque você fica pensando, pensando... e ai acaba aprendendo. E também você pode ajudar o colega com suas ideias.

Quando Newton afirma que “um complementa o outro” evidenciamos que esse habitante compreende a interação como a busca por um entendimento mútuo sobre o problema em estudo. Podemos afirmar ainda que o modelo de interação nesse processo de EaD está próximo do que Valente (2005) discute sobre o “Estar Junto Virtual”, pois Newton afirma que ao observar a postagem dos colegas ele pensa e acaba revendo a afirmação realizada anteriormente. O que nos leva a afirmar que Newton reflete sobre sua produção a partir de postagens dos demais (professora e alunos).

A última frase de Newton nesse recorte da entrevista, "E também você pode ajudar o colega com suas ideias", nos permite afirmar que ele se preocupa com os demais participantes do ambiente. Preocupa-se no sentido de contribuir com a aprendizagem dos colegas, se responsabilizando pelo ambiente de aprendizagem proposto. O que mais uma vez confirma a sua atitude de habitante (SCHERER, 2005).

Em outro momento da entrevista, ao falar sobre o desenvolvimento das atividades, se as realizou sozinho ou interagiu com colegas, Newton afirma que:

> **Newton:** Eu fiz a maioria sozinho, **mas eu não me sentia sozinho** pois sempre estava vendo tudo no Fórum. E teve também a Lagrange, que é bem amiga minha, a gente sempre se reunia pessoalmente [se referindo a momentos presenciais] para discutir as atividades... na hora do intervalo e tal. [...] Isso foi bem legal e ajudou bastante, às vezes uma duvidazinha boba que eu tinha rapidamente acabava com a ajuda dela e eu também ajudei ela. Ajudei ela até no Fórum. No Fórum é até melhor, porque, quando a gente está na aula [referindo-se aula presencial] não dá para ficar conversando com o pessoal, sobre as atividades e ficar perguntando que resultado ele achou? Como ele fez? E nem pedir ajuda, porque senão vira uma bagunça e o professor não para de passar o conteúdo para gente ficar discutindo atividade. E no Fórum foi totalmente diferente e isso que foi bom. Lá a todo mundo falava, ajudava. A senhora tá entendendo o que eu tô falando? Na sala de aula a gente tem que ficar em silêncio e no AVA a gente tem que falar e falar. (grifo nosso)

Da afirmação feita por Newton sobre suas ações no AVA e nos espaços presenciais de aula, identificamos que, ao desenvolver a atividade proposta, lhe foram oportunizados momentos de discussão com demais colegas, principalmente com a aluna Lagrange. Compreendemos isso pelo fato de Newton mencionar a importância do espaço do Fórum e a oportunidade de falar, de discutir respostas e estratégias. Ele faz uma comparação entre o modelo de aula que vivenciava presencialmente, pautada no silêncio, e o modelo de aula a distância (em especial esse ambiente construcionista para EaD), pautado pelo diálogo, do ter de falar, do que podemos chamar de "barulho produtivo" ocasionado pelas diferentes vozes, pela "ajuda" dos colegas no sentido de darem pistas sobre como estavam pensando.

Newton afirmou ainda que não se sentia sozinho no AVA, diante disso, observamos, a partir de sua fala, que ele se sentia assim por perceber que outras pessoas habitavam aquele ambiente. Pessoas que de alguma forma contribuíram para a aprendizagem dele e/ou que ele contribuiu com a aprendizagem delas. "Esse sentimento de 'estar acompanhado' se revela ao percebermos que outros estão lá, em um espaço acessado a qualquer momento, que seremos 'lidos/ouvidos'" (SCHERER, 2005, p. 53).

Pelos registros de Newton no AVA e suas afirmações na entrevista, podemos constatar que Newton assumiu a atitude de habitante e como tal se responsabilizou "pelas suas ações e pelas dos parceiros" e buscou "o entendimento mútuo, a ação comunicativa" (SCHERER, 2005, p. 60), evidenciando possibilidades de aprendizagem sobre Derivadas em um ambiente construcionista, em um processo de educação a distância. Mas, Newton não estava sozinho, outras pessoas habitavam o AVA da disciplina. O Leibniz também foi habitante desse ambiente.

5.1.2 Habitando o AVA da Disciplina de Cálculo I: as interações de "Leibniz"

Como mencionado na metodologia dessa pesquisa, assim que o professor regente iniciou o ensino do conteúdo de Derivadas, começaram as observações de suas aulas para conhecer o perfil dos alunos que seriam os participantes da pesquisa e finalizar a proposta de atividades. Durante as observações, Leibniz chamou a atenção por ser um aluno que sempre se posicionava nas aulas, pois quando o professor fazia algum questionamento, na maioria das vezes, ele apresentava uma possível solução. Ele também nos chamou atenção por ser "curioso", pois se faziam frequentes suas perguntas ao professor e também a alguns colegas. Ao final da aula, ele ainda tirava dúvidas com o professor da disciplina. Observou-se que se tratava de um aluno habitante nos encontros presenciais e, pelas análises que apresentaremos a seguir, podemos inferir que também foi habitante do ambiente virtual.

Inicialmente, apresentamos a sua interação no Fórum 4, no qual propusemos o estudo a seguir:

Olá Pessoal
Agora que vocês já plotaram a $f(x)=12x-2x^2$ e analisaram o movimento do ponto, quais as coordenadas do ponto que representa o tempo necessário para que o antibiótico atinja nível máximo de concentração no sangue dessas cobaias? E em quanto tempo atinge o nível mínimo de concentração? Qual o domínio válido dessa função na situação dada?
Vamos dialogando... (PROFESSORA VANESSA).

Os primeiros a exporem seus resultados foram Euler e Cauchy:

[...] o nível máximo de concentração em coordenadas foi (3,18), e o nível mínimo nas coordenadas (6,0), já o domínio será apenas onde a concentração for positiva (y>0), ou seja, o domínio será de 0 a 6. (CAUCHY).

É noiz [referindo-se a postagem feita por Cauchy].(EULER).

Euler usou o termo "É noiz", para dizer que concorda com aquilo que Cauchy disse, ou ainda que obteve os mesmos resultados na resolução da atividade proposta. "É noiz" é uma gíria popular que pode ser entendida como uma resposta de forma afirmativa e enfática a um convite feito por uma pessoa que lhe está próxima ou que mantém uma comunicação. Sendo assim, podemos entender que Euler obteve os mesmos resultados que Cauchy. Inferimos isso pelo fato de a postagem de Euler estar na sequência da do colega e também por dados apresentados posteriormente na entrevista. Dando continuidade ao diálogo, Leibniz afirmou:

[...] Concordo com as afirmações do Euler e Cauchy !! Ponto máximo de concentração é em (3,18). O mínimo é em (6,0) . E o domínio está relacionado aos valores no eixo x que condizem com a função, no caso concentração positiva. Este intervalo corresponde a [0,6]. (LEIBNIZ).

Leibniz concordou com os colegas e justificou a sua proposição que correspondia a deles. Ele atenta para ler/ ouvir os outros colegas que estão no ambiente, ou seja, "ao habitar os ambientes, os alunos percebem-se responsáveis pelo seu processo de aprendizagem e o do grupo [...]" (SCHERER, 2005, p. 202).

Como os alunos Euler, Cauchy e Leibniz afirmaram que o domínio para a função dada era o intervalo real [0,6] e que o ponto de mínimo da função teria coordenadas (6,0), no papel de professora, também habitante do AVA, questionamos os alunos a fim de que eles retomassem sua atividade com o objetivo de encontrarem o outro ponto de mínimo cujas coordenadas eram (0,0). Afinal, o papel do professor na abordagem construcionista, mais especificamente no modelo de interação do "Estar Junto Virtual", é oportunizar que o aluno construa conhecimento. A interação do professor com os alunos ocorre a fim de que o educador possa acompanhá-los e orientá-los propondo desafios que os desequilibrem cognitivamente e assim oportunize a reflexão e a aprendizagem (VALENTE, 2005).

O diálogo continuou no Fórum a partir do questionamento da professora:

Analisando as produções feitas e as postagens do Fórum, parece que todos concordam que o nível mínimo de concentração no sangue das cobaias acontece 6 horas após o início do processo. Sendo assim o ponto (6,0) é um ponto de mínimo. Considerando que vocês afirmam que o domínio da função que representa a situação é [0,6], então será que o ponto (6,0) é o único ponto de mínimo da função? [...] (PROFESSORA VANESSA).

[...] o outro ponto de mínimo é o (0,0), e a derivada da função no ponto 3 é 0 pois a reta tangente e paralela ao eixo x, e após esse ponto a função ira apenas decrescer conforme aumentarmos o valor de x. E no ponto 6 a derivada possui ordenada igual a -12. (CAVALIERI).

Como a f'(x)=12-4x , para x = 3 temos f'(x)=0 . Concordo com o que Cavalieri informou. (LEIBNIZ).

Leibniz concordou com a afirmação de Cavalieri, aceitando que outro ponto de mínimo seria (0,0) e que a derivada da função para x=3 era nula. Na entrevista com esse aluno, tentamos compreender um pouco mais desse momento do Fórum e o questionamos sobre o porquê dele concordar com Cavalieri. Uma hipótese era a de que ele se manifestou a favor de Cavalieri pelo fato deste ter sido o primeiro e único aluno a se manifestar com relação ao questionamento proposto até aquele momento. Durante a entrevista, Leibniz afirmou que:

> **Leibniz:** Nesse Fórum [referindo-se ao Fórum 4], eu não tinha visto que tinha dois pontos de mínimos. Só percebi quando a senhora [referindo-se a mim como professora] perguntou se só tinha um ponto de mínimo, daí que a ficha caiu. Eu peguei a atividade e fui olhar, e aí eu vi que como o domínio era entre 0 e 6 fechado, então o ponto (0,0) também era ponto de mínimo.

Pela justificativa de Leibniz, podemos concluir que, a partir do questionamento da professora, ele retomou sua atividade, refletiu sobre ela e apresentou uma nova solução, anulando nossa hipótese inicial. Nessa fala, evidencia-se que o aluno vivenciou o "Estar Junto Virtual" proposto por Valente (2005), pois a partir de uma intervenção feita pela professora o aluno retomou sua produção, refletiu sobre ela e encontrou uma nova solução. No movimento proposto pelo "Estar Junto Virtual" (VALENTE, 2005), reportamos ideias (ou questionamentos), o aprendiz reflete e age, enviando ao Fórum uma nova proposição.

Leibniz estava cursando a disciplina de Cálculo I pela segunda vez, e cursava no mesmo semestre letivo a disciplina de Cálculo II, sendo assim, ele poderia lembrar-se de algo sobre esse conteúdo, já que mesmo tendo reprovado havia participado da disciplina de Cálculo I em outro semestre. Nesse sentido, ao ser questionado na entrevista sobre os estudos realizados sobre regra de L'Hospital, ele comentou:

> **Leibniz:** As primeiras atividades que foi sobre a regra de L'Hospital foram as mais fáceis, porque eu já tinha visto. Só que eu não percebi logo de cara, na verdade, só me toquei que era a regra de L'Hospital no finalzinho do Fórum. Eu já tinha visto a regra outra vez que fiz Cálculo, mas dessa fez foi diferente, totalmente diferente.
> **Pesquisadora:** Por que foi diferente?
> **Leibniz:** Porque eu entendi a regra de verdade, eu vi no gráfico. Eu fiz os gráficos e analisei e daí eu conclui que os limites eram os mesmos. E agora eu vejo como ela é útil. E eu sei usá-la.

Pela afirmação de Leibniz, temos indícios de que ele pode ter (re)construído conhecimentos sobre a regra de L'Hospital ao interagir com os colegas no AVA e realizar as produções propostas. Esses indícios são evidenciados pela forma como ele fala que desenvolveu as atividades e a partir de suas ações. Para analisar um pouco mais desse processo de aprendizagem, vamos recuperar alguns trechos do Fórum 1 sobre esse conteúdo nos quais o aluno interagiu com o grupo e professora:

[...] O que vocês observaram nas representações gráficas das funções, em relação ao limite da função P(x) e da função H(x) quando x tende a -1, ao mover os pontos das curvas?[...] (PROFESSORA VANESSA).

[...] Verifiquei que na função h(x) e na p(x) quando x tende a -1 tanto pela direita como pela esquerda o valor do limite é 2. (LEIBNIZ).

Na Figura 16 apresentamos a produção de Leibniz encaminhada para o AVA e que orientou as suas conclusões no Fórum.

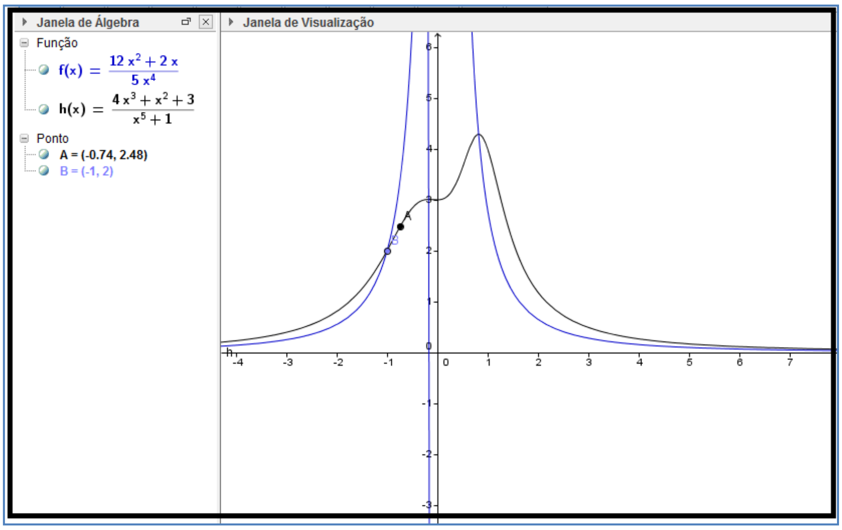


Figura 16 – Produção 1 do aluno Leibniz

Fonte: Dados da pesquisa

Acompanhando e analisando a produção de Leibniz, a professora observou que ela estava correta pois ele inseriu os pontos sobre as curvas e provavelmente observou o movimento proposto. Assim, a partir de sua afirmação e de outros colegas, a professora desafiou a todos para refletirem sobre suas produções e a relação dessas com outros cálculos:

[...] gostaria que vocês calculassem o limite por meio da substituição direta, tanto na H(x), quanto na P(x). E tragam os resultados para debatermos aqui.
Abraços (PROFESSORA VANESSA).

Por tratar de funções polinomiais podemos substituir -1 direto na função. Na função h(x) há uma indeterminação 0/0 e através da regra de L'Hospital podemos derivar a função caindo exatamente na *função p(x). Assim substituímos -1 em p(x) obtendo 2 como resultado. Limites de h(x) e p(x) são equivalentes. (LEIBNIZ).*

O recorte do fórum acima confirma que Leibniz já conhecia a regra de L'Hospital. Mas, podemos afirmar, ao observar os dados da entrevista, que mesmo ele conhecendo a regra, a nossa proposta foi diferente da vivenciada por ele anteriormente. O aluno produziu, investigou e analisou a partir da atividade proposta, e essa pode ter sido uma das diferenças. Em um ambiente construcionista, o papel principal é do aluno, ele tem voz e coloca "a mão na massa" (VALENTE, 2005, p. 34) e assim ele vai aprendendo. Esse papel ativo vivenciado por Leibniz é confirmado pela fala do tipo "Porque eu entendi a regra de verdade"," Eu fiz os gráficos e analisei e daí eu conclui que os limites eram os mesmos". Vejamos então o que Leibniz afirmou sobre esse conteúdo após as discussões dos Fóruns 1 e 2 e a leitura do material didático, o que nos dá indícios de sua aprendizagem.

Boa Noite Prof. Vanessa! Bom, concordo com a maioria do pessoal , a regra de L´Hospital facilita muito o Cálculo de limites quando há indeterminação, por exemplo, 0/0 e infinito/infinito. Percebe-se também que para usar a regra é necessário que a função esteja em termo de quocientes para aplicar uma derivada nas duas partes. Outra coisa também , é possível verificar que se uma indeterminação continuar após derivar uma vez (aplicar a regra uma vez), pode-se aplicar novamente até fugir da indeterminação. (LEIBNIZ).

Podemos afirmar, a partir do excerto, que Leibniz fala de forma clara sobre conceitos matemáticos fundamentais para compreensão da regra de L'Hospital que são: a aplicabilidade em caso de indeterminação e a possibilidade de aplicar várias vezes consecutivas a regra se a indeterminação permanecer.

Dando continuidade à análise das ações do habitante Leibniz, apresentamos outro recorte da entrevista que evidencia a liberdade de expressar sua opinião no espaço virtual durante as aulas. Ter voz, poder falar, se comunicar, dar sua opinião, tudo isso foi possível no AVA, segundo o que mencionou Leibniz na entrevista:

> **Leibniz:** Eu nunca desenvolvia as atividades sozinho, sempre estava conversando com meus colegas, principalmente a minha turma [referindo-se aos alunos do curso de engenharia]. Nós criamos um grupo no WhatsApp e discutimos todas as atividades, um perguntava: você fez essa? Como você fez? Me explica melhor e assim a gente foi estudando. E não era só dúvida com relação à atividade não, a gente discutia bastante sobre o conteúdo também, porque o conteúdo já é difícil e sozinho não dá para aprender mesmo. Sempre eu conversava com meus colegas porque às vezes ele sabe alguma coisa que eu não sei, ou eu sei alguma coisa que ele não sabe. Assim **um ensina o outro. [...]** Os diálogos nos fóruns foram algo totalmente novo para mim, no primeiro, por exemplo, eu não fazia a mínima ideia como falar,

> eu achei que era apenas para responder aquilo que a senhora [referindo-se a professora] questionava. Mas depois eu fui pegando o jeito e dai que eu percebi que **aquilo era uma conversa**, que a gente **tinha liberdade** para concordar ou discordar com os colegas. E também o jeito como a gente fala lá é legal, a gente pode usar o nosso linguajar do dia-a-dia. Eu me lembro de uma postagem que alguém disse "é nois". Na hora que eu vi eu queria ter postado o mesmo, mas fiquei com vergonha e achei que a senhora ia chamar atenção depois por causa daquilo. E aquele dia que a senhora disse na aula [encontro presencial] que "é noiz", era um linguajar nosso e que aquele simples "É noiz" queira dizer muita coisa, dizer que você também acha aquilo, que concorda com o colega. Essa liberdade que a senhora deu para gente foi o máximo, parece que **a gente foi aprendendo juntos**. Sabe? (grifos nossos)

A fala de Leibniz revela como foi acontecendo o seu processo de aprendizagem na interação com os colegas e a professora, quando ele afirma: "eu nunca desenvolvia as atividades sozinho" e " a gente foi aprendendo juntos". Assim, ele deixa claro que mantinha contato com os demais colegas, eles discutiam, concordavam, discordavam, explicavam, em um movimento contínuo em diferentes espaços, a partir dos estudos realizados no AVA da disciplina.

Compreendemos do recorte que o ambiente construcionista se tornou um lugar acolhedor, evidenciado pela fala do habitante Leibniz: "Mas depois eu fui pegando o jeito e dai que eu percebi que aquilo era uma conversa, que a gente tinha liberdade para concordar ou discordar com os colegas. E também o jeito como a gente fala lá é legal". Um ambiente que incentivou a discussão e a descoberta, características constituintes de um ambiente construcionista de aprendizagem. Afirmamos isso a partir do seguinte recorte da fala de Leibniz: "aquilo era uma conversa" e "Essa liberdade que a senhora deu para gente foi o máximo, parece que a gente foi aprendendo juntos".

Pelo recorte da entrevista destaca-se a importância da liberdade de expressão dos alunos ao estarem diante de um espaço no qual eles podem falar sobre suas certezas e dúvidas. Ele comenta sobre o AVA como um lugar onde ele pode entender e ser entendido usando um linguajar próprio dos usuários (alunos). E foi com essa intenção que organizamos e propusemos o uso do AVA, pois esperávamos que esse fosse um lugar de diálogo, interação, de busca por entendimento mútuo, de liberdade e de aprendizagem. Um lugar que não fosse "de passagem ou de visita", mas um lugar que fosse "habitado". "Com a intenção de tornar o espaço virtual um ambiente 'habitado' e não um espaço de passagem, ao construí-lo temos de usar o diálogo, a comunicação, como materiais essenciais para a obra que se cria" (SCHERER, 2005, p. 50).

Leibniz comentou ainda, em sua entrevista, sobre um grupo que usava o WhatsApp para discussão de produções e conteúdos da disciplina de Cálculo I. Esse grupo recebeu o nome de Calcambi[12] e foi criado por alunos do curso de engenharia. Fizeram parte desse grupo os seguintes participantes da pesquisa: Leibniz, Euler, Cauchy Torricelli e Bernoulli. Embora a Wallis fosse aluna da engenharia, esta não participou do grupo. Bernoulli também usou o Facebook para interagir com Cavalieri, como será apresentado posteriormente.

Como ficamos sabendo da existência desse grupo apenas no momento das entrevistas, ocorrido após as ações desenvolvidas no AVA, acabamos por não acompanhar esse processo de aprendizagem com mais uma tecnologia digital, portanto, a interação ficou restrita apenas aos alunos. Porém, optamos por analisar alguns registros realizados a partir dessa tecnologia, junto aos participantes da pesquisa envolvidos nesse grupo, para termos mais elementos sobre o processo de aprendizagem na/a partir da interação entre os alunos também nesse espaço virtual.

A seguir, apresentamos um diálogo ocorrido no WhatsApp entre os alunos Leibniz, Cauchy, Torricelli e Euler sobre a regra de L' Hospital. Adiantamos que Leibniz e Cauchy foram caracterizados como habitantes e Torricelli e Euler como visitantes do AVA. Em meio às discussões do grupo surgiu uma dúvida sobre o porquê do ponto inserido sobre a curva da função H sumir quando se parava o movimento do mouse em x=-1 (referente à Produção 1, apresentada no Quadro 1, Agenda 1).

***Leibniz**: E o que vc observou na 1 Cauchy?*
***Cauchy:** O limite é o mesmo, 2 , eu só não sei se isso vale sempre.*
***Euler:** O Cauchy vc que fez o seu ponto sumiu na hora que passa pelo -1 na H.?*
***Euler**: Pq eu não consegui entende pq some? Será q é problema do GeoGebra?*
***Cauchy:** Deixa eu ver o meu...*
***Torricelli:** O meu some também cara.*
***Torricelli:** Mas é só H que some na P não.*
***Torricelli:** Dai tem que colocar outro ponto.*
***Euler**: Mas pq q some?*
***Cauchy**: Ah é verdade se parar bem em cima do -1 some mesmo. Eu acho que é pq esse ponto não existe.*
***Leibniz**: hum?*
***Cauchy**: Ah é isso mesmo, pq se a gente substituir o -1 na função da zero sobre zero, dai a função não tá definida. Bom eu acho que é isso? Pq na P não some o ponto e também não da zero sobre zero.*
***Leibniz:** Ah agora eu entendi. Acho que é por isso mesmo. Pq assim se a função não tá definida p aquele ponto não faz sentido mesmo o ponto para ali.*
***Euler:** É noizzz.*
***Euler:** Oh mais a professora perguntou sobre os limites, então eu acho que na H não existe né e na P é -1. Certo?*

[12] Segundo Leibniz, que foi o administrador desse espaço, o nome do grupo representa uma composição entre Cálculo e ambiental, em homenagem ao nome da disciplina e o curso de Engenharia Ambiental.

Cauchy*: Pq?*
Leibniz: *Eu acho q não, pq a função pode não tá definida p um ponto mas se os limites laterais for igual, então existe o limite.*
Cauchy: *É noiz Leibniz*
Cauchy*: Isso ai que vc tá falando Euler, não é aquela condição de continuidade. Que diz q tem q existir o limite no ponto e ser iguais os limites laterais.*
Euler: *ah é mesmo. Mas eu ainda não aceito que se a função não esta definida p aquele ponto então ela não existe.*
Leibniz: *Pensa assim o Euler, o que é o limite?*
Euler: *A ideia de tender né.*
Leibniz: *Por exemplo assim se aquela função que é de duas , tipo assim y=x se x maior q 1 e sei lá y= 2 se x for menor ou igual a 1. Existe o limite quando x tende a 1?*
Euler: *Não! Por que os limites laterais são diferentes um é 1 e outro é 2?*
Cauchy*: Então e na H ?*
Euler: *Na h é o mesmo, [referindo se ao valor dos limites laterais na função h(x)] 2[afirmando que ambos os limites laterais assumem valor igual a 2] né? Então existe.*
Torricelli: *Esse Leibniz tá quase um professor heinnnn. Vc se acha hein!!!!!.*
Cauchy: *Oh mais eu tava pensando outra coisa. O que será q a profa quer com essa atividade. Pq assim o limite é o mesmo, mas ai eu fico pensando assim.... sempre vale. Vc me entendeu?*
Cauchy*: Tipo assim qualquer função se eu pegar a divisão da derivada o limite é o mesmo. Pq isso também da certo na do Fórum 2 da V e R.*
Leibniz: *Se fosse assim as funções era as mesmas. Para ver isso é só pegar a função H e P e analisar o limite p x=-2. É o mesmo?*
Cauchy: *Ah é verdade, putzzzzzzzzzz só vale p -1.*
Torricelli: *A pergunta é pq o -1?*
Leibniz*: Eu acho q é por causa do zero sobre zero.*
Cauchy: *É noizzzzz Leibniz*
Cauchy: *Deve ser isso mesmo, porque na outra do Fórum 2 também da indeterminação.*

Observamos, ao ler esse diálogo, a riqueza de interações e o processo de aprendizagem do grupo a partir de um desafio lançado no AVA. Esse espaço virtual criado pelos próprios alunos   configura-se como um *lócus* de aprendizagem, em um movimento de comunicação síncrono, articulado com o assíncrono dos fóruns do AVA.

A discussão sobre o sumiço do ponto fez com que os alunos conjecturassem, refletissem e concluíssem que esse desaparecimento se deu pelo fato de na primeira função ter-se uma indeterminação e na segunda não. Essa observação é considerada fundamental para o entendimento da Regra de L’Hospital.

Voltemos nosso olhar ao processo de aprendizagem na interação de Leibniz, que também habitou o espaço do WhatsApp, ao dialogar com Euler sobre o fato de que se uma função não estiver definida para um x_1 qualquer do domínio, não necessariamente o limite quando $x \to x_1$ não existe, como fora afirmado por Euler. Leibniz perguntou a Euler se a função $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ 2, & x > 1 \end{cases}$ tem limite quando x tende a 1. Ele parece fazer essa afirmação com o objetivo de possibilitar que Euler duvide de sua afirmação. O questionamento de Leibniz não foi de forma direta, reflete sobre a afirmação de Leibniz e expõe um possível contraexemplo a fim de por a certeza de Euler em cheque. Com isso, Euler percebeu que nesse caso os limites laterais eram diferentes e por isso o limite da função quando x tende a 1 não existe, porém, para a função H, proposta na atividade da disciplina, os limites laterais eram os mesmos, sendo assim, o limite da função H quando x tende a -1 existia.

Nessa interação entre Leibniz e Euler, e desses com os demais colegas do grupo, observamos diferentes momentos de reflexão e aprendizagem, por exemplo, quando Cauchy afirmou que o sumiço do ponto se justifica pela indeterminação da função em x= -1 e, diante disso, Leibniz afirmou: "Ah agora eu entendi. Acho que é por isso mesmo. Pq assim se a função não tá definida p aquele ponto não faz sentido mesmo o ponto pará ali." Outro momento de destaque foi evidenciado pela pergunta feita por Leibniz*:* "o que é o limite?", um conceito que não estava explicito na atividade. Desse modo, Leibniz questiona Euler sobre o que ele compreende a respeito da noção de limite.

