**ENOQUE DA SILVA REIS**

# O ESTUDO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU EM LIVROS DIDÁTICOS UTILIZADOS EM ESCOLAS BRASILEIRAS

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL**
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**
**Campo Grande – MS**
**Ano 2010**

**ENOQUE DA SILVA REIS**

# O ESTUDO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU EM LIVROS DIDÁTICOS UTILIZADOS EM ESCOLAS BRASILEIRAS

Dissertação apresentada para a obtenção do grau de Mestre em Educação Matemática à Comissão Julgadora da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul sob a orientação do Professor Dr. Luiz Carlos Pais.

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL**
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**
**Campo Grande – MS**
**Ano 2010**

## BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Luiz Carlos Pais – Orientador UFMS

Prof. Dr. Rui Marcos de Oliveira Barros – UEM

Prof. Dr. José Luiz Magalhães de Freitas – UFMS

# DEDICATÓRIA

*A meus pais e minha amada esposa.*

# AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente, a equipe de professores do programa de pós-graduação da UFMS, em especial, ao professor Dr. Luiz Carlos Pais que me orientou durante a realização desse trabalho.

Aos colegas do Grupo de Pesquisa em História da Educação Matemática Escolar, que colaboraram muito nas discussões realizadas.

E a minha esposa que esteve sempre ao meu lado colaborando em tudo que era possível.

# RESUMO

Esta pesquisa tem como objeto o estudo de Sistemas de Equações do Primeiro Grau em livros didáticos utilizados em escolas brasileiras. As fontes utilizadas foram um livro didático adotado no Colégio Pedro II no período de 1890 a 1930 (*Tratado e Álgebra Elementar de José Adelino Serrasqueiro),* e um livro contemporâneo *(Matemática Paratodos de IMENES & LELIS)*, assim como, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), as resenhas do Guia do Livro Didático do Plano Nacional do Livro Didático e programas de estudos do Colégio Pedro II. Para estudar esse objeto, a Teoria Antropológica do Didático, proposta por Yves Chevallard é adotada como referencial teórico, e é feita uma abordagem metodológica baseada na Análise de Conteúdo de Laurence Bardin. Além desses referenciais, utilizaremos experiências absorvidas a partir de leituras e análise de pesquisas que de alguma forma caminham paralelamente como o nosso objeto de estudo. Os resultados evidenciam algumas questões importantes, como: valorização do estudo de sistemas tanto nos livros antigos quanto nos livros contemporâneos; a diversidade de registros de linguagem nos livros contemporâneos; a valorização da linguagem materna nos livros antigos; a diversidade de exercícios propostos em ambos os livros.



Palavras Chave: Praxeologia. Livros Didático. Sistemas de Equações do Primeiro Grau.

# ABSTRACT

This research has as objective the study of Systems of Equations of the First Degree in textbooks used in Brazilian schools. The sources used were a textbook adopted the Colégio Pedro II in the period 1890 to 1930, and a contemporary book, as well as the National Curricular Parameters (PCN), the Guide reviews the Textbook of the National Textbook and programs studies at the Colegio Pedro II. To study this object, the Anthropological Theory of Guided proposed by Yves Chevallard is adopted as a theoretical, and it made an approach based on content analysis of Laurence Bardin. In these references, we will use experiences absorbed from reading and analysis of research that somehow run parallel as our object of study. The results show some important issues such as: promotion of the study of both systems in ancient and contemporary books, records the diversity of language in contemporary books, the development of mother tongue in the ancient books, the diversity of exercises offered in both books.


Keywords: Praxeology. Textbook. Systems of Equations of the First Degree.

**LISTA DE FIGURAS**

## LISTA DE SIGLAS

| SIGLA | DESCRIÇÃO |
|---|---|
| PCN | Parâmetros Curriculares Nacionais |
| PNLD | Programa Nacional de Livro Didático |
| CAPES | Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior |
| UNIDERP | Universidade para o Desenvolvimento do Estado e da Região do Pantanal |
| USP | Universidade de São Paulo |
| UNICAMP | Universidade de Campinas |
| SAEB | Sistema de Avaliação da Educação Básica |
| PUC/SP | Pontifica Universidade Católica de São Paulo |
| MMM | Movimento da Matemática Moderna |

# SUMÁRIO

# INTRODUÇÃO

Esta pesquisa analisa e descreve a proposta de ensino de Sistemas de Equações do Primeiro Grau, a partir de dados obtidos em livros didáticos, em particular de um livro utilizado no Colégio Pedro II e um livro contemporâneo, nas recomendações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), no Guia de Livro Didático-2008 (PNLD) e em Leis e Reformas compreendidas entre os anos 1890 e 1930. O propósito desse estudo é divulgar informações que possam contribuir com o processo de ensino e aprendizagem dessa parte da matemática.

A partir de um olhar, por meio da Teoria Antropológica do Didático, buscamos contemplar nosso objetivo principal que é analisar como era proposto o ensino de Sistemas de Equações do Primeiro Grau em livros didáticos utilizados na primeira república do Brasil (1890-1930), e como é proposto hoje nos livros didáticos destinados aos anos finais do ensino fundamental.

No primeiro capítulo, descrevemos o entorno em que desenvolvemos essa pesquisa, juntamente com alguns pontos de minha trajetória pessoal. Consideramos que as experiências como conhecimento prévio é que desencadeiam as primeiras indagações a respeito do que se pretende investigar, ou seja, em nosso entendimento, é a trajetória que possibilita o início e concretização de uma pesquisa.

O segundo capítulo aborda o referencial teórico da pesquisa. Tem-se como base a Teoria Antropológica do Didático proposta por Ives Chevallard, Mariana Bosch e Josep Gascón, todos educadores matemáticos, pesquisadores na linha da didática da matemática, que está inserida no campo da antropologia dos saberes, cujo objeto de pesquisa são as práticas matemáticas no conjunto das instituições sociais. Além desses teóricos, nos fundamentamos também em André Chervell considerado como o precursor do campo de pesquisa denominado história das disciplinas escolares, e em algumas pesquisas que abordam especificamente o ensino da álgebra nos anos finais do ensino fundamental, essas pesquisas serão descritas no corpo desse capítulo.

O método e o procedimento da pesquisa serão apresentados no terceiro capítulo, e fundamentam-se numa abordagem a partir da Análise de Conteúdo descrita por Laurence Bardin (2006). Organizamos esse capítulo em duas partes, na primeira, descrevemos o método, ainda nessa parte realizamos um estudo da utilização da Análise de Conteúdo em pesquisas no campo da educação em particular na Educação Matemática, e para finalizar a primeira parte, destacamos a compatibilidade desse método com o referencial teórico adotado. Na segunda parte, descrevemos as fontes utilizadas e o procedimento adotado para o desenvolvimento desse trabalho. Iniciamos pelos PCN e o Guia de Livro Didático-2008 passamos pelos dois livros didáticos analisados e finalizamos com os programas do Colégio Pedro II e as reformas compreendidas entre os anos de 1890 a 1930.

No quarto capítulo, apresentamos a análise em algumas fontes de influência no ensino de álgebra, em particular dos sistemas de equações do primeiro grau. Inicialmente, descrevemos a análise referente aos aspectos históricos do estudo de sistemas de equações que se encontram descritas em cinco reformas federais da educação brasileira no período analisado, tais fontes apontam para os objetivos do ensino secundário, sua duração e os conteúdos pertencentes. Segue então, a descrição da análise de um livro didático utilizado no Colégio Pedro II, que destaca os tipos de tarefas, as técnicas, tecnologias e teorias implementadas pelo autor a partir de uma determinada organização praxeológica. Temos ainda, a descrição da análise dos PCN’s e do Guia de Livros Didáticos. E por fim apresentamos a análise de um livro didático contemporâneo a partir de quatro tipos de tarefas.

# 1 TRAJETÓRIA INICIAL E DEFINIÇÃO DA PESQUISA

Na intenção de aproximar o leitor do entorno em no qual foi desenvolvida esta pesquisa, dedico uma parte desse trabalho para descrever alguns pontos de minha trajetória pessoal[1], pois acredito que influenciaram diretamente o desenvolvimento deste trabalho.

Nasci em Campo Grande capital do Mato Grosso do Sul, sou o caçula de quatro filhos. Iniciei meus estudos em uma escola estadual, localizada numa região afastada do centro da cidade e frequentei as aulas no turno intermediário.

Diante do fato de morar com meu pai e o mesmo ter a necessidade de se mudar constantemente de bairro, por um lado, tive um ensino fragmentado, uma vez que, durante este tempo mudei seis vezes de escola num período de oito anos. Por outro lado, tive a oportunidade de conhecer diversos professores, e um deles chamou-me mais atenção, não sei se pelo seu bom humor, ou seu amor em lecionar ou mesmo pela amizade com os alunos, sei apenas que ele me cativou e assim despertou minha paixão pela matemática, esse fato ocorreu quando tive aula com este professor na sexta série. Esta experiência foi tão marcante que ao finalizar o ano letivo cheguei até ele e lhe disse: - Quando eu crescer quero ser professor de matemática assim como o senhor.

Em busca desse sonho de ser professor de matemática, me deparei com um grande obstáculo ao finalizar o meu ensino fundamental, pois, tinha que optar em cursar Contabilidade, Magistério ou Científico, lembrando que os dois primeiros itens citados (Contabilidade e Magistério) anteriormente estão vinculados a lei n. 5.692/71, ficando assim descrito como objetivo geral, *"Art. 1º - O ensino de 1º e 2º graus tem por objetivo geral proporcionar ao educando a formação necessária ao desenvolvimento de suas potencialidades como elemento de auto-realização, qualificação para o trabalho e preparo para o exercício consciente da cidadania."* Nesse momento me encontrava diante de um dilema, já que a opinião de meus pais era comum a dos demais pais de classe baixa, que enfatizavam ser melhor para seus filhos fazer um curso profissionalizante, já que, teriam mais chance de entrar para o mercado de trabalho. Estas palavras vêm ao encontro com Zotti que afirma que:

---

[1] Neste trabalho, a trajetória inicial foi escrita em primeira pessoa do singular, já que se trata exclusivamente de minha trajetória de vida. Ao finalizá-la, optei por escrever o restante da pesquisa em primeira pessoa do plural, pois entendo, ser uma produção conjunta de meu orientador, amigos do Grupo de Pesquisa em História da Educação Escolar e eu.

> Fica evidente que o objetivo central da educação, que é voltada para a necessidade do mercado de trabalho é calcado na Teoria do Capital Humano. Verificamos nessa composição curricular a ênfase no ensino tecnicista, profissionalizante, já desde as séries finais do 1º grau, visando transformar a educação em um braço do capital, no intuito de servir às suas necessidades. (ZOTTI, 2004, p. 166)

Neste período, quando terminei o ensino fundamental meus pais acreditavam que o científico era apenas para famílias com boa renda, pois era destinado àqueles que pretendiam ingressar em uma universidade. Para mim isso seria impossível já que eles não tinham condições nenhuma de pagar uma universidade. No entanto, minha visão era contrária a de meus pais, apesar de que muito me agradava à ideia de cursar contabilidade, curso que envolve uma quantia significativa de matérias de matemática e isso era um ponto positivo para mim, por outro lado, o magistério dava-me habilitação para ser professor e isto estava nos meus planos.

No momento de decidir em qual curso me matricular, certamente a paixão e o sonho me guiaram, mesmo sabendo que teria inúmeras dificuldades pela frente optei em ser matriculado no curso científico em uma escola estadual, no período noturno, já que assim eu trabalharia durante o dia na intenção de guardar dinheiro para a universidade. Desta forma durante três anos de curso conciliei estudo e trabalho o que acredito ter sido um vilão no meu processo de formação, pois me lembro de chegar à escola para assistir às aulas muito cansado, após o dia todo de trabalho, assim meu aproveitamento era minimizado.

Ao finalizar o curso científico, iniciou-se o período dos processos seletivos para a graduação nas universidades em Campo Grande, no primeiro ano não fui aprovado, mas não desisti de meu sonho e no segundo ano ingressei no curso de Matemática Licenciatura Plena na Universidade para o Desenvolvimento do Estado e da Região do Pantanal (UNIDERP).

Diante da necessidade de pagar as mensalidades da universidade, iniciei no primeiro ano de curso minha tão sonhada carreira de docente, como professor contratado pelo Estado do Mato Grosso do Sul, com vinte horas aula semanais, aulas estas ministradas para o ensino médio, divididas nas disciplinas de matemática e física.

Ao me deparar como acadêmico e ao mesmo tempo professor iniciante da rede pública de ensino, pude de certa forma me sentir realizado, mesmo que no momento o sentimento mais forte fosse de medo, medo de não conseguir ensinar meus alunos, medo de não conseguir aprender o que era ensinado pelos meus professores na universidade. Entretanto, pouco tempo depois, pude perceber que realmente era isto que eu queria fazer pelo resto de minha vida, ensinar matemática. No entanto, ao longo de minha graduação licenciatura plena em matemática, tive um grande número de disciplinas, as quais podemos dividir em quatro grandes grupos, matemática pura, educação, história e matemática aplicada. Ao cursar as disciplinas voltadas à matemática pura, disciplinas como álgebra linear e análise real, senti que tinha afinidade com esta área e assim vi uma oportunidade de seguir este caminho. Ao terminar o terceiro ano do meu curso de licenciatura plena em matemática, me inscrevi para o curso de verão da Universidade de São Paulo (USP) nas disciplinas de Álgebra Linear, Análise Infinitesimal e Frações Contínuas, fiz os três cursos que adorei e fui aprovado em todos eles. No ano seguinte participei do curso de verão da Universidade de Campinas (UNICAMP) na disciplina de Álgebra, que realizei com muita satisfação.

Vale ressaltar, que apesar da aprovação nos cursos citados, senti que não era o caminho da matemática pura que gostaria de seguir, mesmo gostando das disciplinas, minha paixão era a educação e meu plano era seguir a carreira de docência no ensino superior.

Ao me decidir então pela carreira de professor universitário, busquei fazer uma especialização e assim me matriculei na Universidade Federal de Lavras, onde realizei minha especialização em Matemática e Estatística, sendo que paralelo a este curso busquei informações sobre o processo seletivo do mestrado em Educação Matemática da Universidade Federal do Mato Grosso do Sul (UFMS), de forma que este episódio será melhor descrito a seguir.

## 1.1 Em busca de uma formação para a pesquisa

Nesse tópico tentei relatar de forma sucinta como ocorreu a minha aproximação com pesquisas em geral, e como culminou na problemática que motivou a escrita dessa dissertação. Inicialmente o sonho de lecionar, a vivência prematura como docente me levou a observar a necessidade de pesquisas relacionadas à educação e em particular a Educação Matemática.

Como já contei anteriormente nesse trabalho, minha formação básica se deu na rede pública de ensino, assim como, a primeira experiência profissional como professor. Nessa minha atuação pude vivenciar inúmeras dificuldades, tanto pela falta de experiência de minha parte, quanto pela desmotivação dos alunos e também a falta de materiais para as aulas.

No que se refere as minhas dificuldades, acredito que certamente estavam relacionadas principalmente à inexperiência. Quanto a isto, o acontecimento que mais marcou foi quando me designaram para analisar algumas coleções de livros do ensino fundamental e fazer a escolha de uma delas para a escola onde lecionava. De um lado a responsabilidade de decidir qual a coleção seria utilizada por centenas de alunos desta escola durante quatro anos, do outro lado, um jovem professor com pouco conhecimento adquirido que acabara de concluir sua licenciatura. Após esta experiência ficou claro para mim que eu deveria estudar mais e um tema que naquele momento seria importante, era análise de livros. Neste mesmo período fui convidado por um ex-professor da universidade a frequentar um grupo de estudo. Este grupo por sua vez é coordenado pelo professor Dr. Luiz Carlos Pais, e recebe o nome de Grupo de Pesquisa em História da Educação Matemática Escolar. Ao participar das reuniões aprendi muito sobre as teorias francesas, em particular a Teoria Antropológica do Didático, proposta por Yves Chevallard e sobre a história da educação escolar brasileira. O grupo tem como objetivo pesquisar aspectos históricos, didáticos e epistemológicos relativos ao ensino da matemática escolar e suas relações com as práticas educativas associadas à Educação Matemática.

Enfim, o grupo foi a porta de entrada para meu engajamento frente à busca de uma pesquisa, certamente ele me incentivou a buscar o mestrado em Educação Matemática, pois pude perceber que assim como eu, existiam vários professores de matemática com dificuldades em sala de aula.

Em função da trajetória aqui descrita, fui levado a direcionar esta pesquisa em torno da Educação Matemática, em particular focalizei o domínio de estudo da Álgebra. Já que este apresenta um índice insatisfatório nas avaliações externas, conforme afirmação dos PCN's que declaram: "Nos resultados do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica SAEB, por exemplo, os itens referentes à Álgebra raramente atingem o índice de 40% de acerto em muitas regiões do país." (BRASIL, 1998, p.116). Mesmo este domínio de estudo sendo considerado pelo próprio documento como sendo "(...) bastante significativo para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização, além de lhe possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para resolver problemas" (BRASIL,1998, p.116).

Inserido nesse domínio de estudo, optamos em enfatizar nosso estudo no setor dos sistemas de equações do primeiro grau com duas equações e duas incógnitas.

Assim, na busca de uma questão pela qual direcionaríamos nossos esforços e com intenção de contribuir com o processo de ensino e aprendizagem da matemática, optamos realizar uma análise de livro didático, porque, acreditamos que o livro didático é para os professores uma fonte muito importante no processo de ensino e aprendizagem, é também para os alunos uma fonte de consulta, uma vez que na maioria deles os conceitos são apresentados de forma organizada. Podemos observar também que o livro didático é utilizado em quase todas as escolas, tanto privada como pública.

Por conta da necessidade de estreitarmos nossas observações acerca dos livros didáticos, escolhemos o ensino fundamental, uma vez que acreditamos ser a base do ensino, é o que sustenta toda a torre a ser construída. Torna-se necessário, ainda, aprofundarmos em um determinado setor da matemática, escolhemos então Sistemas de Equações do Primeiro Grau com duas Equações e duas incógnitas, encontrados nos livros do 7º ano.

Realizadas estas delimitações, a pesquisa gira em torno do seguinte objeto: **O estudo de sistemas de equações do primeiro grau em livros didáticos utilizados em escolas brasileiras.** Diante desse objeto de estudo traçamos um objetivo principal que expressamos da seguinte forma: Analisar como era proposto o ensino de Sistemas de Equações do Primeiro Grau em livros didáticos utilizados na primeira república do Brasil (1890-1930), e como é proposto hoje nos livros didáticos destinados aos anos finais do ensino fundamental.

Na necessidade de traçar um caminho a ser percorrido para alcançarmos o objetivo principal descrito anteriormente, delineamos os seguintes objetivos específicos: Em primeiro lugar pretendemos conhecer o estatuto atribuído ao estudo de sistemas de equações nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática, no Guia do Livro Didático e nas leis e programas do período (1890 – 1930); em seguida, caracterizamos as estratégias de ensino de sistemas de equações do primeiro grau em livros didáticos de matemática utilizados no ensino secundário brasileiro do período de 1890 a 1930 e finalmente é nossa intenção investigar aspectos matemáticos e didáticos propostos para o ensino de sistemas de equações em livros didáticos contemporâneos. Passaremos a descrever cada um desses objetivos específicos.

Em nosso entendimento, a escolha dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) como uma fonte de dados da pesquisa se justifica, em primeiro lugar, por ser um documento nacional que serve como referencial curricular para todo o país, em segundo lugar ele serve como um dispositivo didático para os professores e ainda pode ser um instrumento útil no planejamento das aulas. Já para nós será um instrumento no auxílio à análise dos livros didáticos.

A escolha dos PCN's como fonte de dados, justifica-se também, pelo fato de entendermos que esse documento recomenda adaptações metodológicas no que tange aos conteúdos, e leva ainda em consideração as características sociais e econômicas de cada região. Sendo assim; acreditamos em uma forte influência do documento sobre os autores de livros didáticos, o que certamente reflete em suas obras. Assim encontramos no próprio documento uma referência de sua elaboração que diz o seguinte:

> Os Parâmetros Curriculares Nacionais foram elaborados procurando, de um lado, respeitar diversidades regionais, culturais, políticas existentes no país e, de outro, considerar a necessidade de construir referências nacionais comuns ao processo educativo em todas as regiões brasileiras. Com isso, pretende-se criar condições, nas escolas, que permitam aos nossos jovens ter acesso ao conjunto de conhecimentos socialmente elaborados e reconhecidos como necessários ao exercício da cidadania. (BRASIL, 1998, p.05).

Outro documento que serviu como fonte de dados de nossa pesquisa, foi o Guia do Livro Didático, que se justifica por ser o resultado de um trabalho de forte credibilidade entre os educadores. As resenhas contidas neste documento são elaboradas por professores de diversas instituições educacionais de várias regiões do país, e seu objetivo é oferecer subsídios para os educadores escolherem o livro didático.

Enfim, as leis e programas estão inseridos em nosso conjunto de fontes de dados, pois se justificam primordialmente por serem documentos oficiais que direta ou indiretamente conduziram os autores a escreverem seus livros, os que foram destinados ao ensino secundário brasileiro no período aqui posto em questão. No que se refere ainda aos programas de ensino oficiais, são eles que explicitam os conteúdos que eram propostos no ensino secundário além de mostrar a ordem em que eram ensinados.

Em seguida, temos como segundo objetivo específico, caracterizar as estratégias de ensino de sistemas de equações em livros didáticos de matemática utilizados no ensino secundário brasileiro no período de 1890 – 1930. Dessa forma entendemos que será possível identificar e analisar como era proposto o ensino desse conteúdo na passagem de Império para a República. Dando continuidade a esse objetivo, temos como terceiro e último, que é investigar os aspectos matemáticos e didáticos propostos para o ensino de sistemas de equações em livros didáticos contemporâneos, consequentemente nossa intenção é identificar e descrever os aspectos que perduraram ao longo do tempo, assim como, identificar mudanças que ocorreram no processo de ensino do conteúdo de Sistemas de Equações do Primeiro Grau.

Cabe nesse momento, levantar três questões referentes a nosso objeto de pesquisa: a primeira é por que seria este objeto merecedor de uma pesquisa? A segunda, qual a necessidade de pesquisar em livros antigos e em livros contemporâneos? E por fim, por que o período de 1890-1930 e o salto para o período contemporâneo?

Inicialmente justificamos a escolha do conteúdo de Sistemas de Equações do Primeiro Grau pelo fato do mesmo estar inserido na disciplina de Matemática, em particular no campo da álgebra, campo este que avaliações do SAEB vêm mostrando ter uma defasagem muito grande. Assim, nossa intenção é de colaborar com este campo da matemática realizando um estudo detalhado desse conteúdo, uma vez que, o tempo de dois anos do mestrando não nos possibilita fazer o estudo semelhante de um número maior de conteúdos. Outro ponto que chamou a atenção na escolha do conteúdo é que os sistemas de equações aparecem explicitamente em todos os programas de ensino do Colégio Pedro II no período compreendido de 1890 a 1930 e ainda, persiste nos livros didáticos contemporâneos. Ainda justificando a escolha desse conteúdo observamos no banco de teses da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) a presença de apenas dois trabalhos, trabalhos que foram incluídos no referencial teórico desse trabalho. Isso nos leva a acreditar que o conteúdo de Sistemas de Equações do Primeiro Grau é um tema pouco pesquisado, o que nos levou a escolhê-lo para desenvolver a pesquisa.