Do recorte apresentado salientamos que essa discussão possibilitou a esses alunos refletirem e concluírem que os limites das funções solicitados na produção 1 assumiam o mesmo valor quando x tende a -1, e que essa característica estava relacionada à indeterminação apresentada na função original. Ou seja, com esse diálogo inferimos que os alunos conjecturam sobre o uso da regra de L'Hospital e isso foi evidenciado por falas como: *"*Eu acho q não, pq a função pode não tá definida p um ponto mas se os limites laterais for igual, então existe o limite; Tipo assim qualquer função se eu pegar a divisão da derivada o limite é o mesmo? Pq isso também da certo na do Fórum 2 da V e R", dentre outras.

Pontuamos também que existe uma articulação entre os dois espaços virtuais (AVA e WhatsApp), pois os questionamentos e desafios lançados no AVA por vezes foram transpostos para o WhatsApp, como pode ser observado na fala de Euler: "Oh mais a professora perguntou [no AVA] sobre os limites". Dessa forma, pontuamos que a educadora indiretamente influenciou os diálogos que ocorreram no WhatsApp e esse espaço virtual, criado pelos próprios alunos, configurou-se como um *lócus* de aprendizagem, em um movimento de comunicação síncrono articulado com o assíncrono dos fóruns do AVA.

Assim, finalizamos a análise de dados sobre a aprendizagem na/a partir da interação de mais um habitante do AVA e do WhatsApp, evidenciando possibilidades de aprendizagem na interação em ambientes virtuais. No próximo tópico apresentamos a análise de dados de outro aluno que também habitava esses dois espaços: o Cauchy.

5.1.3 Habitando o AVA da Disciplina de Cálculo I: as Interações de "Cauchy"

Vamos agora expor dados sobre as aprendizagens de mais um habitante do AVA, o Cauchy. Para isso, apresentaremos a análise de registros do aluno no Fórum 1e no Fórum 5.

Ao propor que os alunos analisassem a representação gráfica das funções H(x) e P(x) no Fórum 1, o objetivo era propor reflexões relacionadas à regra de L'Hospital. Na Figura 17 apresentamos a produção de Cauchy referente ao debate nesse Fórum.

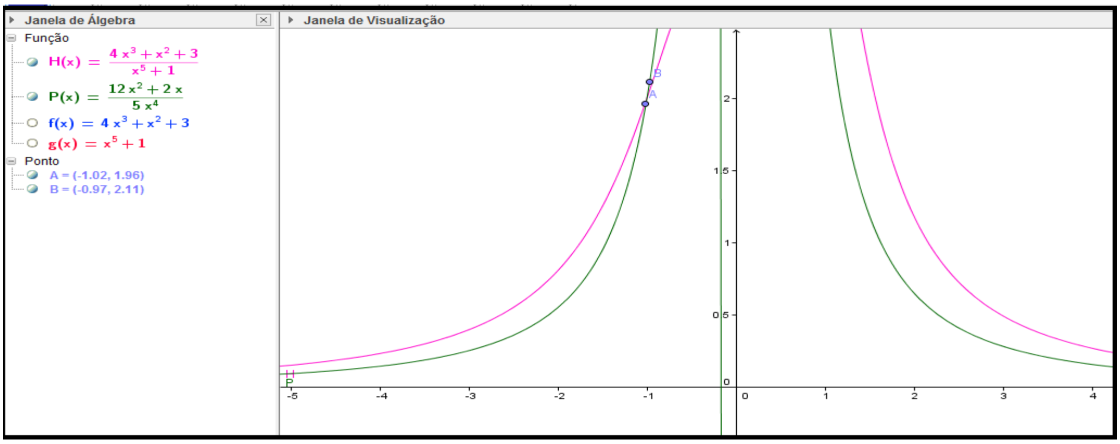


Figura 17 – Produção 1 do aluno Cauchy

Fonte: Dados da pesquisa

Após a realização da produção e o questionamento inicial da professora no Fórum 1, os alunos postaram suas certezas sobre as produções realizadas e observamos que alguns alunos estavam convergindo para uma mesma resposta, de que os limites da *H(x)* e da *P(x)* assumiam o mesmo valor quando *x* tende a -1. Assim, a professora fez uma articulação entre as certezas desses alunos e Cauchy se posicionou:

Olá pessoal.

O Newton, a Lagrange e a Fermat observaram que a função H(x) não está definida para x=-1, mas que existe o limite da função quando x tende a -1, e é igual a 2. Mais alguém observou isso nos gráficos, sem realizar cálculos?

Será que o limite das funções H(x) e P(x) são iguais? Tragam suas observações aqui e vamos fechando as conclusões. Vamos dialogando. (VANESSA).

Bom dia,acho que já chegamos a uma conclusão professora, também concordo com a Lagrange, o Newton e a Fermat; os limites laterais quando x tende a -1 é igual a 2, porém a função H(x) tem um problema, o denominador se anula quando x=-1, ou seja, ele não está definida neste ponto.(CAUCHY).

Nesse momento, Cauchy direciona-se à professora. Mas ele fala na primeira pessoa do plural "já chegamos a uma conclusão". Apresentamos esse recorte para expor como esse aluno se posicionava diante das observações feitas pelos demais alunos e como ele interagia.

Cauchy foi habitante no AVA e também foi habitante no WhatsApp. Neste momento, reproduzimos um diálogo do grupo Calcambi a partir desse aplicativo, para falarmos sobre a aprendizagem desse aluno na/ a partir da interação:

Leibniz: *E o que vc observou na 1 Cauchy?*
Cauchy: *O limite é o mesmo, 2 , eu só não sei se isso vale sempre.*
Euler: *O Cauchy vc que fez o seu ponto sumiu na hora que passa pelo -1 na H.?*
Euler: *Pq eu não consegui entende pq some? Será q é problema do GeoGebra?*
Cauchy: *Deixa eu ver o meu...*
Torricelli: *O meu some também cara.*
Torricelli: *Mas é só H que some na P não.*
Torricelli: *Dai tem que colocar outro ponto.*
Euler: *Mas pq q some?*
Cauchy: *Ah é verdade se parar bem em cima do -1 some mesmo. Eu acho que é pq esse ponto não existe.*
Leibniz: *hum?*
Cauchy: *Ah é isso mesmo, pq se a gente substituir o -1 na função da zero sobre zero,dai a função não tá definida. Bom eu acho que é isso? Pq na P não some o ponto e também não da zero sobre zero.*
Leibniz: *Ah agora eu entendi. Acho que é por isso mesmo. Pq assim se a função não tá definida p aquele ponto não faz sentido mesmo o ponto para ali.*

Já foi apresentado esse diálogo anteriormente, porém, o trazemos novamente com foco na interação de Cauchy com os demais. O questionamento feito por Euler fez com que Cauchy retomasse a sua atividade e, ao observar o movimento do ponto sobre a curva em sua representação gráfica no GeoGebra, ele percebe que o ponto some para x=-1, fazendo com que Cauchy vivenciasse uma reflexão empírica sobre o motivo pelo qual o ponto some e rapidamente apresentasse ao grupo uma justificativa para tal sumiço: "Eu acho que é pq esse ponto não existe" e "Ah é isso mesmo, pq se a gente substituir o -1 na função da zero sobre zero, dai a função não tá definida". E ele continua analisando sua produção, pois para confirmar sua justificativa usa o seguinte argumento: "Bom eu acho que é isso? Pq na P não some o ponto e também não da zero sobre zero".

Nesse recorte do diálogo, podemos destacar algumas ações que mostram a atitude de habitante de Cauchy no *WhatsApp*, como a de propor a solução ao problema, a de buscar justificativa e o entendimento mútuo, pois em nenhum momento Cauchy afirmou algo como verdade única e acabada. No próximo recorte, Cauchy evidencia mais uma vez a atitude de habitante, a de contrapor:

Euler: *Oh mais a professora perguntou sobre os limites, então eu acho que na H não existe né e na P é -1. Certo?*
Cauchy: *Pq?*
Leibniz: *Eu acho q não, pq a função pode não tá definida p um ponto mas se os limites laterais for igual, então existe o limite.*
Cauchy: *É noiz Leibniz*
Cauchy: *Isso ai que vc tá falando Euler, não é aquele condição de continuidade. Que diz q tem q existir o limite no ponto e ser iguais os limites laterais.*

Destacamos do recorte a forma como Cauchy se posiciona diante da afirmativa de Euler, pois ele concorda com Leibniz e ainda apresenta uma possível justificativa que leva Euler a fazer tal afirmativa, que é o conceito de continuidade. Novamente, destacamos a busca pelo entendimento mútuo presente em tal diálogo pelo WhatsApp. E igualmente, temos dados para tratar sobre a aprendizagem de Cauchy, uma vez que, nesse pequeno recorte, demostramos quantos conceitos foram discutidos e surgindo a partir de suas reflexões que iniciaram ao habitar o AVA, como o conceito de continuidade de funções, conceito de existência de derivada, limites laterais, definição de função, dentre outros.

Dando continuidade ao estudo sobre a regra de L'Hospital, apresentamos como Cauchy desenvolveu as produções que foram propostas após a leitura do material didático (Produção 3 apresentada no Quadro 1) a fim de discutirmos sua aprendizagem.

1. Calcule o valor dos limites das seguintes funções:.
   Em todos os exercícios foi detectada se existia a indeterminação 0/0 ou ∞/∞.
   Nesses dois casos foi usada o L'Hospital para resolver a questão, derivando as partes de cima e de baixo das funções.

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

b) $\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$

c) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-x-2}{3x^2-5x-2} = 3/7$

d) $\lim_{x\to +\infty} \frac{2x-9}{6x+7} = 1/3$

e) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-9x+4}{3x^2+7x+8}$ Nessa questão não foi usado o método de L'Hospital para resolver porque não consegui, usei então malabarismo algébrico colocando "x^2" em evidencia. Resposta: 1/3.

Figura 18 – Produção sobre regra de L'Hospital apresentada por Cauchy

Fonte: Dados da pesquisa

Na questão "e", Cauchy mencionou em entrevista não ter conseguido usar a regra de L'Hospital. Talvez isso tenha acontecido pelo fato da resolução demandar o uso da regra duas vezes consecutivas. Isso mostra que talvez provavelmente, Cauchy não saiba que se pode aplicar a regra de L'Hospital mais de uma vez ao calcular o limite de uma função. Porém, como ele não conseguiu encontrar o limite pelo cálculo, resolveu plotar o gráfico no

GeoGebra em busca da solução e, ao descobrir que o limite existia, foi em busca de outra estratégia de solução via cálculo, conforme mencionou na entrevista ao falar da atividade:

> **Cauchy**: A gente [referindo-se a ele e o Euler], não conseguiu fazer porque tinha uma indeterminação ai usamos a regra de L'Hospital e dava outra indeterminação. Assim nós não sabíamos o que fazer. Eu resolvi plotar a função no GeoGebra para ver se tinha mesmo o limite e ai eu observei que existia e falei para o Euler. Ai a gente ficou pensando em como fazer as contas. Eu pensei que se tinha outro jeito de fazer e falei para o Euler sobre colocar o x^2 em evidência e ele concordou comigo, assim ele fez a dele e eu fiz a minha [...]. Mas depois que eu enviei a atividade para o ambiente eu ainda fiquei pensando em como usar a regra, aí eu percebi que usado uma vez a função dava igualzinha a anterior [referindo-se a função da atividade "d"] e aí era só usar a regra de novo.

Pela fala de Cauchy, o processo de aprendizagem dele se deu na interação com Euler ao usar o *WhatsApp*. Quando Cauchy e Euler tentaram resolver a atividade pela regra de L'Hospital e não obtiveram sucesso, Cauchy retomou a estratégia de plotar o gráfico da função. Ele usou o GeoGebra para observar se o limite existia. Podemos afirmar que Cauchy estava vivenciando o ciclo de ações (VALENTE, 2005), pois ele descreveu para a máquina a função na forma da linguagem do software. O computador lhe retornou uma resposta que, no caso, era um gráfico. Ele refletiu sobre aquela representação e observou que o limite procurado existia. Assim, fez uma depuração da estratégia usada para determinar tal limite, mudando-a.

Destacamos também que, apesar das atividades estarem diretamente ligadas ao conteúdo da Regra de L'Hospital, isso não impossibilitou os educandos de buscarem outras estratégias para solucionar o problema. Dessa maneira, evidenciam-se duas características da nossa proposta de atividades relacionada à ação do aluno em desenvolver uma atividade em um ambiente construcionista de aprendizagem. A primeira está relacionada ao papel ativo do aluno ao realizar uma atividade, buscando estratégias e depurando-as quando necessário. Essa primeira característica constituiu-se nas ações dos alunos em resolverem as atividades propostas usando o computador, mais especificamente o software GeoGebra, para alcançar a solução do problema, mesmo a atividade não necessitando da realização via computador. Além do mais, observa-se o empenho de ambos os educandos na busca de uma estratégia que resolvesse o problema.

Uma segunda característica de ações de alunos em um ambiente construcionista, que se evidencia nas falas de Cauchy, diz respeito à oportunidade, dada ao educando, de refletir e discutir sobre suas produções. Compreendemos que, ao interagir com o software GeoGebra, Cauchy vivenciou um momento de reflexão empírica que lhe permitiu afirmar a existência do limite da funções. Além disso, ao descobrir a existência do limite, Cauchy mobilizou conhecimentos anteriormente construídos sobre cálculo de limites que o permitiu prosseguir na busca pela solução do problema. Notemos também que a ação de desenvolver uma produção possibilitou o diálogo entre Cauchy e Euler. E, em meio a esse diálogo, surgiu uma nova estratégia (provisória) que solucionou o problema proposto.

Mas, mesmo após compartilhar a solução com o colega, Cauchy continuou refletindo para relacionar a atividade ao conteúdo explorado. O importante nesse processo de aprendizagem foi o uso de diferentes estratégias para resolver o mesmo problema, o que evidencia a compreensão do conteúdo em estudo.

No diálogo a seguir, resgatado do WhatsApp, podemos observar as interações entre os dois colegas na busca de um entendimento comum sobre o objeto em estudo:

[...]
Cauchy: *E ai Euler e a ultima questão da apostila vc já fez?*
Euler: *Num da certo essa não.*
Cauchy: *É tá encardido essa.*
Euler: *Eu acho que não tem limite não.*
Euler: *ou sei lá não dá para usar a regra não.*
Cauchy: *Acho que tem sim, vou jogar lá no GeoGebra pra vê se tem. Da certo né?*
Euler*: Faz ai então meu escravo.*
Cauchy*: se é besta hein... falei que tem é 0,33.*
Cauchy: *Mas dá para fazer de outro jeito. Da pra colocar o x em evidencia. Né?*
Euler: *Ah já é. [...]*

Pelo recorte apresentado. temos uma ideia de como esse diálogo ocorreu em meio a brincadeiras até o surgimento de estratégias de solução. Para melhor discutirmos a aprendizagem na/a partir da interação de Cauchy com os demais participantes, recorremos aos dados do Fórum 5. A professora começou com questionamentos iniciais e em seguida tivemos a participação de Fermat e Cauchy, conforme o recorte a seguir:

Agora que vocês já plotaram a f(x)=12x-2x2 e analisaram o movimento do ponto, quais as coordenadas do ponto representa o tempo necessário para que o antibiótico atinja nível máximo de concentração no sangue dessas cobaias? E em quanto tempo atinge o nível mínimo de concentração? Qual o domínio válido dessa função na situação dada? Vamos dialogando... (PROFESSORA VANESSA).

As coordenadas do ponto que representa o tempo necessário = (6,36) Atinge o nível mínimo de concentração em 12 hrs.. E o domínio válido dessa função (de acordo com a situação) é de D(f) = {x Є R / 0 ≤ x ≤ 12 }. (FERMAT)

Fermat os meus resultados foram bem diferentes dos seus, o nível máximo de concentração em coordenadas foi (3,18), e o nível mínimo nas coordenadas (6,0), já o domínio será apenas onde a concentração for positiva (y>0), ou seja, o domínio será de 0 a 6. (CAUCHY).

Cauchy evidencia nesse diálogo do Fórum uma ação importante quando se habita algum espaço, que é o de contrapor, se for o caso. Ele fala para Fermat que seus resultados não são os mesmos, atitude essa que mostra a preocupação de Cauchy com o outro, com a busca de um entendimento em relação à questão em estudo. Nas palavras de Scherer (2005, p.150) "habitar é estar livre para ir e vir, é poder escolher, propor, contrapor". Desse recorte de fórum podemos observar também o movimento do "Estar Junto Virtual", pois Cauchy buscou essa interação, a mensagem enviada ao Fórum pode ter feito Fermat refletir sobre sua atividade e proposição, como pode ser visto na continuidade do diálogo.

AGORA, com a atividade refeita, eu cheguei as seguintes conclusões:
o ponto máximo de concentração é em (3,18).O mínimo será em (6,0). O domínio da função de acordo com a função será D= {x Є R / 0 ≤ x ≤ 6 }. (FERMAT).

Após a participação da maioria dos alunos, a professora fez algumas considerações com base nas proposições postadas e propôs novos questionamentos a fim de desafiar o grupo.

Vejo que esse Fórum está "bombando"! É muito bom ver a participação de todos vocês.
Vamos às pontuações....
Analisando as produções feitas e as postagens do Fórum, parece que todos concordam que o nível mínimo de concentração no sangue das cobaias acontece 6 horas após o início do processo. Sendo assim o ponto (6,0) é um ponto de mínimo. Considerando que vocês afirmam que o domínio da função que representa a situação é [0,6], então será que o ponto (6,0) é o único ponto de mínimo da função? Reflitam...
O Cavalieri, a Fermat, o Cauchy, o Euler o [...] dizem que em 3 horas o nível de concentração no sangue das cobaias atinge nível Máximo. E esse nível é igual a 18. Sendo assim, o ponto de máximo que representaria tal situação seria (3, 18). Todos concordam?
Suponha que este seja o ponto procurado, então, agora analisando o gráfico da f '(x) e também fazendo cálculos, vejam o que acontece com a derivada da f(x), sendo x=3 (ou seja sendo x a abscissa do ponto de máximo). [...]. (VANESSA).

Eu concordo com o Cavalieri, para x = 3 temos f'(x)=0, ou seja no ponto de máximo a derivada é nula.(CAUCHY).

Cauchy conseguiu estabelecer uma relação entre a abscissa do ponto de máximo com o valor assumido pela derivada para tal valor de x, o que evidencia a sua aprendizagem, ocorrida na interação com a professora. Pelo recorte, podemos observar também que sua mensagem está articulada com a de Cavalieri, demostrando assim mais uma ação de um habitante do AVA, a de busca pelo entendimento mútuo (SCHERER, 2005).

Apresentamos a análise de alguns dados obtidos da aprendizagem de Cauchy na/a partir da interação em ambientes virtuais. No próximo tópico, discutiremos a aprendizagem na/a partir da interação de Cavalieri, também habitante do AVA.

5.1.4 Habitando o AVA da Disciplina de Cálculo I: as Interações de "Cavalieri"

Cavalieri era um aluno conhecido entre seus colegas como o "CDF"[13], sempre respondendo a tudo o que o professor questionava e sendo constantemente procurado pelos demais para sanar dúvidas. Isso foi observado por nós no período de observação das aulas presencias.

No AVA, a atitude de Cavalieri foi a de um habitante. Para analisar essa atitude, iniciaremos com as suas interações no Fórum 4 - "Dialogando sobre o problema antibiótico". Após o questionamento inicial da professora, tivemos a participação de Euler e, na sequência, a de Cavalieri:

[...] analisando o movimento do ponto, as coordenadas do ponto que representa o tempo necessário para que o antibiótico atinja nível máximo de concentração no sangue dessas cobaias são (3,18). E atinge o tempo mínimo de concentração em 6 horas. Já o domínio válido dessa função na situação dada, onde x é a variação do tempo, é D= [0,6]. (EULER).

*Encontrei os mesmos resultados que a Euler, a coordenada é (3,18),e o nível mínimo de concentração é atingido em 6 horas. Domínio: {x Є R\0≤x ≤6}. (CAVALIERI)***.**

Observa-se que esses alunos consideram o domínio válido sendo o intervalo {x Є R/0≤x ≤6} e que para esse domínio apresentam apenas um ponto de mínimo, esquecendo-se do ponto de coordenadas (0,0). Sendo assim, como professora, questionei:

Analisando as produções feitas e as postagens do Fórum, parece que todos concordam que o nível mínimo de concentração no sangue das cobaias acontece 6 horas após o início do processo. Sendo assim o ponto (6,0) é um ponto de mínimo. Considerando que vocês afirmam que o domínio da função que representa a situação é [0,6], então será que o ponto (6,0) é o único ponto de mínimo da função?[...]. O Cavalieri, a Fermat, o Cauchy, o Euler, o Newton, [...] dizem que em 3 horas o nível de concentração no sangue das cobaias atinge nível Máximo. E esse nível é igual a 18. Sendo assim o ponto de máximo que representaria tal situação seria (3, 18). Todos concordam?
Suponha que este seja o ponto procurado, então agora analisando o gráfico da f '(x) e também fazendo cálculos vejam o que acontece com a derivada da f(x), sendo x=3 (ou seja, sendo x a abscissa do ponto de máximo). E o que acontece com f '(x), sendo x=6? (ou seja, a abscissa do ponto (6,0) que vocês afirmam ser o ponto de mínimo da f(x)).E os demais o que observaram?
Vamos dialogando.... (PROFESSORA VANESSA).

[13] Gíria popular, usada para referenciar um aluno empenhado em seus estudos.

O objetivo desse questionamento era fazer com que os alunos retomassem a atividade para alimentar a espiral de aprendizagem vivenciada em um movimento do “Estar Junto Virtual”, na qual o professor desafia os alunos para que eles construam seu conhecimento. Com isso, Cavalieri se sentiu desafiado e retomou a atividade:

[...] o outro ponto de mínimo é o (0,0), e a derivada da função no ponto 3 é 0 pois a reta tangente e paralela ao eixo x, e após esse ponto a função ira apenas decrescer conforme aumentarmos o valor de x. E no ponto 6 a derivada possui ordenada igual a -12. (CAVALIERI).

Cavalieri identificou a existência de outro ponto de mínimo e observou que a derivada assume o valor zero em x=3 pelo fato da reta tangente à curva no ponto (3,0) ser paralela ao eixo x. Porém, ele afirmou que a derivada em x=6 é -12, afirmação incorreta, pois como a função está definida no intervalo real [0,6], a derivada não existe para x=0 e x=6. Então, continuei a questionar:

O Cavalieri nos diz que no ponto (0,0) também temos um ponto de mínimo. Quem concorda com o Cavalieri?
Considerando o domínio da f como sendo [0,6] e, supondo que o Cavalieri esteja certo, ou seja que no ponto (0,0) temos um ponto de mínimo. Então é possível traçar uma única reta tangente ao gráfico que passa pelo ponto (0,0)?
E pelo ponto (6,0) (que muitos de vocês afirmam ser um ponto de mínimo) é possível traçar uma única reta tangente ao gráfico que passa por esse ponto? (PROFESSORA VANESSA).

Infelizmente, naquele dia fechamos o período da agenda desse Fórum e Cavalieri não respondeu a esse questionamento, talvez por uma questão de tempo. Então, finalizamos a discussão no Fórum com alguns questionamentos para que os alunos se sentissem curiosos em buscar respostas:

Vamos as pontuações dessa aula...
Analisando tanto as produções, quanto a postagens que a maioria encontrou o ponto de máximo da f(x), como sendo (3,18), ou seja, 3 horas após o inicio do processo o nível de concentração do antibiótico no sangue das cobaias é máximo. E valor de máximo assumido pela f é 18. Vocês estavam certos!
Agora olhando para o gráfico da derivada da f, em x=3 (abscissa do ponto de máximo) a f’(3)=0. Isso acontece pois a reta tangente ao gráfico da f no ponto (3,18) é paralela ao eixo x, sendo assim a derivada é nula. Logo, se um ponto (x, f(x)) é ponto de máximo ou de mínimo da f e se a f'(x) existir então f’(x)=0. Esse é um teorema que recebe o nome de Teorema de Fermat. E a recíproca do teorema é verdadeira? Reflitam (PROFESSORA VANESSA).

Durante a entrevista, foram realizados alguns questionamentos a Cavalieri sobre o conteúdo proposto nesse fórum a fim de ter mais dados para discutir a sua aprendizagem na/a partir da interação com os colegas. Vejamos então esse recorte.

> **Pesquisadora:** Em um ponto x do domínio da f(x), onde a derivada de x não existe, o ponto (x, f(x)) pode ser ponto de máximo ou ponto de mínimo?
> **Cavalieri:** Não. Porque quando temos um ponto de máximo ou de mínimo o coeficiente angular da reta tangente tem que ser zero. Então se a derivada não existir naquele ponto não há como ele ser nem de máximo nem de mínimo.
> [Ao perceber que Cavalieri estava equivocado dou-lhe uma folha de papel em branco e peço que ele esboce o gráfico da função f(x)=|x| e o questiono novamente]
> **Pesquisadora:** Essa função possui ponto de mínimo?
> **Cavalieri:** Sim. No ponto (0,0) temos um mínimo.
> **Pesquisadora:** E com relação à derivada da função nesse ponto?

Diante deste questionamento, o aluno expressou uma fisionomia de dúvida. Ficou um pouco em silêncio e afirmou:

> **Cavalieri:** Nossa! É mesmo. Esse é um contraexemplo. Eu nunca pensei nisso. Agora faz sentido, então toda vez que vamos encontrar ponto de mínimo, ou de máximo temos que ver onde a derivada não existe também. Não basta apenas usar o teorema de Fermat.

Em seguida, questiono sobre como ele faz para determinar pontos de máximos e mínimos de função.

> **Cavalieri:** Primeiro eu olho onde a derivada é nula e onde ela não existe e depois eu uso o teste da derivada primeira para ver o crescimento e decrescimento e também o teste da derivada segunda para ver a concavidade da função.

A resposta evidencia que Cavalieri tem estratégias para calcular máximos e mínimos de função, .mas ele apresentou dúvidas em relação à compreensão da derivada como uma reta tangente.

Dando continuidade à análise das interações desse aluno, apresentamos uma afirmação de Cavalieri no Fórum 5- "Dialogando sobre o problema do galinheiro" ao apresentar as coordenadas do ponto de mínimo da função que representa o problema do galinheiro.

Olá professora, na minha plotagem obtive a coordenada (7,28.29) [...]. (CAVALIERI).

Cavalieri encontrou essas coordenadas apenas observando o movimento do ponto sobre a curva que representa a função. Mas, apenas observando esse movimento ficava difícil encontrar o ponto exato, portanto, os alunos tinham que buscar outra estratégia para solucionar o problema. Na produção 5, além de pedir que eles plotassem o gráfico da função P(x), pedimos que fosse plotada a P'(x), e assim fomos seguindo com os questionamentos:

O Euler, o Torricelli e o Cauchy dizem que o ponto que torna o perímetro mínimo é (7, 28). O Cavalieri diz que o ponto é (7, 28.29). E a Wallis, por sua vez, diz que é (7.06, 28.28). Será que analisando o movimento do ponto é possível determinar exatamente o ponto, na qual, o perímetro do galinheiro é mínimo? No caso de não ser possível, alguém tem uma ideia de como fazer para determinar tal ponto?
Analisando a P'(x) é possível identificar na sua representação gráfica alguma característica que nos ajude a encontrar o ponto de mínimo da P(x)? (PROFESSORA VANESSA).

Após esse questionamento, a Lagrange encontrou outra estratégia para identificar os pontos de máximo ou de mínimo para o qual a derivada da função existe. Cavalieri também a encontrou, como evidenciado no recorte do Fórum que segue:

*O perímetro mínimo é aproximadamente (7.07,28.28), isto é, 7.07=raiz quadrada de 50 e 28.28= 20*raiz quadrada de 2. O domínio={x Є R\x>0}.(LAGRANGE).*

[...] quanto ao ponto de mínimo concordo com a Lagrange, com o uso da derivada o ponto de mínimo é identificado corretamente, que é (7.07,28.28) aproximadamente. (CAVALIERI).

A partir disso, a professora solicitou que Cavalieri explicasse melhor essa estratégia. E ele afirmou:

Através do Teorema de Pierre Fermat, no qual se temos X=C pertencente ao domínio de P, então se P´(x):0 este x representa o valor do abscissa de máximo ou mínimo da função caso a derivada apresente coeficientes angulares positivos ou negativos para pontos a esquerda e a direita de x=c. Como nossa função P(x) apresenta apenas o ponto de mínimo não é necessária essa análise e concluímos que x=c e o valor do Xv da função P(x). (CAVALIERI).

A partir dessa explicação, inferimos que Cavalieri justificou corretamente a estratégia. Como não mencionamos nada anteriormente sobre esse teorema e como também os alunos ainda não tiveram contato com tal conteúdo, temos indícios de que ele buscou outras fontes para falar sobre o teorema de Fermat. Ele pode ter pesquisado em algum livro de Cálculo ou em sites da internet, mas é fato que de alguma forma ele se sentiu desequilibrado cognitivamente, com dúvida em relação às suas certezas, diante do questionamento da professora e buscou respostas em outras fontes.

Destacamos que a interação com a professora e com Lagrange possibilitou a Cavalieri encontrar uma nova estratégia que justificasse o uso da derivada na determinação de máximos e mínimos de funções. Pelo fato de professora e aluno serem habitantes desse espaço foi possível a vivência do "Estar Junto Virtual".

> O “estar junto” virtual envolve o acompanhamento e assessoramento constante do aprendiz no sentido de poder entender o que ele faz, para ser capaz de propor desafios e auxiliá-lo a atribuir significado ao que está realizando. Só assim ele consegue processar as informações, aplicando-as, transformando-as, buscando outras informações e, assim, construindo novos conhecimentos. (VALENTE, 2000, p. 109).

Cavalieri foi um aluno que habitou os fóruns e essa atitude possibilitou que ele conseguisse “processar as informações, aplicando-as, transformando-as, buscando outras informações e, assim, construindo novos conhecimentos” (VALENTE, 2000, p. 109).

A aprendizagem de Cavalieri na/a partir da interação ocorreu a partir dos questionamentos da professora, da forma como foi proposta a atividade e do empenho do mesmo em buscar respostas em interação com colegas. Esse processo é confirmado por ele na entrevista:

> **Cavalieri:** Quando a senhora [professora] chegou em sala e disse que teríamos aula de derivadas a distância e achei que seria a coisa mais difícil do mundo, pra não falar impossível. Mas depois com as conversas dos fóruns e da forma como a senhora [professora] ensinava, eu vi que não era difícil. Era legal e eu aprendi. Os diálogos que ocorreram nos fóruns ajudam muito, porque às vezes a gente faz um exercício sem entender direito o que está fazendo e no Fórum temos mais segurança com relação a isso, porque tudo mundo vai conversando ai você vê se você está no **caminho certo ou não.** E se não tiver no caminho certo, a gente pode ver as falas dos outros e assim ter outras ideias e ir tentar de novo ate conseguir aprender. Outra coisa que eu vi nos fóruns é que a senhora nunca dava resposta, sempre fazendo perguntas. Dai eu mesmo queria porque queria achar as respostas, ai eu pegava o Guidorizzi[14] e pesquisava, estudava e olhava de novo os exercícios. **Eu acho que você [professora] queria que a gente pensasse e chegassem ao resultado pelo nosso esforço.** Né? Porque eu percebia isso e percebia também que você sempre chamava todo mundo pra conversar e que **um ajudasse o outro para gente trabalhar junto, em equipe**. Eu não imaginava que aula de Cálculo a distância pudesse ser assim. (grifos nossos)

Na fala de Cavalieri sobre os diálogos nos fóruns, ele mencionou que os diálogos contribuíram para ele perceber se estava no caminho certo ou não. E quando ele afirmou que, ao perceber que não estava no caminho certo, pôde buscar respostas ou informações nas afirmações dos colegas, entendemos que para esse aluno a interação com os colegas foi importante e que ele aprendeu com suas falas/ postagens.

Sendo assim, as interações com os demais colegas e a professora possibilitou a Cavalieri o movimento do “Estar Junto Virtual” (VALENTE, 2005), uma vez que ao

[14] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de Cálculo**. 5. ed. São Paulo: LCT, 2001.

observar e refletir sobre as postagens dos demais colegas o aluno também fazia novas proposições.

No segundo destaque que fizemos na fala de Cavalieri, fica claro o papel da professora em “colocar o aluno em ação”, característica do ambiente construcionista. Cavalieri afirmou que se esforçou, pesquisou, estudou e retomou as produções sempre buscando um entendimento do objeto em estudo de acordo com os demais colegas, evidenciando que ocorreram momentos nos quais a professora conseguiu desequilibrar cognitivamente esse aluno. Afirmamos isso com base na afirmação de Cavalieri: “a senhora nunca dava resposta, sempre fazendo perguntas. Daí eu mesmo queria porque queria achar as respostas, aí eu pegava o Guidorizzi e pesquisava, estudava e olhava de novo os exercícios”. Ou seja, a partir dos questionamentos da professora, o aluno buscava em diferentes fontes informações que poderiam ser úteis para solucionar o problema em estudo. Isso evidencia o movimento do “Estar Junto Virtual” no qual o professor reporta questões aos alunos e estes refletem sobre elas e agem na tentativa de remeter ideias ao grupo.

O terceiro destaque no recorte da entrevista de Cavalieri é dado ao trabalho em equipe que não está junta presencialmente, mas que pôde estar junta virtualmente, um acompanhado o outro, propondo e contrapondo, expondo e analisando o exposto.

Em grande parte das entrevistas que foram realizadas com os alunos, quando foi solicitado que falassem sobre como desenvolviam as produções, se sozinhos ou em grupos, muitos citaram o nome de Cavalieri como alguém que ajudou, tirou dúvidas e discutiu produções com eles em outros espaços. Alguns mencionaram que as produções foram desenvolvidas presencialmente ou por meio do Facebook. Evidencia-se que esse aluno habitou o espaço virtual da disciplina e outro espaço para o estudo dos conteúdos da disciplina. Vejamos duas falas de entrevista que comprovam como Cavalieri interagiu com seus colegas.

> **Bernoulli:** Algumas atividades eu fiz sozinho, mas outras eu fiz com a ajuda do Cavalieri. O Cavalieri pega as coisas bem rápido e ele sempre ajuda a gente. No problema do galinheiro mesmo eu não conseguiu encontrar a função. Dai eu pedi ajuda por Cavalieri pelo Facebook, ai ele foi me explicando ai eu consegui encontrar a função.
>
> **Arquimedes[15]:** Algumas vezes que eu fui ao laboratório, o Cavalieri tava lá e ai a gente discutiu nossas atividades [...].

---

[15] Arquimedes não foi selecionado para a análise de dados, pois esse aluno participou de apenas um fórum e assim consideramos que teríamos poucos dados para discutirsobre sua aprendizagem.

Cavalieri e Bernoulli não se prenderam apenas ao AVA da disciplina, usaram também o Facebook. Eles criaram seus próprios ambientes de aprendizagem ao levarem o estudo de Cálculo para espaços virtuais que habitavam. Bernoulli foi considerado transeunte do AVA da disciplina, como veremos no tópico 5.1.6, e também fazia parte do grupo de alunos do curso de engenharia do WhatsApp, mas ele também usou o Facebook onde interagiu com Cavalieri, acadêmico do curso de Licenciatura em Matemática.

Como consideramos importante toda interação em ambientes virtuais que favoreçam a aprendizagem dos alunos, apresentamos e analisamos um recorte de um diálogo ocorrido entre Cavalieri e Bernoulli no bate-papo do Facebook, para analisar a aprendizagem na/a partir da interação de Cavalieri:

Bernoulli: *ok da uma força ai o problema do galinheiro tem q ter área igual a 50m quadrados a menor área possível*
Cavalieri: *não tem q ter perímetro ele quer o menor perímetro não a menor área.*
Bernoulli*: sei... se tem área igual a 50 km o menor perímetro vai ser o de um quadrado certo x=y no caso*
Cavalieri: *n o menor perímetro n esse negocio de quadrado e relacionado a área*
Bernoulli: *ok... 2x + 2y=P*
Cavalieri*: bom vc tem q x.y=50*
Bernoulli*: x.y=50*
Cavalieri: *pronto agora e só deixar o y em função do x e substituir na formula do perímetro*
Bernoulli: *E se isolar o y? Pode?*
Cavalieri: *Eu acho que sim tem que tentar. Tenta ai deve dar certo.*
Bernoulli *: Vou fazer primeiro isolando o x mesmo e depois vou fazer isolado o y só para ver se dá certo.*
Cavalieri: *bom tanto faz kkkkkkkkkkkkk a função vai ser a mesma só vai mudar a variável.*
Bernoulli : *Tá dai eu substituo o x na função x+ 2y = p*
Cavalieri: *Porque x+2y?*
Bernoulli*: Por causa do muro.*
Cavalieri: *veio o muro vai mudar o perímetro do galinheiro. Pensa ai?*
Bernoulli: *Não é mesmo. Ah então essa história de muro é pegadinha. Então a função do perímetro é 2x+2y. Né?*
Cavalieri: *É filho.*
Bernoulli: *Ah então é por isso que a minha tá dando diferente das respostas do pessoal do Fórum. Agora eu já sei fazer. Valeu Cavalieri.*

Destacamos, desse bate papo, como Cavalieri contribuiu para a aprendizagem de Bernoulli. Diante de alguns questionamentos de Bernoulli, Cavalieri vai reportando algumas ideias e questões, como evidencia o recorte: “Eu acho que sim tem que tentar. Tenta ai deve dar certo”; ou ainda, “veio o muro vai mudar o perímetro do galinheiro. Pensa ai?”. Perante isso, Bernoulli foi refletindo, propondo e encontrando respostas à questão proposta. Com essa atitude, Cavalieri apresentou ações de comprometimento com o colega, independente do espaço em que habitava, ele se responsabilizou por suas ações e aprendizagens também pelas de Bernoulli. Ele habitava os dois espaços, o AVA e o Facebook, e, por habitar o AVA, levou questões realizadas nesse ambiente para o *Facebook* ao interagir com Bernoulli, que não habitava o AVA da disciplina.

Dessa forma, finalizamos a análise dos dados dos alunos que assumiram uma postura de habitante (SCHERER, 2005) do AVA, que foram Newton, Cauchy, Leibniz e Cavalieri. Cauchy e Leibniz não foram habitantes apenas do AVA, mas também do WhatsApp, que foi um espaço virtual que compreendemos, pelos dados apresentados, ser também uma possibilidade de aprendizagem na disciplina de Calculo I.

Newton preferiu o AVA e interagiu com alguns colegas presencialmente, o que também nos indica uma possibilidades de aprendizagem. Por sua vez, Cavalieri, , além do AVA, usou o Facebook como local para interagir com Bernoulli. Em todos esses locais virtuais de aprendizagem compreendemos a grande importância da interação entre os alunos, ou entre alunos e professor. Pelos diálogos apresentados no WhatsApp e Facebook, observamos que muito do que foi discutido no AVA foi articulado em outros espaços virtuais por esses habitantes. Assim, inferimos que o fato desses alunos habitarem o AVA possibilitou discussões e reflexões e aprendizagem nesses outros espaços.

No próximo tópico analisamos os alunos que assumiram a postura de visitantes do AVA.

5.1.5 Visitantes do AVA da Disciplina de Cálculo I: ações de “Wallis”, “Fermat” “Euler”, “Torricelli” e “Lagrange”

O objetivo de toda a disciplina ofertada, em parte ou totalmente a distância é que todos, alunos e professor, sejam habitantes, mas, no caso dessa disciplina de Cálculo I, como mencionado anteriormente, tivemos, além dos habitantes, visitantes e transeuntes. Assim, neste subcapítulo apresentaremos a análise dos alunos que foram caracterizados como visitantes.

> O visitante é aquele aluno que aparece no ambiente, mobilizado por uma necessidade ou por uma obrigação. O visitante não se compromete com o ambiente e com os colegas, ele visita o ambiente, às vezes colabora, às vezes não; ele entra no ambiente, se posiciona, mas permanece alheio ao compromisso coletivo. (SCHERER, 2005, p. 203).

Os caracterizados como visitantes do AVA nesta pesquisa, que justificaremos neste subcapítulo, foram a Wallis, o Euler, o Torricelli, a Lagrange e a Fermat. Apresentaremos os registros e produções deles para analisar suas aprendizagens na/a partir da interação com os demais alunos e professora.

Wallis postou mensagens em todos os fóruns, porém sempre com respostas desconectadas do debate, sem articulação com os demais colegas. Ela entrava nos fóruns, respondia alguns questionamentos que haviam sido propostos pela professora e saia alheia ao que os demais colegas haviam postado e articulado. Como exemplo, trazemos o recorte do Fórum 4 - “Dialogando sobre o problema do Antibiótico” no momento após o fechamento do Fórum, em que Wallis surgiu com sua primeira e única mensagem.

Boa tarde pessoal!
Vamos fechando mais este Fórum. A participação de vocês foi excelente! É bom ver essa dedicação!
Vamos às pontuações dessa aula...

- *Analisando tanto as produções, quanto a postagens vejo que a maioria encontrou o ponto de máximo da f(x), como sendo (3,18) ou seja 3 horas após o inicio do processo o nível de concentração do antibiótico no sangue das cobaias é máximo. E valor de máximo assumido pela f é 18. Vocês estavam certos!*
- *Agora olhando para o gráfico da derivada da f, em x=3 (abscissa do ponto de máximo) a f’(3)=0. Isso acontece pois a reta tangente ao gráfico da f no ponto (3,18) é paralela ao eixo x, sendo assim a derivada é nula. Logo se um ponto (x, f(x)) é ponto de máximo ou de mínimo da f e se a f'(x) existir então f’(x)=0.Esse é um teorema que recebe o nome de Teorema de Fermat. E a recíproca do teorema é verdadeira? Reflitam...*
- *O Domínio válido para tal situação é [0,6], pois devemos considerar o início do processo, ou seja em x=0 , na qual a concentração é nula e o fim do processo que acontece 6 horas depois. Sendo assim temos dois pontos de mínimo para f, sendo eles (0,0) e (6,0). Mas como o domínio da f é um intervalo fechado [0,6] , então nas extremidades do intervalo não existe a reta tangente horizontal ao gráfico da f. Sendo assim a derivada no ponto (0,0) e (6,0) não existe. Logo não é válido o Teorema de Fermat.*
- *Dessa forma para determinarmos ponto de máximo e mínimo de uma função temos de encontrar os valores de x onde a derivada da função é zero ou onde a derivada não existe. Sendo assim devemos olhar para os números críticos da f , pois um número c do domínio da f é chamado do número crítico se f’(c)=0 ou f’(c) não existe. Então na situação proposta x=0, x=3 e x=6 são números críticos da* $f(x)=12x-2x^2$

Agora já disponível o material para leitura
Bom estudo a Todos!
Abraços Profa. Vanessa (PROFESSORA VANESSA).

Olá professora, desculpe pelo atraso.
Bom, minha interpretação foi de que a concentração máxima atingida foi 18(unidades de concentração), após 3 horas, sendo o domínio [0, infinito[. (WALLIS)

Mais de 24 horas após fechamento do Fórum temos a primeira participação dessa aluna, fato que se repetiu em outros fóruns. Observe que a mensagem de Wallis não traz consigo nenhuma das considerações de seus colegas e da professora. Com essa mensagem ela apenas responde, de forma direta, o questionamento inicial do Fórum e desconsidera outros questionamentos feitos pela professora, que surgiram no decorrer da discussão do Fórum. Essa atitude dava indícios de que Wallis não tinha lido o diálogo realizado durante a aula a distância . No entanto, durante a entrevista constatamos que ela lia as mensagens, mas não interagia dando retornos e remetendo questões ao grupo: a seguir um recorte da entrevista em que ela comenta sobre o desenvolvimento de suas atividades:

> **Pesquisadora:** Wallis você desenvolve suas atividades sozinha?
> **Wallis:** de inicio o Leibniz me ajudou com o GeoGebra, mas depois eu fiz tudo sozinha mesmo. Eu gosto de fazer sozinha. [...] E nos fóruns eu vi as repostas dos outros e ai foi ajudando para saber se a minha tava certa. Eu sempre deixei para fazer as postagens por ultimo porque assim eu podia comparar com os outros.
> **Pesquisadora:** Me fala sobre os diálogos nos fóruns?
> **Wallis:** Ah eu achei bom.[...] Mas eu não conversei muito, porque eu fiquei com um pouco de vergonha. Eu gostei do Fórum mesmo foi para ver se minha atividade estava certa.

Além disso, a Wallis desenvolveu todas produções propostas. E em sua maioria corretamente, assim, apesar de sua pouca interação nos fóruns, não podemos afirmar que ela não aprendeu, apenas que não sabemos como se deu seu processo de aprendizagem.

Como exemplo, apresentamos a resolução de algumas produções por Wallis**:** "(CMPA-RS) A temperatura t de uma estufa (em graus Celsius) é determinada, em função da hora x do dia, pela expressão $f(x) = -x^2 + 22x + 85$. Responda: em que horário a temperatura é máxima? Qual é a temperatura máxima?"

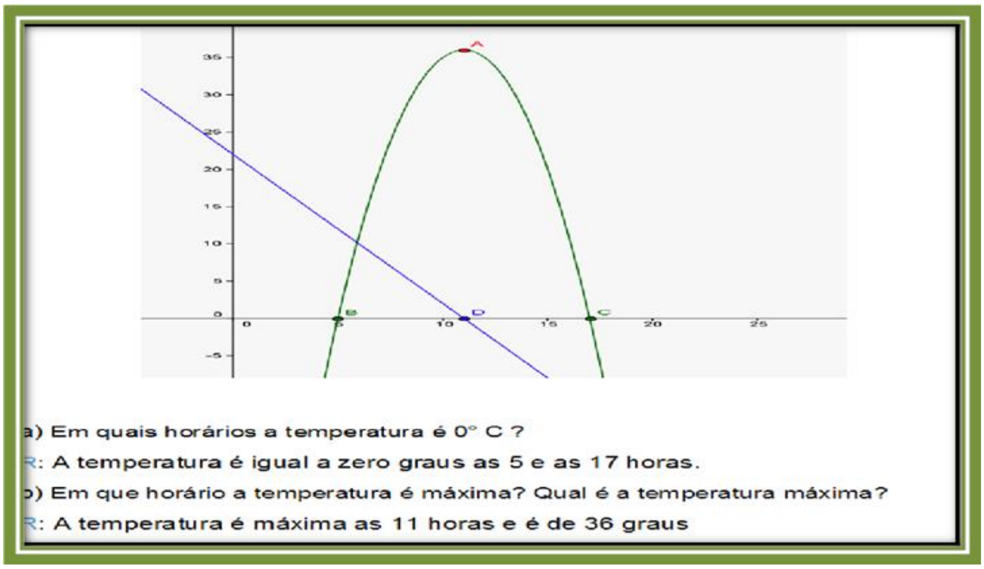


Figura 19: Atividade realizada por Wallis sobre a temperatura da estufa
Fonte: Dados da pesquisa.

Ao observar essa atividade, podemos inferir que Wallis utilizou o teorema de Fermat para encontrar o ponto de máximo global dessa função. E foi justamente o teorema de Fermat que foi o conceito envolvido na atividade do antibiótico discutida no Fórum 4 e no Fórum 5, em que ela teve apenas uma postagem.

Ao questionarmos sobre essa atividade, ela afirmou:

> **Wallis:** Eu usei o teorema de Fermat para encontrar os pontos de máximo da função. Eu soube fazer por que eu estudei na apostila que a senhora (professora) envio no ambiente.[...]aquele material foi o melhor que eu já vi para estudar Cálculo. Eu costumava usar o Guidorizzi, mas durante todo tempo que a senhora deu aula para gente eu só usei aquelas apostilas. Eu gostei muito das explicações e da forma como estava escrito. Ficou muito claro! Tinha uns balõezinhos com uns links que ajudavam muito. Isso foi o eu achei mais legal e foi o que me ajudou a realizar as atividades. A senhora podia escrever outras sobre limites e integral também ne?.

Analisando o que foi dito por Wallis durante a entrevista, fica claro a postura de visitante dessa aluna, evidenciado pela fala: “E nos fóruns eu vi as respostas dos outros e ai foi ajudando para saber se o meu tá certo [...] Eu gostei do Fórum mesmo foi para ver se minha atividade estava certa”. Isso evidencia que Wallis usava o ambiente para verificar se sua atividade está certa. Ela se preocupava apenas com as suas produções e aprendizagem, esquecendo-se do grupo. Ela não se preocupava em trazer algo que pudesse enriquecer o ambiente e contribuir com a aprendizagem dos demais colegas. Era apenas uma visita, em busca de informações, que favoreciam a aprendizagem apenas do próprio visitante. E ela justifica sua atitude de visitante por ser tímida, ou seja, ela precisaria ser mais incentivada a “perder o medo” de se expor em ambientes virtuais.

Não é fácil ser um habitante em diferentes espaços, pois ser habitante implica em se expor, estar aberto a críticas dialogando sobre proposições contrárias. Habitar demanda observar, falar, silenciar, postar mensagens, refletir, questionar, produzir, reelaborar. (SCHERER, 2005).

Pela entrevista, podemos inferir que apesar de Wallis não ter interagido no AVA com os demais participantes, ela interagiu com o material que foi preparado em uma perspectiva construcionista, pensando em um processo de EaD. Ela afirmou que os links dos objetos de aprendizagem foram os que a ajudaram a desenvolver as produções. Então, podemos afirmar que o processo de aprendizagem dessa visitante se deu principalmente pela interação dela com o material didático e pela observação dos diálogos nos fóruns. Mostrando assim que o material didático e os diálogos dos fóruns indicam possibilidade de aprendizagem para o Cálculo na modalidade de EaD. Daí a importância de estabelecermos um diálogo com os alunos também pelo material didático disponibilizado para as aulas em EaD.

> A estética do material impresso consiste na comunicação com o aluno e com quem é este aluno, não esquecendo do movimento da pergunta. Afinal, o material precisava despertar o interesse do aluno, desafiá-lo a questionar e questionar-se, além de apresentar vários caminhos, favorecendo a hipertextualidade, provocando links com outros contextos que convidassem o aluno a pensar. (SCHERER, 2005, p.134).

Mas, esse material se torna um potencial maior quando o aluno é habitante, discute em fóruns ou outros espaços de aprendizagem, a partir do escrito e lido.

Euler e Torricelli também foram visitantes. Eles interagiram com Cauchy e Leibniz, mas isso apenas no WhatsApp, como pode ser observado em diálogos apresentados em análises anteriores. Mas, no AVA essa interação não se evidenciou. Pelos dados do WhatsApp, esses alunos parecem ter sido habitantes daquele espaço. Apresentamos um diálogo do grupo Calcambi para discutirmos a atitude de Euler e Torricelli.

Leibniz*: E o que vc observou na 1 Cauchy?*
Cauchy: *O limite é o mesmo, 2 , eu só não sei se isso vale sempre.*
Euler: *O Cauchy vc que fez o seu ponto sumiu na hora que passa pelo -1 na H.?*
Euler*: Pq eu não consegui entende pq some? Será q é problema do GeoGebra?*
Cauchy: *Deixa eu ver o meu...*
Torricelli:*: O meu some também cara.*
Torricelli: *Mas é só H que some na P não.*
Torricelli: *Dai tem que colocar outro ponto.*
Euler*: Mas pq q some?*
Cauchy*: Ah é verdade se parar bem em cima do -1 some mesmo. Eu acho que é pq esse ponto não existe.* ***Leibniz****: hum?*
Cauchy*: Ah é isso mesmo, pq se agente substituir o -1 na função da zero sobre zero, dai a função não tá definida. Bom eu acho que é isso? Pq na P não some o ponto e também não da zero sobre zero.*
Leibniz: *Ah agora eu entendi. Acho que é por isso mesmo. Pq assim se a função não tá definida p aquele ponto não faz sentido mesmo o ponto para ali.*
Euler: *É noizzz.*
Euler: *Oh mais a professora perguntou sobre os limites, então eu acho que na H não existe né e na P é -1. Certo?*
Cauchy*: Pq?*
Leibniz: *Eu acho q não, pq a função pode não tá definida p um ponto mas se os limites laterais for igual, então existe o limite.*
Cauchy: *É noiz Leibniz*
Cauchy*: Isso ai que vc tá falando Euler, não é aquela condição de continuidade. Que diz q tem q existir o limite no ponto e ser iguais os limites laterais.*
Euler: *ah é mesmo. Mas eu ainda não aceito que se a função não esta definida p aquele ponto então ela não existe.*
Leibniz: *Pensa assim o Euler, o que é o limite?*
Euler: *A ideia de tender né.*

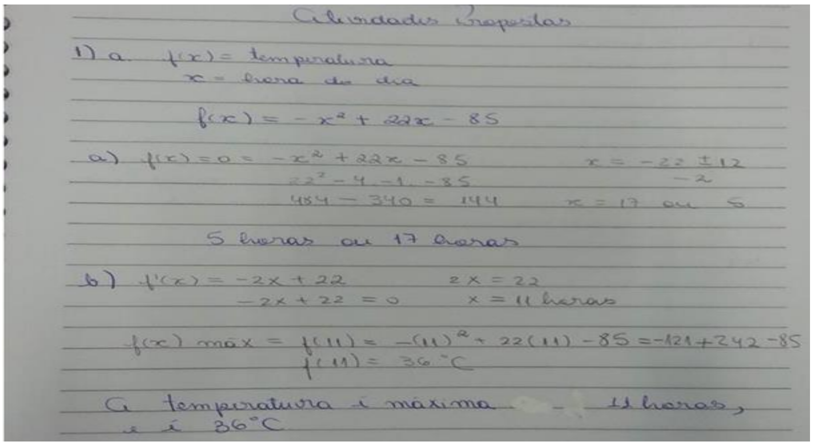
Leibniz: *Por exemplo assim se aquela função que é de duas , tipo assim y=x se x maior q 1 e sei lá y= 2 se x for menor ou igual a 1. Existe o limite quando x tende a 2?*
Euler: *Não! Por que os limites laterais são diferentes um é 1 e outro é 2?*
Cauchy*: Então e na H ?*
Euler: *Na h é o mesmo 2 né. Então existe.*
Torricelli: *Esse Leibniz tá quase um professor heinnnn. Vc se acha hein!!!!!.*
Cauchy: *Oh mais eu tava pensando outra coisa. O que será q a profa quer com essa atividade. Pq assim o limite é o mesmo, mas ai eu fico pensando assim.... sempre vale. Vcs me entendeu?*
Cauchy*: Tipo assim qualquer função se eu pegar a divisão da derivada o limite é o mesmo. Pq isso também da certo na do Fórum 2 da V e R.*
Leibniz: *Se fosse assim as funções era as mesma. Para ver isso é só pegar a função H e P e analisar o limite p x=-2. É o mesmo?*
Cauchy: *Ah é verdade, putzzzzzzzzzz só vale p -1.*
Torricelli: *A pergunta é pq o -1?*
Leibniz*: Eu acho q é por causa do zero sobre zero.*
Cauchy: *É noizzzzz Leibniz*
Cauchy: *Deve ser isso mesmo, porque na outra do Fórum 2 também da indeterminação.*

Observemos como a interação que aconteceu nesse espaço possibilitou a Euler validar ou refutar algumas de suas certezas provisórias, que foram determinantes durante a discussão sobre a regra de L'Hospital. Por exemplo, Euler é responsável em fazer um questionamento fundamental para a compreensão da regra, que é o caso de indeterminação, nas palavras de Euler, "o sumiço do ponto". Com esse questionamento, ele possibilitou um debate que envolveu diferentes conceitos como o de continuidade, existência de Derivada de função, dentre outros. Ou seja, esse questionamento desencadeou em Euler e nos outros alunos do grupo momentos de reflexão, evidenciado por falas como: "na h é o mesmo 2 né, "Então existe".