Ainda respondendo às questões acima mencionadas, em particular a segunda, acreditamos fielmente que para compreender questões dos dias de hoje devemos inicialmente entender o passado. Isso nos levou a fazer um estudo de como era proposto o ensino dos Sistemas de Equações do Primeiro Grau em um determinado período da história, e com o desenvolvimento desse estudo será possível identificar e descrever elementos que perduram por vários anos e também aqueles que se perderam. Assim como elementos que continuam até hoje sendo utilizados, e que consideramos significativos do ponto de vista educacional, pois, entendemos que apesar das mudanças ocorridas no decorrer do tempo eles persistiram.

A terceira e última questão remete-nos à vertente do recorte histórico realizado na pesquisa. Não devemos ser ingênuos a ponto de acreditar que, de forma geral, esse recorte não seja necessário, entretanto, a intenção inicial era de começar esse estudo no ano de 1890, finalizando no ano deste trabalho (2010), porém notamos logo a impossibilidade de percorrer todos esses anos, visto que a duração dessa pesquisa é de dois anos apenas. Dessa forma optamos por realizar um recorte de quatro décadas iniciando em 1890 finalizando em 1930, denominado como Primeira República, o que certamente nos remete à ideia de ser o período primordial da educação básica brasileira como no período da República, haja vista ser a transição de uma época para outra, o que leva a colocar em questão a educação imperial e assim construir um sistema educacional republicano.

No próximo capítulo escrevemos sobre o referencial teórico que utilizamos para o desenvolvimento desta pesquisa, sendo ele formado pela Teoria Antropológica do Didático, algumas reflexões a respeito das escritas de André Chervell e também de algumas pesquisas que realizaram o estudo do ensino da álgebra, que apresentamos a seguir.

# 2 REFERENCIAL TEÓRICO DA PESQUISA

Conforme foi enunciado nessa pesquisa, nosso objeto trata do estudo de sistemas de equações do primeiro grau em livros didáticos utilizados em escolas brasileiras. Contudo, temos como fontes, PCN, PNLD – 2008, programas do Colégio Dom Pedro II e livros didáticos. Para desenvolver essa proposta, recorremos a Teoria Antropológica do Didático (TAD), proposta por Yves Chevallard. Em outras palavras, nosso objetivo com esse capítulo é descrever os pontos que acreditamos serem necessários e suficientes dessa teoria para no decorrer do trabalho, mais precisamente no capítulo de análise, aplicar esses conhecimentos aqui descritos na análise das fontes acima citadas.

## 2.1 Teoria Antropológica do Didático

Nossa intenção nos próximos parágrafos é descrever pontos que consideramos ser relevantes em nossa pesquisa, quanto à Teoria Antropológica do Didático, e a partir desse momento utilizarei a abreviação TAD. Consequentemente, pretendemos expor de forma coerente os elementos pertinentes ao nosso objeto de estudo, "O estudo de sistemas de equações do primeiro grau em livros didáticos utilizados em escolas brasileiras". Nesse momento cabe ressaltar que em nosso entendimento, a teoria proposta por Chevallard, TAD admite ser a praxeologia o produto de uma construção social e com uma finalidade específica: estudar matemática. Esta por sua vez, leva em conta o conhecimento produzido socialmente e, embora tenha surgido no contexto específico da didática da matemática, tem aplicação no contexto de estudo de outras disciplinas. É uma teoria do didático que considera que há existência de produção ou apropriação do conhecimento sempre que houver um problema, de qualquer natureza, cuja solução exija que se construa um conhecimento ou se aproprie de um já existente. De acordo com Chevallard enquanto não houver intenção de estudar não há didático, o didático nasce quando uma pessoa quer aprender e este querer vira ação.

Em outras palavras, a TAD se constitui num modelo de análise do ensino e aprendizagem da matemática a partir do próprio conteúdo, uma vez que o problema da dificuldade de aprendizagem desse componente curricular ou disciplinar, segundo esse ponto de vista, não está no sujeito que ensina e nem no sujeito que aprende, e sim no próprio conhecimento.

A Teoria Antropológica do Didático, descreve o conhecimento matemático na forma de organizações matemáticas e de organizações didáticas. A organização matemática é a realidade matemática que pode ser construída a partir de um tema matemático escolhido, refere-se ao objeto de estudo. A organização didática, por outro lado, refere-se à forma de realização do estudo desse tema.

Nesse instante, cabe a nós, delinearmos nossa escrita em dois tópicos inseridos na TAD, assim descrevemos sobre os seguintes itens: primeiro sobre Atividades Matemáticas e por fim Organização Praxeológica. Ressalto aqui que, inserido nessa última, encontramos os tipos de tarefa, as técnicas, as tecnologias e as teorias, a linguagem e os momentos de estudos.

### 2.1.1 Atividade Matemática

Em que pesem as ideias sustentadas por Chevallard et al (2001, p.45) “não podemos abordar o tema do ensino e da aprendizagem de matemática sem nos perguntarmos, ao mesmo tempo, o que é, em que consiste e para que serve fazer matemática.” Com relação a esta afirmação vamos inicialmente lembrar que o referido autor infere que não existe apenas a matemática escolar e sim inúmeras matemáticas contidas em nossa sociedade. Diante desta existência de diferentes matemáticas o autor indica que uma determinada pessoa não consiga viver individualmente sem a necessidade da matemática. Entretanto, vivemos em uma sociedade na qual certamente existem pessoas capazes de produzir matemática assim como existem aquelas que não a produzem, porém, direta ou indiretamente todos utilizam esta matemática produzida, mesmo que não reconheçam suas próprias necessidades matemáticas.

De acordo com essa observação, nota-se que a matemática na escola é vinculada à sua presença implícita ou explicita na sociedade e, portanto, é de suma importância que as necessidades matemáticas do cotidiano devem ser ensinadas na escola. No que implica esse item, recorremos a Chevallard et al (2001, p.45) que diz “... o ensino formal é imprescindível em toda aprendizagem matemática e que a única razão pela qual se aprende matemática é porque é ensinada na escola.” De acordo com esta afirmação é plausível concluir que transforma-se o ensino escolar da matemática simplesmente no conhecimento em matemática, portanto, passando a ser vista apenas como um valor escolar e não como uma disciplina que se encontra diariamente aplicada no cotidiano das pessoas.

Desse conjunto de fatores, decorre que o processo de ensino e aprendizagem da Matemática, de acordo com Chevallard et al (2001, p. 46) “São aspectos específicos do processo de estudo da matemática”, nesse ponto, acreditamos que a palavra estudo engloba não só o trabalho matemático desenvolvido pelos alunos, assim como o trabalho do próprio matemático que se encontra diante de problemas em níveis diferenciados.

Na mesma vertente temos que identificar o termo didático. Na intenção de esclarecer melhor recorremos às palavras de Chevallard et al (2001, p.46) que enuncia como “... aquilo que está relacionado com o estudo e com a ajuda para o estudo da matemática.” É inquestionável, portanto, a importância da didática na matemática, pois, devemos notar que ela está intrinsecamente ligada aos processos ensino e de aprendizagem e isto nos leva a considerar que não importa se está ligada a uma aplicação, a aprender ou ensinar matemática ou até mesmo na criação de uma nova matemática. No entanto, “A didática da matemática é definida, portanto, como a ciência do estudo da matemática” definição esta dada por Chevallard et al (2001, p.46) e que neste trabalho adotaremos como referência quando citarmos Didática da Matemática.

Todavia, quando voltamos às nossas experiências de vida acreditamos parecer simples e claro o que é matemática ou até mesmo parece fácil identificar se uma pessoa está ou não fazendo matemática. Entretanto Chevallard et al (2001, p.54) apresenta três aspectos da atividade matemática e afirma que “Não é possível traçar uma fronteira clara e precisa que separe de uma vez por todas as atividades matemáticas das não-matemáticas.” No entanto, podemos destacar alguns elementos característicos encontrados na atividade matemática.

Chevallard aponta para a ideia de que a atividade matemática possui três aspectos: Utilizar matemática conhecida; Aprender (e ensinar) matemática; Criar uma matemática nova.

Nós entendemos que o primeiro aspecto citado está abrange a utilização conhecimentos matemáticos já adquiridos em problemas a serem resolvidos, por outro lado, podemos chegar a tal ponto em que haja a necessidade de recorrer a novas ferramentas para resolver um determinado problema, pois, nosso conhecimento é limitado. Nesse momento, entramos no aspecto do aprender e ensinar matemática. Um pouco mais distante desse sentido, e mais ligado aos pesquisadores encontramos o terceiro grande aspecto, ligado à criação de novas ferramentas e conteúdos matemáticos.

### 2.1.2 Organizações Praxeológicas

É oportuno iniciar esse tópico, realizando uma decomposição da palavra Praxeologia, a qual é formada por dois termos gregos *práxis* e *logos*, que têm como significados, respectivamente prática e razão. Entretanto, quando nos referimos a uma prática devemos observar à que instituição está vinculada (Instituição para Chevallard pode ser um livro, uma escola, uma família, etc.), diante desta vinculação existe a necessidade de um discurso que justifica (da razão) a prática ali realizada.

Esses aspectos acima citados constituem os níveis; práxis e logos que estão intrinsecamente ligados, o processo dialético entre eles permite formar a Praxeologia Matemática. Temos ainda na essência da noção de praxeologia duas outras noções interligadas, são elas: tipo de tarefa e tarefa. Para construir a noção de praxeologia deve existir pelo menos uma técnica para resolver as tarefas do mesmo tipo. Para explicar e fundamentar esta técnica é necessário ter uma tecnologia, que por sua vez também é explicada por uma teoria matemática.

Nota-se no parágrafo acima que a organização praxeológica é formada por uma quádrupla, tipo de tarefa, técnica, tecnologia e teoria representadas por Chevallard et al (2001) da seguinte forma $[T, \tau, \theta, \Xi]$, representação que também utilizaremos nesse trabalho. No que se refere ao tipo de tarefa (T), devemos observar, que para um determinado tipo de tarefa existem infinitas tarefas (t) associadas a ele. Os próprios autores Chevallard et al (2001) sugerem a nomenclatura de conjunto para representação desse fato, sendo assim, se $t_1$ é uma tarefa do tipo de tarefa T podemos representar essa relação da seguinte forma $t_1 \in T$, o que exemplifica melhor a existência de um conjunto (T) com infinitos elementos pertencentes a ele (t). Observa-se que, associado a esse tipo de tarefa, temos uma técnica ($\tau$) para sua resolução, consequentemente deve existir uma tecnologia ($\theta$) que, de acordo com autor, é um discurso fundamentado sobre um objeto, que neste caso justifica e permite entender uma determinada técnica. Analogamente a teoria ($\Xi$) justifica e valida à tecnologia utilizada.

Quando tomamos como base um determinado tipo de tarefa (T), devemos observar que deve existir pelo menos uma técnica ($\tau$) que resolva as tarefas (t) pertencentes a esse tipo de tarefa (T). Entretanto, pode ser que tenha mais de uma técnica, visto que, os autores afirmam: toda técnica ($\tau$) é limitada, em outras palavras, toda técnica tem um alcance, ou seja, nenhuma técnica é absoluta.

Chevallard et al (2001) ao falar da quádrupla $[T, \tau, \theta, \Xi]$ a divide em dois blocos distintos, no qual a dupla tipo de tarefa e técnica $[T, \tau]$ forma o bloco prático-técnico a segunda dupla, tecnologia e teoria $[\theta, \Xi]$ o bloco teórico-tecnológico. O primeiro bloco é denominado o bloco do saber-fazer e o segundo do saber, entretanto, o autor explicita a ideia que ambos estão intrinsecamente ligados, pois, não pode haver saber-fazer sem que haja o saber, e analogamente, não pode existir o saber sem que exista o saber-fazer.

Enfim, nessa dissertação buscamos retirar as tarefas referentes a sistemas de equações do primeiro grau dos livros didáticos analisados, em seguida, agrupá-los em tipos de tarefas descrevendo as técnicas presentes ou induzidas para sua resolução, e ainda, extrair as tecnologias e teorias nas quais os autores se basearam para sua justificativa.

Em seguida buscamos fazer uma distinção entre as praxeologias matemáticas e as praxeologias didáticas, em outras palavras, pretendemos mostrar ao leitor, pontos referentes ao conteúdo de matemática, assim como pontos que se referem às formas de ensinar esses conteúdos. Em particular, procuramos destacar as organizações matemáticas (OM) e organizações didáticas (OD) propostas pelos autores para o ensino e aprendizagem de sistemas de equações do primeiro grau. Nas palavras de Gascón (2003):

> Para elaborar uma OM necessitamos de uma OD que possibilita e administra o processo de estudo [...] em princípio, a atividade de estudo pode ser considerada como emergente de uma OM, também deve considerar-se como produtora de saber matemático e, portanto, de certas OM. O matemático e o didático aparecem assim como duas dimensões da realidade duplamente interdependentes. O matemático, isto é, o relativo ao estudo das matemáticas, supõe a existência da OM, pois contribui a sua produção. As OM são, por sua vez, o objeto e o produto da atividade de estudo. (GASCÓN, 2003, p.18)

Logo, encontramos na TAD uma distinção no conjunto dos elementos representativos nas organizações matemáticas e organizações didáticas em dois tipos, objetos ostensivos e objetos não-ostensivos. O primeiro está caracterizado em forma de elementos concretos e podem ser manipulados e de um ponto sensorial articula-se a qualquer um dos sentidos humanos, visão, audição, paladar, tato e olfato. Quanto ao segundo são aqueles considerados como abstratos, tais como, ideia, crenças, intuições e também os conceitos matemáticos.

As estratégias propostas por Chevallard nos auxiliam na intenção de organizar os objetos ostensivos e os não ostensivos utilizados pelos autores no ensino de matemática em diferentes registros. Assim, podemos falar dos registros de diálogo de personagens, registro algébrico, registro na língua materna, registros fotográficos, registros dos desenhos, registro de esquemas gráficos, registros gestuais e a articulação entre os registros. Ressaltamos aqui, que estes registros foram classificados de acordo com nosso entendimento, e que até o presente momento não encontramos em nossas leituras na TAD uma definição explícita e sim algumas indicações feitas pelo autor.

Cabe nesse ponto, lembrar que existe uma dialética entre objeto ostensivo e objeto não-ostensivo, isto quer dizer, eles evoluem ao mesmo tempo, não existe um que apareça primeiro em relação ao outro eles estão sempre intrinsecamente ligados. Ressaltamos nesse ponto, que no capítulo de análise desse trabalho, buscamos identificar e classificar, de acordo com nosso entendimento, os registros dos quais os autores lançam mão para propor o ensino de sistemas de equações algébricas lineares em seus livros.

Ainda nos referindo à TAD, nota-se a inferência que a organização praxeológica se articula com base na quádrupla (Tipo de tarefa, Técnica, Tecnologia e Teoria $[T, \tau, \theta, \Xi]$) já citada. Dentro desta organização destacam-se seis momentos didáticos ou momentos de estudo. Os autores, Chevallard et al (2001), explicam que a estrutura temporal do processo de estudo não está necessariamente ligada à noção de momento, e que um momento de estudo se realiza geralmente diversas vezes sob a forma de episódios distribuídos no tempo. Diante disso não devemos confundir a primeira etapa da aula (por exemplo os cinco primeiros minutos), como sendo o primeiro momento de estudo. De acordo com o autor, os momentos de estudo são cumpridos não levando em consideração se há benefício maior para algum deles, ou defasagem em outro. Devemos inicialmente observar que estes momentos têm uma finalidade funcional, e não nos preocuparmos com a ordem em que eles ocorrem. A seguir descreveremos os seis momentos de estudo.

Primeiro momento, chamado momento do encontro com um tipo de tarefa, este realiza-se quando o aluno entra em contato com um tipo de tarefa pela primeira vez. Um encontro desta natureza pode ocorrer de diversas maneiras, por intermédio de uma narração, uma indagação sobre o mundo, etc. Chevallard infere que para este encontro não ser superficial é preciso que o indivíduo reencontre este tipo de tarefa em questão diversas vezes.

Exploração de um tipo de tarefa e elaboração de uma técnica é o segundo momento, o autor considera este momento muito importante porque é por meio da exploração de um tipo de tarefa e da elaboração de uma técnica que a pessoa pode estar no coração de uma atividade matemática. Em outras palavras, este é o momento no qual o aluno observa o tipo de tarefa proposto e busca internalizá-lo, tentando assim encontrar uma ferramenta para solucionar o problema. É o momento em que ele busca reunir os conhecimentos adquiridos até então para construir um caminho que ele julgue correto, de forma a culminar na resposta do problema proposto.

O terceiro momento é aquele ligado à constituição de um entorno tecnológico teórico, de acordo com o autor, de maneira geral este momento está em estreita relação com cada um dos outros momentos. Desde o encontro com um tipo de tarefa, existe uma ligação com o entorno tecnológico teórico elaborado anteriormente ou com sinais de um entorno a ser criado e que se tornará mais preciso quando estiver em relação dialética com a emergência de uma técnica.

No quarto momento, verifica-se o trabalho da técnica, ele tem por finalidade desenvolver certo domínio na aplicação da mesma, e por vezes até mesmo aprimorá-la de maneira que ela possa ser mais confiável na resolução dos problemas pertinentes. O desafio para melhorar uma técnica é que para fazer isso é preciso ampliar a tecnologia elaborada, este momento também permite colocar em prova o alcance da técnica, permitindo que a compreensão de que toda técnica é limitada. A este propósito relembramos aqui o exemplo fornecido por Chevallard et al (2001), quando descreve a lista do professor Luiz contendo 35 exercícios com um único enunciado, solicitando que os alunos eliminassem os radicais dos denominadores das expressões. Quase todos os exercícios desta lista podiam ser resolvidos com uma técnica (expressão conjugada). Esse exemplo ilustra o momento de estudo do trabalho com a técnica, mas pelo fato do professor ter incluído alguns exercícios que não eram resolvidos com esta técnica, trata-se também da presença do momento de avaliação da técnica ou da oportunidade dos alunos aprimorarem a técnica.

O quinto momento é o da institucionalização existente, o objetivo é apresentar, de maneira precisa, em que consiste a organização matemática. É neste momento que se busca diferenciar, de alguma forma, os elementos que serão integrados de maneira definitiva nessa organização, de acordo com a cultura de uma determinada instituição escolar.

O sexto momento é o de validação, diretamente articulado com o da institucionalização. Para Chevallard trata-se de avaliar, não uma pessoa, mas sim, de interrogar a própria técnica e diante disto, verificar o alcance da técnica, se ela é segura, robusta, confiável, etc.

Os momentos de estudo aqui anunciados terão um quadro funcional nessa pesquisa, quando necessário classificar a vertente na qual os autores analisados se encontram. Descrevo a seguir, o suporte que recorremos para tal caracterização, em outras palavras, a fim de caracterizar as organizações didáticas, ou seja, as maneiras de organizar o processo de ensino e aprendizagem da matemática nos livros didáticos, recorremos ao artigo "A necessidade de utilizar modelos na didática da matemática" de Josep Gascón (2003), que explicita as organizações didáticas *Clássicas, Empíricas* e *Construtivistas.*

Em primeiro lugar, vamos falar das organizações clássicas, esta por sua vez, combina os momentos de constituição do entorno tecnológico-teórico e do trabalho da técnica. Conforme (GASCÓN, 2003, p.20), esta organização se caracteriza "[...] pela trivialização da atividade de resolução de problemas e por considerar que o ensino das matemáticas é um processo mecânico totalmente controlável pelo professor." Intimamente ligada a esta organização didática encontramos as OD teoricistas e tecnicistas. A primeira delas tem como principal eixo a concepção do saber matemático já cristalizado, acabado em "teorias". Fica claro que para o teoricismo, o ensinar e aprender matemática se resume em ensinar e aprender teorias. Em síntese:

> A característica essencial do *teoricismo* a situarmos, portanto, é que ignora absolutamente os processos da atividade matemática como tal e, em conseqüência, não concede nenhuma importância – epistemológica nem didática – a *gênese e ao desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos.* Este prejuízo *euclidianista* que, contra toda evidência empírica, pressupõe que o processo de ensino das matemáticas é um *processo mecânico e completamente controlável pelo professor,* [...] (GASCÓN, 2003, p.22)

Ao lado do teoricismo, encontramos o tecnicismo que enfatiza os aspectos elementares do momento de trabalho com a técnica. Esta organização didática, parte exclusivamente de técnicas algorítmicas a fim de propor unicamente tarefas que servem para treinar essa técnica, findando em seu domínio. Nota-se então, que tanto o teoricismo quanto o tecnicismo, se explicam como um processo de ensino mecânico e trivial, totalmente controlável pelo professor. Conforme (GASCÓN, 2003), o teoricismo concebe o aluno como uma "caixa vazia" que deve ser preenchida ao longo do processo de ensino e aprendizagem, enquanto o tecnicismo, considera o aluno como um "robô" que se aperfeiçoa através de tarefas repetitivas.

Em outra vertente, encontramos as organizações didáticas empiristas que são aquelas que buscam unir o momento exploratório com o momento de trabalho com a técnica. Essa organização considera que aprender matemática é um processo indutivo baseado na imitação e na prática. Inserida nessa organização encontramos a OD modernista e a OD procedimentalista, em que, a primeira delas explicita que a exploração deve ser "livre", inclusive as teorias e as técnicas matemáticas, afim de serem construídas pelos alunos e não repetidas, em outras palavras, sejam técnicas originais dos alunos. A segunda é caracterizada pela sua forma de organizar o estudo da matemática, e tem como principal objetivo no que se refere a o processo didático o domínio de sistemas estruturados de técnicas algorítmicas.

Quando (GASCÓN, 2003) se refere à corrente das OD construtivistas, explicita as OD do tipo construtivismo psicológico e OD do tipo construtivismo matemático. A primeira delas, relaciona fundamentalmente duas dimensões diferentes da atividade matemática, o momento exploratório e o momento tecnológico-teórico, e dá uma importância maior ao papel da atividade de resolução de problemas, mesmo que esta seja apenas um instrumento da gênese dos conceitos. A segunda, ao organizar o estudo da matemática considera o aprender matemática como um processo de construção de conhecimentos matemáticos, e ainda, o objetivo da atividade matemática gira em torno da obtenção de conhecimentos relativos a um sistema modelizado que em princípio pode ser tanto matemático como extramatemático.

Na intenção de sintetizar o que escrevemos, segue o seguinte quadro:

| Modelo | Momentos de estudo | Característica Geral | OD | Momentos de Estudo | Consideração |
|---|---|---|---|---|---|
| **Clássica** | $M_3$, $M_4$ e $M_5$ | Trivialização da atividade de resolução de problemas; Considera que o ensino das matemáticas é um processo mecânico totalmente controlável pelo professor. | *Teoricistas* | $M_3$ e $M_5$ | Ensinar e aprender matemática como ensinar e aprender teorias |
| | | | *Tecnicismo* | $M_4$ | Ensinar e aprender matemática como ensinar e aprender técnicas. |
| **Empírica** | $M_2$, $M_4$ e $M_5$ | Considera que aprender matemática é um processo indutivo baseado na imitação e na prática. | *Modernismo* | $M_2$ | Identifica aprender matemática com aprender a atividade exploratória de problemas triviais. |
| | | | *Procedimentalismo* | $M_4$ | Domínio de sistemas estruturados de técnicas algorítmicas. |
| **Construtivista** | $M_2$ e $M_3$ | Ensinar matemática como possibilitar que os estudantes construam os conhecimentos matemáticos | *Construtivismo Psicológico* | $M_2$ e $M_3$ | Dá importância ao papel da atividade de resolução de problemas, embora só seja como instrumento das gêneses dos conceitos. |
| | | | *Construtivismo Matemático* | $M_2$ e $M_3$ | Interpreta aprender matemática como um processo de construção de conhecimentos matemáticos |

Tabela 01 – Organização Didática

**Legenda:**
OD – Organização Didática.
$M_1$ – Momento do primeiro encontro ou do reencontro.
$M_2$ – Momento exploração do tipo de tarefa e elaboração de uma técnica.
$M_3$ – Momento constituição do entorno tecnológico-teórico.
$M_4$ – Momento de trabalho da técnica.
$M_5$ – Momento da institucionalização.
$M_6$ – Momento da avaliação.