Torricelli também enriqueceu esse diálogo com questionamentos como: "A pergunta é pq o -1?. Essa questão também foi fundamental para a compreensão da regra de L'Hospital e desencadeou novas reflexões. A seguir apresentamos mais um diálogo que ocorreu no WhatsApp, mas nesse diálogo Euler participa e Torricelli não.

Euler: *Oh engenheiros quem sabe fazer a 1 da apostila*[16]*?*
Bernoulli: *Eu fiz meu brother! (a imagem apresentada posteriormente foi obtida do espaço de produção do AVA, pois Bernoulli enviou ao AVA também).*

[16] Atividade 3: (CMPA-RS) A temperatura t de uma estufa (em graus Celsius) é determinada, em função da hora x do dia, pela expressão $f\ (x) = -x^2 + 22x - 85$. Responda: a) Em quais horários a temperatura é 0° C? b) Em que horário a temperatura é máxima? Qual é a temperatura máxima?



Atividades Propostas

1) a. $f(x) =$ temperatura

$x =$ hora do dia

$f(x) = -x^2 + 22x - 85$

a) $f(x) = 0 = -x^2 + 22x - 85$ $\quad x = \frac{-22 \pm 12}{-2}$

$22^2 - 4 \cdot -1 \cdot -85$

$484 - 340 = 144$ $\quad x = 17$ ou 5

5 horas ou 17 horas

b) $f'(x) = -2x + 22$ $\quad 2x = 22$

$-2x + 22 = 0$ $\quad x = 11$ horas

$f(x)$ max $= f(11) = -(11)^2 + 22(11) - 85 = -121 + 242 - 85$

$f(11) = 36°C$

A temperatura é máxima ... 11 horas, e é 36°C

Euler: *Eu não consegui fazer a b, eu joguei a função no GeoGebra e eu vi o máximo e mínimo. Mas como faz a conta.?*
Bernoulli*: Eu fiz assim, peguei a função f e derivei e igualei a zero e dai acha a raiz que deu 11 e substituindo da 36 graus.*
Leibniz: *Eu entendi assim também e fiz desse jeito.*
Cauchy*: Euler é só usar o teorema de Fermat. O meu deu isso também.*
Euler: *É pq a derivada sempre é zero né quando tem um máximo ou mínimo.*
Bernoulli: *Beleza então!*
Cauchy: *O Euler vc tá errado. Isso que vc tá falando é o que a professora perguntou no ultimo Fórum que é a volta do teorema de Fermat. E não é verdade!*
Euler: *Por quê?*
Leibniz*: o Cauchy tá certo Euler.*
Bernoulli: *Agora vocês me confundiram. É ou num é zero?*
Cauchy: *A ida é verdade mas a volta não.*
Leibniz: *é só ver a função modulo de x, em zero a derivada não existe, mas tem um mínimo.*
Cauchy: *a função x ao quadrado é melhor p explicar. Quando ela é nula?*
Bernoulli: *em zero. Já entendi, mas em zero a gente não tem nem máximo e nem mínimo ne?*
Euler: *Ah é mesmo então não da para achar máximo e mínimo apenas vendo a derivada e zero.*
Leibniz: *Não! tem q ver onde ela não existe.*
Euler: *E como que vê se a derivada não existe?*
Cauchy: *tem função que a gente bate o olho e sabe mas tem outras que não dai eu também não sei.*
Leibniz*: Olha o domínio e ver onde a derivada existe.*

Com esse diálogo Euler apresenta dúvidas com relação à recíproca do Teorema de Fermat e em interação com Leibniz, Cauchy e Bernoulli, foi lhe oportunizado um exemplo que o fizera observar que tal proposição nem sempre é valida. Euler faz algumas considerações que evidenciam sua aprendizagem na interação com os colegas, como por exemplo, na seguinte fala: “Ah é mesmo então não da para achar máximo e mínimo apenas vendo a derivada e zero”. Esse aluno demostra também que os colegas o conseguiram desequilibrá-lo cognitivamente e é evidenciado pela fala: “Por quê?”

Assim, podemos afirmar que eles habitaram o espaço de debate no WhatsApp, mas não habitaram o AVA. Por várias vezes a professora, habitante, tentou envolver Wallis, Euler e Torricelli nos diálogos dos fóruns, mas sempre fracassava em suas propostas. O fato desses alunos entrarem pouco no AVA, pode ter contribuído para que a professora não conseguisse desafiá-los. Vejamos uma dessas tentativas no Fórum 5 –" Dialogando sobre o problema do Galinheiro".

Olá pessoal,
Agora que vocês já plotaram a P(x) e analisaram o movimento do ponto, quais as coordenadas do ponto que representam a medida x para se obter o perímetro mínimo para construir o galinheiro? Qual o domínio válido dessa função na situação dada? Vamos dialogando...Abraços
Professora Vanessa (PROFESSORA VANESSA).

Olá professora, as coordenadas do ponto de perímetro mínimo são (7,28). O domínio é]0,+∞[.(EULER).

Como se trate de comprimento acho q devemos somente considerar os resultados positivos então as coordenadas do ponto mínimo são (7,28)
E o domínio da função é R-{0}. (TORRICELLI).

Olá! Boa noite
minhas coordenadas foram (7.06, 28.28) e o domínio é]0; + infinito[.(WALLIS).

O Euler, o Torricelli dizem que o ponto que torna o perímetro mínimo é (7, 28). Já o Cavalieri diz que o ponto é (7, 28.26). E a Wallis, por sua vez, diz que é (7.06, 28.28). Será que analisando o movimento do ponto é possível determinar exatamente o ponto, na qual, o perímetro do galinheiro é mínimo? No caso de não ser possível, alguém tem uma ideia de como fazer para determinar tal ponto?
Analisando a P'(x) é possível identificar na sua representação gráfica alguma característica que nos ajude a encontrar o ponto de mínimo da P(x)?
Com relação ao domínio da P(x), o Cauchy, a Wallis e o Euler dizem que é]0,+∞[, ou seja, em x=0 a função P(x) não está definida. Já o Torricelli diz que o domínio da P(x) é {x Є R\0≤x ≤+∞}, ou seja, em x=0 a P(x) está definida. Torricelli, Wallis, Euler e Cauchy reflitam sobre o domínio que cada um encontrou e os domínios encontrados pelos outros e tragam suas pontuações para a discussão no Fórum.
E os demais, o que acham dos domínios encontrados? Justifiquem (PROFESSORA VANESSA).

Nessa mensagem a professora tentou chamar todos para a discussão a fim de que eles discutissem afirmações equivocadas, fazendo um comparativo entre os resultados apresentados e questionando suas certezas. Mas, os três não retornaram a esse Fórum. Assim, consideramos que eles apenas visitaram o AVA, respondendo aquilo que estava sendo questionado no momento inicial pela professora, e não mais retornaram. Foram visitas curtas.

E isso se repetiu em mais fóruns. No Fórum 4- "Dialogando sobre o problema do Antibiótico", Torricelli e Euler fizeram suas visitas e novamente a professora tentou trazê-los para a discussão.

Olá! Boa tarde
O nível máximo de concentração é em (3,18). E nível mínimo é em (6,0). Domínio é [0,6].(TORRICELLI)

Olá Professora.

Segundo os meus cálculos, o ponto máximo de concentração é em (3,18). O mínimo será em (6,0). O domínio da função de acordo com a função será D=[0,6].(EULER).

Vejo que esse Fórum está "bombando"! É muito bom ver a participação de todos vocês.
Vamos às pontuações....
Analisando as produções feitas e as postagens do Fórum, parece que todos concordam que o nível mínimo de concentração no sangue das cobaias acontece 6 horas após o início do processo. Sendo assim o ponto (6,0) é um ponto de mínimo. Considerando que vocês afirmam que o domínio da função que representa a situação é [0,6], então será que o ponto (6,0) é o único ponto de mínimo da função? Reflitam...
O Cavalieri, a Fermat, o Cauchy, o Euler o Torricelli[...] dizem que em 3 horas o nível de concentração no sangue das cobaias atinge nível Máximo. E esse nível é igual a 18. Sendo assim o ponto de máximo que representaria tal situação seria (3, 18). Todos concordam?
Suponha que este seja o ponto procurado, então agora analisando o gráfico da f '(x) e também fazendo cálculos vejam o que acontece com a derivada da f(x), sendo x=3 (ou seja sendo x a abscissa do ponto de máximo). [...].(VANESSA).

Mas, eles não retornaram para dialogar com a professora e demais colegas. Essas visitas curtas nos impossibilitaram de desenvolver as produções como foram planejadas, sabemos pouco do que eles estavam pensando, produzindo, refletindo. Por exemplo, nesse recorte do Fórum 4, as postagens do Euler e do Torricelli foram as únicas deles no Fórum. Só pudemos analisar um pouco do processo de aprendizagem desses alunos a partir dos dados obtidos de diálogos no WhatsApp.

Nas entrevistas buscamos questioná-los sobre as possíveis interações com os colegas e eles mencionaram o seguinte:

> **Euler**: A gente [referindo-se aos colegas de engenharia] conversa bastante no WhatsApp, essas tarefas que a senhora passava a gente falava tudo lá. Nós somos muito unidos até para estudar Cálculo. Ontem mesmo [referindo-se ao dia anterior a prova] a gente ficou até de madrugada discutindo umas atividades no Whats [abreviação para WhatsApp]. [...] No fórum eu não conversei muito não, porque eu não tinha muito tempo de entrar, a senhora deve ter visto que eu me atrasei bastante no fórum.
>
> **Torricelli:** Para conversar sobre a disciplina eu usei o WhatsApp, porque ai era só nossa turma e não dá vergonha de falar e nem de errar, porque eu já tô acostumado com eles e se um erra o outro corrige, às vezes tira saro e faz uma piadinha, mas é mais de boa. E no fórum tinha a turma toda [alunos de engenharia e Matemática] dai dá um pouco de vergonha e tal.

Esses alunos evidenciam na entrevista que viram no WhatsApp um local de discussão, diálogo e aprendizagem. Local na qual eles se unem para estudar Cálculo. Euler parece considerar o WhatsApp um local mais acessível do que o AVA, pois ele afirma usar o primeiro espaço e quase não usar o segundo por falta de tempo. Talvez isso aconteça por ele poder acessar o WhatsApp pelo celular. Já Torricelli evidencia que a escolha por esse ambiente se deu por estar restrito a pessoas que ele se sentia a vontade para falar, sem medo de errar. Ter essa liberdade no AVA poderia demandar mais tempo, até que ele conhecesse melhor todos os colegas de turma.

Diante disso, nos questionamos o que aconteceria se Torricelli tivesse habitado o AVA durante o período da experimentação, será que ele não teria desenvolvido essa sensação de liberdade para falar com todo o grupo?

O AVA também recebeu visitas da Fermat, que acessou apenas quatro fóruns, vejamos então as ações dessa aluna. No Fórum 1, após postagem da professora e de colegas, Fermat se posicionou, já tendo encaminhado a sua produção para o AVA:

Boa tarde professora, após feito a atividade eu observei que na função H(x), o x=-1 não está definido, já na função P(x), o x=-1 está definido. (FERMAT).

Ao analisarmos a sua postagem verificamos que ela observou que a função H(x) não está definida para x=-1, embora a P(x) esteja definida para x=-1. Ela posta a mensagem dirigida apenas à professora, assim, na tentativa de mobilizá-lo a interagir com o grupo, a professora fez a seguinte postagem:

Olá Pessoal,
A Fermat nos diz que, analisando do gráficos da H(x), ela observou que para x=-1 a H(x) não está definida. No caso da função P(x), em x=-1 ela está definida. Alguém mais observou isso? Vocês concordam com a Fermat? Por quê? Fermat, mova o ponto em cada função, aproximando-o de x=-1, ou seja, identificando os valores da função quando x tende a -1. Vamos tentar? E os outros colegas, o que observaram?[...] (PROFESSORA VANESSA).

E Newton também interage com a Fermat:

[...] como a Fermat disse a função H(x) não está definida para x=-1 pois para x=-1 o denominador se anula e como não se pode dividir por zero ele gera um conflito não podendo estar definido nessa função. (NEWTON).

Mas, a Fermat não interagiu com o Newton, ela retornou ao Fórum com a seguinte postagem:

Os limites laterais das funções, tanto na função H(x), quanto na P(x) é igual a 2. Portanto o limite dessas funções quando x tende a -1 é igual a 2.(FERMAT).

Newton interagiu novamente com Fermat:

Como a Fermat e a Lagrange notaram os limites das funções tanto de V(x) quanto P(x) é igual a 2 pois os limites laterais das duas são iguais quando x tende a -1, ou seja quando mais próximo de -1 estiver nosso x tanto pela esquerda quanto pela direita mais próximo de 2 vão estar as funções V(x) e P(x). (NEWTON).

E mais uma vez Fermat não interagiu nem com os colegas e nem com a professora. Ela não reagiu aos desafios e não respondeu aos colegas ou questionou suas certezas. Ela apenas realizou a produção, respondeu aquilo que estava sendo questionado enquanto ela estava AVA, mas, não se comprometeu com o estudo que estava sendo realizado pelo grupo. Pelo exposto anteriormente, Fermat evidencia atitude de quem visita em alguns momentos o ambiente, pois os visitantes apenas observam o que está acontecendo “sem se co-responsabilizar com o ambiente, com o outro, ou com a produção coletiva.” (SCHERER, 2005, p. 60). No entanto, isso não quer dizer que suas postagens não provocam desafios para as aprendizagens dos demais, como podemos observar nos retornos dados à Fermat por Newton.

Vejamos agora a visita feita por Fermat ao Fórum 2, após os questionamentos iniciais feitos pela professora. Fermat participou do fórum, e logo na sequência, a educadora e outros colegas interagiram com a Fermat, como Newton.

Boa professora, observei que quando x tende ao infinito positivo o limite da função é igual a 1 (FERMAT).

Boa tarde Pessoal,
A Fermat nos diz que ela observou que quando x tende ao infinito positivo, o limite da função é igual a 1. Mas isso ocorre tanto na R(x), quanto na V(x)? O que vocês observaram? Vocês concordam com a Fermat?
(PROFESSORA VANESSA).

E Newton interagiu com Fermat.

Sim funciona tanto na V(x) quando na R(x), a medida que a V(x) cresce com x indo em direção ao infinito ela vai tendendo cada vez mais a 1 mas nunca chegará, nem ultrapassará esse valor. Já na R(x) como a função se torna uma constante, para qualquer x que definirmos a função R(x) vai sempre tender a 1. (NEWTON).

E Fermat novamente não interagiu nem com a professora e nem com Newton.

Após o fechamento das discussões no Fórum sempre foi proposto a leitura do material didático. Vejamos o que a Fermat comentou sobre o material didático durante a entrevista.

> **Pesquisadora:** Fale sobre o material didático.
> **Fermat:** Eu achei interessante. O da regra de L’Hospital eu consegui entender facilmente. Eu gosto de estudar com essas apostilas bem

> explicativa, que tem figura e bastante exemplo e aplicações da matemática no dia-a-dia. Que nem naquela (apostila) que tinha o problema da caixa.
> **Pesquisadora:** e com relação aos diálogos nos fóruns?
> **Fermat**: Então... professora é que tudo foi muito novo para gente. Eu nunca pensei, por exemplo, que eu ia ter um dia aula a Distância, porque meu curso é presencial. Eu achei difícil conversar nos fóruns, principalmente para explicar as coisas, porque tem ficar escrevendo e eu não sou muito bom para escrever não. Na verdade eu odeio português (risos). Se for para falar pessoalmente eu acho melhor, principalmente na aula de Cálculo que tem que ficar fazendo conta.

Pela entrevista parece que a Fermat teve dificuldade com a escrita. De fato tudo foi muito novo para os alunos, uma surpresa. Eles não imaginavam ter aula a distância e muito menos aula de Cálculo. Tanto que no primeiro Fórum os alunos estavam habituados a um joguinho de "perguntas e respostas" entre "professor e aluno", eles não conversavam entre eles. Era a reprodução da cultura da "escola tradicional", professor ensina e aluno aprende, se o professor pergunta, o aluno responde, e se aluno pergunta, o professor responde. Cultura essa que também se faz presente em muitos cursos a distância, que nas palavras de Valente (2005) é o modelo da Virtualização da Escola Tradicional. Que tem como característica, a interação apenas entre professor e alunos, e que na maioria das vezes consiste em responder aquilo que é questionado por uma das partes.

E, mudar essa cultura, articulada com ações a distância, não foi tarefa fácil, pois demanda orientações, incentivos, e espera do professor para essa aprendizagem dos alunos em relação a um modelo de educação, diferente do da transmissão de informações.

Com relação ao material didático, Fermat afirmou ter lido e o achou explicativo, contextualizado, o que favoreceu sua aprendizagem, segundo seu comentário. Mais uma vez, podemos afirmar que o material didático para EaD precisa ter características diferentes do material didático oferecido pelas editoras.

O fato da Fermat não interagir no AVA dificultou alguns de seu processo de aprendizagem. Por exemplo, na produção referente à regra de L'Hospital, conforme Figura 20.

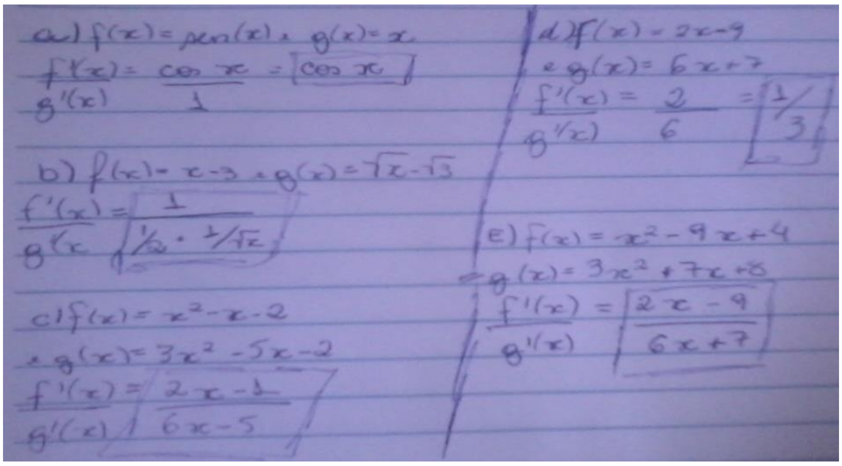


Figura 20- Produção 2 da aluna Fermat

Fonte: Dados da pesquisa.

Pela Produção 4, desenvolvida e apresentada no AVA, podemos observar que Fermat apenas identifica a função que representa o quociente entre as derivadas de f(x) e g(x). Ela não usa a notação de limite e nem finaliza os cálculos como havia sido proposto. Na última atividade, que deveria ter sido usada a regra de L'Hospital duas vezes consecutivas, ela não a usa e nem observou que a função resultante da letra e era a função proposta na questão anterior (letra d). Pela forma como foi desenvolvida a atividade, parece que a aluna fez de forma mecânica, sem muita reflexão. Assim, ao analisar a atividade, a professora encaminhou para Fermat, no espaço de produção, algumas questões para ela refletir:

Olá Fermat,
analisando sua produção 3 observei que você utilizou conceitos da regra de L'Hospital esqueceu de calcular o limite correspondente.. Sendo assim retome sua atividade e calcule os limites propostos. Após feito isso reenvia a atividade. Vamos dialogando (PROFESSORA VANESSA).

No entanto, Fermat nada postou, perdendo uma oportunidade de aprender na interação com a professora. Porque ela mostra que ainda tem dificuldade com relação ao uso adequado da regra de L'Hospital, se a interação com a professora tivesse acontecido, essa aluna poderia retomar sua produção finalizando os cálculos de limites e talvez superar dificuldades.

Lagrange foi outra aluna visitante. Nas observações realizadas em sala presencial, havíamos observado que Lagrange era extremamente tímida e muito calada, ela não conversava com os colegas, apenas com Newton. Em aula presencial, ela apenas copiava, resolvia exercícios e muito raramente comentava algo com Newton. Assim, a hipótese era a de que ela teria muita dificuldade de interação no AVA. No entanto, no Agenda1, Lagrange foi a primeira a enviar a Produção 1 e a acessar o Fórum 1, postando as suas observações:

Boa Noite professora, ao analisar o gráfico h(x) observei que quando x tende a zero o y tende a 3, já no gráfico p(x) quando o x tende a zero o y tende a infinito. No entanto, quando x tende a menos infinito nos dois gráficos o y tende a zero. (LAGRANGE).

Analisando a postagem, observamos que ela fala diretamente a professora, como se o restante da turma não existisse, afirmamos isso pela saudação "Boa noite professora". Ao observar isso, a professora chama os demais alunos para o nosso diálogo com Lagrange.

Analisando a postagem dessa aluna, observamos que ela concluiu que o $\lim_{x\to 0} h(x) = 3$, $\lim_{x\to 0} p(x) = +\infty$, $\lim_{x\to -\infty} h(x) = 0$ e $\lim_{x\to -\infty} p(x) = 0$. Mas, ela não observou o valor assumido pelo $\lim_{x\to -1} h(x)$ e pelo $\lim_{x\to -1} p(x)$, e justamente nesse valor de x, que é possível o uso da regra de L'Hospital. Sendo assim, considerando o objetivo de aprendizagem da regra de L'Hospital, após analisar sua postagem, analisei a Produção 1 realizada por ela e representada na Figura 21.

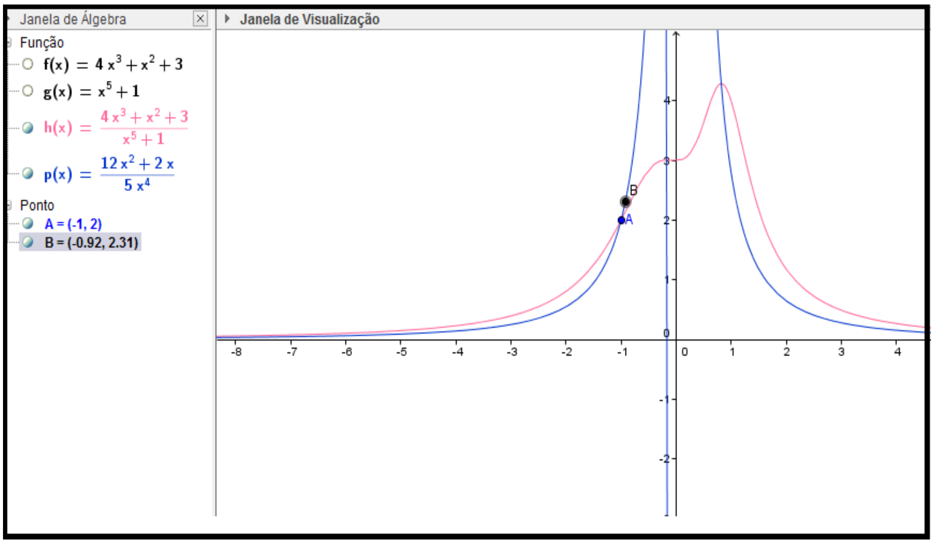


Figura 21 - Produção 1 da aluna Lagrange

Fonte- Dados da pesquisa

Como pode ser observado na Figura 21, a produção está correta e Lagrange inseriu os pontos A e B e fez o x tender a -1. Assim, observando que a produção dela estava correta, fiz o seguinte questionamento ao grupo, para tentar desequilibrá-la cognitivamente:

Olá Pessoal,
A Lagrange nos traz informações corretas sobre o valor das funções P(x)e H(x) quando x tende a zero. Mas, quais os valores da função quando x tende a -1? O que encontraram?
Lagrange, mova o ponto em cada função, aproximando-o de x=-1, ou seja, identificando os valores da função quando x tende a -1. Vamos tentar? E os outros colegas, o que encontraram?[...] (PROFESSORA VANESSA).

A partir desse questionamento ela retornou ao Fórum 1 e afirmou que:

Nas funções h(x) e p(x) quando x tende a -1 o resultado é 2.(LAGRANGE).

A partir da resposta dada, podemos afirmar que Lagrange buscou apenas responder aquilo que a professora estava questionando, sem interagir com os outros colegas. E Lagrange não retornou mais a esse Fórum para dialogar com a professora e os demais colegas do grupo. Ao mesmo tempo em que estava em andamento o Fórum 1, também estava em andamento o Fórum 2- "Dialogando sobre os gráficos das funções V(x) e R(x)". E, nesse Fórum, a Lagrange interagiu com os colegas como no recorte que apresentamos a seguir, em um diálogo iniciado a partir da fala de Fermat:

Boa tarde professora, observei que quando x tende ao infinito positivo o limite da função é igual a 1. (FERMAT)

Boa tarde Pessoal,
A Fermat nos diz que ela observou que quando x tende ao infinito positivo, o limite da função é igual a 1. Mas isso ocorre tanto na R(x), quanto na V(x)? O que vocês observaram? Vocês concordam com Fermat? [...].(PROFESSORA VANESSA).

Sim, pois derivando v(x) temos r(x) como uma função constante em 1. E na função v(x) quando x tende ao infinito a função vai tender a 1.(LAGRANGE).

Pelo recorte do fórum, a Lagrange concordou com a Fermat apresentando justificativa. Mas, isso ainda é muito pouco para afirmar que ela interagia com os colegas, mas o que podemos afirmar é que a ação da professora no Fórum mobilizou Lagrange a interagir com os colegas, se posicionando. E assim, a professora continuou na ação de oportunizar reflexões dos alunos sobre as suas certezas, pois observou que Lagrange apresentou uma afirmação equivocada ao afirmar que "derivando v(x) temos r(x)". A professora então questionou a afirmação e chamou o grupo para o estudo e debate:

Olá pessoal [...] a Lagrange nos diz que derivando V(x) temos R(x). Vocês concordam com a Lagrange? ou seja é verdade que a V'(x)=R(x)? Por quê?
Lagrange demonstre essa igualdade.[...]. (PROFESSORA VANESSA).

Mas, depois da postagem da professora, Lagrange não se posicionou mais no Fórum 2. A participação dessa aluna foi sempre assim, com visitas curtas, com pouco envolvimento com o grupo, apenas encaminhava respostas não articuladas com o que os demais colegas e professora postavam. Sendo assim, a considerarmos uma visitante. Pelo fato de Lagrange não habitar o AVA, não conseguimos uma melhor compreensão de como se deu seu processo de aprendizagem. Buscamos assim dados da entrevista que pudesse nos dá indícios de sua aprendizagem.

> **Lagrange:** As aulas a distância é bem diferente das que a gente tá acostumado [referindo-se a aulas presenciais], a diferença é porque tem que falar no Fórum. E eu não sei se a senhora notou mais eu quase não falo em aula e pra mim falar no Fórum foi o mais difícil. Mas difícil do que aprender Cálculo a distância. **Eu acompanhei bastante os fóruns, e ver o que os outros estavam pensando me fez pensar também, [...] tinha pergunta lá que a senhora fazia, que a senhora pode não acreditar, mais eu pensava e respondia para mim mesma.**
> **Pesquisadora**: E por que não postava?
> **Lagrange:** Vergonha, medo de estar errada.
> **Pesquisadora:** Você interagiu com algum colega?
> **Lagrange:** Com o Newton, a gente é amigo, já tem um tempo e com ele é mais fácil conversar. [...] **a gente discutiu algumas atividades na sala de aula mesmo**.[...] Eu me lembro bem do problema do galinheiro que deu a maior discussão entre eu e ele. Porque eu achava que era uma função e ele achava que era outra, dai a gente ficou um tempão quebrando a cabeça e depois eu vi que ele tava certo porque não precisava considerar o muro.

Pelos dados da entrevista podemos fazer algumas inferências em relação à aprendizagem e interação de Lagrange. O primeiro destaque que fazemos da fala dessa aluna é que ela afirma ter acompanhado os fóruns, o que mostra que as visitas não eram tão curtas quanto pensávamos. Ela é enfática em dizer que por vezes respondeu para si mesmo questionamentos que imergiam das discussões do Fórum. Dessa afirmação podemos inferir que Lagrange acompanhou os diálogos no Fórum, se sentiu desafiada com os questionamentos e nesse movimento de busca pelo equilíbrio cognitivo, essa aluna buscou respostas para essas indagações.

Mas, essas respostas (ou dúvidas), não foram enviadas ao Fórum para serem debatidas. E por que não foram enviadas? Vergonha e medo de errar. Lagrange demonstra uma dificuldade em mostrar-se aberta a aprender com o outro, característica necessária a quem é habitante. Nas palavras de Scherer (2005, p. 150) "habitar é estar livre para ir e vir, é poder escolher, propor, contrapor; é saber ouvir, estando aberto e sujeito a erros e (re)construções, sem deixar de responsabilizar-se por si, pelo outro".

O segundo destaque é dado à interação ocorrida entre Lagrange e Newton. Interação que ocorreu em momento presencial e que pode ter contribuído para a aprendizagem de Lagrange, pois a mesma se lembra do problema do galinheiro e das discussões geradas a partir desse problema.

Com a análise desses cinco alunos visitantes: Wallis, Lagrange, Euler, Fermat e Torricelli, o que podemos concluir é que o fato deles não habitarem o ambiente, por vezes influenciou o processo de aprendizagem dos mesmos, pois reflexões deixaram de ser realizadas por não terem sido lidas e/ou discutidas com o grupo e professora.

Mas também destacamos que o fato desses alunos, não terem sido habitantes no AVA, não implicou que eles não tenham sido habitantes de outros espaços. Como observamos Euler e Torricelli participaram do grupo Calcambi, e nesse grupo pareceram ser habitantes. Os diálogos que ocorreram no WhatsApp, impelidos pelos habitantes e questões discutidas no AVA, contribuíram com a aprendizagem de Euler e Torricelli. Por outro lado, Lagrange menciona ter interagido presencialmente com Newton e essa interação também pode ter contribuído para sua aprendizagem, mas, nesse caso temos poucos dados para fazer inferências. Fermat e Wallis nada mencionaram sobre a participação em outros espaços de interação, assim, nada podemos afirmar sobre seus processos de interação externos ao AVA.

Além dos habitantes e visitantes do AVA, tivemos ainda alunos que assumiram uma atitude de transeuntes nesse ambiente. Os dados desses alunos serão analisados no próximo subcapítulo.

5.1.6 Transeuntes do AVA da Disciplina de Cálculo I: ações de Bernoulli e Gauss

Assim como apresentamos os movimentos dos habitantes e dos visitantes, apresentamos também os movimentos de alunos que caracterizamos como transeuntes no AVA. Bernoulli e Gauss foram os dois alunos que caracterizamos como transeuntes. O transeunte entra no AVA como um ser de passagem, "descompromissado com o grupo e com o ambiente". (SCHERER, 2005, p. 211).

Nas raras vezes que eles acessaram alguns fóruns, sempre postaram informações alheias aos diálogos que estavam acontecendo. Gauss assumiu atitude de transeunte, sempre de passagem, com mensagens curtas. Na maioria das vezes, ele se dedicava em responder apenas o questionamento inicial do Fórum e não mais o acessava. Como pode ser observado no recorte que segue do Fórum 4.

[...] analisando o movimento do ponto, as coordenadas do ponto que representa o tempo necessário para que o antibiótico atinja nível máximo de concentração no sangue dessas cobaias são (3,18).
E atinge o tempo mínimo de concentração em 6 horas. Já o domínio válido dessa função na situação dada, onde x é a variação do tempo, é D= [0,6].(GAUSS).

Essa foi a única mensagem enviada a esse Fórum, por Gauss. Os demais questionamentos feitos pela professora que se faziam necessários para a compreensão do teorema de Fermat, que é o conceito envolvido no estudo realizado nesse fórum, não foram retomados.

O transeunte perde oportunidades de aprendizagem, por apenas passar nos ambientes, sem envolvimento. Nesse fórum não foi possível desafiá-lo a encontrar na derivada de uma função, características que auxiliam a determinar pontos de máximos e de mínimos.

No Fórum 5, Gauss menciona estar com dificuldades em desenvolver a Produção 5. Vejamos a mensagem que foi enviado por ele, ao Fórum.

Olá professora! Como pode ver na minha plotagem, não encontrei uma função com curva, e sua derivada deu uma constante. Acredito eu que está errado, mas veremos o que consigo entender ao decorrer do Fórum! (GAUSS).

Para orientar esse aluno em sua produção eu tentei compreender a produção que ele enviou ao ambiente, conforme a Figura 22.

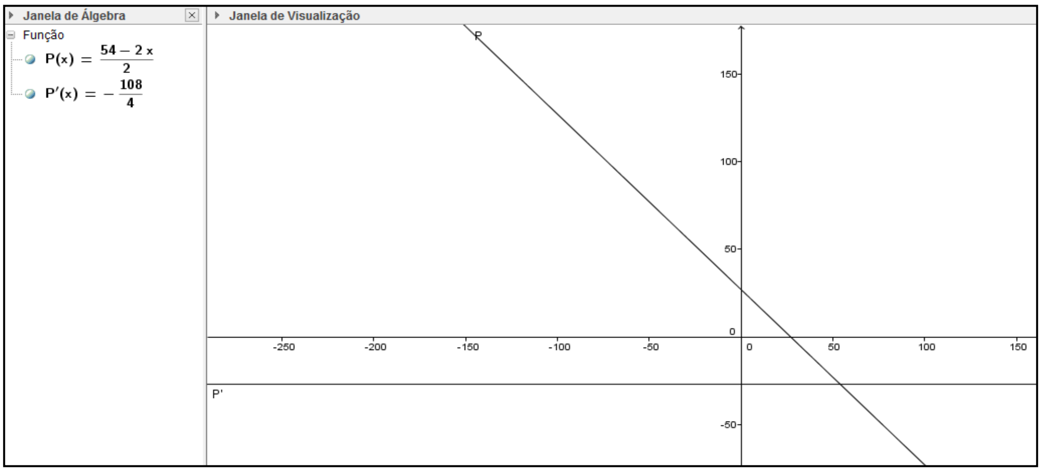


Figura 22: Produção 5 do aluno Gauss
Fonte: Dados da pesquisa.

Ao analisar essa produção não consegui compreender como ele pensou para obter tal resultado, assim enviei a Gauss a seguinte mensagem, por e-mail, via AVA:

Olá Gauss,
Eu gostaria que você tentasse me explicar qual estratégia que você usou para determinar a P(x). Assim eu poderei lhe ajudar! É esse o meu objetivo. Preciso te ouvir! Vamos dialogar?
Abraço. Profa. Vanessa (PROFESSORA VANESSA).

Mas, Gauss não mais entrou no ambiente. Assim, não temos como saber se as dificuldades apresentadas por esse aluno foram superadas, porque ele não foi um habitante ou visitante do AVA, ele estava apenas de passagem.

No Fórum 2, a dificuldade se repetiu, agora com a seguinte mensagem.

Os resultados que obtive não se aproximaram de zero, será que fiz alguma coisa errada? (GAUSS).

Então novamente analisei sua produção para reportar-lhe alguma ideia, que o fizesse refletir e agir sobre a produção, ou seja, coloquei em movimento o "Estar Junto Virtual". Pois a professora precisa habitar o ambiente, estar presente virtualmente, acompanhando, orientando, questionando os alunos. Na Figura 23 temos a Produção 2 de Gauss.

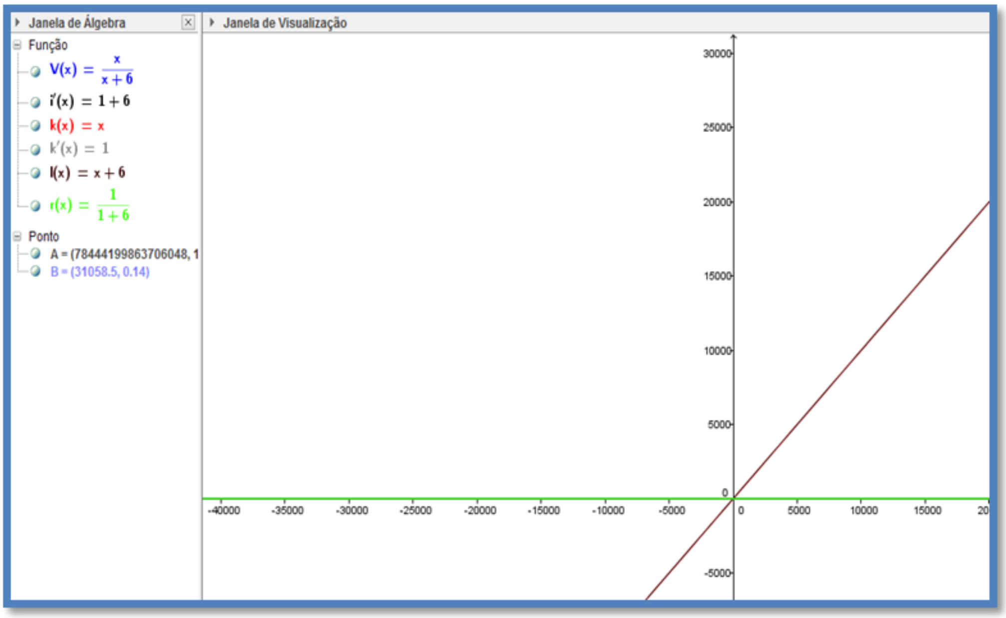


Figura 23- Produção 2 do aluno Gauss

Fonte: Dados da pesquisa.

Pela análise de sua produção, foi possível observar que Gauss calculava a derivada de $l(x) = x + 6$ de forma errada, como sendo $l'(x) = 1 + 6$. Então lhe enviei uma mensagem em por e-mail, questionando sobre a derivada e sugerindo o reenvio da atividade. Mas, nenhum retorno foi dado por Gauss.

Diante do exposto ficou difícil analisar o processo de aprendizagem desse aluno. Recorremos então aos dados da entrevista, quando o questionamos sobre como ele havia desenvolvido as atividades:

> **Gauss:** Eu fiz tudo sozinho, sempre faço sozinho.

Quando foi questionado sobre a dificuldades, ele afirmou que:

> **Gauss:** Varias dificuldades a primeira é o Cálculo em si. Eu tô desde o começo da disciplina, super atrasado, quase não entendo o que o professor fala e tô com notas super ruins. Acho que vou reprovar direto. [...] Eu quase não participei por causa disso, eu vi que não tinha jeito mais de passar mesmo, dai eu fui estudar para outras disciplinas que ainda tinha esperança.

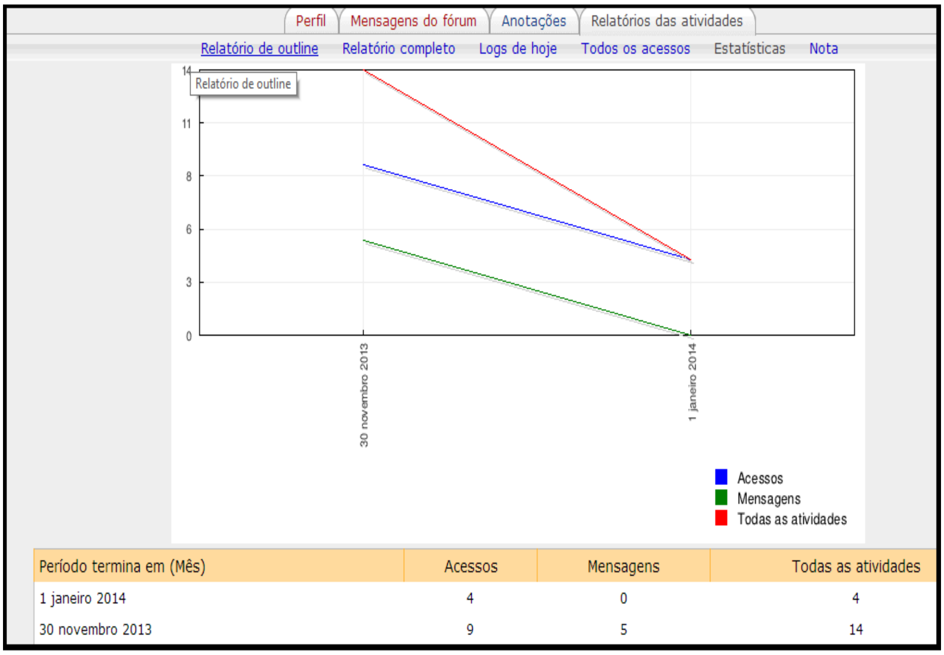
Pelos dados apresentados compreendemos que Gauss tinha muita dificuldade não só no conteúdo de derivadas, mas também de funções e limites, pois ele afirmou estar atrasado em seus estudos, e não entender o que o professor falava. Gauss também parece não estar aberto a aprender com o outro, evidenciado pela fala “eu faço sempre sozinho”, ou seja, ele não interage com os colegas e nem com professor, nem em AVA e nem em Ambiente presencial, fato esse que pode ter contribuído para o surgimento e manutenção de suas dificuldades.

Dando continuidade à análise da aprendizagem na interação dos transeuntes, vamos analisar os dados de Bernoulli. Desde a primeira vez que ele soube sobre as aulas de Cálculo I que aconteceriam a distância, demonstrou certa resistência. No primeiro momento, ainda em sala de aula presencial, quando apresentamos a proposta de pesquisa aos alunos, ao fim dessa apresentação, Bernoulli perguntou se a participação era obrigatória e se “valia nota”. Ou seja, o seu interesse não estava em aprender com as aulas, mas na nota que poderia obter.

Durante a entrevista essa hipótese foi confirmada. Quando questionado sobre a sua opinião em relação a “dar notas” pela ação no AVA, ele afirmou:

> **Bernoulli:** Poderia valer nota, porque não faz sentido a gente ficar um tempão lá, se não vale nota. Então eu preferia ficar estudando para outra matéria nesse tempo. Eu entrei nos fóruns algumas vezes, mas foram poucas mesmo. Principalmente porque foi bem no final de semestre e tava bem corrido estudando para as provas. [...] O que eu achei melhor mesmo foi usar o GeoGebra, porque desenvolver as atividades lá foi legal eu gosto de ver os gráficos e analisar.[...] Mas ficar falando nos fóruns eu não gostei muito não. Preferi só ler e não dar muito minha opinião.

Como Bernoulli mencionou, o seu envolvimento com os fóruns foi apenas de passagem. Dos nove fóruns realizados, ele participou de apenas dois, os dois primeiros. Depois desse período, ele apenas enviou as produções solicitadas. Na estatística de acesso (Figura 24), disponibilizada na plataforma Moodle, observamos que ele chegou a acessar os fóruns, mas não postava nada, como ele mesmo afirmou, acessava para ler, mas não há como ter certeza de sua leitura, para além de sua afirmação na entrevista. Daí a importância, quando o processo é a distância, da participação ser efetivada por postagens, registrando o que se compreendeu, como pensou, seus questionamentos. O que se observou pelos dados do AVA é que ele passava pelos ambientes, como um transeunte.



Período termina em (Mês)	Acessos	Mensagens	Todas as atividades
1 janeiro 2014	4	0	4
30 novembro 2013	9	5	14

Figura 24- Acesso de Bernoulli no AVA de Calculo I

Fonte: Dados da pesquisa.

Na Figura 24 pode-se observar que Bernoulli fechou o mês de novembro com 9 acessos e 5 mensagens. No período de dezembro de 2013 à janeiro de 2014, não mais enviou mensagens, porém continuou a acessar o AVA. No Fórum 1-"Dialogando sobre os gráficos das funções H(x) e P(x)", para evidenciar uma das interações de Bernoulli trazemos um recorte.

Olá Professora, eu observei que o limite da H(x) tende a -2 enquanto o limite da P(x) tende a 1,78 quando analisado nas proximidades de x=-1. (BERNOULLI).

Analisando a produção de vocês, observei que alguns encontraram e plotaram a seguinte função $P(x)= (12x^2+2x)/(5x^4)$.
Já o Bernoulli [...] encontrou e plotou a $P(x)=(-8x^7-3x^6-15x^4+12x^2+2x)/(x^{10}+2x^5+1)$. *Talvez por isso que o limite observado por eles, tenha dado diferente do limite que os demais observaram.*
Vamos refletir e dialogar sobre como o Bernoulli [...] obtive tal resposta. Qual função realmente representa a P(x)? Justifique o porquê de ser uma e não a outra.
Bernoulli como você chegou a esse resultado? (PROFESSORA VANESSA).
Aqui a minha função P:

P(x) = (-8x^7 - 3x^6 - 15x^4 + 12x^2 + 2x)/(x^10 + 2x^5 + 1). (BERNOULLI,).

Depois dessa mensagem, Bernoulli não mais entrou nesse Fórum. O fato do aluno Bernoulli ter assumido uma postura de transeunte no AVA, impossibilitou que acompanhássemos o seu processo de aprendizagem, como comentado anteriormente.

Podemos inferir que se esse aluno tivesse entrado mais vezes nos fóruns poderíamos ter proposto desafios que poderiam ter favorecido que ele retomasse as suas certezas, possibilitando, por exemplo, que ele refletisse sobre suas certezas em relação à regra de L'Hospital. Mas, com essas duas postagens, ele finalizou sua contribuição nos fóruns.

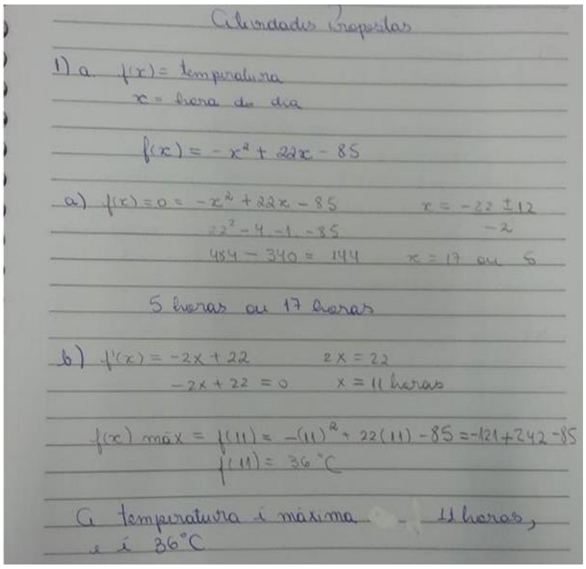
Com relação às produções propostas, ele chegou a realizar a Produção 4, sobre o problema do antibiótico, e a Produção 5, sobre o problema do galinheiro, mas não se deteve em falar sobre suas considerações e observações. Talvez essa atitude possa estar vinculada a uma cultura em que o aluno tem que fazer apenas a tarefa. Ele as faz corretamente, mas não fala sobre, não compartilha isso com os colegas e com a professora, não questiona e não dá abertura para o questionamento.

Após o fechamento dos fóruns de discussão das produções com uso do GeoGebra, foi proposto a leitura do material relacionado à Regra de L'Hospital e o desenvolvimento de algumas produções. Então, durante a entrevista questionamos Bernoulli sobre suas produções, leituras e também sobre sua ausência no AVA. A seguir um recorte da entrevista:

> **Pesquisadora:** Fala para mim sobre os diálogos nos fóruns.
> **Bernoulli**: Eu não participei das conversas no Fórum. Eu até achava legal o pessoal conversando, às vezes eu entrava dava uma lida nas últimas mensagens, mas não falava nada. Eu já tinha feito a atividade e entendido então não senti a necessidade de ficar discutindo e tal.
> **Pesquisadora**: Você desenvolveu as atividades sozinho?
> **Bernoulli:** Não! Eu fiz junto com Cauchy na biblioteca. E depois com a minha turma [referindo a turma de engenharia] a gente ficou trocando ideias pelo WhatsApp. Sabe assim? O Cauchy e a Leibniz davam umas ideias bem legais e acabou ajudando todo mundo a ir fazendo e entendendo.

Na fala de Bernoulli identificamos que ele poderia ter habitado outros espaços virtuais para estudo do Cálculo I, a partir da proposta do AVA, o espaço de WhatsApp, por exemplo. Apresentamos a seguir um diálogo realizado no WhatsApp sobre o conteúdo que discutimos no Fórum 5- "Dialogando sobre o problema do Galinheiro". A partir dele, podemos ter alguns elementos para analisar a atitude de Bernoulli nesse espaço virtual:

Euler: *Oh engenheiros quem sabe fazer a 1 da apostila*[17]*?*
Bernoulli: *Eu fiz meu brother! (envio de foto).*



Euler: *Eu não consegui fazer a b, eu joguei a função no GeoGebra e eu vi o máximo e mínimo. Mas como faz a conta.?*
Bernoulli*: Eu fiz assim, peguei a função f e derivei e igualei a zero e dai acha a raiz que deu 11 e substituindo da 36 graus.*
Leibniz: *Eu entendi assim também e fiz desse jeito.*
Cauchy*: Euler é só usar o teorema de Fermat. O meu deu isso também.*
Euler: *É pq a derivada sempre é zero né quando tem um máximo ou mínimo.*
Bernoulli: *Beleza então!*
Cauchy: *O Euler vc tá errado. Isso que vc tá falando é o que a professora perguntou no ultimo Fórum que é a volta do teorema de Fermat. E não é verdade!*
Euler: *Por quê?*
Leibniz*: o Cauchy tá certo Euler.*
Bernoulli: *Agora vocês me confundiram. É ou num é zero?*
Cauchy: *A ida é verdade mas a volta não.*
Leibniz: *é só ver a função modulo de x, em zero a derivada não existe, mas tem um mínimo.*
Cauchy: *a função x ao quadrado é melhor p explicar. Quando ela é nula?*
Bernoulli: *em zero. Já entendi, mas em zero a gente não tem nem máximo e nem mínimo ne?*
Euler: *Ah é mesmo então não da para achar máximo e mínimo apenas vendo a derivada e zero.*
Leibniz: *Não! tem q ver onde ela não existe.*
Euler: *E como que vê se a derivada não existe.*
Cauchy: *tem função que a gente bate o olho e sabe mas tem outras que não dai eu também não sei.*
Leibniz*: Olha o domínio e ver onde a derivada existe.*
Euler: *É pq é função tbm.*
Bernoulli*: Oh mais na boa isso é clima de deserto de dia pegando fogo e de noite frio.kkkkkk*

Pelo diálogo apresentado, Bernoulli usou o teorema de Fermat como estratégia para solucionar o problema proposto. Inferimos isso pela fala: “Eu fiz assim, peguei a função f e derivei e igualei a zero e dai acha a raiz que deu 11 e substituindo da 36 graus.” Porém, nesse

[17] Atividade 3: (CMPA-RS) A temperatura t de uma estufa (em graus Celsius) é determinada, em função da hora x do dia, pela expressão $f\ (x) = -x^2 + 22x - 85$. Responda: a) Em quais horários a temperatura é 0° C? b) Em que horário a temperatura é máxima? Qual é a temperatura máxima?

diálogo, Euler fez afirmações errôneas com relação a volta? do teorema de Fermat, e Bernoulli demonstrou que tinha a mesma dúvida de Euler. E em meio as discussão, Bernoulli se sente desequilibrado cognitivamente, evidenciado pela fala “Agora vocês me confundiram. É ou num é zero?”. E assim, Leibniz e Cauchy interagiram com Euler e Bernoulli, o que oportunizou a Bernoulli compreender o porquê de não ser válida a volta? do Teorema. Compreendemos que a questão feita por Cauchy “a função x ao quadrado é melhor p explicar. Quando ela é nula?”, foi uma forma de reportar ideias a Bernoulli, que por sua vez refletiu sobre a questão e logo respondeu: “em zero. Já entendi, mas em zero a gente não tem nem máximo e nem mínimo.né?”.

Nesse diálogo além de ser observado implicações das ações da professora no AVA, é possível observar também implicações do material didático da disciplina. Como exemplo a função $f(x) = x^2$, usada por Cauchy como contra-exemplo, foi a mesma que utilizamos no material didático. Dessa forma, entendemos que há links, elos entre esses espaços, e desses com o material da disciplina.

Esse diálogo que aconteceu via WhatsApp foram fundamentais para a aprendizagem de Bernoulli, porque mesmo ele não tendo habitado o AVA, ele foi habitante no WhatsApp, e algumas das discussão que emergiram do AVA foram levadas, pelos habitantes, ao espaço do WhatsApp. Por exemplo, compreendemos que o fato de Leibniz e Cauchy terem habitado o AVA, possibilitou a esses alunos levarem para esse novo espaço, questões e ideias que foram discutidas pela professora e que também emergiram dos diálogos dos fóruns. Com isso, destacamos o elo entre esses espaços. Elo, que foi oportunizado pelos habitantes dos dois espaços.

É interessante ainda mencionar, que Bernoulli considerou “uma perda de tempo”, com a necessidade de receber notas para participar dos estudos no AVA, segundo ele, por ter conseguido resolver corretamente as produções propostas, mas participou sem essas cobranças dos diálogos e estudos no espaço do WhatsApp, discutindo suas dúvidas. Uma hipótese é que como ele já habitava o espaço do WhatsApp, onde tinha a possibilidade de aprender sobre os conteúdos da disciplina, considerou desnecessário participar de mais um espaço como o AVA, formalizado pela disciplina. No entanto, não temos respostas sobre como seria o uso do WhatsApp e suas implicações sobre as aprendizagens dos alunos envolvidos, se todos fossem transeuntes do AVA.