## 2.2 Contribuições de Chervel para nosso referencial teórico.

Outro teórico que nos dá suporte é André Chervel, considerado como pioneiro do campo de pesquisa denominado "história das disciplinas escolares". É pesquisador do Service d'historie d l'Educacion – Institut National de Recherche Pedagogique situado em Paris na França, escreveu um texto, traduzido para o português em 1990 com o seguinte título: "História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa". Nós nos remetemos a este texto para descrevermos os pontos que acreditamos ser relevantes à nossa pesquisa.

Mesmo observando que a história do ensino tem sido objeto de estudo ao longo do tempo, nota-se que as pesquisas no âmbito do ensino primário ou secundário limitou-se a trabalhos pontuais. A fim de se elevar ao nível de sínteses mais amplas, o historiador depara-se com algumas noções que necessitam de esclarecimento. Segundo Chervel (1990) dentre essas noções encontramos a de "disciplina escolar" e cabe ao historiador defini-la ao mesmo tempo em que faz a sua história.

No século XIX o termo "disciplina" e a expressão "disciplina escolar" conforme Chervel (1990, p. 178), designavam "a repressão das condutas prejudiciais à boa ordem". Nota-se então que, nessa época, essa palavra não tinha nenhuma relação com conteúdos programáticos. Ela passa a ter o sentido, de hoje, após a I Guerra Mundial.

Ao utilizarmos nessa pesquisa as palavras "disciplina" e "conteúdo de ensino", usamos com a mesma concepção utilizada por Chervel (1990):

> [...] os conteúdos de ensino são conceitos concebidos como entidades sui generis, próprios da classe escolar, independentes, numa certa medida, de toda realidade cultural exterior à escola, e de uma eficácia que elas não parecem dever a nada além delas mesmas, quer dizer à sua própria história. [...] Uma 'disciplina', é igualmente, para nós, em qualquer campo que se a encontre, um modo de disciplinar o espírito, que quer dizer de lhe dar os métodos e as regras para abordar os diferentes domínios do pensamento, do conhecimento e da arte. (CHERVEL, 1990, p. 180)

Ainda segundo este autor, não devemos ser ingênuos em considerar a história das disciplinas escolares como sendo uma parte pouco estudada na história do ensino, que ao longo do tempo, viria a acrescentar alguns capítulos a este tema, haja vista que não se trata é apenas de completar uma lacuna. O que está em questão nesse ponto é a própria concepção da história do ensino.

Em síntese, o objeto de estudo da história das disciplinas escolares é a análise das finalidades às quais está proposto o ensino, com os reais resultados produzidos. Isso se confirma nas seguintes palavras:

> Trata-se então para elas de fazer aparecer a estrutura interna da disciplina, a configuração original à qual as finalidades deram origem, cada disciplina dispondo, sobre esse plano, de uma autonomia completa, mesmo se analogias possam se manifestar de uma para a outra. (CHERVEL, 1990, p. 187)

Nota-se que as finalidades do ensino escolar estão diretamente ligadas ao objeto de estudo das disciplinas escolares, e Chervel (1990) esclarece que o papel da escola não está limitado apenas aos exercícios das disciplinas escolares, no entanto, a educação dada e recebida nos estabelecimentos escolares é justamente a imagem que reflete as finalidades. Segue-se de um conjunto complexo que não se reduz aos ensinamentos explícitos e programados.

Outro ponto que nos interessa nos estudos realizados acerca das escritas de Chervel é a ideia de "vulgata", conforme o teórico, a primeira etapa da pesquisa de um historiador das disciplinas escolares, submete-se a estudar os conteúdos explícitos do ensino disciplinar, esse estudo deve, por sua vez, ter como fontes manuais, periódicos pedagógicos, planos de ensino dentre outros documentos, os elementos comuns as diferentes disciplinas caracteriza-se como "vulgata". A descrição e análise dessa vulgata conforme Chervel (1990), são as tarefas fundamentais do historiador de uma disciplina escolar. Com base neste teórico, nossa pesquisa, remete-se aos programas do colégio Pedro II no período compreendido entre 1890 e 1930, juntamente com as reformas escolares ocorridas nesse mesmo período, na intenção de caracterizar a vulgata presente no ensino de Álgebra. Essa análise encontra-se no quarto capítulo desse trabalho.

Ainda falando de "vulgata", é explicitado nos escritos de Chervel (1990), que esta por sua vez evolui ou se transforma, e quando uma nova vulgata toma o lugar da outra, um período de estabilidade se instala. Em outras palavras, existe um momento transitório entre uma vulgata, e a nova vulgata. No entanto, observa-se a presença simultânea das duas, a nova e a antiga, mais pouco a pouco a mais audaciosa torna-se preponderante o, e quando isso ocorre, instala-se então um período de estabilidade até que a próxima emirja retomando novamente esse processo.

Segundo Luiz Carlos Pais, uma vulgata representa o que existe de comum, em um dado momento histórico, em relação a uma disciplina escolar, sendo formada por conteúdos, objetivos, métodos e problemas que predominam como os elementos que devem ser utilizados pelo professor. Uma parte da vulgata aparece nos livros didáticos de uma determinada época, fazendo com que os mesmos tenham algo em comum ou que, de certa forma, sejam muito semelhantes uns com os outros. *(Notas de Aula 2008).*

Acreditamos que a vulgata, se caracteriza no momento de calmaria numa disciplina, é nesse momento que as sequências de conteúdos, as abordagens feitas pelos autores e os exercícios propostos ficam estabilizados e refletem nas produções dos livros didáticos. Isso ficará mais claro em nosso capítulo de análise quando buscamos mostrar essas semelhanças.

Quando nos remetemos à disciplina devemos observar que os conteúdos explícitos são o eixo central e os exercícios[2] são quase indispensáveis, no entanto, encontramos outros dois constituintes da disciplina, o gosto do aluno quanto às aulas e a prática do professor na motivação e na incitação dos alunos ao estudo. Conforme Chervel "[...] Sem o exercício e seu controle, não há fixação possível de uma disciplina. O sucesso da disciplina depende fundamentalmente da qualidade dos exercícios aos quais elas podem prestar." (1990, p.204)

Na intenção de fazer uma síntese, recorremos novamente às palavras de Chervel quando diz:

> A disciplina escolar é então constituída por uma combinação, em proporções variáveis, conforme o caso, de vários constituintes: um ensino de exposição, os exercícios, as práticas de incitação e de motivação e um aparelho docimológico, os quais, em cada estado da disciplina, funcionam evidentemente em estreita colaboração, do mesmo modo que cada um deles está, à sua maneira, em ligação direta com as finalidades. (CHERVEL, 1990, p. 207)

### 2.3 O estudo de sistemas de equações nos Parâmetros Curriculares e Guia do Livro Didático PNLD – 2008.

Para dar continuidade ao estudo do referencial teórico, não podemos nos distanciar de nosso objeto: O estudo de sistemas de equações do primeiro grau em livros utilizados em escolas brasileiras. O referencial para análise é a TAD, a partir da metodologia da análise do conteúdo. Enfim, nos baseamos nos Parâmetros Curriculares Nacionais e no Guia do Livro Didático PNLD 2008, para em primeiro lugar, realizar a escolha do livro contemporâneo a ser analisado, em segundo lugar, explicitar elementos significativos, para nós, que contemplem o processo de ensino e aprendizagem dessa parte da matemática.

---

[2] Exercício é toda atividade do aluno observável pelo mestre. (CHERVEL, 1990, p.204)

Conforme os PCN’s, a matemática é uma área de conhecimento que desempenha um papel decisivo, porque permite resolver problemas da vida cotidiana, tem inúmeras aplicações no mundo do trabalho, além de funcionar como instrumento essencial para a construção de conhecimentos em outras áreas curriculares.

Encontra-se também nos PCN’s que a matemática é componente importante da cidadania, haja vista que a sociedade utiliza cada vez mais recursos tecnológicos e conhecimentos científicos. Assim sendo, a matemática deve estar ao alcance de todos. Os PCN’s dão ênfase ao ensino da Álgebra, segundo o documento, situação-problema envolvendo a álgebra proporciona que seu ensino e aprendizagem ocorram de forma significativa, conforme PCN:

> O ensino de Álgebra precisa continuar garantindo que os alunos trabalhem com problemas, que lhes permitam dar significado à linguagem e às idéias matemáticas. Ao se proporem situações-problema bastante diversificadas, o aluno poderá reconhecer diferentes funções de Álgebra (ao resolver problemas difíceis do ponto de vista aritmético, ao modelizar, generalizar e demonstrar propriedades e fórmulas, estabelecer relações entre grandezas). (BRASIL, 1998, p.84)

Nessa mesma vertente, o estudo da Álgebra é bastante significativo quando nos referimos ao aluno, pois deve lhe proporcionar o desenvolvimento e o exercício da capacidade de abstração e generalização, além de lhe possibilitar a aprendizagem de uma poderosa ferramenta para resolver problemas. Ainda encontramos nos PCN’s que “(...) a atividade matemática escolar não é olhar para as coisas prontas, e definidas, mas a construção e apropriação de um conhecimento pelo aluno, que se servirá dele para compreender e transformar sua realidade” (BRASIL, 1998, p. 19)

Chevallard et al (2001), dentro da visão antropológica, entende que podemos pensar que vivemos individualmente sem a necessidade da matemática, mas esta crença só pode existir pelo fato de não vivermos sozinhos, mas em sociedade, na qual existem pessoas capazes de fazer matemática para as necessidades dos outros. Portanto, o fato de ensinar matemática na escola responde a uma necessidade que ao mesmo tempo é individual e social. Sendo assim, conforme esse autor, a presença da matemática na escola é consequência de sua presença na sociedade, logo as necessidades matemáticas que surgem nesse ambiente deveriam estar subordinadas às necessidades matemáticas da vida em sociedade.

Conforme o Guia de Livros Didáticos PNLD – 2008, o livro didático deve oferecer informações e explicações dos conhecimentos matemáticos que de alguma forma interferem e consequentemente sofrem interferências das práticas sociais do mundo contemporâneo e do passado. Este documento estabelece um conjunto de competências matemáticas a serem construídas no decorrer do Ensino Fundamental, através de conteúdos agrupados nos seguintes blocos: Álgebra; Geometria; Grandezas e Medidas; e Tratamento da informação. Com relação ao 'conjunto de competências' encontra-se no Guia de Livro Didático-2008, que elas não se realizam no vazio e sim por meio de saberes de diversos tipos, dos mais formais aos mais sistematizados, estes últimos são construídos no ambiente escolar. Adverte-se, ainda nesse mesmo documento, que as competências ali propostas não esgotam todas as possibilidades, sendo assim, podem e devem ser adaptadas em função das diversidades de cada contexto educacional. Observa-se também a importância de não encararmos as competências independentes umas da outras. Ainda conforme o Guia, enfatizamos que a expressão 'conteúdo matemático' é denominada como sendo *os conceitos, a relação de conceitos, os procedimentos e os algoritmos matemáticos*.

Ao considerarmos, por exemplo, a avaliação do SAEB, observamos as informações quanto ao baixo índice de desempenho dos alunos nos itens referentes à Álgebra. Esse documento propõe trabalhar com a álgebra a partir de observações em regularidades em tabelas e gráficos estabelecendo relações, ao invés de desenvolver este estudo apenas enfatizando as manipulações com equações e expressões de forma meramente mecânica. Para que isso ocorra às atividades algébricas propostas devem ajudar o aluno construir conhecimentos a partir de situações-problema que deem significados à linguagem, aos conceitos, procedimentos do tema da álgebra, e assim favorecendo o avanço do aluno quanto às diferentes interpretações das letras. De acordo com essa visão, acreditamos que nossa pesquisa em livros didáticos, ao observar as propostas dos autores para o ensino de sistemas de equações do primeiro grau, seja um ponto que vem ao encontro dessa temática.

## 2.4 Pesquisas sobre o Ensino de Álgebra

O ensino de álgebra tem sido, ao longo do tempo, objeto de estudo de diversos pesquisadores. Tal afirmação tem como base o banco de dados de teses e dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoas de Nível Superior (CAPES). Quando recorremos a esse banco de dados e buscamos informações com as palavras-chave “Ensino de Álgebra”, obtivemos indicações de 251 pesquisas[3]. Dentre esse total destacamos duas para compor essa parte do nosso trabalho. A escolha se deu por meio do tema abordado pelo pesquisador e do referencial teórico utilizado por este. A primeira é a dissertação da pesquisadora Cláudia Cristina Soares de Carvalho, defendida na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP) em 2007, programa de Mestrado em Educação Matemática, com o seguinte título: **Uma análise praxeológica das tarefas de prova e demonstração em tópico de álgebra abordados no primeiro ano do Ensino Médio.** A segunda, também uma dissertação, agora da pesquisadora Silvia Teresinha Frizzarini Valenzuela, defendida na Universidade Federal de Mato Grosso Do Sul (UFMS) em 2007, no programa de Mestrado em Educação com o seguinte título: **O uso de dispositivos didáticos para o estudo de técnicas relativas a sistema de equações lineares no ensino fundamental.**

Inicialmente descrevemos alguns pontos das duas pesquisas citadas, a fim de esclarecer qual o questionamento do pesquisador, o objetivo principal e os específicos, referencial teórico e a abordagem metodológica. Ao realizarmos essa descrição explicitaremos os pontos que estão ligados à nossa pesquisa.

(CARVALHO, 2007), procura responder de que maneira os livros didáticos por ela analisados propõem aos alunos do primeiro ano do Ensino Médio provas e demonstrações das propriedades enunciadas ao longo da exposição do conteúdo algébrico Conjuntos e Conjuntos Numéricos. O objetivo geral da pesquisa é promover uma reflexão sobre o uso de provas e demonstrações. O referencial teórico utilizado para alcançar esse objetivo, permeia a noção de praxeologia (CHEVALLARD, 1999), níveis de prova (BALACHEFF, 1988) e as concepções de álgebra proposta por (USISKIN, 1995).

O desenvolvimento da pesquisa de (CARVALHO, 2007), é feito inicialmente com um estudo histórico da álgebra e das demonstrações, seguido de um levantamento e comentário presentes em três pesquisas recentes do ensino e aprendizagem de álgebra, e cinco de ensino e aprendizagem de provas e demonstrações. Posteriormente, realiza uma abordagem sobre os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM-2002), Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares do Ensino Médio (PCN+2002) e Orientações Curriculares para

[3] Pesquisa realizada no banco de teses e dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior em 13 de março de 2009.

o Ensino Médio de 2006, com o propósito de encontrar algumas informações sobre raízes do ensino de provas e demonstrações na educação; indícios da valorização do raciocínio dedutivo; preocupações com ensino de provas e demonstrações, e por fim o ensino da álgebra.

Como já enunciamos o referencial teórico por ela utilizado, passaremos a descrever os procedimentos metodológicos. Primeiramente, como já foi, dito a análise segue em torno de livros didáticos, dessa forma existe o passo da escolha dos livros, nessa parte, a autora, utiliza como primeiro critério de escolha o Programa Nacional do Livro Didático do Ensino Médio (PNLEM), entretanto, foram aprovadas onze coleções, de forma que ela observa a impossibilidade de analisar todas as coleções. Surge então a necessidade de constituir mais uma ferramenta de escolha, assim a autora realiza uma análise preliminar das onze coleções e a partir de cinco questões que não cabe a nós enunciá-las aqui, as separa em três grupos, e de cada grupo elege uma coleção para analisar.

Nesse momento, passamos, com a mesma intenção inicial, a descrição da pesquisa de (VALENZUELA, 2006), cujo objetivo é investigar dispositivos didáticos e suas incidências relativas ao estudo de técnicas de resolução de sistemas de equações lineares em uma 7ª série do Ensino Fundamental, adota como referencial teórico-metodológico a Teoria Antropológica do Didático (CHEVALLARD, 1999), Engenharia Didática (ARTIGUE, 1990) e o modelo de análise teórica de (HENRY, 2006). Para alcançar o objetivo foram realizadas análises de livros didáticos, de aulas de matemática e de produções de alunos que utilizam um software chamado Aplusix[4], que tem como objeto matemático os sistemas de equações lineares.

Após essas descrições realizadas passaremos então a anunciar os pontos nos quais acreditamos que essas pesquisas podem nos auxiliar. Em primeiro lugar justificamos a escolha dessas duas dentre tantas outras pelo fato de ambas comportarem em seu referencial teórico a Teoria Antropológica do Didático TAD (CHEVALLARD, 1999), e realizarem análises de livros didáticos. Dessa forma, observamos como eles realizaram o recorte de seus objetivos e principalmente como fizeram a escolha dos

[4] Aplusix é um software de ajuda a aprendizagem da aritmética e da álgebra que permite que o aluno resolva exercícios fornecendo-lhe retroações: verifica a validade dos cálculos feitos e o fim dos exercícios. Ele se aproxima do ambiente papel e lápis; utiliza um editor de expressões algébricas bastante intuitivo (em duas dimensões) e contém 400 tipos de exercícios.

livros didáticos utilizados. Outro ponto que nos auxiliou, foi como realizaram a análise desses livros à luz da teoria, uma vez que nossa pesquisa, como se pode perceber, utiliza essa mesma teoria e também a análise de livros didáticos. Nesse momento, o leitor pode até levantar a seguinte questão: Qual a diferença entre esta pesquisa e a da pesquisadora (VALENZUELA, 2006)? Já que tanto ela quanto nós utilizamos a TAD como referencial teórico e analisamos livros didáticos? Somos então levados a esclarecer esta dúvida, e iniciamos pelo objetivo principal das pesquisas. Enquanto nós buscamos analisar como era proposto o ensino de sistemas de equações do primeiro grau em livros didáticos utilizados na primeira república do Brasil (1890-1930) e como é proposto hoje nos livros didáticos destinados aos anos finais do ensino fundamental, ela a autora, investiga as técnicas de resolução de sistemas em três dispositivos didáticos, o livro, a aula de matemática e em especial o computador. Outra diferença está ligada às fontes de dados e ao referencial metodológico, enquanto nós temos os livros didáticos e os documentos oficiais (antigos e contemporâneos), ela tem os livros, as aulas e o computador. Essas e outras diferenças, deixamos a cargo do leitor observar ao ler ambas as pesquisas.

# 3 MÉTODO E PROCEDIMENTOS DA PESQUISA

Este capítulo é destinado a explicitar alguns elementos referentes ao método utilizado no desenvolvimento dessa pesquisa. É também nesse capítulo, que descrevemos em detalhes os procedimentos adotados por nós para seu desenvolvimento. Dessa forma destacamos que o capítulo ao todo está dividido em duas partes. Na primeira, destacamos o método da análise de conteúdo, a partir dos escritos de (BARDIN, 2006). Ainda nessa parte, realizamos um estudo da utilização desse método em pesquisas no campo da educação, em particular da Educação Matemática. Para finalizar a primeira parte, destacamos a compatibilidade do método com a teoria adotada nessa pesquisa. Na segunda parte, descrevemos as fontes utilizadas e o procedimento adotado para o desenvolvimento desse trabalho, iniciamos pelos PCN's e o Guia de Livro Didático PNLD-2008, passamos pelos livros didáticos analisados e finalizamos com programas do Colégio Pedro II e com as reformas federais da educação brasileira compreendidas entre 1890 e 1930.

## 3.1 PRIMEIRA PARTE - Análise de conteúdo

Antes de discutirmos as fases da análise de conteúdo, é necessário entendermos o que ela vem a ser e qual é o seu objetivo. Conforme nosso entendimento acerca de reflexões realizadas por meio de leitura dos escritos de Laurence Bardin[5], a análise de conteúdo é a reunião de técnicas de análise das formas comunicacionais, e consequentemente tem como objeto de estudo a linguagem. Seu objetivo é obter a partir de um conjunto de elementos *(técnicas)* a descrição do conteúdo de uma determinada mensagem e assim permitir a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção dessas mensagens.

---

[5] Laurence Bardin – professora-assistente de Psicologia na Universidade de Paris V, aplicou as técnicas da Análise de Conteúdo na investigação psicossociológica e no estudo das comunicações de massas. Publicou um livro que procura ser um manual claro, concreto e operacional desse método de investigação, que tanto pode ser utilizado por psicólogos e sociólogos, qualquer que seja a sua especialidade ou finalidade, como por psicanalistas, historiadores, políticos, jornalistas, etc.

Conforme (BARDIN, 2006), a organização da análise é realizada mediante três fases cronológicas, a primeira é chamada de pré-análise, seguida da exploração do material e finalizada com o tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação. Em seguida descreveremos, em particular, cada uma dessas três etapas.

A primeira fase é a da pré-análise, momento no qual o autor organiza as ideias acerca de sua pesquisa e realiza a escolha das comunicações que serão analisadas. É também nesse momento que se formula a hipótese e os objetivos assim como se elaboram os indicadores que fundamentam as interpretações posteriores.

De acordo com a mesma autora, a hipótese é uma indagação que se origina da intuição e que, por sua vez, busca verificar sua concordância ou não. A verificação deve ser realizada através de dados seguros. O objetivo é a finalidade total a qual a pesquisa se propõe. Em suas palavras a fase da pré-análise é descrita da seguinte forma:

> Corresponde a um período de intuição, mas tem por objetivo tornar operacionais e sistematizar as idéias iniciais, de maneira a conduzir a um esquema preciso do desenvolvimento das operações sucessivas, num plano de análise. (BARDIN, 2006, p. 89)

Entendemos que esta fase é composta por atividades não estruturadas, entretanto, existem alguns itens que devemos observar. Inicialmente a leitura flutuante, que vem a ser a primeira das atividades. É o momento em que o pesquisador estabelece o primeiro contato com o documento a ser analisado, este por sua vez, é também o instante no qual será realizada a primeira leitura que deve despertar impressões, hipóteses e orientações.

Nessa fase se encontra o momento da escolha dos documentos que pode ser determinado a priori, ou, se inicia com a escolha do objetivo e em seguida a escolha dos documentos que certamente são suscetíveis de conter informações sobre o problema inicialmente indagado. Mas, o conjunto desses documentos deve compor um corpus[6], este por sua vez tem que obedecer algumas regras. Devemos observar que elas não seguem uma cronologia, mas temos: a regra da exaustividade – que consiste em não deixar de fora nenhum documento por qualquer que seja o motivo, a regra da representatividade – está ligada diretamente a quantidade de documentos a serem

[6] Corpus – Conforme Bardin (2006, p.90) – é o conjunto dos documentos tidos em conta para serem submetidos aos procedimentos analíticos.

analisados a partir de um todo, regra da homogeneidade – os documentos escolhidos tem que obedecer critérios de escolha e não apresentar-se  como um item particular e por fim a regra de pertinência – os documentos a serem analisados devem de alguma forma contemplar aos objetivos inicialmente indagados no trabalho.

Segue-se então o tratamento do material, chamando por (BARDIN, 2006) de Codificação que consiste em uma transformação dos dados brutos, por meio de regras precisas, em dados que permitam a interpretação das representações do conteúdo.

Conforme (BARDIN, 2006), o processo da codificação está interligado a três escolhas. A primeira delas é o recorte, a segunda é a enumeração a terceira e última é a classificação e agregação. Entendemos que o recorte é o momento que permite a escolha das unidades de registro. Nas palavras de Bardin:

> A unidade de registro – é a unidade de significação a codificar e corresponde ao segmento de conteúdo a considerar como unidade de base, visando a categorização e a contagem freqüêncial. A unidade de registro pode ser de natureza e de dimensões muito variáveis. Reina uma certa  ambigüidade no concernente aos critérios de distinção das unidade de registro. Efetivamente, executam-se certos recortes a nível semântico, o <<tema>>, por exemplo, enquanto que outros efetuam a um nível aparentemente lingüístico, como por exemplo, a <<palavra>> ou a <<frase>>. (BARDIN, 2006, p. 98)

Conforme nosso entendimento, palavra não possuiu uma definição exata em linguística, porém, inserida em um determinado idioma corresponde a qualquer coisa. Frase é um conjunto de palavras que tem sentido completo e o tema  uma unidade de significação que surge de uma comunicação analisada conforme critérios adjacentes a teoria que dá suporte a pesquisa.

No que se refere à segunda fase, a enumeração, difere das unidades de registro pelo fato de a primeira ser o que se conta, quanto à segunda, é o modo de se contar. Já a terceira fase, chamada de classificação e a agregação, está ligada diretamente com a escolha das categorias, nesse caso acreditamos ser importante resgatar pontos que nos levam a caracterizar uma pesquisa qualitativa. Podendo ser expressada da seguinte forma:

> A análise qualitativa apresenta certas características particulares. É válida, sobretudo, na elaboração das deduções específicas sobre um acontecimento ou uma variável de inferência precisa, e não em inferências gerais. (BARDIN, 2006, p. 109)

Ainda conforme (BARDIN, 2006), o que caracteriza a análise qualitativa está determinado na inferência, quando realizada, é fundamentada na presença do índice, que pode ser um tema, palavra, personagem, etc., e não baseada na frequência de sua aparição.

Um item que devemos observar inserido na análise de conteúdo é a categorização. Conforme nosso entendimento, as categorias são classes de unidades de registros (dentro da análise de conteúdo) agrupadas a partir de elementos comuns. Sendo assim, a categorização, consiste nessa operação de classificar elementos comuns em conjuntos inicialmente por diferenciação em seguida um reagrupamento desencadeado por intermédio de critérios previamente definidos. Estes critérios podem ser semânticos, sintáticos, lexicais ou expressivos.

Acreditamos que o objetivo da categorização, é fornecer, por síntese, a representação de todos os dados brutos em dados organizados sem introduzir desvios, seja por excesso ou falta, de forma a proporcionar índices invisíveis ao nível dos dados brutos e dessa forma nos leva a acreditar ser uma ação estrutural.

De acordo com (BARDIN, 2006), existem boas e más categorias. As boas devem conter em primeiro lugar a exclusão mútua, em segundo lugar a homogeneidade, em terceiro lugar a pertinência, em quarto lugar a objetividade e a fidelidade e em quinto e último a produtividade. A primeira delas, está ligada ao fato das categorias serem constituídas de tal forma que um elemento qualquer não pudesse de forma alguma comportar dois ou mais aspectos que de alguma maneira pudessem ser classificados em duas ou mais categorias. O segundo defende a unicidade do princípio de classificação na organização das categorias. O terceiro deve estar incorporado ao quadro teórico pré-definido. O quarto é tido como organizador da análise de tal forma a definir claramente as variáveis e deve precisar os índices que incluem a entrada de um determinado item numa categoria. E por fim, as categorias devem ser capazes de produzir índices de inferências, hipóteses novas e dados exatos.

Conforme diz a autora, sobre a exploração do material é indagado: “Esta fase, longa e fastidiosa, consiste essencialmente de operações de codificação, desconto ou enumeração em função de regras previamente reformuladas.” (BARDIN, 2006, p.95)

Nesse caso, observamos que se a fase da pré-análise for bem sucedida então a exploração do material se fará em uma amplitude maior e de melhor qualidade pois já se tem todos os materiais a serem analisados os objetivos a serem alcançados e ainda os indicadores que fundamentarão os resultados finais. Por outro lado, entendemos que se por algum motivo a primeira fase não estiver cumprida de forma satisfatória, certamente será necessário em algum momento da exploração retornar a pré-análise, pois, se faltar algum documento será necessário encontrá-lo, assim como se os objetivos não estiverem bem formulados, será necessário reformulá-los.

Quanto ao tratamento dos resultados obtidos e interpretação, sabemos que os dados brutos não têm significado nenhum, cabe assim ao pesquisador tratá-los de maneira a serem significativos ou válidos. Em outras palavras, cabe utilizar uma metodologia acoplada a uma teoria para levantar pontos significativos nos materiais analisados.

Por outro lado, (BARDIN, 2006) afirma que este resultado obtido diante de sua confrontação sistemática com o material e a inferência alcançada certamente pode servir como base para outra pesquisa que por sua vez estará disposta em torno de uma nova dimensão teórica ou até mesmo praticada através de uma técnica diferente.

Em síntese recorremos a um esquema feito por (BARDIN, 2006) denominado Desenvolvimento de uma Análise.

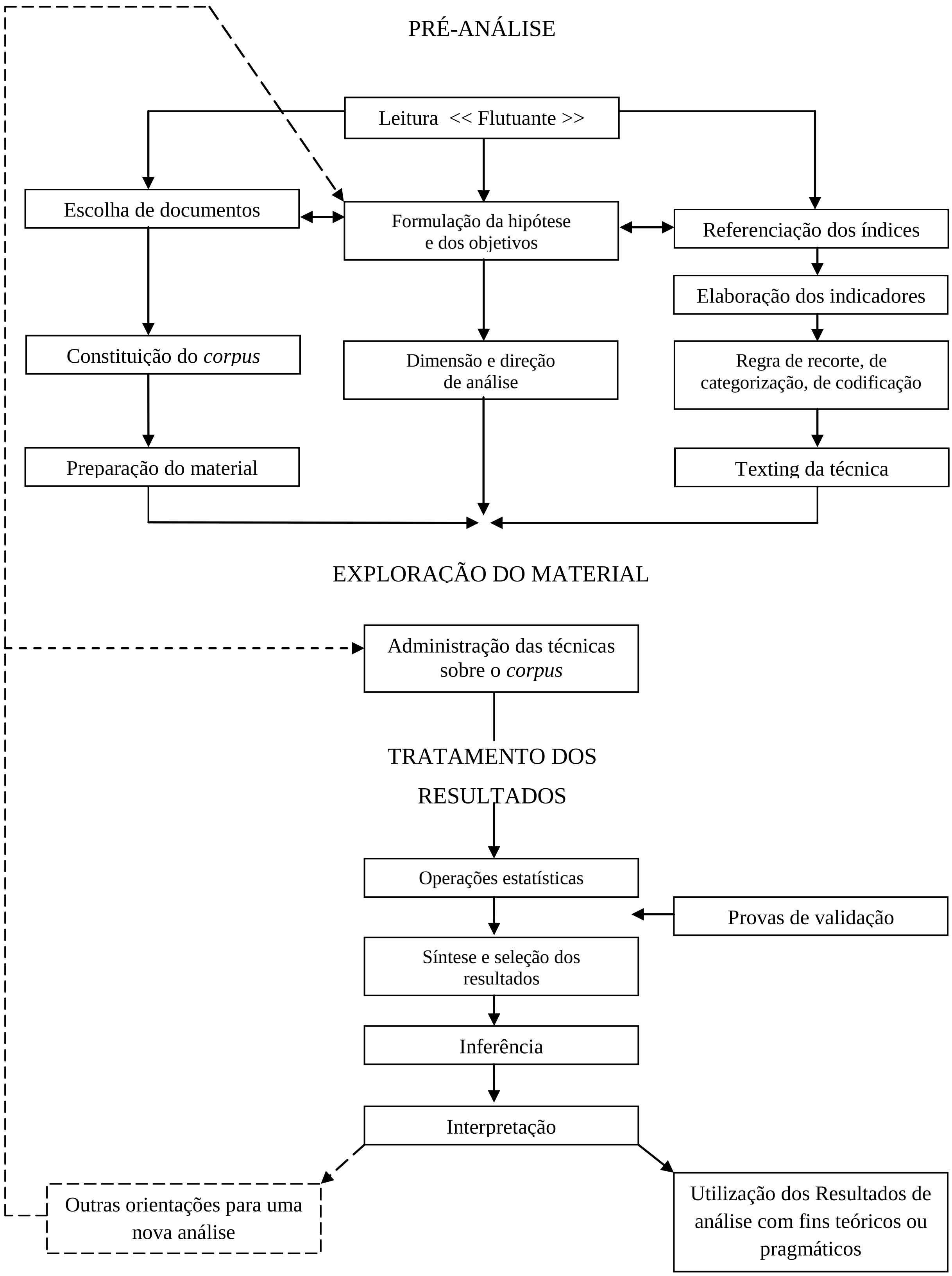


Figura 01 – Esquema retirado do livro de BARDIN, 2006, p.96

Observa-se na figura, as três etapas da pesquisa, pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados. A cada uma das etapas são colocados os elementos pertencentes a ela, como por exemplo, a pré-análise é formada por dez elementos, dentre eles temos a leitura <<flutuante>>, formulação da hipótese e dos objetivos e a dimensão e direção da análise. Nós consideramos esses três como sendo o esqueleto da primeira etapa da pesquisa. Ao nos referirmos à segunda etapa, a figura destaca apenas um elemento, que é, a administração das técnicas sobre o conjunto de documentos que serão submetidos à análise. E por fim, a terceira etapa (tratamento dos resultados) é composta por sete elementos, aqui destacamos apenas a síntese e seleção dos resultados, outras orientações para uma nova análise e a utilização dos resultados de análise com fins teóricos ou pragmáticos como sendo o eixo central dessa etapa.

### 3.1.1 Análise de Conteúdo na Educação e em particular na Educação Matemática.

Na metade do século XIX as ciências humanas, passaram a seguir o modelo das ciências da natureza, assim, seus estudos e pesquisas buscaram características do empirismo, da objetividade, da experimentação e da validade. Este modelo muito cedo teve seus limites reconhecidos e observações quanto inadequações quando se trata do objeto de estudo, o ser humano.

Procedimentos como: entrevistas, questionários com questões abertas que precisam ser descritas, analisadas, e interpretadas, dentre outros, são exemplos de dados que os pesquisadores, em particular da área social, utilizam usualmente na abordagem de pesquisa levando esses dados e indagando atributos de qualidades diretamente associados a eles. Diante desse fato observa-se que a análise de conteúdo desenvolve um arcabouço formal para a sistematização desses atributos qualitativos. Conforme nossas leituras, observamos que a análise de conteúdo é um método muito utilizado, auxilia pesquisadores desde a iniciação científica, no que se refere em identificar as significações dos textos que são analisados.

Recorremos às palavras de Oliveira et al (2003) para fazer uma síntese de nossa fala quando ela explicita que:

> Na área de educação, a análise de conteúdo pode ser, sem dúvida, um instrumento de grande utilidade em estudos, em que os dados coletados sejam resultados de entrevistas (diretivas ou não), questionários abertos, discursos ou documentos oficiais, textos literários, artigos de jornais, emissões de rádio

e de televisão. Ela ajuda o educador a retirar do texto escrito seu conteúdo manifesto ou latente. (OLIVEIRA, 2003, p.16)

Como reforça as palavras de Oliveira (2003), comunicamos que mediante buscas no banco de teses da CAPES, com a palavras-chave "Bardin" e "Educação" encontramos 335 trabalhos relacionados[7]. Isso nos mostra que é um referencial muito utilizado em pesquisas no campo da educação. Nota-se que ao digitarmos a palavra *Bardin*, estamos solicitando ao banco de teses que mostre apenas aquelas pesquisas que de alguma forma utilizam a análise de conteúdo proposta por *Bardin*. Ao digitar *Educação* solicitamos as pesquisas na área da educação. Em síntese ao digitarmos as duas palavras encontramos as pesquisas da área da educação e que de alguma forma utilizam a análise de conteúdo.

Dentre as pesquisas encontradas neste banco de tese destacamos três delas para descrevermos em nosso trabalho isso com a intenção de mostrar que não somos percussores no uso da análise de conteúdo na pesquisas em educação, e também, observar como estes autores utilizam este método em seu trabalho afim de aprendermos um pouco mais com aqueles que de forma prática aplicaram estes conceitos, sendo assim, extraímos desse rol de 335 pesquisas três delas, (1) Tese: *Inovações pedagógicas no currículo dos cursos de formação de profissionais de educação física; contribuições teórico-metodológicas da prática pedagógica*, de Marcelo Soares Tavares de Melo, do programa de pós-graduação em educação de Recife 2007; (2) dissertação: *As concepções alternativas de alunos da 8ª série do ensino fundamental sobre o fenômeno do efeito estufa*, de Ana Cristina Leandro da Silva Libanore, do programa de pós-graduação em educação de Maringá 2007; (3) tese: *Didática transpessoal: perspectivas inovadoras para uma educação integral,* de Vera Peceguini Saldanha, do programa de pós-graduação em educação da UNICAMP 2007.

Em primeiro lugar, destacamos a tese defendida por Marcelo Soares Tavares de Melo, que aqui trataremos apenas como (MELLO, 2003), a pesquisa trata da prática pedagógica nos cursos de formação de profissionais da Educação Física, que se apresenta com perspectivas inovadoras. O autor busca compreender o processo de inovações pedagógicas na reformulação curricular e na materialização da prática curricular dos professores da Escola Superior de Educação Física da Universidade de Pernambuco, sua base metodológica é dentre outras Laurence (BARDIN, 1977). Esse

[7] Pesquisa realizada no banco de teses e dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior em 18 de maio de 2009.

referencial, foi utilizado para a análise dos dados recolhidos em fontes bibliográficas e documentais, bem como em entrevistas realizadas. Em particular é utilizado a análise de conteúdo do tipo categorial por temática. Nas palavras de (MELLO, 2003):

> O método da hermenêutica-dialética e a análise de conteúdos de tipo categorial por temática nos possibilitam um suporte epistemológico para o estudo da literatura e da pesquisa no campo, no qual realizamos entrevistas com 20 (vinte) professores [...] sendo-nos possível ouvi-los e ainda tomarmos conhecimento dos documentos acadêmicos referentes à construção do currículo novo. (MELLO, 2003, p 89).

Em segundo lugar, ao nos referirmos à dissertação de Ana Cristina Leandro da Silva Libanore (LIBANORE, 2007), notamos que essa pesquisa analisa as concepções de estudantes da 8ª série do Ensino fundamental sobre o efeito estufa.

> Para a análise das respostas obtidas dos questionários, das falas das professoras de Ciências e de Geografia à entrevista e do conteúdo do livro didático de Ciências e de Geografia, optou-se pelos pressupostos teóricos e metodológicos da Análise de Conteúdo de Bardin (1977), porque é uma técnica muito significativa para pesquisas qualitativas, auxiliando o pesquisador a retirar do texto escrito seu conteúdo manifesto ou latente. (LIBANORE, 2007, p 74).

Em terceiro lugar, destacamos a tese de Vera Peceguini Saldanha (SALDANHA, 2007), que aplicou a Análise de Conteúdo de Laurence Bardin como um instrumento para abranger e delinear, de forma precisa, os contornos dos conteúdos velados nos depoimentos dos profissionais que aprenderam a Abordagem Integrativa por meio da Didática Transpessoal. (SALDANHA, 2007) explicita que a análise de conteúdo possibilitou perceber uma perspectiva inovadora, humanizada para uma educação integral, na qual o educar favorece um elo estreito entre o indivíduo, valores e sociedade, além de ser um bem precioso na evolução e no desenvolvimento humano, hoje tão aquém do desenvolvimento tecnológico alcançado pela humanidade.

Em resumo, notamos que a análise de conteúdo aqui posta em questão, com muita satisfação, aparece explicitada nas três pesquisas como um instrumento que se revelou bastante adequado para abranger e delinear, de forma precisa, os contornos dos conteúdos velados em depoimentos de professores e/ou de alunos; questionários; entrevistas; e até mesmo em livros didáticos e documentos. Nessa mesma vertente passamos a descrever um breve relato de pesquisas na área de Educação Matemática que também utilizam a Análise de Conteúdo em seu contexto a fim de obter de forma significativa conclusões relevantes no contexto da Educação Matemática.

Recorremos novamente ao banco de teses da CAPES o interesse particular de encontrarmos trabalhos da área de Educação Matemática que utilizaram o método da Análise de Conteúdo de Laurence Bardin.

Ao efetuarmos a busca com as palavras-chave “Bardin” e “Educação Matemática” encontramos sete indicações. Isso nos mostra que não somos precursores em utilizar esta metodologia em pesquisa dessa área, e com certeza estas pesquisas encontradas, podem nos ensinar como utilizar esta metodologia. Nossa intenção inicial era ler na íntegra todas as sete, entretanto, o tempo não nos possibilitou este prazer, assim sendo, destacamos duas delas para fazer esta leitura e mostrar como os autores utilizaram esta ferramenta metodológica chamada análise de conteúdo.

A primeira delas é uma tese cujo título é: Re-significado da disciplina teoria dos números na formação do professor de matemática na licenciatura da autora Marilene Ribeiro Resende, defendida na PUC/SP em 2007. Esta pesquisa está inserida dentro de uma problemática que questiona qual a álgebra que deve ser ensinada nos diferentes níveis da escolaridade. Levanta-se então o seguinte questionamento: Qual teoria dos números é ou poderia ser concebido um saber a ensinar na licenciatura em matemática, visando à prática docente na escola básica? Os dados dessa pesquisa foram retirados de propostas curriculares, livros didáticos e de entrevistas semi-estruturadas, para a análise desses dados a autora utiliza-se então da análise de conteúdo.

Outra pesquisa na área de Educação Matemática que lemos, foi a dissertação de Silvio Barbosa de Oliveira, e tem como título, As equações diofantinas lineares e o livro didático de matemática para o ensino médio, defendida na PUC/SP em 2006. Entendemos que o autor deste trabalho tem como objetivo principal, investigar como os livros didáticos do ensino médio tratam assuntos relativos à teoria elementar dos números, em particular as equações diofantinas, e tem como fonte os seguintes documentos oficiais: Parâmetros Curriculares Nacionais do ensino médio (PCNEM) e PCN+ e duas coleções de livros didáticos do ensino médio. Para as análises dos dados retirados dessas fontes o autor utiliza o método da análise de conteúdo.

Em resumo, esta pesquisa realizada no banco de teses da CAPES, nos mostrou explicitamente que a análise de conteúdo, método que utilizamos em nossa pesquisa, vem sendo utilizadas em pesquisas de mestrado e doutorado tanto na área de Educação quanto na área de Educação Matemática. Mostra-nos também que em sua grande maioria foi utilizada como instrumento para abranger e delinear, de forma precisa, os contornos dos conteúdos velados em depoimentos de professores e/ou de alunos, questionários, entrevistas, livros didáticos e documentos.

Não tão distante das ideias contidas nesses trabalhos acima relatados, nossa pesquisa, busca extrair de fontes como Parâmetros Curriculares Nacionais, Guia do Livro Didático e Livros Didáticos utilizados no ensino secundário brasileiro elementos implícitos ou explícitos que consideramos significativos no processo de ensino de sistemas de equações lineares do primeiro grau, assim concluímos que a análise de conteúdo vem a ser um instrumento preciso para o nosso objetivo.

### 3.1.2 Compatibilidade da Análise de Conteúdo com a Teoria Antropológica do Didático.

Ao elaborar a pesquisa descrita nessa dissertação a partir da TAD e da Análise de Conteúdo, como referenciais teórico e metodológico, somos levados a refletir sobre a compatibilidade desses dois referenciais. Seria a TAD compatível com a Análise de Conteúdo? Em que sentido a pesquisa histórica e didática do ensino de matemática pode ser empreendida pelo viés da Análise de Conteúdo? São essas questões que tentamos tratar nesta parte no nosso trabalho.

Um dos argumentos fundamentais da TAD, conforme define (CHEVALLARD, 1998), é localizar a atividade matemática no contexto das instituições humanas e sociais. Em outros termos, as práticas matemáticas e os argumentos usados para justificar essas práticas encontram-se inseridos em diferentes instituições que existem há muitos anos. Portanto, quando nós nos propomos a analisar praxeologias referentes ao estudo de Sistemas de Equações do Primeiro Grau em livros didáticos, sejam eles usados nos dias de hoje ou aqueles adotados no estabelecimento de referência que foi o Colégio Pedro II, somos obrigados a pesquisar documentos históricos que foram avalizados por instituições relacionadas ao estudo da matemática. Falando de maneira mais clara, as praxeologias matemáticas e didáticas, cultivadas nas instituições de referência encontram-se parcialmente registradas em documentos, tais como programas de ensino, as orientações oficiais e os livros didáticos. Porém nós entendemos que o texto contido nesses documentos expressa um discurso institucional que precisa ser cuidadosamente analisado, para que possamos extrair deles a essência, respeitando o nosso ponto de vista. Assim, entendemos que a Análise de Conteúdo é uma das referências metodológicas que podem ser aplicadas para extrair desses documentos históricos as práticas propostas pelas instituições, sejam elas os colégios de referência, as orientações oficiais como PCN ou mesmo o livro didático.

O segundo argumento que nós propomos para utilizar a Análise de Conteúdo com a Teoria Antropológica do Didático é o fato da ideia da "categorização" estar presente nos dois referenciais. Ao considerar a TAD com nosso referencial teórico, somos levados a trabalhar essencialmente com diferentes "categorias" de tarefas. Nós não encontramos nos textos a expressão "categorias de tarefas" porém entendemos que a definição proposta por (CHEVALLARD, 1992) dos tipos de tarefa envolve necessariamente a categorização de diferentes tarefas que são valorizadas nas práticas usuais do ensino da matemática. Em outras palavras, entendemos que uma das maneiras de definir um tipo de tarefa, identificar certa organização didática, em seus diferentes níveis de abrangência[8] é através de uma análise categorial, a qual é um dos instrumentos usados pelos teóricos proponentes da Análise de Conteúdo.

Quando nos remetemos a níveis de abrangência, estamos retomando o conceito de Organização praxeológica quanto a sua classificação, pontual, local, regional e global.

## 3.2 SEGUNDA PARTE - Descrição das Fontes e Procedimentos da pesquisa

Em seguida, passamos a descrever o caminho percorrido para a realização dessa pesquisa, ressaltamos que nosso objeto é o estudo de sistemas de equações do primeiro grau em livros didáticos utilizados em escolas brasileiras. A partir de agora, descreveremos os procedimentos da pesquisa nas fontes que consideramos ter influência no ensino de sistemas de equações.

### 3.2.1 A pesquisa nos PCN e no Guia de Livros Didáticos

Inicialmente, destacamos que os PCN, como fonte de dados, se justificam por serem documentos nacionais que servem como referencial curricular para todo o país. E ainda, acreditamos que este documento tem forte influência sobre os autores de livros didáticos, pois, em nosso entendimento, estes documentos recomendam adaptações metodológicas ao contexto dos conteúdos e ainda sugerem levar em consideração as características sociais e econômicas de cada região.