Outro recorte da entrevista com Bernoulli nos dá indícios de que o material didático e a proposta de atividades elaborada podem ter contribuído com a sua aprendizagem:

> **Pesquisadora:** Fale sobre os materiais que foram disponibilizados?
> **Bernoulli:** Os materiais eu só não li o último, porque não deu tempo mas o resto eu li todos. Os materiais e o GeoGebra foi o que mais ajudou. Porque assim no GeoGebra eu aprendi a plotar a função, olhar limite a? derivada, dá para usar também para encontrar a derivada [referindo-se ao comando do GeoGebra que plota de forma direta a derivada], dá pra trocar de cor e ai ficar vendo o ponto, e também da para ver a função [parte algébrica], isso ajuda, porque é diferente. Na atividade que eu fiz usando o GeoGebra eu consegui ter um visão mais ampla da função e da derivada. Eu consegui entender pela primeira vez na vida, uma coisa útil em estudar a derivada, naquele problema do galinheiro. Dá para usar a derivada para resolver um monte de problema. Isso sim é legal de aprender. Porque às vezes a gente fica fazendo um monte de coisa que eu nem entendo, nãosei nem pra que serve e isso é bate papo.
> [...]. Eu nunca tinha feito isso em nenhuma disciplina. Depois que a senhora mostrou o GeoGebra eu já comecei a usar em outras aulas. [...] Bom os materiais eu gostei porque ficou bem explicativo e deu para entender bem, lá também tem os gráficos que ajuda a compreender.

Bernoulli pareceu encantado com a possibilidade de estudar cálculo usando softwares, talvez mobilizado por uma experiência nova que lhe foi proporcionada. Mas, salientamos que usar a tecnologia apenas por usar torna-se algo sem sentido. O professor pode usar tecnologias avançadas, mas apenas para repetir o que se fazia sem a tecnologia, não contribuindo com a aprendizagem dos alunos, diferente da proposta desta pesquisa, em uma abordagem construcionista.

Pelo que o aluno afirmou na entrevista, ele achou interessante produções em que visualizou uma aplicação matemática para aquilo que estava aprendendo, além de visualizar o objeto em estudo no campo geométrico e algébrico.

Apesar de Bernoulli não ter deixado claro como ele agiu sobre o problema, podemos afirmar que alguns elementos do ambiente construcionista contribuíram para sua aprendizagem. Afirmamos isso com base em sua afirmação sobre a proposta de produções contextualizadas, o uso de softwares para interpretação de situações e o material didático proposto.

Dessa forma, finalizamos a análise segundo a primeira categoria de análise. Apresentamos possibilidades de aprendizagem que emergiram na/ a partir da interação entre o aluno e a professora, e entre os alunos. Para isso, categorizamos os alunos em habitantes visitantes e transeuntes, segundo Scherer (2005). Ao categorizamos dessa forma, pudemos fazer melhor inferências com relação à aprendizagem e participação dos alunos no AVA.

Podemos afirmar que a atitude assumida pelos alunos e também pela professora no AVA fez toda a diferença no processo de aprendizagem de conteúdos relacionados à derivada.

A presença nos espaços, o interesse, o compromisso, a responsabilidade em relação a sua aprendizagem e a dos colegas é o que possibilitou momentos de aprendizagem em uma proposta construcionista. Então, cabe ao professor a criação desse ambiente construcionista, mas a atitude de habitante dos alunos é fundamental. Inferimos isso com base nos dados analisados neste subcapítulo.

5.2 APRENDIZAGEM E O AMBIENTE CONSTRUCIONISTA

Neste tópico nos dedicamos a analisar possíveis contribuições do ambiente construcionista para a aprendizagem dos alunos. Apresentaremos como as ações da professora, articuladas à proposta de atividade, ao AVA e ao material didático criado para os encontros a distância, contribuíram para os processos de aprendizagem dos alunos. Para a realização da análise utilizaremos os dados obtidos nas entrevistas e registros do AVA.

5.2.1 A proposta de atividades em uma Abordagem Construcionista

A proposta de atividades foi elaborada com produções que foram desenvolvidas utilizando o computador, em especial, o software GeoGebra. Assim, analisaremos as produções que foram desenvolvidas e também o uso de TDIC, em especial do software GeoGebra. Essas produções foram elaboradas com base na abordagem construcionista com o objetivo de que o aluno, ao desenvolvê-las, pudesse vivenciar momentos de investigação. “É o aprendizado por meio do fazer, do colocar a mão na massa” (VALENTE, 2005, p. 34) com o uso da linguagem digital. Analisaremos a proposta de atividades, pois ela pode ser considerada um elemento mobilizador da aprendizagem no ambiente construcionista.

Começaremos nossa análise com dados do primeiro encontro a distância em que se realizou estudos sobre a Regra de L’Hospital. Inicialmente, foi proposta a seguinte atividade:

No GeoGebra plote o gráfico da função H(x)=f(x)/g(x). Sendo $f(x) = 4x^3 + x^2 + 3$ *e* $g(x) = x^5 + 1$*. Em seguida, marque um ponto A sobre a curva que representa a função H(x) e o mova para identificar o valor de H(x) quando x tende a -1. Da mesma forma, plote o gráfico da função P(x)= f´(x)/g´(x), marque um ponto B sobre a curva que representa a função P(x) e o mova para identificar o valor de P(x) quando x tende a -1.*

Ao elaborarmos essa primeira atividade, esperávamos que os alunos pudessem usar o GeoGebra para analisar os limites das funções H(x) e P(x) quando x tende a -1 a partir da representação gráfica das funções, e, que ao observarem esses limites, eles concluíssem que são iguais. Em relação à segunda parte da atividade, o objetivo foi o de identificar o valor do limite por meio de cálculos para que assim observassem que na função H(x) tem-se uma indeterminação e que na função P(x) o valor é encontrado fazendo uma substituição. As produções teriam que ser encaminhadas ao AVA e o debate deveria ser realizado a partir das análises nos fóruns.

Quando questionamos na entrevista a Leibniz sobre as produções propostas e como foram desenvolvidas, ele afirmou:

> **Leibniz:** As primeiras atividades que foi sobre a regra de L'Hospital foram as mais fáceis, porque eu já tinha visto. Só que eu não percebi logo de cara, na verdade, só me toquei que era a regra de L'Hospital no finalzinho do Fórum. Eu já tinha visto a regra outra vez que fiz Cálculo [Leibniz já havia cursado a disciplina anteriormente, mas reprovou], mas dessa fez foi diferente, totalmente diferente.
> **Pesquisadora:** Por que foi diferente?
> **Leibniz:** Porque eu entendi a regra de verdade, eu vi no gráfico. Eu fiz os gráficos e analisei e dai eu conclui que os limites eram os mesmos. E agora eu vejo como ela é útil. E eu sei usá-la. **Faz todo sentido para mim agora**. Como eu disse lá no Fórum a Regra de L'Hospital é bastante útil e facilita muito em cálculo de Limites que recai em indeterminações. Com certeza foi importante aprender isso. (grifo nosso)

Leibniz já havia estudado sobre a regra de L'Hospital , mas a nossa proposta foi diferente da vivenciada por ele anteriormente, conforme mencionou no recorte de fórum anterior. O aluno produziu algo, analisou a questão proposta, e essa pode ter sido uma das diferenças. Em um ambiente construcionista, o papel principal é do aluno, ele tem voz e coloca "a mão na massa" (VALENTE, 2005, p. 34) e assim vai aprendendo. Esse papel ativo vivenciado por Leibniz é confirmado pelas seguintes falas: "Porque eu entendi a regra de verdade", "Eu fiz os gráficos e analisei e daí eu conclui que os limites eram os mesmos". Por meio dessas afirmações do educando não temos dados precisos para falarmos como ocorreu o processo de aprendizagem da regra de L'Hospital, mas   podemos afirmar que tal experiência possibilitou a Leibniz agir sobre o problema, foi o aluno quem fez, foi ele quem analisou e chegou a conclusões sobre a situação analisada.

Além disso, em razão das ações citadas por Leibniz no recorte anterior, temos indícios da dimensão sintônica do ambiente construcionista criado, pois mesmo o problema não tendo partido do aluno, ele tomou o problema como algo seu e julgou que suas ações foram importantes para a sua aprendizagem, conforme afirmou : "com certeza foi importante aprender isso". Nas palavras de Papert (2008, p. 134), "se um homem tem fome, você pode dar-lhe um peixe, mas é melhor dar-lhe uma vara e ensiná-lo a pescar".

Dessa forma, o professor pode simplesmente transmitir a informação ("dar o peixe") ao seu aluno que, nesse caso, poderia ser apenas enunciar a Regra de L'Hospital, resolver um exercício modelo e solicitar que os alunos fizessem uma série de exercícios seguindo o modelo proposto. Ou, o professor pode oportunizar que o aluno construa conhecimento ("dando-lhe uma vara e ensinando-o a pescar"), como vivenciado com Leibniz que, ao utilizar o software GeoGebra a partir da atividade proposta, vivenciou um processo de construção de conhecimento, pois analisou e chegou a algumas conclusões.

Outro destaque na fala desse aluno é a frase: "Faz todo sentido para mim agora". Nessa, temos indícios que a dimensão semântica de um ambiente construcionista foi alcançada, pois a experiência vivenciada por Leibniz possibilitou a sua compreensão da regra, conforme ele mesmo afirmou. Conforme Segundo Maltempi (2004), a dimensão semântica diz respeito ao trabalho com algo que faça sentido para o aluno, ou seja, que tenha significado para ele, evitando uma série de símbolos e fórmulas que valorizam as técnicas de uso e não a compreensão de conceitos.

O fato de Leibniz afirmar que dessa vez o estudo proposto foi diferente, pode se dar pelo fato em razão de evitarmos o uso de fórmulas e priorizar a compreensão dos conceitos envolvidos no estudo. Em nosso ambiente construcionista, Leibniz foi fazendo a análise dos gráficos, manipulando e observando os movimentos dos pontos e realizou cálculos até obter a relação que formalmente é chamada de regra de L'Hospital. Regra essa que no ensino tradicional, bem como em diversos livros didáticos, apresenta-se apenas como uma fórmula aplicável a uma série de exercícios.

Resgatamos a seguir, nos diálogos, algumas das produções de Leibniz que comprovam sua ação sobre o objeto em estudo ao longo da primeira atividade proposta. No Fórum 1, questionamos:

O que vocês observaram nas representações gráficas das funções, em relação ao limite da função P(x) e da função H(x) quando x tende a -1, ao mover os pontos das curvas? (PROFESSORA VANESSA).

Boa Noite Prof. Vanessa! Verifiquei que na função h(x) e na p(x) quando x tende a -1 tanto pela direita como pela esquerda o valor do limite é 2. (LEIBNIZ).

Depois da maioria dos alunos postarem conclusões no Fórum sobre suas análises, a professora fez um novo questionamento e Leibniz teceu comentários:

Com base nas observações feitas por vocês, podemos concluir que o limite da H(x) e da P(x) é o mesmo quando x tende a -1. E esse limite é igual a 2. Sendo assim temos que $lim_{x\to-1} H(x) = lim_{x\to-1} P(x)$. *Agora para fecharmos nossa discussão, gostaria que vocês calculassem o limite por meio da substituição direta, tanto na H(x), quanto na P(x). E tragam os resultados para debatermos aqui. (PROFESSORA VANESSA).*

Por tratar de funções polinomiais podemos substituir -1 direto na função. Na função h(x) há uma indeterminação 0/0 e através da regra de L'Hospital podemos derivar a função caindo exatamente na função p(x). Assim substituímos -1 em p(x) obtendo 2 como resultado. Limites de h(x) e p(x) são equivalentes. (LEIBNIZ).

Com essa atividade, Leibniz teve oportunidade de observar que o limite em ambas as funções é o mesmo e também que efetuando cálculos na primeira função tem-se uma indeterminação, sendo assim, ele buscou outra estratégia para o cálculo do limite, no caso, a Regra de L'Hospital.

A seguir, apresentamos afirmações de outros habitantes do AVA sobre a proposta das atividades. Observemos o que Cauchy afirmou ao pedirmos que ele falasse mais sobre as aulas.

> **Cauchy:** Eu achei bem legal, como foi proposto as aulas. Na verdade foi bem diferente daquilo que a gente tava acostumando, porque professor nenhum começa a **dar a aula com exercícios e depois passa o conteúdo**. Faz ao contrário. Né? E eu achei esse jeito de aprender muito bom, porque a gente tem **mais liberdade, de falar e tudo**. Eu não sei explicar muito bem, só sei que **foi boa essa experiência**, porque parece que... hum bom é **como se a gente fosse descobrindo a matemática**. Por exemplo, naquela aula do problema do galinheiro é como ser eu tivesse "descobridor" que assim.... em um ponto de máximo, que a derivada existe então ela é nula. Como é mesmo o nome desse teorema? ... Há lembrei é o teorema de Fermat. Não é?
> **Pesquisadora**: É esse mesmo.
> **Cauchy:** Pois eu senti como se eu fosse a Fermat. [referindo-se ao matemático que descobriu o teorema]. (grifos nossos)

Cauchy mencionou que ao desenvolver a atividade sobre o problema do galinheiro sentiu-se sendo o próprio Fermat, ou seja, o matemático que "descobriu" tal teorema. Isso aconteceu porque a forma como propusemos a atividade exigia do aluno que ele fosse um investigador. O recorte, nos destaques que fizemos, evidencia duas dimensões de um ambiente construcionista: sintônica e a semântica.

A dimensão sintônica do ambiente construcionista se evidencia pelo papel ativo vivenciado por Cauchy em seu processo de aprendizagem e por seu interesse em desenvolver a atividade por nós proposta. Ao propormos a atividade sobre o problema do galinheiro, Cauchy tomou o problema para si, de alguma forma aquele problema chamou-lhe atenção, talvez pelo contexto, e ele foi buscando caminhos para encontrar uma solução Nesse movimento de investigação, Cauchy vivenciou a sensação de descoberta, conforme ele afirmou: “como se a gente fosse descobrindo a matemática; Pois eu senti como se eu fosse o Fermat”. É o aluno com um papel ativo, vivenciando descobertas ao construir conhecimento. É o sentimento de *empowerment* (VALENTE, 1999) vivenciado por Cauchy, ou seja, ele foi capaz de encontrar a solução produzida através da manipulação do software GeoGebra.

Outro destaque na fala do aluno é a sua percepção quanto à inversão que fizemos, quebrando a sequência tradicional de aula, de transmissão de informação no modelo “exposição de conteúdo - exercício modelo - listas de exercícios”, conforme ponderou: “porque professor nenhum começa a dar a aula com exercícios e depois passa o conteúdo” e “eu achei esse jeito de aprender muito bom”. Nós propusemos essa inversão a fim de que o conteúdo não fosse explorado como verdades prontas e acabadas, certezas “dadas”, mas que o conhecimento fosse construído pelo aluno, em um ambiente construcionista.

Segundo Valente (2013), a educação atual, pautada na transmissão de informação, segue o seguinte modelo: **conceito, interpretação, compreensão** e **ações**. Ou seja, o trabalho docente, no caso de aulas de matemática, inicia-se com definições de **conceitos** do conteúdo matemático, por exemplo, poderia começar uma aula com definições de pontos de máximos e mínimos de funções. Após o conceito, o trabalho docente passa para segunda fase que é a **interpretação**, ou seja, o professor exploraria algum problema contextualizado ou não que envolvia tal conceito, como o problema do galinheiro que foi explorado nesta pesquisa. Assim, com tal interpretação o aluno supostamente **compreende** e está preparado, para ação. A **ação** é a fase na qual o aluno resolve exercícios (usando computador ou não) e, na maioria das vezes, seguindo o modelo de problemas explorados pelo professor na fase da interpretação.

Já uma educação que visa à construção do conhecimento, segundo Valente (2013), acontece tomando a sequência de forma inversa: **ações, reflexão, compreensão** e **conceitualização**. Dessa forma, o estudo de um determinado conteúdo inicia-se pela **ação**, ou seja, o aluno resolvendo um problema que pode ter sido proposto por ele ou pelo professor, por exemplo, o aluno buscando solução para a questão relacionada ao galinheiro. Em meio a essa exploração do problema, e articulado às questões e desafios lançados pelo professor, o aluno vivencia momentos de **reflexões** que lhe possibilita a **compreensão** e interpretação dos conceitos envolvidos na problemática. Por fim, o docente faz a institucionalização dos saberes em estudo, ou seja, é o momento de **conceitualização**. Assim, visando à construção do conhecimento do aluno, propomos essa inversão e compreendemos que essa ação favoreceu a aprendizagem do aluno Cauchy, pois ele afirmou: “ eu achei esse jeito de aprender muito bom”. Compreendemos também que essa inversão favoreceu a dimensão semântica do ambiente construcionista uma vez que, ao vivenciar momentos de ação, reflexão, compreensão e conceitualização, o estudo passa a fazer sentido para ele e, assim, os conceitos envolvidos passam a ter significados.

A seguir analisamos a fala do habitante Newton sobre a proposta de atividade, em especial sobre a segunda aula na qual foram explorados os problemas do galinheiro e do antibiótico.

> **Newton:** De todas as aulas, essa [referindo a aula 2] foi a que eu mais gostei, porque é legal você ver esses **problemas de aplicação da matemática**. Eu acho **super importante a gente saber onde usar a matemática**, isso sem dúvida dá... sei lá... **um ânimo para estudar. Eu não gosto de ficar fazendo exercícios sem entender de verdade para que serve**, sempre foi assim desde o Ensino Médio. Por isso que nessa aula, **resolver o problema do galinheiro e do antibiótico, foi tipo assim, empolgante**. **Enquanto eu não resolvi eu não sosseguei**. Entre os dois problemas o do antibiótico foi mais fácil. [...] Já o do galinheiro no começo, quando eu vi essa atividade eu achei bem complexa, pois não tinha a função. Tínhamos que entender o problema para depois descobrir qual era a função. [...] Exigiu mais tempo para pensar, mas foi mais legal encontrar a solução também. (grifos nossos)

Depreendemos na fala de Newton a importância de se criar um ambiente construcionista com produções que envolvam problemas contextuais da Matemática, seja com o cotidiano ou com outras áreas do conhecimento. Newton afirmou que o problema proposto lhe deu ânimo para encontrar a solução pelo fato do mesmo fazer sentido para ele, ou seja, manipular o GeoGebra analisando a representação geométrica da função e da derivada faziam sentido na busca pela solução de ambos os problemas, o do galinheiro e do antibiótico. Nesse sentido, temos dados para afirmar que a dimensão semântica foi contemplada no ambiente construcionista, pois a forma como propomos o estudo do Teorema de Fermat , teorema envolvido nos dois problemas propostos, possibilitou à a Newton a compreensão do mesmo.

No recorte apresentado anteriormente, identificamos ainda a dimensão pragmática do ambiente construcionista confirmado pelas afirmações: “super importante a gente saber onde usar a matemática; um ânimo para estudar, Enquanto eu não resolvi eu não sosseguei”. Essa fala nos remete à afirmação de Maltempi (2004, p. 267): “O despertar para o desenvolvimento de algo útil coloca o aprendiz em contato com novos conceitos. O domínio destes conceitos traz uma sensação de praticidade e poder, incentivando cada vez mais a busca pelo saber”.

As produções oportunizaram a esse aluno motivar-se, produzindo algo que lhe era interessante e que tinha significado para ele, o que resultou ter sido “mais legal encontrar a solução”. Afirmações como “foi assim empolgante” e “dá um ânimo para estudar”, evidenciam a motivação do aluno para aprender Cálculo e a presença da dimensão sintônica do ambiente construcionista de aprendizagem. Identificamos a presença de tal dimensão porque Newton mostra que assumiu os problemas como se fossem seus e a busca por uma solução não se deu por obrigação, mas sim por almejar o equilíbrio cognitivo, conforme ressalta : “Enquanto eu não resolvi eu não sosseguei”.

Dando continuidade à análise, apresentamos uma fala de Newton, durante a entrevista, sobre o uso do computador para desenvolver as produções propostas:

> **Newton:** Isso foi uma experiência super diferente, porque **com o computador eu pude analisar melhor a situação** que envolvia esse problema, porque assim, eh como eu vou explicar! Eu não me lembro exatamente qual era a função do galinheiro, mas eu lembro que sem o problema a função tinha como domínio os reais [referindo-se ao conjunto dos números reais], mas como eu tinha encontrar uma função que representava o perímetro então eu olhei apenas para os valores positivos. E com o GeoGebra ficou fácil ver o domínio para a função. Eu lembro que eu **fiquei movimentando aquele ponto e fiquei observando o valor do perímetro, e se eu não tivesse usado o GeoGebra não dava para fazer isso**. [...] E a derivada também, porque assim deu pra ver direitinho quando a derivada era nula e aí a gente tinha o menor perímetro. Então usar o GeoGebra para ver tudo isso aí foi, assim, **uma forma interessante de aprender e com certeza quando eu for professor eu vou querer usar com os meus alunos dessa forma também.** (grifos nossos)

A partir dessas considerações de Newton, podemos inferir que a escolha e o uso do software GeoGebra na sequência de produções proposta possibilitou a ele uma análise que não seria realizada sem essa tecnologia. Ele afirmou que ficou movimentando o ponto sobre a curva que representava a função para observar valores assumidos em diferentes pontos. Essa estratégia de solução usada pelo aluno ao usar o GeoGebra seria difícil, se não impossível, de se realizar com papel e lápis: como movimentar pontos ao longo da curva no papel? Nesse sentido, observa-se a importância não apenas da escolha do software, mas da atividade, de maneira a possibilitar que o aluno vivencie o ciclo de ações (VALENTE, 2005).

Nesse sentido, a dimensão semântica também fica evidente, pois a manipulação do software possibilitou a Newton uma forma diferente de estudo de Cálculo e vai ao encontro à afirmação de Maltempi (2004, p. 268): “é necessário que os materiais usados carreguem significados múltiplos. Além de serem psicologicamente evocativos para o aprendiz, eles também devem trazer dentro de si conceitos e ideias que sejam representativas do assunto que está sendo estudado”.

Também compreendemos que as seguintes afirmações de Newton: “com o computador eu pude analisar melhor a situação; se eu não tivesse usado o GeoGebra não dava para fazer isso; uma forma interessante de aprender e com certeza quando eu for professor eu vou querer usar com os meus alunos dessa forma também” nos dão indícios da dimensão social do ambiente construcionista. Afirmamos isso porque Cálculo I é uma disciplina ofertada para um curso de Licenciatura cujo objetivo é a formação inicial de professores e há a possibilidade de que os processos de aprendizagem que esses acadêmicos vivenciam em sua formação poderão influenciá-los em suas futuras ações como docentes. Nesse sentido, considerando a fala de Newton, compreendemos que o ambiente construcionista atendeu a dimensão social, conforme pontua Maltempi (2004, p. 267):

> [...] aborda a integração da atividade com as relações pessoais e com a cultura do ambiente no qual ela se encontra. O ideal é criar ambientes de aprendizagem que utilizem materiais valorizados culturalmente. Nesse sentido, a programação de computadores e o domínio da tecnologia em geral representam bons materiais a serem aproveitados, uma vez que são bem valorizados na sociedade atual. A questão é aproveitá-los de modo educacionalmente produtivo.

Portanto, ao propormos aulas em um ambiente construcionista podemos contribuir para que esses futuros professores também proponham aulas nesse tipo de ambiente e/ou com uso de tecnologias de forma a favorecer a aprendizagem de seus alunos.

A proposta de atividades foi um dos elementos determinantes da vivência de um ambiente construcionista como foi apresentado, mas, outro elemento tão importante quanto esse é a atitude e ação da professora ao longo do processo de aprendizagem dos alunos. Afinal, o professor é quem organiza as atividades e as gerencia. Dessa forma, no próximo item, discutiremos o papel da professora ao assumir a abordagem construcionista no ambiente.

5.2.2 Atitude e Ações de uma Professora Construcionista

Anteriormente, apresentamos algumas intervenções da professora nos fóruns, pois não seria possível discutir o processo de aprendizagem na/apartir da interação entre sujeitos sem mencionar as ações da professora, também sujeito de aprendizagem. Neste tópico, analisaremos essas ações orientados pelos estudos sobre a abordagem construcionista identificando a contribuição dessas para os processos de aprendizagens dos alunos.

Assumir a abordagem construcionista não é uma tarefa fácil para o professor, pelo contrário, mesmo depois de vários estudos, sempre busquei[18] refletir sobre minhas ações no decorrer da experimentação da pesquisa. Afinal, assumir essa abordagem é compreender que alunos e professores estão em contínuo processo de aprendizagem. Essa é uma palavra que define bem o sentimento que me foi proporcionado. Como professora construcionista (que assume e vivencia a abordagem construcionista), eu estava (e sempre estou) em processo de aprendizagem, uma aprendizagem que envolve principalmente o meu ser profissional. É analisarei nesse item da dissertação.

A interação que ocorre entre professor e alunos possibilita ao professor conhecê-los melhor e assim pensar em estratégias e ações que favoreçam a construção do conhecimento. Nesse sentido, como professora, assumi uma atitude de habitante no AVA para interagir, propondo desafios, questionando, dialogando, silenciando, ensinando e aprendendo; para "Estar Junto Virtualmente" com meus alunos.

Para analisar as minhas ações como professora, usarei os dados do Fórum 5, referente ao problema do galinheiro, pois a minha ação nos demais fóruns foi similar a que assumi nesse. Iniciei o diálogo no Fórum 5 com questionamentos que pretendiam ser disparadores de discussões e que pudessem favorecer a reflexão dos alunos sobre suas certezas. No recorte a seguir está a minha fala inicial convidando os alunos para o estudo e o debate:

Olá pessoal,
Agora que vocês já plotaram a P(x) e analisaram o movimento do ponto, quais as coordenadas do ponto que representam a medida x para se obter o perímetro mínimo para construir o galinheiro? Qual o domínio válido dessa função na situação dada? Vamos dialogando...
Abraço. (PROFESSORA VANESSA).

Assim, tivemos algumas participações e postagens, como as de Cauchy, Torricelli, Cavalieri, Euler, dentre outros. Esses alunos falaram sobre o ponto de mínimo da função e também a respeito do domínio. Apresentaram em suas postagens divergências sobre o ponto de mínimo, ocasionadas pela dificuldade de determinarem exatamente as coordenadas do ponto ao movimentarem um ponto na curva do gráfico que representava a função. Essa atividade foi pensada justamente para que, diante dessa dificuldade, os alunos buscassem outra estratégia de resolução do problema que envolvia o conceito de derivada da função.

---

[18] Neste tópico será usada primeira pessoal do singular, pois se trata da autora da pesquisa que assumiu o papel de professora durante a experimentação.

Sendo assim, em uma nova postagem eu questionei sobre as coordenadas dos pontos que esses alunos encontraram a fim de confrontá-los, tentando desafiá-los a buscar novas estratégias. E, para aqueles que ainda não haviam participado das discussões, convidei-os para iniciarmos um diálogo, pois talvez esses pudessem estar tendo alguma dificuldade em relação ao desenvolvimento da atividade proposta ou de uma nova proposição. A seguir, apresento a postagem realizada no Fórum:

Olá pessoal
Vejo que muitos de vocês ainda não trouxeram para nosso Fórum os seus resultados e observações. Vocês estão com algum problema com relação à atividade? Conseguiram encontrar a P(x)?
Lembrem-se de que para poder ajudá-los eu preciso que vocês falem! Sendo assim quero ouvi-los!
O Euler, o Torricelli dizem que o ponto que torna o perímetro mínimo é (7, 28). Já o Cavalieri diz que o ponto é (7, 28.26). E a Wallis, por sua vez, diz que é (7.06, 28.28). Será que analisando o movimento do ponto é possível determinar exatamente o ponto, no qual, o perímetro do galinheiro é mínimo? No caso de não ser possível, alguém tem uma ideia de como fazer para determinar tal ponto?
Analisando a P'(x) é possível identificar na sua representação gráfica alguma característica que nos ajude a encontrar o ponto de mínimo da P(x)?
Com relação ao domínio da P(x), o Cauchy, a Wallis e o Euler dizem que é]0,+∞[, ou seja, em x=0 a função P(x) não está definida. Já o Torricelli diz que o domínio da P(x) é {x Є R\0≤x ≤+∞}, ou seja, em x=0 a P(x) está definida. Torricelli, Wallis, Euler e Cauchy reflitam sobre o domínio que cada um encontrou e os domínios encontrados pelos outros e tragam suas pontuações para a discussão no Fórum.
E os demais, o que acham dos domínios encontrados? Justifiquem (PROFESSORA VANESSA).