[8] Quando nos remetemos a níveis de abrangência, estamos retomando o conceito de Organização praxeológica quanto a sua classificação, pontual, local, regional e global.

Concomitantemente, o Guia do Livro Didático se justifica por ser um documento resultante de um trabalho conjunto de educadores de diversas instituições, educadores estes que acreditamos terem como objetivo organizar elementos para subsidiar os diversos professores na escolha de um bom livro didático.

A realização da pesquisa nesses documentos inicia-se com uma primeira leitura dos textos (leitura flutuante) a fim de desencadear algumas orientações e impressões. Em seguida, realizamos nova leitura já com um objetivo formulado, que é conhecer o estatuto atribuído ao estudo de sistemas de equações nos PCN e no PNLD. Para isso, buscamos extrair dessas fontes, unidades de registro que dizem respeito ao objetivo estudado. Relatamos aqui a retirada de um total de quarenta unidades de registro nos PCN e vinte e sete no PNLD.

Em seguida, em outro nível buscamos agrupar em categorias estas sessenta e sete unidades de registro. Nesse ponto, não levamos em consideração um dos critérios mencionados por (BARDIN, 2006), a exclusão mútua, pois observamos que uma unidade de registro poderia pertencer a duas ou mais categorias, no entanto acreditamos que há uma certa homogeneidade no princípio de classificação de cada categoria. Desse modo, obtemos seis categorias[9], que foram definidas a partir das unidades de registro, após a organização realizamos a análise teórica tendo como suporte a TAD proposta por Yves Chevallard, teoria descrita no referencial teórico desse trabalho. Consideramos esta como a fase que levou mais tempo e certamente a mais trabalhosa, já que inicialmente dividimos as comunicações em unidades de registro, em seguida categorizamos, e só depois analisamos com uma base teórica.

Contudo após a análise teórica das categorias, tiramos as ideias centrais nelas contidas, iniciamos assim outro nível que é a busca das aproximações entre as categorias analisadas, relembro que novamente estamos envoltos em nosso referencial teórico e nesse momento o nosso objetivo era de destacar quais são estas aproximações obtidas a partir de nossa análise.

### 3.2.2 A pesquisa nos Livros Didáticos

Para o estudo de Sistemas de Equações do Primeiro Grau em livros didáticos, inicialmente delimitamos como fonte da pesquisa dois livros, um adotado no

[9] Essas seis categorias podem ser vistas no anexo desse trabalho.

Colégio Pedro II no período 1890 a 1930 e o outro contemporâneo. Nosso foco com a escolha dessas fontes é de fazer um estudo acerca dos sistemas de equações.

Para escolher estes livros, em primeiro lugar o livro contemporâneo, o passo inicial foi fazer uma leitura flutuante das resenhas do Guia do PNLD. Em seguida a escolha permeou os elogios acerca do ensino de álgebra, equações e sistemas de equações, eliminando assim os livros que não os continham. Paralelamente eliminamos também aqueles que identificamos críticas negativas relacionados a esses itens. Justificamos essa escolha por meio destes critérios pelo fato dessa pesquisa estudar o processo de ensino de um determinado conteúdo em livros didáticos, com isso a necessidade de analisar livros didáticos bem avaliados, ao olhar de um conjunto de professores credenciados a elaborar estas resenhas do Guia do PNLD, documento este vinculado ao Ministério da Educação.

Nossa estrutura de análise, inicialmente adotou alguns dos critérios estabelecidos no próprio Guia de Livros Didáticos – 2008. Esses critérios dizem respeito, principalmente, à metodologia e aos conteúdos. Assim, optamos pelos livros considerados como "bem avaliados" pelas resenhas, isto é, a coleção recebeu críticas positivas quanto aos seguintes critérios: 1) seleção e distribuição de conteúdos; 2) abordagem dos conteúdos dos cinco blocos: números e operações; álgebra; geometria; grandezas e medidas; e tratamento da informação; 3) Metodologia de ensino-aprendizagem; 4) Contextualização; 5) Formação da cidadania e 6) Linguagem.

Enfatizamos aqui que os critérios de escolha do livro contemporâneo se basearam nas informações obtidas nas resenhas do Guia do PNLD no que tange os seis itens citados acima, em nossa pesquisa consideramos que o grau de importância é igual entre eles. Assim, escolhemos o livro cujo titulo é *"Matemática para todos"* de Luiz Marcio Imenes[10] & Marcelo Cestari Lellis[11], publicado pela editora Scipione no ano de 2006 e aprovado pelo Guia do Livro Didático (PNLD-2008).

---

[10] Engenheiro cívil (Epusp – São Paulo - SP); Licenciado em Matemática (FFCLM – São Paulo - SP); Mestre em Educação Matemática (Unesp – Rio Claro - SP). Professor e assessor de ensino de matemática em diversas escolas Co-autor de várias obras na área de Matemática, entre as quais Matemática Paratodos (anos iniciais do Ensino fundamental); Vivendo a Matemática (Coleção paradidática); Pra que serve Matemática? (Coleção paradidática); Micro dicionário de Matemática.

[11] Bacharel em Matemática (IME – USP – São Paulo - SP); Mestre em Educação Matemática (PUC – São Paulo - SP). Professor e assessor de ensino de matemática em diversas escolas Co-autor de várias obras na área na Matemática, entre as quais: Matemática Paratodos (anos iniciais do Ensino fundamental);

Neste momento vamos tecer alguns comentários a respeito do livro escolhido. Este exemplar vincula-se em uma coleção de quatro livros que são destinados ao sexto, sétimo, oitavo e nono ano do ensino fundamental sendo que o exemplar estudado é referente ao oitavo ano.

Os autores formularam este exemplar em treze capítulos. Esta pesquisa está focada no décimo segundo capítulo, intitulado *Sistemas de Equações*, no qual os autores destinaram um total de dezesseis páginas.

Quanto ao que se refere à escolha do livro antigo, tomamos como fonte os adotados no Colégio Pedro II, pela sua importância e a credibilidade conquistada nesse período, assim elegemos um exemplar adotado dentre os anos de 1890 a 1930. No entanto, observamos nessas quatro décadas a presença de quatro livros de álgebra de autores diferentes adotados nesse estabelecimento modelo, predominou a adoção do *Tratado de Álgebra Elementar* de José Adelino Serrasqueiro que foi utilizado de 1893 a 1914 e novamente de 1926 a 1928 (ARICLÊ,1998), totalizando assim quatorze anos de utilização nessas quatro décadas, dessa forma o escolhemos para fazer a análise.

Quanto ao autor do livro, José Adelino Serrasqueiro[12], foi Professor e publicista. Nasceu em Castelo Branco a 22-12-1835. Bacharel formado (1880) em Medicina e Filosofia pela Universidade de Coimbra fez o curso com distinção e obteve vários prêmios. Dedicou-se depois ao ensino particular. Foi sócio efetivo do Instituto de Coimbra e professor de Matemática no liceu da mesma cidade. Os seus livros

---

Novo Matemática na Medida Certa (anos finais do Ensino fundamental); Vivendo a Matemática (Coleção paradidática); Pra que serve Matemática? (Coleção paradidática); Micro dicionário de Matemática.

[12] **As obras de José Adelino Serrasqueiro e as datas das suas múltiplas edições**
**Elementos de algebra,** 1882, 1886, 1902, 1916, Coimbra, Livraria J. D. Pires, Imprensa da Universidade.
**Elementos de arithmetica,** 1869, 1876, 1881, 1882, 1884, 1887, 1888, 1896, 1902, Coimbra, Livraria J. Diogo Pires, Imprensa da Universidade
**Elementos de geometria**, 1881, 1884, 1896, Coimbra, Livraria J. Diogo Pires, Imprensa da Universidade
**Elementos de trigonometria rectilinea,** 1877, 1882, 1888, 1891, 1894, 1918, 1920, Coimbra, Livraria J. D. Pires, Imprensa da Universidade
**Tratado de algebra elementar,** 1878, 1883, 1889, 1890, 1892, 1894, 1900, 1903, 1906, 1916, 1920, 1924, 1927, 1929 Coimbra, Livraria J. D. Pires, Imprensa da Universidade
**Tratado de geometria elementar,** 1879, 1882, 1884, 1886, 1887, 1888, 1890, 1892, 1894, 1895, 1898, 1899, 1900, 1903, 1907, 1917, Coimbra, Livraria J. D. Pires, Imprensa da Universidade
**Tratado elementar de arithmetica,** 1879, 1881, 1882, 1883, 1885, 1886, 1888, 1890, 1891, 1892, 1893, 1895, 1902, 1908, 1914, 1910, 1921, Coimbra, Livraria J. Diogo Pires, Imprensa da Universidade
**Tratado elementar de cosmographia,** 1893, 1895, 1896, 1924, Coimbra, Livraria J. Diogo Pires, Imprensa da Universidade
Fonte:
**http://www.apm.pt/files/05.pdf** acesso em 18 de julho de 2009

publicados a partir de 1869 recebem forte influência de Bertrand[13] e, tal como ele, inclui a inovação pedagógica da inclusão de exercícios no final das diversas secções. Propõe uma coleção completa para o ensino secundário de então e os seus livros conhecem múltiplas edições, tendo sido adotados no Colégio D. Pedro II, então escola de referência no Brasil.

O Tratado de Álgebra Elementar é composto por cinco livros. Os livros são distribuídos da seguinte forma: Livro primeiro-74 páginas; livro segundo-127 páginas; livro terceiro-74 páginas; livro quarto-36 páginas; e livro quinto-26 páginas. Nosso objeto de estudo está inserido no livro segundo, cujo título é *Equações e desegualdades do primeiro grau*. Esse livro é dividido em três capítulos, e os sistemas de equações do primeiro grau estão no segundo capítulo. Isso pode ser visto na figura abaixo.

LIVRO SEGUNDO

**Equações e desegualdades do primeiro grau**

CAPITULO I

**Equações e problemas do primeiro grau a uma incognita**



CAPITULO II

**Equações e problemas do primeiro grau a muitas incognitas**



CAPITULO III

**Analyse indeterminada do primeiro grau**



Figura 02– Parte do índice do livro do autor José Adelino Serrasqueiro p. 384 e 385

Como podemos observar no capítulo II do livro segundo desta obra, foram destinadas 58 páginas de um total de 125, o que nos mostra ser dado uma

[13] Na página 198 do livro do Wagner Valente (1999), o autor diz que José Adelino Serrasqueiro compilou Joseph Bertrand.

importância significativa a esse conteúdo, e ainda, se observarmos bem o livro segundo é o que contém o maior número de páginas entre os cinco livros.

Observa-se, ainda, que os exercícios se encontram no final do livro, esta é uma característica da inovação pedagógica que aparentemente foi influenciada pelas obras de Joseph Bertrand.

De posse dos livros didáticos, realizei uma leitura a fim de encaminhar uma análise a partir da TAD. Assim retirei as unidades de registros que coincidem com as tarefas, agrupei-as em categorias que coincidiram com tipos de tarefas em seguida analisei as técnicas, tecnologias e as teorias presentes ou induzidas nos livros didáticos.

Na intenção de esclarecer, relatamos aqui, que nessa pesquisa não há uma ponderação no grau de importância entre as fontes de dados. Em outras palavras consideramos que os PCN's, o PNLD, as Leis e Programas assim como os Livros Didáticos, têm igualmente importância em nossa análise.

### 3.2.3 A pesquisa nos Programas do Colégio Pedro II (1890 - 1930).

Tendo em vista a análise de um livro didático utilizado no Colégio Pedro II fomos levados a levantar elementos que nos levaram inicialmente a escolha qualificada desse livro e finalmente a obter um panorama geral dos conteúdos de matemática ensinado nesse período. Dessa forma recorremos aos programas do colégio citado acima.

Assim procedemos da seguinte forma: Em primeiro lugar, encontramos oito programas compreendidos no período de 1890 a 1930. Em segundo lugar, a partir da leitura desses documentos buscamos destacar a vulgata predominante e a composição interna da disciplina de Matemática. Ressaltamos aqui que essa análise se encontra no capítulo quatro desse trabalho.

# 4 ANÁLISE

Esse capítulo do trabalho é dedicado exclusivamente para mostrar as análises realizadas, lembramos aqui que nosso objeto de pesquisa está diretamente relacionado ao estudo de sistemas de equações do primeiro grau em livros didáticos utilizados em escolas brasileiras. Temos como fontes, os PCN o Guia de Livro Didático PNLD-2008, um livro didático contemporâneo, programas do Colégio Pedro II e um livro utilizado no Colégio Pedro II na primeira república. Sendo assim dividimos este capítulo em quatro partes: Na primeira parte, se encontra os aspectos históricos do estudo de sistemas de equações do primeiro grau: Em seguida, na segunda parte, análise dos PCN's e do Guia de Livro Didático PNLD – 2008: Na terceira parte a análise do livro utilizado no colégio Pedro II: E por fim, na quarta parte, sistemas de equações do primeiro grau em um livros contemporâneos.

A partir desse capítulo passaremos a suprimir o termo Sistemas de Equações do Primeiro Grau, escrevendo apenas Sistemas de Equações, acreditamos que isso deixará a leitura mais agradável, mas reforçamos a ideia de que sempre que houver escrito sistemas de equações estamos nos referindo àqueles do primeiro grau.

## 4.1 PRIMEIRA PARTE - Aspectos históricos do estudo de Sistemas de Equações do Primeiro Grau

Na intenção de realizar a análise dos livros didáticos, no nosso caso em particular de dois livros adotados no Colégio Pedro II no período da Primeira República, somos levados a observar e analisar elementos que possivelmente influenciaram na produção dessas obras. Dessa forma realizamos uma busca bastante intensa a esses materiais, assim conseguimos levantar leis e regulamentos voltados à educação secundária e programas de ensino do Colégio Pedro II. De posse desses materiais, realizamos a análise que pode ser vista a seguir.

Conforme citado nesse trabalho, o período que nossa pesquisa investiga inicia-se em 1890 findando em 1930, período esse conhecido como Primeira República. De acordo com estudo realizado, na história brasileira, destaca-se que no dia 15 de novembro de 1889 é proclamada a república brasileira, concretizando assim a passagem de Brasil Império para Brasil República, nossa pesquisa no âmbito histórico inicia-se então no primeiro ano da república brasileira.

Consideramos a primeira república como sendo o período que se coloca em questão o modelo educacional herdado do império, modelo este que privilegiava a educação das pessoas que possuíam melhores condições financeiras (elite). Nessas quatro décadas aqui analisadas, foram realizadas cinco reformas federais na educação brasileira: 1890 Benjamin Constant; 1901 Epitácio Pessoa; 1911 Rivadávia Correâ; 1915 Carlos Maximiliano e; 1925 João Luís Alves.[14]

A primeira reforma federal na educação brasileira após a proclamação da república foi em 1890 realizada por Benjamin Constant pelo decreto n.º 1075 de 22 de novembro de 1890, encontra-se em seu primeiro artigo o objetivo do ensino secundário da seguinte forma:

> "Proporcionar a mocidade brasileira a instrução secundária e fundamental, necessária e suficiente, assim para matricula nos cursos superiores da República, como em geral para o bom desempenho dos deveres do cidadão na vida social" (Artigo 1º do Decreto n.º 1075 de 22 de novembro de 1890)

Esta mesma reforma estipula que o curso secundário deve ter sete anos de duração constando as seguintes disciplinas: Português; Latim; Francês; Inglês; Alemão; Matemática; Astronomia; Física; Química; História natural; Biologia; Sociologia e moral, noções de economia política e direito pátrio; Geografia; História universal; História do Brasil; Literatura nacional; Desenho; Ginástica, evoluções militares e esgrima e; Música. Observa-se então que dentre este conjunto de disciplina encontra-se a Matemática, disciplina esta que se encontra nos sete anos de estudo do ensino secundário. No 1º ano está presente a Aritmética (estudo completo) e a Álgebra elementar (estudo completo), no 2º ano a Geometria preliminar, trigonometria retilínea e a Geometria espacial, no 3º ano a Geometria geral e seu complemento algébrico, Cálculo Diferencial e Integral e Geometria Descritiva, do 4º ao 7º revisão de Cálculo Diferencial e Integral e Geometria.

No ano de 1901, conforme decreto nº 3914 de 26 de janeiro é instituído uma nova reforma para o ensino secundário brasileiro proposta por Epitácio Pessoa. Nessa reforma, o artigo 1º coloca da seguinte forma a finalidade do ensino secundário brasileiro:

[14] Reformas encontradas no site http://www2.camara.gov.br/legislacao/publicacoes/republica, acesso realizado em 13 de março de 2009.

> “(...) tem por fim proporcionar a cultura intelectual necessária para a matricula nos cursos de ensino superior e para a obtenção de grau de bacharel em ciências e letras” (Artigo 1º do Decreto nº 3914 de 26 de janeiro de 1901)

A duração do ensino secundário conforme esse decreto é de seis anos e deve contemplar as seguintes disciplinas: Desenho; Português; Literatura; Francês; Inglês ou Alemão; Latim; Grego; Matemática elementar; Elementos de mecânica e Astronomia; Física e Química; História natural; Geografia especialmente do Brasil; História especialmente do Brasil e; Lógica. Destes seis anos que eram destinados ao ensino secundário, cinco deles estudavam matemática, este ensino era dividido da seguinte forma: 1º ano estudo da aritmética, 2º ano continuação da aritmética e início do estudo da álgebra, 3º ano continuação do estudo da álgebra e início do estudo da geometria, 4º continuação do estudo da álgebra e da geometria e o estudo de trigonometria e no 6º ano estudo completo da matemática.

A reforma de Rivadávia Correâ ocorre a partir do decreto nº 8660 de 05 de abril de 1911 que em seu artigo 1º coloca como objetivo do ensino secundário como sendo:

> “Proporcionar uma cultura geral de caráter essencialmente pratico aplicável a todas as exigências da vida, e difundir o ensino das ciências e das letras, libertando-o da preocupação subalterna de curso de preparatório” (artigo 1º do Decreto nº 8660 de 05 de abril de 1911)

A duração do ensino secundário conforme essa reforma é de seis anos contendo as seguintes disciplinas: Português; Francês; Inglês ou Alemão; Geografia geral e noções e cosmografia; Matemática elementar; Física e Química; História natural; noções de higiene; Instrução cívica e noções gerais de direito; Latim e sua literatura; Grego e sua literatura; História universal; Desenho e; Ginástica. Dos seis anos do ensino secundário quatro deles continham a disciplina de matemática, dividida da seguinte forma: 1º ano início do estudo de aritmética, 2º ano continuação do estudo da aritmética e início do estudo da álgebra, 3º ano continuação do estudo da álgebra e início do estudo da geometria, no 4º ano continuação do estudo da álgebra e da geometria e o estudo da trigonometria.

Em 1915 institui-se a reforma de Carlos Maximiliano através do decreto nº 11530 de 18 de março deste mesmo ano, Carlos Maximiliano coloca como objetivo do ensino secundário na reforma como sendo:

> "Ministrar aos estudantes sólida instrução fundamental, habilitando-os a prestar, em qualquer academia, rigoroso exame vestibular" (Artigo 158 do Decreto nº 11530 de 18 de março de 1915)

Ainda conforme este decreto a duração do ensino secundário passa a ser de cinco anos, contemplando assim as seguintes disciplinas: Português; Francês; Latim; Inglês ou Alemão; Aritmética; Álgebra elementar; Geometria; Geografia e elementos de cosmografia; História do Brasil; História universal; Física e Química e; História natural. Dos cinco anos do ensino secundário encontra-se inserida o estudo da matemática em três deles, divididos da seguinte forma: 2º ano encontra-se a aritmética, no 3º a álgebra e a geometria plana, no 4º ano geometria espacial e a trigonometria retilínea.

A reforma de João Luis Alves ocorreu mediante do decreto nº 16782-A de 13 de janeiro de 1925, que coloca como objetivo do ensino secundário como sendo: "(...) prolongamento do ensino primário, para fornecer a cultura média geral do país." (Artigo 47 do Decreto nº 16782-A de 13 de janeiro de 1925)

A duração do curso secundário conforme esta reforma é de 6 anos, contendo as seguintes disciplinas: Português; Aritmética; Geografia geral; Inglês; Francês; Instrução moral e cívica; Desenho; Geografia do Brasil; História universal; Alemão; Latim; Álgebra; Geometria; Trigonometria; Física; Química; História natural; Cosmografia; Filosofia; Literatura Brasileira; Literatura das línguas latinas; História da filosofia e; Sociologia. Compreendidos nesses seis anos de ensino secundário quatro contendo a matemática, distribuídos da seguinte forma: 1º ano aritmética, no 2º ano continuação da aritmética, 3º ano álgebra e no 4º ano geometria e trigonometria.

Observa-se então no texto descrito a presença de cinco reformas compreendidas entre 1890 e 1930. Assim foi possível extrair desse conjunto de reformas a presença de um núcleo comum de disciplinas. Em outras palavras, destacamos as disciplinas escolares que estão presentes nas reformas citadas, ao todo contamos nove, formando assim uma vulgata com as seguintes disciplinas: Português; Latim; Francês; Inglês ou Alemão; Matemática; Física; Química; História Natural; e Geografia. Nota-se que nas reformas de 1915 e 1925 emergem uma tentativa de impor uma nova vulgata que em nosso entendimento coabita com a antiga, isso observamos quando é realizado o desmembramento da disciplina de matemática em quatro disciplinas, Aritmética, Álgebra, Geometria e Trigonometria, no entanto não dura por muito tempo, ou seja, retorna o aparecimento único da disciplina de matemática, como é até hoje. Destaca-se ainda outra tentativa de mudança nas reformas de 1901, 1911 e

1915, quando tentam unir as disciplinas Física e Química transformando-as em única, outra tentativa que não persistiu, dessa forma após a coabitação manteve-se a vulgata anunciada no início desse parágrafo.

Ainda falando de vulgata, estreitamos nossa análise na disciplina de Matemática, em particular no que diz respeito ao ensino de álgebra. Para essa análise recorremos a oito programas de ensino do colégio Pedro II, dos seguintes anos: 1892, 1893, 1895, 1898, 1912, 1915, 1926 e 1929. Na análise realizada nesses programas destacamos o seguinte núcleo comum referente ao ensino de álgebra: Estudo sobre a composição dos polinômios - Adição, Subtração e Multiplicação; Resolução de equações do primeiro grau a uma incógnita; Resolução e composição de equações do segundo grau a uma incógnita; Sistemas de equações do primeiro grau; Progressões; e Logaritmos. Notamos também uma tentativa acentuada em inserir no estudo sobre polinômios a operação de potenciação elas aparecem em apenas três dos oito programas, ou seja, aparecem 1895, 1926 e 1929. Outro conteúdo, diferentemente da potenciação de polinômios que não consegue se unir a vulgata anterior, são as equações exponenciais que aparecem em seis dos oito programas, deixando de aparecer somente nos programas de 1892 e 1915, nesse caso nota-se que ela se une a essa vulgata.

Ainda nos remetendo a vulgata, outro ponto que ficamos atentos ao analisar esses documentos, foi à composição interna da disciplina, no nosso caso, mais particular do que se refere à composição interna do conteúdo de álgebra, uma vez que ao analisarmos em particular essa parte da matemática, observamos a ordem em que foi proposto o ensino dos conteúdos, essa ordem foi enunciada por mim no parágrafo anterior, quando descrevemos o núcleo comum do conteúdo de álgebra, ou seja, já enunciamos esse núcleo exatamente na ordem em que aparecem no programa de ensino do Colégio Pedro II, e que acreditamos ser a ordem em que devem ser ensinados.