Nesse modelo de EaD, o professor acompanha as aprendizagens de seus alunos desafiando-os com questionamentos e orientando-os porque o objetivo é oportunizar que o aluno reflita e aprenda.

Dessa maneira, começamos a estabelecer um diálogo entre professora e os alunos. A partir do questionamento "Analisando a P'(x) é possível identificar na sua representação gráfica alguma característica que nos ajude a encontrar o ponto de mínimo da P(x)?", Lagrange e Cavalieri refletiram sobre o proposto e continuamos com as discussões, conforme o recorte que segue.

*O perímetro mínimo é aproximadamente (7.07,28.28), isto é, 7.07=raiz quadrada de 50 e 28.28= 20*raiz quadrada de 2. O domínio={x Є R\x>0}. (LAGRANGE).*

[...] o domínio correto e como a Cauchy, Wallis e o Euler disseram, e quanto ao ponto de mínimo concordo com a Lagrange, com o uso da derivada o ponto de mínimo é identificado corretamente, que é (7.07,28.28) aproximadamente. (CAVALIERI).

Por meio das postagens desses alunos, podemos inferir que o desafio que lancei fez com que eles refletissem e retomassem o estudo buscando uma nova estratégia. Assim, continuei a questionar suas certezas a fim de manter o ciclo-de-ação deles, alimentar a espiral de aprendizagem (VALENTE, 2005), e também manter o movimento proposto pelo "Estar Junto Virtual", como pode ser observado na postagem a seguir:

Bom dia pessoal!
Parece que há uma divergência com relação ao ponto mínimo encontrado por vocês.
A Lagrange e Cavalieri nos trazem uma informação muito interessante para nosso estudo, pois eles dizem que com "o uso da derivada o ponto de mínimo é identificado corretamente, que é (7.07,28.28)". A Lagrange diz que encontrou esse ponto pois $\sqrt{50} \cong 7{,}07$ *e* $.20\sqrt{2} \cong 28{,}28$
Lagrange e Cavalieri, vocês podem explicar melhor qual estratégia vocês usaram para chegar a esse resultado? E os demais conseguiram observar alguma característica na representação gráfica da P'(x) que nos ajude a encontrar o ponto de mínimo de uma função P(x)? [...] (PROFESSORA VANESSA).

Esse é o papel de um professor construcionista, estar sempre propondo desafios aos seus alunos, questionando suas certezas e interagindo.

E Gauss, diante da minha mensagem, "Vocês estão com algum problema com relação à atividade? Conseguiram encontrar a P(x)? Lembrem-se que para poder ajudá-los eu preciso que vocês falem! Sendo assim quero ouvi-los!,", decide então falar sobre a sua dificuldade.

Olá professora! Como pode ver na minha plotagem, não encontrei uma função com curva, e sua derivada deu uma constante. Acredito eu que está errado, mas veremos o que consigo entender ao decorrer do Fórum! (GAUSS).

Com relação à dificuldade apresentada por Gauss, primeiramente, eu tentei compreender a produção desse aluno para posteriormente orientá-lo e desafiá-lo em seu processo de aprendizagem. Ao analisar essa produção, tentei compreender como o aluno encontrou a função $P(x) = \frac{54-2x}{2}$ e $P'(x) = -\frac{108}{4}$, mas não consegui compreender como ele pensou para obter tal resultado, assim, enviei a Gauss a seguinte mensagem pelo e-mail do AVA:

Olá Gauss,
Eu gostaria que você tentasse me explicar qual estratégia que você usou para determinar a P(x).
Assim eu poderei lhe ajudar! É esse o meu objetivo. Preciso te ouvir! Vamos dialogar?
Abraço. (PROFESSORA VANESSA).

Gauss, porém, não postou mais mensagens no AVA. Assim, as dificuldades apresentadas por esse educando não foram superada, porque ele não foi um habitante do AVA. Com isso, podemos inferir o quanto os alunos e professores perdem ao optarem por não serem habitantes, seja em espaços de educação presencial ou a distância. Tentei ainda chamar a atenção de Gauss no Fórum e por e-mail, mas somente o silêncio se fez presente. A seguir, a mensagem que encaminhei, via Fórum, em meio à articulação das produções dos demais alunos.

[...]Gauss eu analisei sua produção. Vejo que você encontrou a função P(x)= (54-2x)/2 para representar o perímetro do galinheiro. Tente nos explicar qual a estratégia que você usou para chegar a tal resultado. Assim nós poderemos lhe ajudar a compreender e solucionar o problema.[...] (PROFESSORA VANESSA).

Na continuidade do Fórum, outros alunos trouxeram suas proposições para o debate, a interação foi acontecendo, e depois fechei os estudos do Fórum com considerações a partir daquilo que os próprios alunos foram construindo. Essa formalização do saber se faz necessária, para isso, entretanto, tomamos como base as informações que os alunos trazem ao ambiente. A seguir, a postagem caracterizada como o fechamento do debate no Fórum 5, mas sempre deixando questões para reflexão:

Olá pessoal!
Vamos fechando mais esse Fórum...
Então farei algumas pontuações.

- *Analisando tanto as produções quanto as postagens de vocês parece que houve uma divergência com relação ao ponto mínimo encontrado. Na verdade todos encontraram valores para as coordenadas do ponto (x, P(x)), aproximados de 7 e 28, respectivamente. Isso se deu pelo fato do ponto de mínimo possuir coordenadas* $(\sqrt{50}, 20\sqrt{2})$. *Como* $\sqrt{50}$ *e* $20\sqrt{2}$ *são números irracionais não é possível determinar tal ponto apenas observando o movimento dele no gráfico. Sendo assim, precisamos de outra estratégia que nos possibilite determinar tal ponto. Nesse caso a P'(x) nos ajuda! Como?*
- *Analisando o gráfico da P'(x), podemos observar que para* $X=\sqrt{50}$ *a derivada é nula. Isso acontece porque a reta tangente ao gráfico da P(x) que passa pelo ponto de mínimo* $(\sqrt{50}, 20\sqrt{2})$ *é paralela ao eixo x, dessa forma, a derivada é nula. Sendo assim, se (x, P(x)) é um ponto de mínimo da P e se a P'(x) existir, então P'(x)=0, o mesmo acontece se em (x, P(x)) tivermos um ponto de máximo. Esse é o chamando teorema de Fermat. E foi isso que a Lagrange e o Cavalieri pontuaram em suas últimas observações. Mas será que a recíproca do Teorema é verdadeira? Reflitam...*
- *Com relação ao domínio válido para tal situação, como temos um caso em que a P(x) representa o perímetro, então estamos interessado apenas nos valores de x para os quais a P(x) é positiva, logo D={x Є R\x>0}.*

Agora o material para a leitura já está disponível.
Bom estudo a todos!
Abraços. Profa. Vanessa (PROFESSORA VANESSA).

Nesse sentido, o professor sempre propõe desafios e reporta ideias com o objetivo de desencadear reflexões para ativar ou manter o ciclo-de–ações e a espiral de aprendizagem de Valente (2005), em um movimento contínuo do "Estar Junto Virtual".

Além de evidenciar o papel do professor no AVA, destacamos considerações de dois alunos em relação a esse papel, obtidas nas entrevistas:

> **Cavalieri:** [...] Outra coisa que eu vi nos fóruns é que **a senhora nunca dava resposta**, **sempre fazendo perguntas**. Daí eu mesmo queria porque queria achar as repostas, ai eu pegava o Guidorizzi e pesquisava, estudava e olhava de novo o exercício. Eu acho que você [referindo-se ao papel da pesquisadora como professora] **queria que a gente pensasse e chegasse ao resultado pelo nosso esforço**. Né? Porque eu percebia isso e percebia também que **você sempre chamava todo mundo pra conversar e que um ajudasse o outro para gente trabalhar junto, em equip**e. Eu não imaginava que aula de Cálculo a distância pudesse ser assim. (grifos nossos)

Da fala de Cavalieri inferimos que a abordagem construcionista da professora se evidencia na atitude de não dar resposta, mas oportunizar que o aluno construa conhecimento propondo desafios que oportunizem a busca pela solução de problemas.

Outro destaque é o fato de o aluno afirmar que a professora sempre chamava todo mundo para o diálogo, isso evidencia a dimensão social de um ambiente construcionista, pois nós também aprendemos em interação com outros sujeitos. Em um ambiente construcionista, o professor precisa articular as proposições e certezas dos alunos, buscando confrontá-los para que assim o diálogo e a discussão entre os educandos aconteçam. Inferimos dessa fala a postura de professora habitante, preocupada com as interações no grupo, com todos se responsabilizando pelas ações no ambiente e do grupo. Essa certeza fica evidenciada no seguinte posicionamento : "Porque eu percebia isso e percebia também que você sempre chamava todo mundo pra conversar e que um ajudasse o outro para gente trabalhar junto, em equipe".

Newton também comentou sobre o meu papel como professora:

> **Pesquisadora:** Fale sobre as minhas ações como professora.
> **Newton:** Veja bem, professora, no começo eu achei bem estranha a maneira como você falava com a gente, porque assim é diferente. Né?
> **Pesquisadora:** Diferente por quê?
> **Newton**: Sempre em forma de pergunta, deixando um suspense, que é uma coisa que é boa porque, dai assim a gente tem que correr atrás de conseguir as coisas. É boa mas não é fácil. Não sei se eu tô sendo claro? Tô?
> **Pesquisadora:** Tente-me explicar melhor.
> **Newton:** Bom é assim, quando a gente tinha um exercício para falar no Fórum, dai a gente conversava eu podia falar. O que eu sentia é que **a senhora queria me ouvir e que eu me esforçasse para encontrar uma solução**. **É numa experiência como essa que eu vejo que eu quero mesmo ser professor** e quando eu for, vai ser assim... tipo.... ouvir eles [seus futuros alunos] e querer, assim que eles façam as coisas. Ser um professor diferente. Porque eu não quero chegar na sala de aula e lotar o quadro de matéria e pronto. **Eu vou querer que eles falem, vou propor algo diferente com o computador e tudo**... é acho que é mais ou menos isso. (grifos nossos)

Iremos analisar dois pontos da fala de Newton, o primeiro relaciona-se às ações da professora em querer ouvir os alunos e oportunizar que eles falassem, buscassem respostas. Nesse sentido, a contribuição da atitude da professora em assumir uma abordagem construcionista com questionamentos e sempre deixando um suspense no ar é algo bom, segundo Newton, porém, difícil para o aluno que precisa pensar, refletir e buscar soluções. As respostas não são dadas pelo professor ao aluno e por isso é mais difícil. Nessa perspectiva, o professor não é dono do saber, o saber é construído pelo aluno em interação com outros alunos e o professor.

Um segundo ponto é que as ações da professora podem ter contribuído para a formação desse futuro professor e, assim, se evidencia a dimensão social do ambiente construcionista de aprendizagem. Oportunizar essa experiência contribuiu para que Newton refletisse sobre sua futura profissão, como no recorte de sua fala: "É numa experiência como essa que eu vejo que eu quero mesmo ser professor e quando eu for, vai ser assim... tipo.... ouvir eles (seus futuros alunos) e querer, assim que eles façam as coisas".

Desse modo, podemos considerar que a atitude da professora favoreceu o processo de aprendizagem de alguns alunos ao possibilitar que eles vivenciassem momentos de reflexão, de estudo sobre as suas certezas. Compreendemos que as minhas ações enquanto professora construcionista possibilitou a aprendizagem , pois muitas mensagens oportunizaram que os alunos refletissem.

No próximo tópico apresentaremos as possibilidades de aprendizagem proporcionadas pelo AVA e o material didático.

5.2.3 O Ambiente Virtual de Aprendizagem e o Material Didático

O ambiente virtual de aprendizagem e o material didático criados para a disciplina de Cálculo I também foram pensados segundo uma abordagem construcionista. Assim, neste tópico analisaremos as possibilidades de aprendizagem que surgiram a partir da organização do AVA e dos materiais didáticos para a disciplina. Os dados para a análise foram retirados das entrevistas realizadas com os alunos.

A dinâmica do AVA foi planejada seguindo um movimento de: produções com software (produções)- discussões nos fóruns- leitura do material didático- produções com ou sem o computador (produções) - discussões no Fórum. O espaço de Fórum foi o local em que a comunicação assíncrona entre professora e alunos e entre alunos acontecia, caracterizandose como o espaço que deu mais movimento ao AVA, foi o espaço de aula da disciplina articulado com outros espaços como o de produção, o GeoGebra e o material didático.

A organização do AVA no sentido de tornar-se um espaço habitado por todos, de diálogo, ficou evidenciado na fala de Cavalieri.

> **Cavalieri:** Quando a senhora [professora] chegou em sala e disse que teríamos aula de derivadas a distância e achei que seria a coisa mais difícil do mundo, pra não falar impossível. Mas depois com as conversas dos fóruns e da forma como a senhora [professora] ensinava, eu vi que não era difícil. Era legal e eu aprendi. Os diálogos que ocorreram nos fóruns ajudam muito, porque às vezes a gente faz um exercício sem entender direito o que está fazendo e no Fórum temos mais segurança com relação a isso, porque tudo mundo vai conversando aí você vê se você está no caminho certo ou não.

Talvez essa estranheza sentida por Cavalieri possa estar relacionada a modelos de EaD que ele conhecia ou tivera contato anteriormente, pautados apenas na transmissão de informação, como é caso de dois modelos apresentados por Valente (2005), o *Broadcast* e *Virtualização da Escola Tradicional*. Com essa experiência o aluno percebeu que um ambiente para EaD pode favorecer a aprendizagem, especialmente a partir da interação entre alunos, e entre eles e a professora. Um ambiente para EaD orientado pelo diálogo como Cavalieri afirma: "Mas depois com as conversas dos fóruns e da forma como a senhora (senhora) ensinava, eu vi que não era difícil. Era legal e eu aprendi. Os diálogos que ocorreram nos fóruns ajudam muito".

Podemos concluir, pela fala de Cavalieri, que ele considerou a experiência em EaD válida para sua aprendizagem, revendo seu conceito inicial sobre a modalidade. Dessa forma, compreendemos a dimensão social de nosso ambiente construcionista ao possibilitar a esse aluno uma nova visão sobre a modalidade. Isso evidencia a importância de realizar pesquisas que evidenciem que em EaD é possível a construção do conhecimento ao utilizar TDIC que favorecem aprendizagens e interações entre professor e aluno e entre os alunos.

Newton também falou sobre o AVA.

> **Newton:** Aquele é um ambiente novo, eu por exemplo, nunca tive nenhum contato com a Educação a distância, na verdade mesmo eu tinha até certo preconceito com quem já fez curso a distância. Porque é assim a gente sempre ouve falar que não se aprende nada, que tudo é muito largado e essas coisas assim. Sabe? Então por aí a gente tem uma ideia de como é estudar a distância. Mas o que eu vi nessas aulas que a gente teve é que não bem isso não, por que assim, como eu explico... Eu acho que eu aprendi até mais que nas aulas que não foram a distância.
> **Pesquisadora**: Por que você acha isso?

> **Newton:** [...] professora eu não sei direito, mas é porque eu que **eu participei mais, eu falei mais.** Oh eu vou dar um exemplo nas suas aulas [referindo-se às aulas a distância] eu via o que os outros estavam pensando, coisa que eu não faço aqui [referindo-se às aulas que aconteciam presencialmente] [...]. (grifo nosso)

Novamente, temos uma mudança de opinião sobre aulas na modalidade EaD. Inferimos que conseguimos, com a proposta do ambiente construcionista, quebrar alguns preconceitos em relação à modalidade. O que se destaca na entrevista de Newton é a frase: "eu participei mais, eu falei mais, [...] eu via o que os outros estavam pensando". OAVA foi o local onde esse aluno teve a oportunidade de "falar mais e participar mais" e, além disso, observar o que os demais alunos estavam produzindo, ou seja, um ambiente de interação, de compartilhamento de certezas, ideias e questionamentos.

Nesse posicionamento de Newton podemos identificar o movimento proposto pelo "Estar Junto Virtual" (VALENTE, 2000), pois alunos e professores estavam em um espaço de diálogo e reflexão, enviando e recebendo questões e ideias, aprendendo e ensinando. E esse espaço de troca marca a dimensão social do ambiente construcionista.

Outra contribuição da proposta de AVA para a aprendizagem dos alunos, mencionada por alguns alunos durante a entrevista, foi a comunicação assíncrona que foi estabelecida, possibilitando o acesso ao ambiente e à aprendizagem em diferentes tempos e lugares. Esse acesso e o movimento dos alunos pelo AVA, e mais especificamente no fórum, evidenciam a dimensão sintática do ambiente construcionista. Esta diz respeito ao fácil acesso e uso, pelo aluno, de elementos constituintes do ambiente de aprendizagem e a interação com esses elementos.

Porém, não basta disponibilizar ao aluno diferentes tecnologias ou materiais didáticos, torna-se fundamental, em um ambiente construcionista, a exploração feita pelo educando de forma a favorecer sua aprendizagem. No caso da nossa pesquisa, disponibilizamos um AVA – – que inclui diversos recursos que possibilitam a interação entre sujeitos – , o GeoGebra e materiais didáticos, mas somente esses recursos não seriam suficientes para alcançarmos a dimensão sintática do ambiente construcionista. O uso desses materiais deve favorecer a aprendizagem dos alunos, o que evidencia a dimensão sintática presente em um ambiente construcionista. Desta forma, apresentamos dados das entrevistas realizadas com Fermat, Wallis, Euler e Lagrange sobre o uso que fizeram desses recursos.

> **Fermat:** [...] Então professora eu gostei de ver um pouco do conteúdo a distância, assim no Fórum, porque a gente pode entrar lá nos horários livres,

> a noite, de madrugada. Sabe a hora que eu posso, e posso entrar quantas vezes eu quiser, e ainda posso entrar na minha casa. [...].
>
> **Euler:** a maior vantagem que eu vejo das aulas a distância é não precisar vir para a universidade e ainda toda hora que você quer você pode entrar lá [(referindo se ao AVA)] e ver o que está acontecendo.
>
> **Wallis:** Eu acho que isso poderia acontecer em outras disciplinas porque eu preciso de aulas presenciais, mas com essas aulas que a gente teve eu acho que seria muito bom também ter um pouco a distância. [...] Por tudo, pelo espaço de troca, pela disponibilidade do horário e do local.
>
> **Lagrange:** Se eu faltar na aula hoje [referindo-se à aula de Cálculo que acontecia presencialmente] eu perco todo o conteúdo e tudo que foi falado, principalmente o que o professor falou. E na sua [referindo-se às aulas que aconteciam a distância], sempre tenho tudo lá, daí eu entro leio e tenho uma noção do que tá acontecendo, sem perdas [...].

Com base nessas falas, destacamos características próprias da Educação a Distância, como a aprendizagem independente de tempo e lugar. Os alunos e o professor interagindo a partir de diferentes lugares, de forma síncrona e assíncrona, bastando o acesso à internet. Essa possibilidade de aprender sem horário fixo e lugar determinado pode ser entendida como um ponto favorável para o processo de aprendizagem, confirmado em falas como a de Lagrange "sempre tenho tudo lá, daí eu entro leio e tenho uma noção do que tá acontecendo, sem perdas [...]", e de Euler ao mencionar o interesse em ter mais disciplinas em formato bimodal, por várias questões: "Por tudo, pelo espaço de troca, pela disponibilidade do horário e do local".

É necessário considerar também que esses alunos, diferentemente de Newton e Cavalieri, não foram habitantes do AVA, assim, as contribuições apontadas por eles são diferentes das apontadas pelos habitantes. Os habitantes mencionam contribuições diretamente ligadas à aprendizagem, como é o caso do espaço para falar, agir e interagir; os demais apontaram para a contribuição, o tempo e os locais para a aula, o que não são características próprias de um modelo de EaD orientado pela construção de conhecimento.

Além do AVA, iremos analisar as possibilidades de aprendizagem a partir do material didático produzido para a disciplina. O material didático foi elaborado para complementar as ações desenvolvidas nos fóruns e espaços de produção. O objetivo desse material foi sistematizar informações produzidas nas produções e institucionalizá-las[19], mas em uma abordagem construcionista.

---

[19] Institucionalização é o momento em que professor sistematiza os saberes envolvidos nas atividades, discute os conceitos e estratégias que os alunos utilizaram para resolver a problemática proposta. (BROUSSEAU, 2008).

Elaboramos esse material orientados pela abordagem construcionista, pensando no perfil dos alunos para quem escrevíamos. Segundo Scherer (2005, p. 57):

> [...] a estética desses materiais também precisa receber alguns cuidados, atentando para o elemento principal: a aprendizagem e a comunicação com o educando, e com quem é este educando. Afinal, o material precisa despertar o interesse do educando, desafiá-lo a questionar e questionar-se, além de apresentar caminhos, convidando-o a agir.

A estética desses materiais vai ao encontro da essência da dimensão sintática de um ambiente construcionista, ou seja, os materiais precisam favorecer a aprendizagem. Logo, ao produzirmos esses materiais nosso foco sempre foi a aprendizagem de nossos leitores, ou seja, nossos educandos. Para analisar algumas características que imprimimos ao material, trazemos as falas de alunos sobre ele:

> **Bernoulli:** Bom os materiais eu gostei porque ficou bem explicativo e deu para entender bem, lá também tem os gráficos que ajuda a compreender.
>
> **Fermat:** Eu achei interessante. O da regra de L'Hospital eu consegui entender facilmente. Eu gosto de estudar com essas apostilas bem explicativa, que tem Figura e bastante exemplo e aplicações da matemática no dia-a-dia. Que nem naquela [(apostila)] que tinha o problema da caixa.

Para esses alunos, o material didático estava "explicativo" e contribuiu para a compreensão dos conteúdos que estavam estudando, isso pode ser evidenciado em falas como: "eu consegui entender facilmente" e "ficou bem explicativo e deu para entender bem". A Fermat mencionou também a contextualização, o uso de figuras e exemplos.

Nós utilizamos o GeoGebra para as plotagens dos gráficos e a cada imagem inseríamos uma caixa de texto convidando o aluno a construir também o gráfico, objetivando que ele agisse a partir da leitura como apresentado na Figura 25:

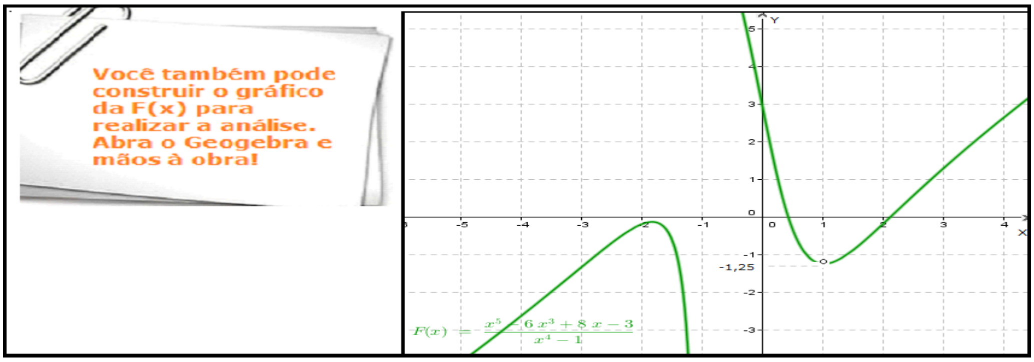


Figura 25 – Gráfico referente ao estudo de Regra de L'Hospital do material didático

Fonte: Dados da pesquisa.

Com relação à contextualização mencionada por Fermat, no material didático sobre o conteúdo de máximos e mínimos de funções nós iniciamos com um problema a fim de mobilizar os alunos para a aprendizagem, mesmo tendo realizado estudos sobre esse tema nos fóruns e espaços de produção no AVA. Propusemos o problema da caixa e chamamos o aluno para resolver o desafio proposto. Na Figura 26 podemos observar um recorte do problema e da questão que foi proposta após a representação da função que modelava o problema

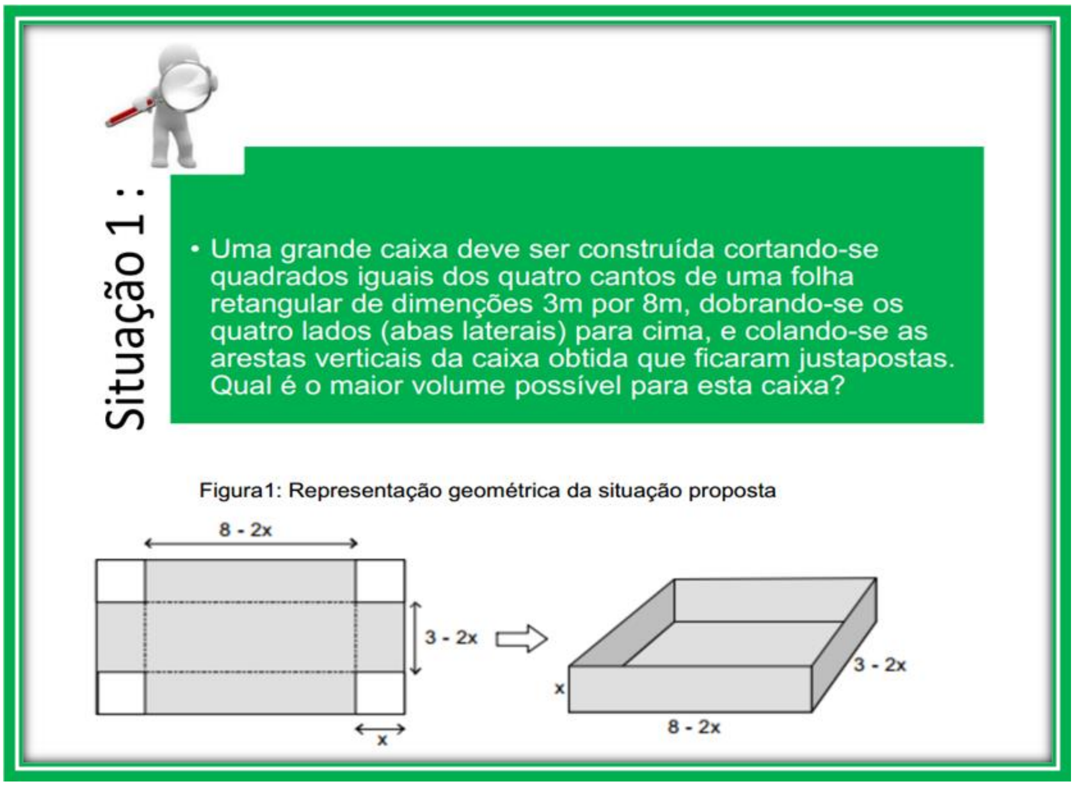


Figura 26 – Problema de Cálculo do volume de uma Caixa
Fonte: Dados da pesquisa

Em todos os materiais produzidos tínhamos o cuidado com a comunicação, o diálogo e a proximidade com o aluno, sempre propondo questionamentos que o desafiasse e favorecessem a reflexão durante a leitura. Newton comenta sobre essa comunicação presente no material:

> **Newton:** Olha professora eu achei o material à altura de muitos livros de cálculo que tem por aí, só que bem mais fácil de entender porque a linguagem parece **tá mais próxima da gente mesmo**. ..... é como se lendo aquilo a senhora estivesse dando uma aula mesmo, **perguntando as coisas para gente e sempre falando assim que a gente podia falar mais sobre aquilo**. Isso dá uma sensação de que a gente tá sendo acompanhado. (grifos nossos)

Newton fala algo de extrema importância ao mencionar que a linguagem usada estava mais próxima da linguagem dos alunos, nós elaboramos o material assim justamente porque ao pensar a escrita para a EaD precisamos dialogar com o aluno, diferentemente de outros livros que objetivam a transmissão da informação, seja em formato escrito ou digital.