Em síntese podemos concluir que na Álgebra presente nesses documentos, ensinada nessas quatro décadas (1890-1930), predominava uma vulgata composta de nove disciplinas, dentre elas encontra-se a disciplina escolar Matemática, e ao analisarmos o núcleo comum dos conteúdos dessa disciplina no período de 1890-1930, encontramos o domínio de estudo da Álgebra, e vinculado a este domínio temos o setor de estudo dos sistemas de equações que aparecem em todos os programas de ensino do Colégio Pedro II nestas quatro décadas analisadas.

Diante da observação de estar explícito nos programas de ensino, o conteúdo de sistemas de equações, fomos levados a analisar como era proposto este ensino, uma das formas de realizar esse estudo, é a análise dos livros didáticos utilizados nesse período, e essa foi a nossa opção, assim, ao longo desse trabalho pode ser vista a análise realizada por nós no *Tratado de Álgebra Elementar* de José Adelino Serrasqueiro. Cabe aqui ressaltar que esse tratado foi adotado por vinte e dois anos no colégio Pedro II nesses quarenta anos analisados.

No próximo tópico, destacamos sucintamente o nascimento da Álgebra Linear e sua implantação no ensino brasileiro através do Movimento da Matemática Moderna.

### 4.1.1 Um breve relato sobre a Álgebra Linear e o Movimento da Matemática Moderna no Brasil

Conforme (COIMBRA, 2008), os trabalhos que determinaram o desenvolvimento da Álgebra Linear moderna pertencem a Análise Funcional. No período de 1880 até 1930, vários matemáticos como Frédéric Riesz, Maurice Fréchet, Erhard Schmidt, Hans Hahn, Norbert Wiener, e Stefan Banach, estudaram espaços vetoriais de dimensão infinita. As pesquisas levaram ao conceito de espaços vetoriais de funções, e eventualmente à moderna apresentação axiomática de espaço vetorial.

Todos os autores citados, introduziram teorias gerais que também se aplicam à geometria. A geometria tem um destaque especial, por causa do vocabulário geométrico tais como ortogonalidade, distância, etc., que é usado na teoria geral. Leitores dos trabalhos de Riesz ou Schmidt provavelmente serão ajudados pelas analogias geométricas. Além de mostrar como se deu o desenvolvimento da Álgebra Linear, sua história mostra o quanto foi difícil sua compreensão pelos próprios matemáticos da época que custaram a perceber seu objeto próprio, como ideia unificadora, independente da geometria, com ideias gerais aplicáveis a várias áreas da matemática. Este fato é muito importante e é fonte, ainda hoje, de dificuldades de ordem epistemológica.

Brechenmacher (2006), reforça que nos tratados do ano 1930, trabalhos matemáticos distintos do passado foram apresentados como participantes de uma mesma teoria subjacente, como podemos ver no seguinte texto:

> A álgebra das matrizes é uma abstração matemática que subjaz teorias diversas. As formas bilineares e quadráticas, as álgebras lineares associativas ou sistemas

> hipercomplexos, as transformações lineares homogêneas e as funções lineares vetoriais são assim diferentes manifestações da álgebra das matrizes. Outros ramos das matemáticas como a teoria dos números, as equações diferenciais e integrais, as frações contínuas, a geometria projetiva etc. fazem uso deste assunto. De fato, numerosas propriedades fundamentais das matrizes primeiro têm sido descobertas numa aplicação específica, e apenas reconhecidas bem atrasado na sua generalidade. (MAC DUFFEE, 1933 *apud* BRECHENMACHER, 2006, p.41 – tradução nossa).

Ainda de acordo com Brechenmacher (2006, p.41), a teoria das matrizes foi um elemento importante do processo de unificação dos conhecimentos matemáticos que caracterizou o período de 1900 a 1930. Ela manifestou a construção de uma cultura comum a partir de práticas anteriormente distintas, mostrando-se ainda como objeto matemático que pôde fazer da história da álgebra linear uma história mais plural, não voltada apenas à emergência de estruturas, mas também atenta ao papel desempenhado pelas práticas, por conhecimentos e ideais sujeitos às redes das comunidades científicas.

Destacamos que o que impulsionou no Brasil a Álgebra linear foi o Movimento da Matemática Moderna, que começou a se impor no Brasil a partir de 1961 por ocasião da fundação, em São Paulo, do *Grupo de Estudos do Ensino da Matemática*, que reunia centenas de professores universitários e secundários de Matemática.

Conforme Neves (2009) para o professor Oswaldo Sangiorgi, se deveria ensinar a utilização de símbolos lógicos que correspondessem à precisão indispensável da ciência matemática, o que do ponto de vista desse professor, daria à matemática um aspecto moderno, faria desta, uma *Matemática Moderna*.

A Matemática Moderna se tratava então, de uma adaptação para o ensino da conciliação entre as três disciplinas básicas: Teoria dos Conjuntos, a Lógica Matemática e as Estruturas Algébricas. Em resumo, o que se pretendia com a Matemática Moderna era que, por meio dos conceitos de conjunto e estrutura, se colocasse em evidência a unidade da linguagem matemática. (NEVES, 2009)

Dessa forma destacamos a determinação da Álgebra Linear e sua implantação nas escolas brasileiras a partir do Movimento da Matemática Moderna. Ao analisarmos esses acontecimentos à luz da teoria a qual este trabalho se baseia, retomamos um elemento que acreditamos ser importante ressaltar nesse momento. Conforme (CHEVALLARD, 1999):

> “As praxeologias, de fato, envelhecem: seus componentes teóricos e tecnológicos perdem crédito e chegam a ser ofuscados, ao tempo que emergem novas tecnologias que, por contraste, põem sob suspeita, por arcaicas, as técnicas estabelecidas.” (p. 06)

Para exclarecer, pode-se utilizar como exemplo a "teoria das razões e proporções", que era uma praxeologia matemática local que permitia tratar e resolver problemas que envolviam proporcionalidade direta ou inversa. Com a reforma das "Matemáticas Modernas", tornam obsoletos vários elementos teóricos e tecnológicos das matemáticas clássicas, como essa que citamos.

Nesse trabalho, como visto, destacamos livros de dois períodos distintos, isso leva a destacar alguns elementos importantes a cada um desses períodos no que diz respeito ao ensino da álgebra. Em primeiro lugar, enfatizamos um movimento educacional importante denominado por Movimento da Matemática Moderna (MMM). Acreditamos ser este o marco de divisão da forma de ensino da álgebra. Ressaltamos que nessa pesquisa nosso foco não é estudar esse movimento, e sim, nos remetermos a elementos que influenciaram o processo de ensino do conteúdo matemático aqui analisado.

Destacamos que antes do MMM, ou seja, de acordo com Miguel, Fiorentini e Miorim (1992), desde 1799, momento em que a álgebra passa a fazer parte do currículo no Brasil, até início da década de 1960, prevaleceu um ensino de caráter reprodutivo, sem clareza, em que tudo era essencial. A matemática escolar apresentava-se dividida em compartimentos estanques. Primeiro estudava-se a aritmética, depois a álgebra e, em seguida, a geometria. Neste período, segundo esses autores, a álgebra apresentava um caráter mais instrumental, útil para resolver equações e problemas.

## 4.2 SEGUNDA PARTE – Análise de livros utilizados no Colégio Pedro II

**Tratado de Álgebra Elementar de José Adelino Serrasqueiro.**

### 4.2.1 Tipo de tarefa $T_1$ - Resolver Sistemas de Equações do Primeiro Grau que contenha o número de equações igual ao número de incógnitas.

Nesse tipo de tarefa foram reunidas as tarefas cujos enunciados levam o estudante a encontrar a solução de um sistema de equações algébricas lineares do primeiro grau que contenha duas ou três equações e consequentemente duas ou três incógnitas.

Para tornar mais compreensivo o tipo de tarefa acima enunciado vamos expressar as mesmas ideias que procuramos colocar na definição por meio de um registro algébrico, lembrando que esta linguagem não é apresentada no livro didático analisado. Em seguida transcreveremos um exemplo utilizado pelo autor, em outras palavras o tipo de tarefa é resolver o sistema de equações algébricas representado pelas seguintes equações:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 & (I) \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 & (II) \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 & (III) \end{cases}$$

onde os coeficientes ai, bi, ci, di $\in \mathbb{Z}$ com i = 1, 2, 3. Esse é um caso genérico que envolve três equações e três incógnitas, mas nos livros analisados podemos identificar outros exemplos com somente duas equações e duas incógnitas. Nos exercícios propostos nesses livros é possível ainda encontrar poucos casos envolvendo quatro equações com quatro incógnitas, na realidade esses casos são raríssimos e por esse motivo priorizamos analisar somente os sistemas com duas ou três equações.

Encontramos uma breve explicação neste mesmo livro dos casos onde há três equações e somente duas incógnitas ou, pelo contrário, duas equações e três incógnitas, e não encontramos sequer nenhuma tarefa referente a esses casos. Diante dessa ausência ficamos impossibilitados de analisar esses sistemas.

Para ilustrar o modelo matemático de sistemas de equações que contenha três equações e três incógnitas, recorremos a um exemplo que nós transcrevemos do Tratado de Álgebra Elementar, de José Adelino Serrasqueiro (16ª edição, 1929, p. 126), como exercício resolvido, para explicar o método da eliminação por substituição. Nesse momento, nós não vamos entrar na análise desse método porque nossa intenção é simplesmente exemplificar, no entanto, no próximo item faremos detalhadamente essa análise.

$$\begin{cases} 5x + 3y - 2z = 9 \\ 3x - 4y + 4z = 14 \\ 4x + 5y - 3z = 8 \end{cases}$$

Observamos nesse livro que o autor lança mão de cinco técnicas diferentes para resolver este tipo de tarefa. Essas cinco técnicas são as seguintes: *Substituição* $(\tau_1)$, *Comparação* $(\tau_2)$, *Redução* $(\tau_3)$, *Bezout* $(\tau_4)$ *e Cramer* $(\tau_5)$. Após identificar essas técnicas, passamos a analisar as cinco organizações praxeológicas correspondentes, as quais serão descritas a seguir.

#### 4.2.1.1 Organização praxeológica 1 – correspondente à técnica $(\boldsymbol{\tau_1})$

##### 4.2.1.1.1 Organização matemática

Para maior clareza da organização matemática do tipo de tarefa $T_{1,}$ vamos iniciar essa análise através do exemplo citado acima, que pode ser encontrado no livro do autor Serrasqueiro como exercício resolvido. É importante lembrar que a condução dessa análise praxeológica é descrever as práticas implementadas por cada autor nas propostas de resolução de cada tarefa.

Enfatizamos que, quando se tratar de uma prática ou de um argumento oriundo de nossas próprias concepções, pretendemos deixar isso claro para preservar nossa intenção de mostrar as organizações praxeológicas presentes nos livros analisados.

Em primeiro lugar, o autor inicia o capítulo II intitulado: *Equações e problemas do primeiro grau a muitas incógnitas*, com definições e princípios gerais em que fundamentam a resolução de equações a várias incógnitas, assim define o que vem a ser equações simultâneas e sistemas de equações da seguinte forma: *"Chamam-se equações simultâneas as que são satisfeitas pelos mesmos valores das incógnitas; e a reunião dessas equações constituem um sistema de equações"* (SERRASQUEIRO, 1929, p. 120). Em seguida, o autor define o que é resolver um sistema e o que vem a ser solução de um sistema da seguinte forma: *"Resolver um sistema é achar o valor das incógnitas que satisfazem ao mesmo tempo todas as equações. Solução de um sistema de equações é a reunião de valores das incógnitas que satisfazem ao mesmo tempo a todas as equações."* (SERRASQUEIRO, 1929, p. 120)

Em segundo lugar, o autor anuncia duas propriedades referentes as raízes de um sistema de equações demonstrando cada uma delas. As propriedades definidas por ele são as seguintes:

> a) As raízes de um sistema de equações não se alteram, quando se resolve uma das equações em ordem a uma das incógnitas, e se substitui o valor obtido em todas as outras equações.
> b) As raízes de um sistema de equações não se alteram quando se substitui uma d'elas pela equação que se obtem, combinando-a por meio da soma ou da subtração com uma ou mais equações do mesmo sistema. (SERRASQUEIRO, 1929, p. 120 e 121)

Demonstração da propriedade *a*

Supponhamos as equações

$$A = B,\ C = D,\ E = F \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

em que entram as incognitas $x$, $y$, $z$.

Resolvendo a primeira equação, em ordem a $x$, seja $x = B'$, sendo $B'$ uma expressão que contém $y$ e $z$, e substituindo este valor nas outras equações, supponhamos que ellas se convertem em $C' = D'$, $E' = F'$. Digo que o systema proposto é equivalente ao systema.

$$x = B',\ C' = D',\ E' = F' \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

As equações $A = B$ e $x = B'$ são equivalentes: porque passa-se da primeira para a segunda, transpondo os termos em $y$ e $z$ para o segundo membro e dividindo pelo coefficiente de $x$, o que não altera as raizes da equação. Além d'isto, as raizes do systema (1) tornam identicas as quantidades $x$ e $B'$: logo podemos substituir $x$ por $B'$ nas outras equações do systema (1); e como então resultam as equações do systema (1), segue-se que as raizes do primeiro systema são tambem raizes do segundo.

Reciprocamente, as raizes do segundo systema tornam identicas as quantidades $x$ e $B'$: logo podemos substituir $B'$ por $x$ nas outras equações d'este systema; e como então resultam as equações do systema (1), segue-se que as raizes do segundo systema são tambem raizes do primeiro. Portanto os dois systemas são equivalentes.

Demonstração da propriedade *b*

$$A = B,\ C = D,\ E = F \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Digo que o systema

$$A = B,\ C = D,\ A + C - E = B + D - F \ldots\ldots (2)$$

é equivalente ao proposto.

As raizes do systema (1) são tambem raizes das duas primeiras equações do systema (2), pois que estas equações são communs aos dois systemas. Além d'isto, as raizes do systema (1) tornam identicos os dois membros de cada equação: $A$ identico a $B$, $C$ a $D$ e $E$ a $F$: logo tornam $A + C - E$ identico a $B + D - F$, e por consequencia são tambem raizes da terceira equação do systema (2).

Reciprocamente, as raizes do systema (2) são tambem raizes das duas primeiras equações do systema (1), pois que estas equações são communs aos dois systemas. Além d'isto, as raizes do systema (2) tornam identicos os dois membros de cada equação: $A$ identico a $B$ e $C$ a $D$: logo tornam $A + C$ identico a $B + D$; e como tambem fazem $A + C - E$ identico a $B + D - F$, necessariamente tornam $E$ identico a $F$, e por consequencia são tambem raizes da terceira equação do systema (1). Portanto os dois systemas são equivalentes.

Figura 03 - Demonstrações do autor para as propriedades *a* e *b*. SERRASQUEIRO, 1929, p.120-122

Em terceiro lugar, o autor resolve uma tarefa, passo a passo, finaliza-a com a sistematização do método de eliminação por substituição, e o institucionaliza da seguinte forma:

> Tira-se de uma das equações o valor de qualquer incógnita, como se as outras fossem conhecidas; substitui-se este valor em todas as outras equações, e d'este modo temos de menos uma equação e de menos uma incógnita. Sobre as equações restantes opera-se do mesmo modo, e assim por diante até termos somente uma equação com uma incógnita, a qual resolvemos. O valor d'esta incógnita substitui-se no valor d'aquela que não entrar senão a que já esta conhecida, e faz-se o mesmo em relação ás incógnitas restantes. (SERRASQUEIRO, 1929, p. 127)

Em quarto lugar, anuncia uma nova tarefa e aplica essa mesma técnica agora já institucionalizada, resolve o exercício que por ele foi chamado de exemplo.

Ainda inserido na organização matemática do autor, destacamos a seguir a técnica $\tau_1$ proposta por ele para resolver o tipo de tarefa $T_1$. Nesse sentido apresentamos $\tau_1$ como técnica de eliminação por substituição juntamente com seus elementos tecnológicos no item abaixo:

**Técnica $\tau_1$ − Eliminação por Substituição**

Ao analisarmos o livro, destacamos essa técnica implementada pelo autor. A mesma é composta por quatro passos. O primeiro é isolar o valor de *x* na primeira equação do sistema. O segundo passo é substituir o valor de *x* obtido no passo anterior na (s) equação (ões) que ainda não foram utilizadas. Segue-se então, para o terceiro passo, que é isolar o valor de *y* na equação obtida no segundo passo. E por fim, o quarto passo, é substituir o valor de *y* na equação obtida no primeiro passo determinando dessa forma o valor de *x*.

Em conjunto à técnica descrita acima, identificamos no mesmo livro quatro elementos tecnológicos que justificam os quatro passos, os elementos são os seguintes: Equações do primeiro grau, princípio de equivalência de equações (aditivo e multiplicativo) sistemas equivalentes e primeira propriedade das raízes de um sistema de equações. Após o exemplo de aplicação da técnica passaremos a descrever melhor seus elementos tecnológicos.

Com a intenção de traduzir a ideia contida na $\tau_1$, consideramos interessante, articularmos os mesmos procedimentos contidos no registro escrito na língua materna com o seguinte registro algébrico:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & \quad (\,I\,) \\ a_2x + b_2y = c_2 & \quad (\,II\,) \end{cases}$$

onde os coeficientes $a_i$, $b_i$, $c_i$, $\in \mathbb{Z}$ com i = 1, 2.

Para que não cometamos o erro ingênuo da divisão por zero exigimos:

$a_1 \neq 0\,,\ a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0\ e\ a_1a_1b_2 - a_1a_2b_1 \neq 0$

**Primeiro passo:** Inicialmente escolhemos a equação *( I )* para isolar o valor de *x. (esta escolha é aleatória)*

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$x = \frac{c_1 - b_1y}{a_1}$$

**Segundo passo:** Após termos isolado o valor de *x*, na equação *( I )* vamos substituir este valor na equação *( II )* e vamos reduzi-la na forma *ay* = *x*

$$a_2x + b_2y = c_2$$

$$a_2\left(\frac{c_1 - b_1y}{a_1}\right) + b_2y = c_2$$

$$\frac{a_2c_1 - a_2b_1y}{a_1} + b_2y = c_2$$

$$\frac{a_2c_1}{a_1} - \frac{a_2b_1y}{a_1} + b_2y = c_2$$

$$-\frac{a_2b_1y}{a_1} + b_2y = c_2 - \frac{a_2c_1}{a_1}$$

$$\left(\frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1}\right)y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1}$$

Neste ponto estamos com a equação na forma *ay* em função de *x*, onde $a = \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1}$.

**Terceiro passo:** Agora da equação anterior vamos isolar o *y*

$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1} \times \left(\frac{a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}\right)$$

$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

**Quarto passo:** Para encontrar o valor de *x* vamos substituir o *y* encontrado no desenvolvimento acima, no primeiro passo realizado na resolução desta equação.

$$x = \frac{c_1 - b_1y}{a_1}$$

$$x = \frac{c_1 - b_1\left(\frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}\right)}{a_1}$$

$$x = \frac{c_1 + \frac{b_1a_2c_1 - b_1a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}}{a_1}$$

$$x = \left(c_1 + \frac{b_1a_2c_1 - b_1a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}\right) \times \frac{1}{a_1}$$

$$x = \frac{c_1}{a_1} + \frac{b_1 a_2 c_1 - b_1 a_1 c_2}{a_1 a_1 b_2 - a_1 a_2 b_1}$$

Desta forma colocamos o valor de *x* em função dos coeficientes $a_i$, $b_i$, $c_i$, como queríamos. Neste ponto finalizamos a resolução encontrando os valores de $x$ e $y$ que satisfazem a solução do sistema de equações do primeiro grau com duas equações e duas variáveis enunciado no problema.

Observamos que esta forma de resolução tornam explícitos os quatros passos da técnica utilizada e contemplam outra forma de expressar o processo utilizado para resolver o sistema, agora em uma linguagem algébrica. No entanto, é importante mencionar que este processo algébrico não se encontra no livro do Serrasqueiro e aqui foi introduzido no intuito de facilitar o entendimento do processo de resolução proposto. No livro, o autor resolve a partir de um exemplo numérico.

#### 4.2.1.1.1.1 Aspectos teóricos e tecnológicos da organização matemática de $\boldsymbol{\tau_1}$

Com referência aos elementos tecnológicos descritos acima, acreditamos tratar-se de um conteúdo da disciplina de matemática estudado no que hoje corresponde aos anos finais do ensino fundamental e, mais especificamente, é uma parte do domínio algébrico que é o estudo de sistemas de equações.

Ao analisar como foi conduzida essa organização matemática do livro do autor Serrasqueiro, achamos importante salientar que o autor inicia o tópico *Equações e problemas do primeiro grau a muitas incógnitas* com o processo de *eliminação por comparação*, em seguida apresenta o *método de eliminação por Substituição*, depois o de *eliminação por redução ao mesmo coeficiente* e o *método de Bezout* e por fim a *regra de Cramer*.

A fim de iniciar a descrição dos elementos teóricos e tecnológicos contidos na técnica descrita, recorremos a páginas anteriores deste mesmo livro onde encontramos o conteúdo de *Equações e problemas do primeiro grau a muitas incógnitas.* Com a intenção de escrever, com as palavras do próprio autor, alguns desses elementos tecnológicos utilizados por ele, iniciamos assim pela definição de equação que se encontra na página 80 que diz o seguinte "*Equação é a igualdade que contém uma ou mais incógnitas, e que somente tem lugar para certos e determinados valores das incógnitas*". Na página seguinte define grau de uma equação da seguinte forma:

> Depois de desembaraçada uma equação dos denominadores desconhecidos e dos radicais que afetam as incógnitas, chama-se grau de uma equação algébrica a soma dos expoentes das incógnitas no termo em que essa soma for a maior."(SERRASQUEIRO, 1929, p.82)

Ressaltamos que o autor para explicar a técnica de resolução utiliza o auxílio de um exercício resolvido, que aqui usaremos como modelo. Após enunciar o exemplo, o autor busca desenvolver a resolução explicitamente mediante o uso da tarefa, e assim justifica cada passo com teorias já enunciadas anteriormente no livro. Dentre elas temos o primeiro princípio relativo a equações simultâneas que o autor descreve como: *"Chamam-se equações simultâneas as que são satisfeitas pelos mesmos valores das incógnitas"* (SERRASQUEIRO, 1929, p. 120)

E também a primeira propriedade das raízes de um sistema de equações simultâneas, descrito pelo autor da seguinte forma:

> As raízes de um sistema de equações não se alteram, quando se resolve uma das equações em ordem a uma das incógnitas, e se substitui o valor obtido em todas as outras equações do sistema (SERRASQUEIRO, 1929, p.120).