> A comunicação pela escrita é uma escrita em um movimento contínuo de diálogo, reflexão. Assim, o aluno é visto como alguém que participa do processo porque é reflexivo, e não reflexo do que escrevemos. E nessa ação reflexiva e dialógica, o aluno aprende. (SCHERER, 2008, p. 14).

Na Figura 27 apresentamos dois recortes que evidenciam o diálogo com o aluno

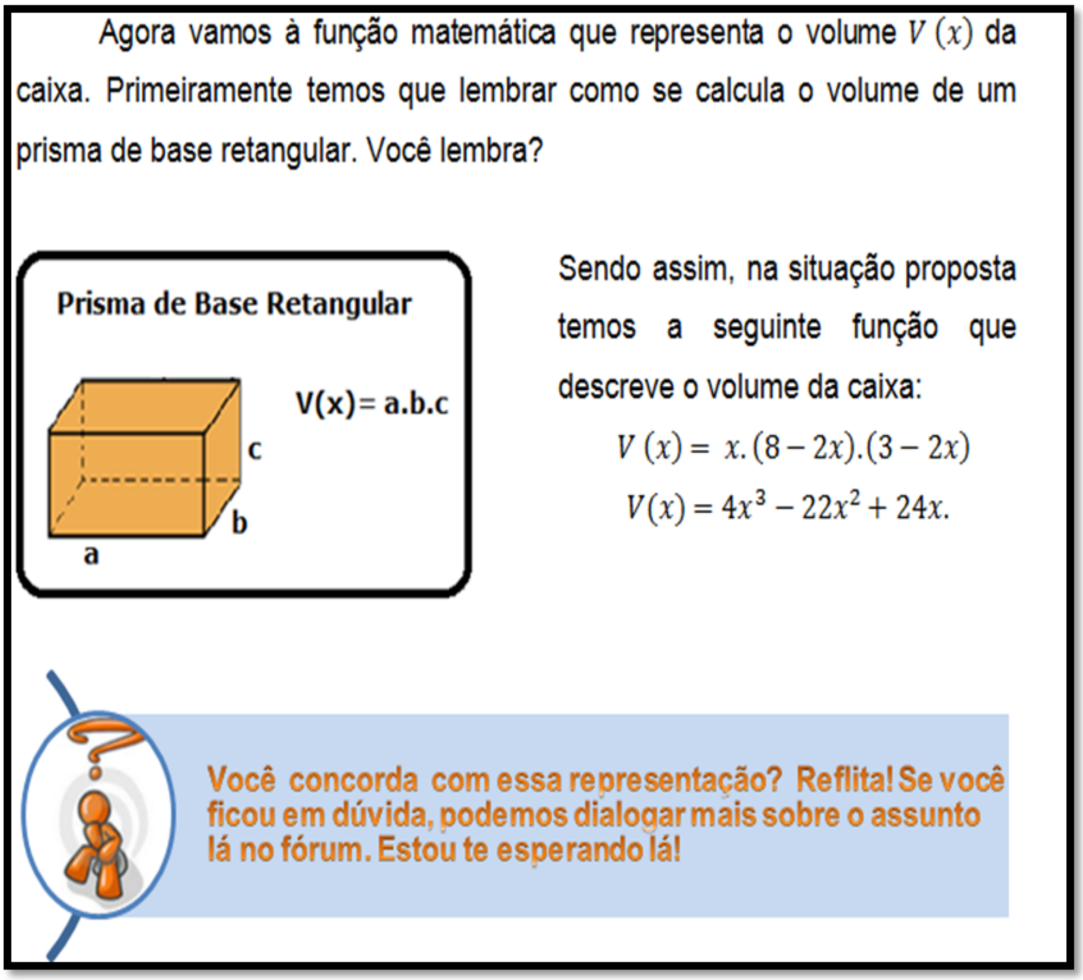


Figura 27 – Comunicação no material didático

Fonte: Dados da pesquisa

Pelo relato de Newton, podemos destacar a contribuição do material didático produzido para a sua aprendizagem com os questionamentos que eram propostos. Na Figura

27, podemos destacar alguns questionamentos: “você lembra?”, “você concorda com essa representação?”.

Scherer (2005, p. 90) afirma que “O questionamento presente no material entregue ao educando, ou na fala do educador ou educadora, precisa desequilibrar o educando em relação às suas certezas, sendo capaz de gerar novos conflitos” (SCHERER, 2005, p. 90). Esse movimento de questionamento e reflexão pode ser visto na Figura 28.

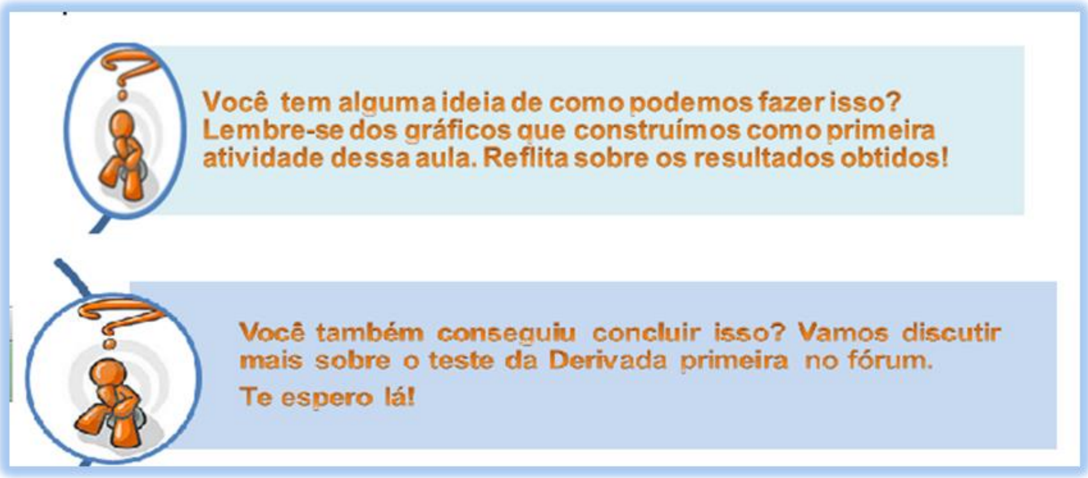


Figura 28 – Questionamentos presentes no material didático

Fonte: Dados da pesquisa

Outro elemento que enriqueceu esse material foram os links para objetos digitais de aprendizagem disponíveis na web. Esses objetos permitiram ao aluno fazer visitas a outros sites favorecendo a hipertextualidade, “provocando links com outros contextos que convidassem o aluno a pensar” (SCHERER, 2005, p. 134).

Wallis comenta sobre esses links:

> **Wallis:** aquele material foi o melhor que eu já vi para estudar Cálculo. Eu costumava usar o Guidorizzi, mas durante todo tempo que a senhora deu aula para gente eu só usei aquelas apostilas. Eu gostei muito das explicações e da forma como estava escrito. **Ficou muito claro**! **Tem uns balõezinhos com uns links que ajudavam muito**. Isso foi o eu achei mais legal e foi o que me ajudou a realizar as atividades. A senhora podia escrever outras sobre limites e integral também ne. (grifo nosso)

O destaque que fazemos na fala de Wallis relaciona-se à hipertextualidade que ele menciona: “Ficou muito claro! Tem uns balõezinhos com uns links que ajudavam muito”. Vejamos na Figura 29 um link apresentado no material para um objeto de aprendizagem.

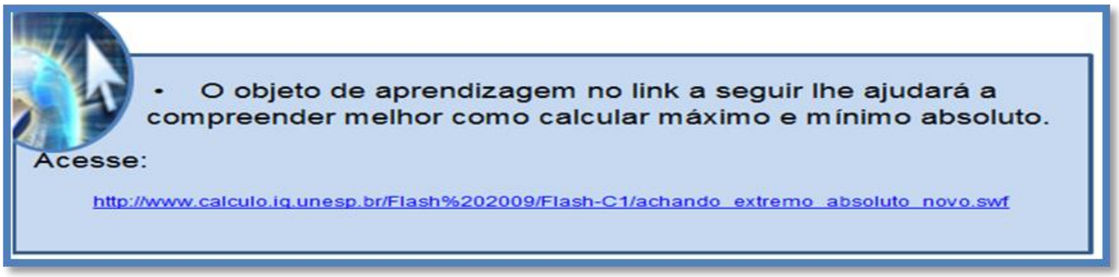


Figura 29 – Links para objetos de aprendizagem

Fonte: Dados da Pesquisa

Assim, apresentamos as contribuições do material didático para o processo de aprendizagem de alguns alunos, sejam eles habitantes, visitantes ou transeuntes. Essa contribuição é resultado da forma como foi escrito o material, como propusemos questionamentos e dialogamos de forma próxima com os alunos também a partir de hipertextos com links para outros espaços.

E assim finalizamos a análise dos dados produzidos durante a experimentação e no próximo capítulo faremos algumas considerações a partir da análise.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa teve como objetivo analisar processos de aprendizagem sobre Derivadas de funções em espaços virtuais. A partir dos dados analisados, concluímos que possibilidades de aprendizagem emergem na/a partir da interação entre professores e alunos e entre os alunos em AVA, organizado em uma abordagem construcionista. Ademais, consideramos que a aprendizagem do aluno está diretamente relacionada à atitude por ele assumida no espaço virtual.

Os alunos que foram caracterizados como habitantes aprenderam em interação com a professora e com os outros alunos em diferentes espaços virtuais como o AVA da disciplina, o Facebook e o WhatsApp. O ambiente construcionista foi um espaço no qual esses alunos tiveram liberdade para falar, questionar, propor, contrapor, dialogar, agir e produzir. Além disso, consideramos que os habitantes do AVA exerceram um papel importante na aprendizagem de visitantes e transeuntes do AVA ao interagiram com eles em outros espaços como o Facebook e o WhatsApp. Os habitantes foram os responsáveis por articular discussões do AVA com os diálogos nesses outros espaços e lá contribuir para a aprendizagem de outros colegas.

Com a análise dos dados dos alunos considerados visitantes, concluímos que o fato deles não habitarem o AVA, por vezes, influenciou o processo de aprendizagem dos mesmos, pois reflexões deixaram de ser realizadas em razão de não terem sido lidas e/ou discutidas com o grupo e a professora, no AVA. Contudo, destacamos que o fato desses alunos não terem sido habitantes no AVA não implicou que eles não tenham sido habitantes de outros espaços. Como o caso de dois alunos que participaram do grupo de estudos no WhatsApp, e nesse espaço há indícios de serem habitantes.

Os diálogos que ocorreram no WhatsApp, articulados pelos habitantes e questões que surgiram no AVA, contribuíram para a aprendizagem daqueles que apenas foram visitantes do AVA, pois os diálogos que ocorreram nesse espaço evidenciaram momentos de desequilíbrios cognitivos, reflexões, levantamento e análise de conjecturas, proposições, enfim, de aprendizagem. Esse espaço virtual constituiu-se como mais uma possibilidade de aprendizagem para o estudo do Cálculo a distância.

Os alunos que assumiram uma postura de transeuntes perderam oportunidades de reflexão, posto que, na maioria das vezes, os questionamentos que poderiam favorecer a aprendizagem desses alunos não foram retomados por eles, pois apenas passavam pelo AVA, sem se comprometerem com os estudos em andamento naquele ambiente. No entanto, podemos inferir que um aluno considerado transeunte no AVA utilizou o WhatsApp e também o Facebook para interagir com alguns colegas habitantes do AVA, vivenciando processos de aprendizagem em interação com os mesmos.

Consideramos também que alguns alunos, principalmente os transeuntes, apresentaram dificuldades matemáticas relacionadas ao uso inadequado de simbolismos do Cálculo Diferencial e compreensão da derivada como uma reta tangente a uma função. Outra dificuldade Matemática identificada diz respeito à derivada em um intervalo fechado, visto que alguns alunos não conseguiram identificar pontos da função para o qual a derivada não existia. A não identificação desses pontos gerou dificuldade no estudo de máximos e mínimos de Funções em razão de, algumas vezes, para determinação de pontos de Máximos e Mínimos alguns alunos atentaram-se apenas à identificação dos pontos do domínio da função original para o qual a derivada era nula, não observando os pontos na qual a derivada não existia.

O WhatsApp e o Facebook, pelos dados apresentados e analisados nesta pesquisa, foram espaços virtuais que se constituíram como ambientes favoráveis à aprendizagem de conteúdos de Cálculo sendo articulados ao AVA da disciplina. Neste sentido, investigar outras potencialidades e o uso desses espaços como ambientes formais para o ensino de Cálculo pode ser um caminho para a continuidade desta pesquisa.

As ações da professora também implicaram em possibilidades de aprendizagem para os alunos ao contribuir para que eles vivenciassem momentos de reflexão, estudo, investigação e questionamentos de suas certezas. A professora, ao não fornecer respostas e desafiá-los para o levantamento e confirmação de conjecturas e proposições, oportunizou que eles aprendessem em uma perspectiva de construção de conhecimento.

O AVA organizado e usado em uma abordagem construcionista foi o local onde os alunos tiveram espaço para se expressar e interagir com os demais colegas e a professora, ou seja, foi um ambiente de produção e compartilhamento de ideias e proposições. Esse constituiu-se em um ambiente favorável à aprendizagem pela interação entre sujeitos e desses com o objeto de conhecimento. Um ambiente favorável para falar, questionar, ser questionado, expor dúvidas e certezas, contrapor, compartilhar produções, enfim, um ambiente virtual que possibilitou a aprendizagem de conceitos da área de Cálculo.

O material didático elaborado em uma abordagem construcionista, sempre articulado com os demais espaços de aprendizagem da disciplina, favoreceu a aprendizagem dos alunos.

Muitos afirmaram que o material didático apresentou linguagem clara, dialógica e hipertextual, o que contribuiu para a aprendizagem sobre derivadas na disciplina de Cálculo.

Com relação à proposta de atividades na modalidade de EaD, consideramos que alguns alunos abandonaram preconceitos em relação à modalidade. Esta constatação evidencia a importância de se realizar pesquisas e experiências em EaD, a partir de processos de educação orientados pela abordagem “Estar Junto Virtual” e pela construção de conhecimentos, nas quais as TDIC possam favorecer aprendizagens e interações entre os habitantes do AVA.

Quanto ao ambiente virtual disponibilizado para os alunos, observou-se que o fato dele ser construcionista implicou em possibilidades de aprendizagem, pois oportunizou aos alunos um papel ativo no processo educacional, além de momentos de diálogos com a professora e com os demais colegas. A forma de exploração dos recursos do AVA favoreceu a aprendizagem dos alunos e evidenciou a dimensão sintática do ambiente construcionista criado.

Consideramos também que o ensino do Cálculo na modalidade de EaD, mais especificamente em espaço virtual, é uma alternativa que pode favorecer a aprendizagem do aluno. Todavia, para que a aprendizagem na/ a partir da interação seja vivenciada torna-se fundamental o habitar dos espaços virtuais, atuando em uma abordagem do “Estar Junto Virtual”, conforme observamos nesta pesquisa.

Essas são algumas considerações sobre a investigação desenvolvida, mas ainda há muitas questões a serem investigadas a partir da problemática explorada: Como ocorre a aprendizagem de Cálculo ao usar formalmente espaços virtuais como o WhatsApp e o Facebook na disciplina? Que estética favorece o desenvolvimento da disciplina de Cálculo na modalidade de EaD ou uma proposta de Educação Bimodal, em uma abordagem construcionista?

Indagações surgiram ao longo do desenvolvimento desta pesquisa, elas e outras que poderão surgir indicam a continuidade desta pesquisa.. Afinal, este é um caminho sem fim no qual caminham aqueles que acreditam na importância do uso de Tecnologias para a construção de conhecimento de nossos educandos e lutam por uma Educação Matemática e uma Educação a Distância de qualidade, centrada na aprendizagem dos alunos.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. M. W.; SOUZA, L. G. S.ardinha; FATORI, L. H. e Ensino de Cálculo: uma abordagem usando Modelagem Matemática. **Revista Ciência e Tecnologia**, São Paulo, v.10, n.16, p. 47-59, jul. 2007.

BAIRRAL, M. A.. **Discurso, Interação e Aprendizagem Matemática em Ambientes Virtuais a Distância**. Rio de Janeiro: EDUR, 2007.

BALDINO, R. R. **Editorial. Temas & Debates**, Brasília, v. 8, n. 6, p. 3, 1995.

BRASIL. Decreto nº 5.622, de 19 de dezembro de 2005. Regulamenta o artigo nº. 80 da Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Brasília, DF, 2005. Disponível em: <https://www.planalto.gov.br//legislações/leis>. Acesso em: 04 maio 2014.

BRASIL. Portaria nº 4.059, de 10 de dezembro de 2004. Regulamenta o artigo nº 81 da Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Brasília, DF, 2005. Disponível em: <https://www.planalto.gov.br//legislações/leis>. Acesso em: 04 mai. 2014.

BEZERRA, W. L. **O uso de ferramentas pedagógicas para o ensino de Cálculo de uma variável em cursos semipresenciais**: o caso do instituto federal do Ceará. 2012 Dissertação (Mestrado profissional em ensino de ciências e matemática) – Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Ceará, 2012.

BROSSEAU, G.. **Introdução ao estudo das situações didáticas:** conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

BOYER, C. B. **História do Cálculo**. São Paulo: Atual, 1992.

CABRAL, T. C.; CATAPANI, E.. Imagens e olhares em uma disciplina de Cálculo em serviço. **Zetetiké:** Revista de Educação Matemática, São Paulo, v.11, n.19, p. 101-116, jun. 2003.

COSTA, I. M.; SALVADOR, J. A. Ensino de Cálculo Diferencial e Integral: experiências no DM – UFSCar. In: ENCONTRO PAULISTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, VII, 2004, São Paulo. **Anais**... São Paulo: USP, 2004. p. 1-10.

CORRÊA, D. dos S. P.. **Licenciatura em Matemática a distância e a formação de professores para/com o uso de Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação**. 2012. 139f. (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Matemática, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2012.

COSTA, P. O.; SOUZA JÚNIOR, A. J.. Tecnologia de Informação e Comunicação no ensino de Cálculo. **FAMAT em Revista**, Uberlândia, n. 9, p. 431-440, 2007. Disponível em: <http://www.famat.ufu.br>. Acesso em: 24 de abr. 2014.

FLEMMING, M. D. ; GONÇALVES, M. i B. . **Cálculo A.** 6. ed. Florianópolis: Makron Books, 2006.

GONÇALVES, D. C. . **Aplicações das Derivadas no Cálculo I:** atividades investigativas utilizando o GeoGebra. 2012. 111f . Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Instituo de Ciências Exatas e Biológicas, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2012.

IES. **Projeto Político do Curso de Licenciatura em Matemática**. Campo Grande, 2009.

KENSKI, V. M. . Processos de interação e comunicação no ensino mediados pelas tecnologias. In: ROSA, D. ; SOUZA, V. . (Orgs.). **Didática e práticas de ensino:** interfaces com diferentes saberes e lugares formativos. Rio de Janeiro: DP&A, 2002. p.254-264.

LACHINI, J. . Subsídios para explicar o fracasso de alunos em Cálculo. In: LAUDARES, J. B. ; LACHINI, J. . (Orgs.). **Educação Matemática:** a prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo. Belo Horizonte: FUMARC, 2001. p. 146-190.

LEITHOLD, L. . **O Cálculo e a Geometria Analítica.** Tradução Cyro de Carvalho Patarra.3.ed. São Paulo: Harbra Ltda, 1994.

LÜDKE, M. ; A. , M. **. Pesquisa em educação**: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MALTEMPI, M. V. . Construcionismo: pano de fundo para pesquisas em informática aplicada à educação matemática. In: M.A.V. Bicudo e M.C. Borba (Orgs.). **Educação Matemática:** pesquisa em movimento. São Paulo: Editora Cortez, 2004.

MELO, J. M. R. de. **Conceito de integral:** uma proposta computacional para seu ensino e aprendizagem. 2002.152f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Centro das Ciências Exatas e Tecnológicas, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002.

MOORE, M. ; KEARSLEY, G. . **Educação a Distância**: uma visão integrada. Tradução Roberto Galman. São Paulo: Thomson Learning, 2007.

MORELATTI, M. R. M. . **Criando um ambiente construcionista de Aprendizagem em cálculo diferencial e integral I**. 2001. 260f. Tese (Doutorado em Educação) Centro das Ciências Exatas e Tecnológicas, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2001.

NASCIMENTO, J. L. do. Uma proposta metodológica para a disciplina de Cálculo I. In: ENCONTRO DE EDUCAÇÃO EM ENGENHARIA, VI, 2000, Rio de Janeiro. **Anais**...Rio de Janeiro: UFRJ, 2000. p.11-18.

PAPERT, S. . **A máquina das crianças:** repensando a escola na era da informática. Porto Alegre: Artmed, 2008.

SCHERER, S. . **Uma Estética Possível para a Educação Bimodal:** aprendizagem e comunicação em ambientes presenciais e virtuais. 2005. 240 f. Tese (Doutorado em Educação) - Centro das Ciências Exatas e Tecnológicas, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2005.

_________. **Confecção de livro texto e suas normas**. Roraima: UFR, 2008.

SILVA, M. A. *et al*. Dificuldades de Aprendizagem na Disciplina de Cálculo diferencial e Integral: Estudo de Caso com Alunos do curso de Licenciatura em Química. In: CONGRESSO DE PESQUISA E INOVAÇÃO DA REDE NORTE NORDESTE DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA-CONNEPI, V, 2010, Maceió. **Anais...** Maceio: IFCE, 2010, p.11-20.

STEWART, J. . **Cálculo I**. 3.ed. São Paulo: Thompson Learning, 2001.

TUCKER, A. C.; LEITZEL, J. R. C. **Assessing Calculus Reform Efforts:** a report to the community. Michigan: The Mathematical Association of America. 1995.

VALENTE, J. é A. . **O computador na sociedade do conhecimento**. Campinas: UNICAMP/NIED, 1999.

__________. Educação a Distância: uma oportunidade para mudança no ensino. In: MAIA, Carmem (Org.). **EaD.br**: Educação a distância no Brasil na era da Internet. São Paulo: Anhembi Morumbi Editora, 2000. p. 97-122.

__________. **A Espiral da Espiral de Aprendizagem:** o processo de compreensão do papel das tecnologias de informação e comunicação na educação. Campinas: 2005. Tese (Livre Docência) - Instituto de Artes, Universidade Estadual de Campinas, 2005.

__________. Educação a distância: criando abordagens educacionais que possibilitam a construção de conhecimento. In: ARANTES, V. A. (Org.). **Educação a distância:** pontos e contrapontos. São Paulo: Summus, 2011.

__________. Integração Currículo e Tecnologias: a passagem do lápis e papel para o currículo da era digital: In: XI ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2013. Curitiba. **Anais**... Curitiba: PUC, 2013.

ZUIN, E. S. L. Cálculo: uma abordagem histórica. In: LAUDARES, J. B.; LACHINI, J. (Orgs.). **Educação Matemática**: a prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo. Belo Horizonte: FUMARC, 2001. p. 13-36.

APÊNDICES

APÊNDICE A- TERMO DE COMPROMISSO

Ministério da Educação

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Instituto de Matemática-INMA
Mestrado em Educação Matemática

TERMO DE COMPROMISSO

O presente termo tem como objetivo esclarecer os procedimentos de nossa pesquisa, principalmente os relativos à utilização dos dados coletados.

O material coletado (atividades realizadas nas aulas presenciais e a distância, gravações em áudio, transcrições, registros escritos e digitais) servirá de base para as análises da pesquisa cujo objetivo é analisar as possibilidades de aprendizagem de alunos em relação ao conceito de Derivada em um ambiente construcionista na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, na modalidade de Educação a Distância EaD.

As transcrições e registros obtidos nas aulas tanto presenciais quanto a distância e usados como dados para a pesquisa, não terão identificação alunos em nenhuma publicação científica de nossa autoria.

Campo Grande, 06 de dezembro de 2013.

Profa. Dra. Suely Scherer	Vanessa Rodrigues Lopes
Orientadora	Mestranda

Aluno(a) participante da pesquisa

APÊNDICE B- ROTEIRO DA ENTREVISTA

Dados pessoais:

Nome completo: ____________________________________

Idade: ____________________________________

Qual o curso superior que você cursa?_____________________

Essa é a primeira vez que você cursa a disciplina de Cálculo I?

( ) sim ( ) não. Quantas vezes já cursou?_____________

1. Fale sobre como você desenvolveu as atividades no Ambiente Virtual e que ações e atividades que você considera que contribuíram com a sua aprendizagem nas aulas desenvolvidas. Fale também das dificuldades que você teve em cada uma das aulas:
Aula 1 : Conteúdo abordado foi Regra de L'Hospital.
Aula 2 : Conteúdo abordado foi Máximos e Mínimos locais e Globais e Teorema de Fermat/ Problemas de otimização.
Aula 3: Tivemos Aula presencial
Aula 4: Teste da Derivada segunda

2. O que você achou do Material que foi disponibilizado no Ambiente. Como foi a leitura?

3. Você desenvolveu as atividades? Sozinho (a) ou interagiu com outros colegas presencialmente, usando o AVA ou outro ambiente virtual?

4. Você considerou importantes os diálogos nos fóruns? Justifique.

5. Fale sobre as ações da professora. Elas contribuíram com a sua aprendizagem? Justifique.

6. O GeoGebra contribuiu com a aprendizagem de cálculo nas aulas desenvolvidas no AVA e presencialmente? Como?

7. Você poderia citar o que gostaria que fosse diferente nas aulas à distância?

8. Com relação a Regra de L'Hospital sempre podemos utilizá-la? Justifique.

9. É correto afirmar que $\frac{f'(x)}{g'(x)} = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$. Justifique.

10. Em um ponto x do domínio da f(x), onde a derivada de x não existe, o ponto (x, f(x)) pode ser ponto de máximo ou ponto de mínimo?

11. Com base naquilo que foi discutido nos fóruns e por meio das produções realizadas, você conseguiu estabelecer alguma relação entre a uma função f e sua derivada Primeira, ou seja, f'? Qual? Como essa relação nos ajuda a determinar máximos e mínimos locais da f?

12. Com base na discussão nos fóruns e nas produções realizadas, você conseguiu estabelecer alguma relação entre a uma função f e sua derivada segunda f’’? Qual? Como essa relação nos ajuda a determinar máximos e mínimos locais da f?