Observa-se ainda na descrição da técnica e dos elementos tecnológicos, mais precisamente nas tecnologias que justificam as técnicas já descritas os seguintes elementos: Princípio de equivalência aditiva e multiplicativa. Para maior clareza, recorremos ao livro do Professor Jacomo Stávale (1935) - *Elementos de Matemática*, o autor explica que o princípio de equivalência aditiva de uma equação do primeiro grau, consiste em que se somarmos ou subtrairmos dos dois membros de uma equação uma mesma quantidade, consequentemente a equação obtida é equivalente a anterior, nas palavras do autor Serrasqueiro esse princípio é descrito da seguinte forma: *"As raízes de uma equação não se alteram, quando aos dois membros se junta ou tira uma mesma quantidade"* (SERRASQUEIRO, 1929, p.83). Analogamente, o princípio de equivalência multiplicativa consiste em multiplicar ou dividir ambos os membros de uma equação por uma mesma quantidade (diferente de zero), assim obteremos uma equação equivalente a anterior. O autor Serrasqueiro descreve esse princípio da seguinte forma: *"As raízes de uma equação não se alteram, quando os dois membros se multiplicam ou dividem pela mesma quantidade diferente de zero, contando que esta quantidade não contenha incógnita"* (SERRASQUEIRO, 1929, p.85).

#### 4.2.1.1.2 Organização didática

Neste trabalho compreendemos a organização didática como sendo o conjunto das técnicas, tecnologias e teorias, de natureza didática, utilizadas pelo autor para conduzir o estudo efetivo de um dado tipo de tarefa. Ao analisar o livro observamos como o autor organizou os conceitos e definições para conduzir o estudo de sistemas de equações, em particular, quando se trata da resolução de um determinado sistema de equações que contenha número igual de incógnitas e equações.

Diante das observações feitas acima é de grande valia analisar a técnica didática utilizada por ele, o autor Serrasqueiro, para ensinar o processo de resolução de sistemas de equações, em particular o método de resolução por substituição.

Para analisar a técnica didática utilizada pelo autor, correspondente a técnica matemática $\tau_1$, destacamos nas páginas do livro (126-129) três partes sequenciais, que vão desde o título *Método de Eliminação por Substituição* até iniciar o estudo da próxima técnica matemática. A primeira parte (p. 126-127) o autor inicia supondo um sistema que contenha três equações e três incógnitas, em seguida sua resolução detalhada, como mostra a figura a seguir:

**158.** METHODO DE ELIMINAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO. Supponhamos o systema

$$5x+3y-2z=9,\ 3x-4y+4z=14,\ 4x+5y-3z=8.$$

Tirando da primeira equação o valor de $x$, vem

$$x=\frac{9-3y+2z}{5};$$

substituindo este valor em cada uma das outras equações, não alteramos as raizes do systema (n.º 153); e resulta o systema equivalente

$$x=\frac{9-3y+2z}{5},$$

$$\frac{27-9y+6z}{5}-4y+4z=14,$$

$$\frac{36-12y+8z}{5}+5y-3z=8.$$

Como a incognita $x$ entra sómente na primeira equação, separámos esta equação que depois servirá para achar o valor d'esta incognita; e estamos reduzidos ás duas ultimas equações.

Applicando a estas equações o mesmo methodo, temos primeiro de as preparar. Para isso desembaraçando-as dos denominadores, temos

$$27-9y+6z-20y+20z=70,\ 36-12y+8z+25y-15z=40,$$

e transpondo e reduzindo

$$-29x+26z=43,\ 13y-7z=4.$$

Tirando da segunda equação o valor de $z$, vem

$$z=\frac{13y-3}{7};$$

substituindo este valor na outra equação, não alteramos as raizes do systema; e resulta o systema equivalente

$$z=\frac{13y-4}{7},\ -29y+\frac{338y-104}{7}=43;$$

e estas duas equações, junctamente com a equação separada, constituem um systema equivalente ao proposto.

Ora, como $z$ entra sómente na primeira das duas ultimas equações, separamos essa equação, que depois servirá para achar o valor de $z$; e estamos reduzidos sómente a uma equação com uma incognita. Resolvendo esta equação, vem successivamente

$$-203y+338y-104=301,\ 135y=405,\ y=\frac{405}{135}=3.$$

Substituindo o valor de $y$ na segunda equação separada obtém-se

$$z=\frac{39-4}{7}=5;$$

e substituindo os valores de $y$ e $z$ na primeira equação que puzemos de parte, resulta

$$x=\frac{9-9+10}{5}=2.$$

Portanto a solução do systema proposto é $x=2,\ y=3,\ z=5.$

Figura 04 - Exemplo de resolução: Eliminação por Substituição. SERRASQUEIRO 1929, p. 126 e 127

Nesse ponto do livro entendemos estar sendo sistematizada a técnica matemática de resolução a partir de um exemplo, e ainda, nessa resolução encontramos explicitamente alguns fragmentos da tecnologia que justifica essa técnica matemática. Na segunda parte que vem logo em seguida, mais precisamente no final da página 127 e início da 128, é realizada uma nova sistematização. Entretanto, dessa vez em forma de um texto corrido em que não aparece nenhum número ou incógnita. Em outras palavras, observa-se a tentativa, e é claro uma tentativa, em nosso entendimento, absolutamente positiva e correta de traduzir a resolução numérica através de um texto genérico que resolva qualquer exercício desse tipo. Essa sistematização pode ser vista na figura a seguir:

**159.** Consiste pois o methodo de substituição no seguinte: *Tira-se de uma das equações o valor de qualquer incognita, como se as outras fossem conhecidas; substitue-se este valor em todas as outras equações, e d'este modo temos de menos uma equação e de menos uma incognita.*

*Sobre as equações restantes opera-se do mesmo modo, e assim por deante até termos sómente uma equação com uma incognita, a qual resolvemos.*

*O valor d'esta incognita substitue-se no valor d'aquella, em que não entrar senão a que já está conhecida, e faz-se o mesmo em relação ás incognitas restantes.*

Figura 05 - Sistematização da técnica em língua materna. SERRASQUEIRO, 1929, p. 127 e 128. Grifo nosso.

No restante da página 128 e início da 129, é colocado uma outra tarefa, desse mesmo tipo, também contendo três equações e três incógnitas e novamente é resolvido pelo autor. No entanto, em nossa análise, não encontramos fragmentos explícitos da argumentação matemática associada a essa técnica de resolução, como foi encontrado no primeiro exemplo. Assim, acreditamos que a intenção de propor e resolver esse sistema, vem como uma tentativa de mostrar que a sistematização em forma de texto, como foi realizado, resolve esse tipo de tarefa.

Continuando nossa análise, no que diz respeito à organização didática do autor, descrevemos a seguir algumas observações quanto aos aspectos de linguagem e os momentos de estudo.

#### 4.2.1.1.2.1 Aspectos de linguagem e momentos de estudo

Diante da necessidade de propor o ensino de sistemas de equações, o autor lança mão de alguns elementos referentes à linguagem para apresentar esse conteúdo. Nesse instante destacamos os registros utilizados para propor o ensino do tipo de tarefa $T_1$ em particular no que se refere à técnica de resolução $\tau_1$. Observamos que no desenvolvimento dessa técnica, o autor utiliza apenas os registros na língua materna e o registro algébrico. Entendemos e definimos nesse trabalho, como linguagem materna, a escrita em língua portuguesa, sem o uso predominante de termos próprios da linguagem matemática. Por exemplo, o problema proposto pelo autor Serrasqueiro que diz o seguinte:

> "Um individuo deu a um criado, para comprar 8kg de açúcar e 3 de café, 3$000 réis; e o criado devia trazer 160 réis de troco. O criado porém enganou-se: comprou 3kg de açúcar e 8 de café, e teve de dar 540 réis do seu bolso. Qual era o preço do açúcar e qual o do café?" (SERRASQUEIRO, 1929, p. 178)

Observa-se que esta tarefa não apresenta termos próprios da matemática e é escrita em língua portuguesa, por estes fatores consideramos que ela encontra-se na forma de registro em língua materna. Nessa mesma vertente, definimos nesse trabalho como registro algébrico todo registro expresso a partir da utilização explícita de uma ou mais incógnitas. Por exemplo, na tarefa contida na p. 173, também do livro do autor Serrasqueiro, quando ele propõe para o aluno resolver o seguinte sistema $\begin{cases} 2x + y = 16 \\ 5x - y = 33 \end{cases}$, encontramos explicitamente as incógnitas $x$ e $y$ para expressarem valores desconhecidos a serem calculados. Consideramos então como um registro algébrico.

Ao analisarmos esse livro, no que diz respeito aos momentos de estudo referente à técnica $\tau_1$, destacamos a presença predominante do momento de institucionalização, uma vez que observamos, como explicitado anteriormente, três partes sequenciais utilizadas para o ensino dessa técnica, no entanto notamos ainda que tanto a primeira quanto a segunda e a terceira estão institucionalizam a técnica de resolução, porém, elas diferem pelo fato da primeira ser uma institucionalização a partir de um exemplo contendo fragmentos explícitos da tecnologia, já a segunda apresenta também uma institucionalização da técnica só que a partir de um texto na língua materna, e a terceira uma institucionalização também a partir de um exemplo que não contem fragmentos explícitos da tecnologia.

#### 4.2.1.2 Organização praxeológica 2 – correspondente à técnica $(\tau_2)$

##### 4.2.1.2.1 Organização matemática

Observamos na análise dessa organização praxeológica 2, organização essa que corresponde ao desenvolvimento da técnica $\tau_2$, descrita pelo autor como método de eliminação por comparação, que a organização matemática, a grosso modo, é constituída dos mesmos elementos da técnica $\tau_1$ diante dessa ocorrência optamos em não descrevê-la novamente, já que, ficaríamos repetindo elementos já descritos, e é claro, esse não é de forma alguma nosso objetivo. No entanto, destacamos no item abaixo, os passos dessa da técnica $\tau_2$ juntamente com seus elementos tecnológicos.

**Técnica $\boldsymbol{\tau_2}$ − Metodo de eliminação por comparação**

A técnica $\tau_2$, conforme nossa análise, é composta de cinco passos sequenciais. O primeiro passo, é isolar o valor de *x* em todas as equações do sistema, segue-se então paro o segundo passo, que é igualar os valores obtidos no passo anterior dois a dois, o terceiro passo, é isolar o valor de *y* na (s) equação (ões) obtidas no passo dois, o quarto passo é novamente igualar os valores obtidos no passo anterior dois a dois, e por fim, o quinto passo, de posse de valor numérico de uma das incógnitas ir aos passos três e um e mediante substituição encontrar o valor numérico das outras incógnitas.

Associado à técnica que descrevemos acima, encontramos e destacamos os seguintes elementos tecnológicos: Equações do primeiro grau, princípio de equivalência de equações (aditivo e multiplicativo), sistemas equivalentes e primeira propriedade das raízes de um sistema de equações.

Devemos observar que essa técnica refere-se a sistemas de equações que com três equações e três incógnitas. No entanto quando tivermos um sistema com duas equações e duas incógnitas, a técnica descrita continua válida, entretanto, devemos suprimir o passo quatro. Justificamos o aparecimento detalhado da técnica para sistemas de três equações, simplesmente por ser a técnica explicitada pelo autor do livro didático analisado.

Na intenção de traduzir a ideia contida em $\tau_2$, acreditamos ser interessante ao leitor extrairmos uma tarefa desse tipo, e resolvê-la a partir desta técnica, dessa forma recorremos novamente ao livro do autor Serrasqueiro, p. 122, e retirei a seguinte tarefa:

$$\begin{cases} 3x - 4y + 5z = 10 & (I) \\ 7x - 3y + 6z = 19 & (II) \\ 5x + 2y - 2z = 3 & (III) \end{cases}$$

Assim utilizando a técnica descrita no quadro acima, resolvemos do seguinte modo:

**Primeiro passo:** Isolar o valor de *x* em todas as equações do sistema.

de $(I)$temos $\quad$ de $(II)$temos $\quad$ de $(III)$temos

$$x = \frac{10 + 4y - 5z}{3} \qquad x = \frac{19 + 3y - 6z}{7} \qquad x = \frac{3 - 2y + 2z}{5}$$

**Segundo passo:** Igualar os valores obtidos no passo anterior dois a dois.

de $(I)$ e $(II)$temos $\quad$ de $(II)$ e $(III)$temos

$$\frac{10 + 4y - 5z}{3} = \frac{19 + 3y - 6z}{7} \qquad \frac{19 + 3y - 6z}{7} = \frac{3 - 2y + 2z}{5}$$

$$19y - 17z = -13 \qquad 26y - 31z = -41$$

**Terceiro passo:** Isolar o valor de *y* nas equações obtida no passo 2.

$$y = \frac{-13 + 17z}{19} \qquad y = \frac{-41 + 31z}{26}$$

**Quarto passo:** Igualar os valores obtidos no passo anterior dois a dois.

$$\frac{-13 + 17z}{19} = \frac{-41 + 31z}{26}$$

$$z = 3$$

**Quinto passo:** De posse do valor numérico desta variável ir ao passo 1 e ao 3 substituir para encontrar o valor das outras variáveis.

Do passo 3 temos $y = \frac{-13+17z}{19}$, logo como z = 3 temos que y = 2

Do passo 1 temos $x = \frac{10+4y-5z}{3}$, logo como z = 3 e em y = 2 temos que x = 1

Assim a solução do sistema proposto é *z = 3*, *y = 2* e *x = 1*.

#### 4.2.1.2.1.1 Aspectos teóricos e tecnológicos da organização matemática de $\tau_2$

Ao desenvolver a análise dessa organização praxeológica, mais precisamente no que se refere aos elementos tecnológicos da organização matemática em que essa técnica encontra-se inserida, observamos que os elementos tecnológicos da técnica $\tau_2$ são idênticos aos da técnica $\tau_1$. Entretanto, nota-se a diferença na cronologia em que eles aparecem. Em nosso entendimento isso ocorre pelo fato dos passos dessa técnica se diferenciarem dos passos da técnica anterior e é claro que se isso não ocorresse não estaríamos diante de duas técnicas.

#### 4.2.1.2.2 Organização didática

Ao analisarmos o livro, observamos a semelhança em conduzir o ensino das técnicas de resolução deste tipo de tarefa no que se refere a $\tau_1$ e $\tau_2$, no entanto, ressaltamos que essas semelhanças se caracterizam, a grosso modo, na seguinte sequência: Primeiro supor um sistema de três equações e resolvê-lo, seguido de uma sistematização a partir do registro na língua materna e finaliza em mais uma tarefa resolvida.

Apesar do autor seguir a mesma organização didática utilizada para o ensino da técnica $\tau_1$ destacamos um elemento novo nessa segunda organização. É o fato do autor solicitar que se isole a incógnita *x*, ele completa a frase dizendo para considerar como se as incógnitas *z* e *y* fossem conhecidas. Fragmento esse que não encontramos na explicação da técnica $\tau_1$. Em nosso entendimento, essa dica do autor auxilia os alunos no ato de isolar a mesma incógnita em todas as equações do sistema, e isso é justamente o primeiro passo da técnica $\tau_2$.

##### 4.2.1.2.2.1 Aspectos de linguagem e momentos de estudo

Ao analisarmos os aspectos de linguagem utilizados pelo autor desse livro no que diz respeito à $\tau_2$, não nos surpreendeu o fato de serem bastante semelhantes com os utilizados em $\tau_1$, até mesmo porque se assemelham também, a organização matemática, os aspectos teóricos e tecnológicos dessa organização, e assim, esperávamos certa semelhança também nos aspectos de linguagem e nos momentos de estudo. Dessa forma detectamos que ele mantém o mesmo padrão de sistematizar em três passos, utiliza como registros de linguagem, apenas o registro algébrico e o registro na língua materna.

### 4.2.1.3 Organização praxeológica 3 – correspondente à técnica $(\boldsymbol{\tau_3})$

#### 4.2.1.3.1 Organização matemática

Ao realizarmos a análise referente a essa praxeologia, novamente nos deparamos com uma organização matemática muito semelhante às outras praxeologias já descritas em $\tau_1$ e $\tau_2$, o que nos leva a crer que o autor desse livro didático segue um determinado padrão ao propor o ensino desse conteúdo, no entanto, destacamos a seguir os passos da técnica $\tau_3$, juntamente com seus elementos tecnológicos.

**Técnica $\tau_3$ − Redução ao Mesmo Coeficiente**

A técnica que passaremos a descrever é composta de cinco passos. O primeiro passo consiste em multiplicar a primeira e/ou a segunda equação (ões) por um determinado número, de forma a tornar iguais os coeficientes da incógnita que se quer eliminar. O segundo passo é subtrair ou somar a primeira com a segunda equação, de tal maneira a eliminar uma das incógnitas. Segue-se então, para o terceiro passo, que consiste em repetir os passos um e dois com a primeira e a terceira equação. No quarto passo, deve-se repetir novamente os passos um e dois com a segunda e terceira equação. E por fim, o quinto passo consiste em que, de posse do valor numérico da variável, ir à equação obtida no passo três e mediante substituição encontrar o valor da segunda incógnita, em seguida substituir na primeira equação os valores das incógnitas encontradas a fim de descobrir o último valor.

Associado a essa técnica, identificamos neste mesmo livro os seguintes elementos tecnológicos: Equações do primeiro grau, princípio de equivalência de equações (aditivo e multiplicativo), sistemas equivalentes e primeira propriedade das raízes de um sistema de equações.

A técnica explicitada acima, refere-se a um sistema de equações algébricas lineares que contenha três equações e três incógnitas. No caso de se ter somente duas equações e duas incógnitas essa mesma técnica é válida, basta apenas suprimir os passos três e quatro. Ressaltamos que ao colocarmos a técnica $\tau_3$ de forma explícita para sistemas de três equações, estamos mostrando como ela é proposta pelo autor do livro didático analisado, essa observação quanto a sistemas com duas equações é oriunda de conclusões nossas em aplicar essa mesma técnica nos casos de sistemas com duas equações, essa aplicação ocorreu oriunda de diversas tentativas de resolução de sistemas propostos pelo próprio autor do livro no tópico intitulado por ele como *Exercícios.* Ali observamos sistemas com duas equações e duas incógnitas, assim como três equações e três incógnitas e apenas alguns casos de quatro equações e quatro incógnitas.

Segue um exercício resolvido pelo autor Serrasqueiro que pode ser encontrado na p.129 de seu livro, tal registro mostra passo a passo a técnica $\tau_3$ aplicada a uma tarefa desse tipo.

$$\begin{cases} 6x - 3y + 4z = 12 & (I) \\ 5x + 5y - 2z = 9 & (II) \\ -8x + 8y - 3z = -1 & (III) \end{cases}$$

**Primeiro passo:** Multiplicar a 1ª e/ou 2ª equação (ões) por um determinado número, de forma a tornar iguais os coeficientes da incógnita que se quer eliminar.

Nesse caso multiplicamos a *(I)* por 5 e a *(II)* por 6, assim temos;

$$\begin{cases} 6x - 3y + 4z = 12 & \otimes \mathbf{5} \quad (I) \\ 5x + 5y - 2z = 9 & \otimes \mathbf{6} \quad (II) \\ -8x + 8y - 3z = -1 & (III) \end{cases} \qquad \begin{cases} 30x - 15y + 20z = 60 & (I) \\ 30x + 30y - 12z = 54 & (II) \\ -8x + 8y - 3z = -1 & (III) \end{cases}$$

**Segundo passo:** Subtrair ou somar a 1ª da 2ª equação.

$$\begin{cases} 30x - 15y + 20z = 60 & (I) \\ 30x + 30y - 12z = 54 & (II) \\ -8x + 8y - 3z = -1 & (III) \end{cases} \quad \textbf{(I) - (II)} \begin{cases} 30x - 15y + 20z = 60 & (I) \\ -45y + 32z = 6 & (II) \\ -8x + 8y - 3z = -1 & (III) \end{cases}$$

**Terceiro passo:** Repetir o processo 1 e 2 com a 1ª e 3ª equações.

$$\begin{cases} 6x - 3y + 4z = 12 & \otimes \mathbf{4} \ (I) \\ -45y + 32z = 6 & (II) \\ -8x + 8y - 3z = -1 & \otimes \mathbf{3} \ (III) \end{cases} \qquad \begin{cases} 24x - 12y + 16z = 48 & (I) \\ -45y + 32z = 6 & (II) \\ -24x + 24y - 9z = -3 & (III) \end{cases}$$

$$\text{(I) +(III)} \begin{cases} 6x - 3y + 4z = 12 & (I) \\ -45y + 32z = 6 & (II) \\ 12y + 7z = 45 & (III) \end{cases}$$

**Quarto passo:** Repetir o processo 1 e 2 com a 2ª e 3ª equações. (Lembrando que no processo dois considera a 2ª e 3ª)

$$\begin{cases} 6x - 3y + 4z = 12 & (I) \\ -45y + 32z = 6 \quad \otimes \mathbf{7} & (II) \\ 12y + 7z = 45 \quad \otimes \mathbf{32} & (III) \end{cases} \qquad \begin{cases} 24x - 18y + 16z = 48 & (I) \\ -315y + 224z = 42 & (II) \\ 384y + 224z = 1440 & (III) \end{cases}$$

$$\text{(III) -(II)} \begin{cases} 6x - 3y + 4z = 12 & (I) \\ -45y + 32z = 6 & (II) \\ 699y = 1398 & (III) \end{cases} \text{ daí temos que } y = \frac{1398}{699} = 2$$

**Quinto passo:** De posse do valor numérico da variável ir à equação obtida no passo 3 e substituir para encontrar o valor da segunda incógnita, em seguida, substituir na 1ª equação os valores da incógnitas encontradas afim de descobrir o último valor.

A equação obtida no passo três é $-45y + 32z = 6$ substituindo $y$ temos que $z = 3$

A primeira equação é $6x - 3y + 4z = 12$, substituindo $y$ e $z$ temos que $x = 1$. Assim obtemos a solução desta tarefa.

#### 4.2.1.3.1.1 Aspectos teóricos e tecnológicos da organização matemática de ($\tau_3$)

Enfatizamos nesse presente momento que as três técnicas de resolução de sistemas de equações, analisadas por nós se assemelham. Consequentemente concluímos que os elementos teóricos e tecnológicos dessa organização também são semelhantes. No entanto, ao nos referirmos a técnica $\tau_3$, mais precisamente aos elementos tecnológicos dessa técnica, observamos explicitamente o aparecimento de uma nova tecnologia que não aparece nos elementos tecnológicos de $\tau_1$ e $\tau_2$, estamos falando da segunda propriedade das raízes de um sistema, que justifica a ação de somarmos ou subtrairmos duas equações de um sistema e que essa operação de forma alguma venha mudar a solução do sistema proposto. Nas palavras do autor Serrasqueiro essa propriedade é apresentada da seguinte forma:

> As raízes de um sistema de equações não se alteram quando se substitui uma d'elas pela equação que se obtem, combinando-a por meio da soma ou da subtração com uma ou mais equações do mesmo sistema. (SERRASQUEIRO, 1929, p. 120 e 121)

#### 4.2.1.3.2 Organização didática

Diante do desafio de analisar a organização didática referente a essa técnica, nos deparamos novamente com uma proposta muito parecida com a que encontramos nas técnicas descritas anteriormente. No entanto, um ponto que nos chamou bastante a atenção, no que diz respeito à organização didática proposta pelo autor para a técnica $\tau_3$, é que, ao finalizar os passos realizados nessa técnica, explicita a ideia de que o *Método de eliminação por redução ao mesmo coeficiente,* dentre os três métodos já citados, é o mais simples e ainda expõe a ideia de que só diante da tarefa proposta é que podemos decidir qual técnica utilizar. Esse comentário didático, em nosso entendimento, se justifica pelo fato de expor para o aluno como deve ser escolhido o método de resolução. Em outras palavras, de preferência deve-se escolher a que torne mais fácil a obtenção dos resultados, visto que, segundo os elementos tecnológicos, qualquer que seja a técnica escolhida se chegará aos resultados pretendidos.

Um ponto nessa organização didática que nos deixou bastante angustiados foi o fato dele levantar essa ideia de ser a técnica $\tau_3$ a mais simples das três, pois observa-se ainda a presença de mais duas técnicas de resolução para esse mesmo tipo de tarefa. Em nosso entendimento seria mais oportuno finalizar com essa questão de qual das cinco técnicas ao invés das três é a mais simples para se resolver esse tipo de tarefa. Podemos justificar parcialmente pelo fato de serem colocadas as outras duas técnicas somente após esse comentário, mesmo assim, continuamos acreditando que seria mais oportuno fazer esse comentário ao final das cinco, pois, certamente pode haver o questionamento sobre qual das cinco técnicas se utilizará para resolver um determinado sistema.

#### 4.2.1.3.2.1 Aspectos de linguagem e momentos de estudo

Diante de nossa análise quanto aos aspectos de linguagem utilizados para o ensino dessa técnica, observamos que nenhum ostensivo novo aparece em relação às técnicas analisadas anteriormente. Isso deixa claro, em nosso entendimento, uma resistência pelo autor em utilizar diferentes ostensivos, uma vez que, observamos repetidamente apenas dois registros (registro na língua materna e registro algébrico) para o ensino dessas três técnicas, é claro mesmo utilizando somente esses dois registros. Em nosso entendimento, estão muito bem organizados e claras as explicações do autor quanto às técnicas de resolução.

### 4.2.1.4 Organização praxeológica 4 – correspondente à técnica $(\boldsymbol{\tau_4})$

#### 4.2.1.4.1 Organização matemática

No decorrer da análise da organização matemática do autor quanto à técnica de resolução $\tau_4$, notamos a forte semelhança com as organizações das outras técnicas. O ponto que se destaca nessa técnica é o fato dele, o autor, utilizar exemplos algébricos, para explicar essa nova técnica, e além desses exemplos genéricos um exemplo particular e ainda explicita a ideia de que se pode encontrar, a primeira vista, sistemas que aparentemente não podem ser resolvidos aplicando $\tau_4$, entretanto basta utilizar um artifício para remediar esse inconveniente e assim aplicar tranquilamente essa técnica.

**Técnica $\tau_4$ − Método de Bezout ou das Indeterminadas**

Essa técnica é composta de cinco passos sequenciais, são eles: Primeiro passo, multiplicar ambas as equações, cada uma por um fator indeterminado. Passa-se então para o segundo passo, somar a primeira equação com a segunda. O terceiro passo consiste em escolher uma incógnita e igualar seu coeficiente a zero isola um dos fatores indeterminados atribui um valor a um deles obtem o valor do outro. O quarto passo é isolar a incógnita que restar depois de igualar um dos coeficientes a zero e aplicar os valores dos termos indeterminados encontrados no passo três. De posse do valor numérico da incógnita obtida do quarto passo, segue-se então para o quinto e último passo que é: utiliza a primeira equação, substituir para encontrar o valor da segunda incógnita.

Associado a essa técnica, identificamos neste mesmo livro os seguintes elementos tecnológicos: Equações do primeiro grau. Princípio Multiplicativo de equivalência de equações. Sistemas equivalentes. Primeira propriedade das raízes de um sistema de equações. Segunda propriedade das raízes de um sistema de equações.

Aplicando a técnica acima descrita apresentamos a seguir um exercício ilustrativo resolução de uma tarefa encontrada no livro pg. 146, aplicando a técnica $\tau_4$ de forma a resolvê-la.

$$\begin{cases} 3x + 4y = 26 \quad (I) \\ 9x - 7y = -17 \quad (II) \end{cases}$$

**Primeiro passo:** Multiplicar ambas a equações por fatores indeterminados. Nesse caso vamos utilizar *m* para a equação *(I)* e *m'* para equação *(II)*, assim temos:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 26 \quad \otimes\ m \ \ (I) \\ 9x - 7y = -17 \quad \otimes\, m' \ \ (II) \end{cases} \qquad \begin{cases} 3mx + 4my = 26m \quad (I) \\ 9m'x - 7m'y = -17m' \quad (II) \end{cases}$$

**Segundo passo:** Somar a primeira com a segunda equação.

$$3mx + 9m'x + 4my - 7m'y = 26m - 17m'$$

$$(3m + 9m')x + (4m - 7m')y = 26m - 17m'$$

**Terceiro passo:** Do passo dois, escolher uma incógnita e igualar seu coeficiente a zero, isolando um dos fatores indeterminados, atribuindo um valor a um deles obtendo o valor do outro.

Nesse caso escolhemos o coeficiente de y, assim temos que;

$$4m - 7m' = 0 \text{ donde } m = \frac{7m'}{4} \text{ atribuindo para } m' = 4 \text{ temos } m = 7$$

**Quarto passo:** Isolar a incógnita que restar depois de igualar um dos coeficientes a zero e aplicar os valores dos termos indeterminados encontrados no passo 3.

$$(3m + 9m')x = 26m - 17m'$$

$$x = \frac{26m - 17m'}{3m + 9m'} \text{ donde } x = \frac{26X7 - 17X4}{3X7 + 9X4} = 2$$

**Quinto passo:** De posse do valor numérico da incógnita obtida do passo 4, utilizando a primeira equação, substituir para encontrar o valor da segunda incógnita.

$$3x + 4y = 26, \text{como } x = 2 \text{ temos } 3X2 + 4y = 26 \text{ donde } y = 5$$

#### 4.2.1.4.1.1 Aspectos teóricos e tecnológicos da organização matemática de $\tau_4$

Ao desenvolver a análise dessa organização praxeológica, mais precisamente no que se refere aos elementos tecnológicos da organização matemática em que essa técnica encontra-se inserida, observamos que os elementos tecnológicos da técnica $\tau_4$ são idênticos aos da técnica $\tau_1$, em consequência disso não repetiremos a descrição desses elementos.

#### 4.2.1.4.2 Organização didática

No que diz respeito à organização didática associada a essa técnica, observamos que para desenvolvê-la, o autor se distancia um pouco de como vinha organizando as outras técnicas. Nesse caso destacamos que dentre as cinco praxeologias analisadas referentes a esse tipo de tarefa, essa foi a que ele destinou um maior número de páginas, vai do final dá 138 a 146. Dividimos então essas oito páginas em sete passos. No primeiro passo ele dá informações sobre esse novo método e diz que sua principal vantagem é eliminar de uma só vez todas as incógnitas menos uma, informação que acreditamos ser bastante oportuna, já que ele explicita a ideia para o aluno deste ser um método bastante eficaz na resolução de sistemas, uma vez que pode despertar no educando o seguinte questionamento: já que aprendi três técnicas de resolução para que aprender mais uma? Caso ocorra esse questionamento o autor já o respondeu até mesmo antes dele ser levantado.

No segundo, ele considera um sistema geral de duas equações e duas incógnitas e aplicando o método o resolve. Como pode ser visto na figura abaixo:

**167.** Consideremos em primeiro logar as duas equações geraes a duas incognitas:

$$ax+by=c,\ a'x+b'y=c' \ldots\ldots\ldots\ldots\ (1);$$

multiplicando a primeira por um factor indeterminado $m$, isto é, por um factor, a que podemos dar qualquer valor, vem

$$max+mby=mc,$$

e, sommando esta equação com a segunda, resulta

$$(ma+a')x+(mb+b')y=mc+c' \ldots\ldots\ldots\ (2).$$

Sendo $m$ um factor indeterminado, podemos dispor d'elle em ordem a tornar nullo o coefficiente de $y$, isto é, em ordem a tornar

$$mb+b'=0:$$

e então a equação (2) converte-se em

$$(ma+a')x=mc+c',\ \text{d'onde}\ x=\frac{mc+c'}{ma+a'};$$

substituindo n'esta formula o valor de $m$, dado pela equação de condição, que é $m=-\frac{b'}{b}$, vem

$$x=\frac{-\frac{cb'}{b}+c'}{-\frac{ab'}{b}+a'}=\frac{-cb'+bc'}{-ab'+ba'}=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'},$$

e d'este modo temos $x$ conhecido.

Para determinar $y$, dispomos em (2) do factor indeterminado $m$ em ordem a tornar nullo o coefficiente de $x$, isto é, em ordem a tornar

$$ma+a'=0,$$

o que converte a equação (2) em

$$(mb+b')y=mc+c',\ \text{d'onde}\ y=\frac{mc+c'}{mb+b'};$$

substituindo n'esta formula o valor de $m$ dado pela equação de condição, que é $m=-\frac{a'}{a}$, vem

$$y=\frac{-\frac{ca'}{a}+c'}{-\frac{ba'}{a}+b'}=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}.$$

Figura 06 - Resolução de sistemas de equações pelo método de Bezout. SERRASQUEIRO, 1929, p. 139.

No terceiro passo considera um sistema geral de três equações e três incógnitas também o resolvendo, em nosso entendimento fica claro nesses itens a tentativa de generalizar esse método para quaisquer sistema de duas ou três equações, pois ele utiliza para ambos sistemas genéricos e em sua resolução obtêm, é claro, respostas genéricas. Esse é um dos pontos que diferenciam esta das organizações didáticas referentes às três primeiras praxeologias, já que nelas eram utilizados exemplos numéricos e não exemplos como esses, genéricos. Chamou-nos a atenção o porquê somente nesse método serem utilizados esses exemplos genéricos, acreditamos que a ideia dessa exposição foi realizada dessa forma pelo fato dessa técnica não ir eliminando passo a passo cada incógnita, e sim, eliminar de uma só vez todas menos uma, nesse caso, acreditamos na necessidade de explicar com mais detalhes esses procedimentos assim como explicitar a sua funcionabilidade para qualquer que seja o sistema proposto.

No quarto passo, após realizar a generalização de forma algébrica é realizada uma nova generalização dessa técnica de resolução. No entanto, agora é feita através de um texto, que não contém nenhum número e muito menos alguma incógnita. Isso pode ser visto na figura abaixo:

**169.** Consiste pois o methodo de Bezout no seguinte:
*Multiplicam-se todas as equações menos uma por factores indeterminados, e sommam-se membro a membro, as equações resultantes e a que não foi multiplicada.*
*Na equação assim obtida egualam-se a zero os coefficientes de todas as incognitas menos uma, d'este modo temos uma equação, em que entra sómente uma incognita do systema proposto, a qual resolvemos; e no valor d'essa incognita substituem-se os valores dos factores indeterminados, dados pelas equações da condição.*
*Tendo assim determinado o valor de uma incognita, os valores das outras obtêm-se repetindo os mesmos calculos.*

Figura 07 - Sistematização do método de Bezout na língua materna.
SERRASQUEIRO, 1929, p. 143. Grifo nosso.

Nesse ponto observamos certa semelhança com as outras três praxeologias. Após dar um exemplo o autor ele sistematiza em forma de texto, e nesse caso não foi diferente.

No quinto passo ele realiza uma aplicação a um sistema particular de três equações resolvendo-o passo a passo. Acreditamos que nessa parte ele tenta mostrar para o aluno que o caso genérico aplica-se a qualquer caso particular, inclusive nesse caso resolvido por ele.

O sexto passo se caracteriza por ser o ponto que o autor busca explicar o fato de termos sistemas nos quais, aparentemente, não se pode aplicar esse método, no entanto, explica como remediar essa inconveniência, mas enfatiza que o método pode ser aplicado a qualquer sistema. Já no sétimo passo são trazidas por ele algumas variantes do método de Bezout, dizendo que alguns autores adaptam alguns elementos a fim de facilitar a sua aplicação. Em nosso entendimento, ao finalizar esse método explicitando ao leitor a existência dessas variações o autor nos mostra que está bem atualizado quanto às publicações de livros didáticos, e ainda, traz o método proposto por Bezout e a adaptação feita por outros autores explicando ambas ao aluno, nesse ponto deixa a critério do educando qual ele deve aplicar em suas resoluções.

#### 4.2.1.4.2.1 Aspectos de linguagem e momentos de estudo

Mesmo dividindo a organização didática referente ao ensino dessa técnica, em nossa análise notavelmente observamos apenas a utilização dos mesmos registros de linguagem utilizados nas técnicas descritas anteriormente. No entanto, ao nos referirmos aos momentos de estudo, ainda predomina a sistematização da técnica, só que ao nos referirmos a $\tau_4$ essa sistematização ainda é mais forte, pois, dos sete passos da organização didática, apenas o primeiro explicita a ideia de que o método de Bezout elimina todas as incógnitas menos uma. Ainda não é um momento de institucionalização, logo os outros seis então voltados à institucionalização da técnica, um que sistematiza a resolução de sistemas com duas equações genericamente, o outro também genericamente sistematiza sistemas com três equações, a sistematização em língua materna, a sistematização a partir de um exemplo particular, sistematização de uma adaptação da técnica e a sistematização de outro exemplo.

### 4.2.1.5 Organização praxeológica 5 – correspondente à técnica $(\boldsymbol{\tau_5})$

#### 4.2.1.5.1 Organização matemática

Observamos na análise dessa organização praxeológica 5, que corresponde ao desenvolvimento da técnica $\tau_5$, descrita pelo autor como regra de Cramer, que a organização matemática, a grosso modo, é constituída dos mesmos elementos das outras técnica explicitadas nesse trabalho. Diante dessa ocorrência optamos em não descrevê-las novamente. Mas, destacamos no item abaixo, os passos dessa da técnica $\tau_5$ juntamente com seus elementos tecnológicos.

**Técnica $\boldsymbol{\tau_5}$ – Regra de Cramer**

A técnica $\tau_5$, conforme nossa análise, é composta de quatro passos sequenciais. O primeiro, é construir o denominador comum das fórmulas gerais, para isso, escreve-se, à direita do coeficiente da primeira incógnita, o coeficiente da segunda, daí, troca-se o lugar das letras, e muda-se de sinal na passagem de um para o outro. O segundo, introduzir o coeficiente da terceira incógnita em todos os lugares a partir da direita; muda-se de sinal na passagem de um para o outro lugar, e assim sucessivamente até introduzir o coeficiente da última incógnita. O terceiro, aplicar um acento a segunda letra de cada termo, dois a terceira, e assim por diante. O quarto e último passo é construir o numerador de cada incógnita, para isso, basta substituir no denominador comum os coeficientes da incógnita, de que se trata, pelos segundos membros das equações respectivas.

Associado à técnica que descrevemos acima, não encontramos explicitamente no livro elementos tecnológicos, por esse motivo, não vamos inferir nenhuma argumentação a esse respeito.

Devemos observar que essa técnica refere-se a sistemas de equações que contenham três equações e três incógnitas. No entanto quando tivermos um sistema que contenha duas equações e duas incógnitas, a técnica descrita continua válida, entretanto, devemos suprimir o passo dois. Justificamos o aparecimento detalhado da técnica para sistemas de três equações, simplesmente por ser a técnica explicitada pelo autor do livro didático analisado.

Na intenção de traduzir a ideia contida em $\tau_5$, acreditamos ser interessante ao leitor extrairmos uma tarefa desse tipo, e resolvê-la a partir desta técnica, dessa forma recorremos novamente ao livro do autor Serrasqueiro, (1929, p. 146), e retiramos a seguinte tarefa:

$$\begin{cases} ax + by + cz = d & (I) \\ a'x + b'y + c'z = d' & (II) \\ a''x + b''y + c''z = d'' & (III) \end{cases}$$

*Construindo o denominador comum*

**Primeiro passo:** Escrever, à direita do coeficiente da primeira incógnita, o coeficiente da segunda trocando o lugar das letras, e mudando de sinal na passagem de um para o outro.

$$ab - ba$$

**Segundo passo:** Introduzir o coeficiente da terceira incógnita em todos os lugares a partir da direita; muda-se de sinal na passagem de um para o outro lugar. (Obs: como temos três equações e três incógnitas, devemos ter do *ab*, *c* no início, no meio e no fim. De modo análogo em *ba*. Assim temos:

$$abc - acb + cba - bac + bca - cba$$

**Terceiro passo:** Aplicar um acento a segunda letra de cada termo e dois à terceira.

$$ab'c'' - ac'b'' + cb'a'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''$$

Deste modo temos construído o denominar comum.

**Quarto passo:** Construir o numerador de cada incógnita, ou seja, substituir no denominador comum os coeficientes da incógnita, de que se trata, pelos segundos membros das equações respectivas.

$$x = \frac{db'c'' - dc'b'' + cb'd'' - bd'c'' + bc'd'' - cb'd''}{ab'c'' - ac'b'' + cb'a'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''}$$

$$y = \frac{ad'c'' - ac'd'' + cd'a'' - da'c'' + dc'a'' - cd'a''}{ab'c'' - ac'b'' + cb'a'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''}$$

$$z = \frac{ab'd'' - ad'b'' + db'a'' - ba'd'' + bd'a'' - db'a''}{ab'c'' - ac'b'' + cb'a'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''}$$

#### 4.2.1.5.1.1 Aspectos teóricos e tecnológicos da organização matemática de $\tau_5$

Ao analisarmos o livro, no que diz respeito à organização didática do autor José Adelino Serrasqueiro, novamente observamos a semelhança em conduzir o ensino das técnicas de resolução deste tipo de tarefa. Ressaltamos que essas semelhanças se caracterizam, a grosso modo, na seguinte sequência: Primeiro supor um sistema de três equações e resolvê-lo, seguido de uma sistematização a partir do registro na língua materna e finalmente em mais uma tarefa resolvida.

Mesmo seguindo a mesma organização didática utilizada para o ensino da técnica $\tau_1$ destacamos um elemento novo nessa organização. É o fato do autor, ao finalizar a sistematização da técnica em língua materna, advertir que essa técnica $(\tau_5)$ aplica-se com vantagem à resolução das equações literais, porém nas equações numéricas o seu emprego torna-se trabalhoso, em virtude das operações que temos de fazer para calcular as fórmulas. E ainda, para resolver um sistema de equações numéricas, devemos primeiro construir as fórmulas, que resolvem o sistema geral a que pertence o sistema, e depois devemos substituir nessas fórmulas as letras pelos seus valores respectivos.

#### 4.2.1.5.2 Organização didática

Ao analisarmos os aspectos de linguagem utilizados pelo autor desse livro no que diz respeito a essa técnica, não nos surpreendeu o fato de serem bastante semelhantes com os utilizados nas técnicas anteriores, até mesmo porque se assemelham também, a organização matemática, e assim, esperávamos certa semelhança também nos aspectos de linguagem e nos momentos de estudo. Dessa forma detectamos que ele mantém o mesmo padrão de sistematizar em três passos, utilizando como registros de linguagem, apenas o registro algébrico e o registro na língua materna.

#### 4.2.1.6 Fechamento das cinco Organizações Praxeológicas.

Em síntese, observamos que mesmo expondo as técnicas de resolução do tipo de tarefa $T_1$, em cinco organizações praxeológicas distintas, o autor consegue de forma organizada e clara transmitir as ideias que acreditamos serem as principais. Uma delas está diretamente ligada à qual das técnicas deve ser utilizada na resolução de uma tarefa desse tipo, pois qualquer que seja a técnica usada irá resolver o problema, outro ponto é o de articular também, de forma clara, a linguagem do registro em língua materna com o registro algébrico de tal forma a tornar, em nosso entendimento as explicações das técnicas de resolução muito mais acessíveis aos alunos, ou seja, aqueles que tem dificuldade nos registro algébricos se apóiam no registro em língua materna ou pelo contrário, os que tem dificuldade no registro em língua materna se apóiam nos registros algébricos. No entanto, ao analisar essas praxeologias quanto aos momentos de estudo, observamos que é predominante, ou até mesmo, único a presença apenas do momento de institucionalização da técnica.

### 4.2.2 Tipo de tarefa $T_2$ – Resolver um problema cuja solução recaia em um sistema de equações algébricas lineares do primeiro grau com o número de equações igual ao número de incógnitas.

Agrupamos nesse tipo de tarefa, todas as tarefas propostas pelo autor que levam o aluno a extrair os dados de um determinado problema, e por fim, ao realizar esta ação, encontrar um sistema de equações lineares do primeiro grau que contenha o número de equações igual ao número de incógnitas. Diante deste sistema, o aluno deve resolvê-lo para encontrar assim, a solução do problema proposto. Dentre muitos problemas que estão incluídos nesse tipo de tarefa $T_2$, problemas estes, que podem ser lidos em nosso anexo I, temos este, que utilizaremos em particular como exemplo:

> "Um individuo deu a um criado, para comprar 8kg de açúcar e 3 de café, 3$000 réis; e o criado devia trazer 160 réis de troco. O criado porém enganou-se: comprou 3kg de açúcar e 8 de café, e teve de dar 540 réis do seu bolso. Qual era o preço do açúcar e qual o do café?" (SERRASQUEIRO, 1929, p. 178)

#### 4.2.2.1 Organização Matemática

Para propor o ensino da resolução desse tipo de tarefa $T_2$ o autor organiza de forma sequencial seis tarefas desse mesmo tipo. O próprio autor logo após enunciar cada uma delas explicita a sua resolução. Em seguida define soluções positivas da seguinte forma:

> As Soluções positivas satisfazem sempre ás equações, mas nem sempre satisfazem ao problema, em virtude de certas condições que não se podem exprimir por meio de equações. Assim, as soluções positivas não satisfazem ao problema, quando, admitindo esta somente soluções inteiras, as equações dão para as incógnitas valores fracionários; ou então, quando a natureza do problema marca certos limites para o valor das incógnitas, e os valores obtidos excedam esses limites. (SERRASQUEIRO, 1929, p. 163)

Segue, então, dois exemplos de soluções positivas, em seguida o autor define as soluções negativas e conclui o seguinte:

> Uma solução negativa denota que a grandeza, representada pela incógnita, se deve tomar em sentido contrário d'aquele em que se tomou; porém se essa grandeza não for susceptível de se tomar em dois sentidos opostos, a solução negativa denota que o problema é impossível. N'esse caso, se quisermos verificar o enunciado do problema, devemos mudar x em –x na equação; e depois devemos transformar o enunciado do problema de modo que corresponda a nova equação. (SERRASQUEIRO, 1929, p. 167)

Para finalizar sua organização matemática, ele faz menção a respeito da solução infinita que é considerado pelo autor como a indicação em geral da impossibilidade das equações e dos problemas que lhe deram origem.

Agora passamos a descrever os passos da técnica proposta pelo autor, assim como seus elementos tecnológicos. Conforme nosso entendimento, essa técnica é composta por três passos, que são os seguintes: Primeiro passo consiste em escrever o problema proposto na forma de um sistema de equações. O segundo passo é resolver o sistema proveniente do passo anterior, e por fim, o terceiro passo analisar a solução obtida.

Associado a essa técnica de resolução destacamos ainda no livro do autor Serrasqueiro os seguintes elementos tecnológicos: equações do primeiro grau, princípio multiplicativo de equivalência de equações, sistemas equivalentes, primeira propriedade das raízes de um sistema de equações e segunda propriedade das raízes de um sistema de equações.

A fim de mostrar que o conjunto dos passos da técnica que descrevemos acima, em nosso entendimento está coerente, utilizaremos o exemplo enunciado anteriormente, resolvendo-o a partir desses passos, e a seguir realizamos uma análise dos elementos tecnológicos associados a essa técnica.

**Primeiro passo:** escrever o problema na forma de um sistema de equações.

Chamando o quilo do açúcar de *x* e o quilo do café de *y*, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 8x + 3y = 3000 - 160 \\ 3x + 8y = 3000 + 540 \end{cases}$$

**Segundo passo:** resolver o sistema proveniente do passo 1.

$$\begin{cases} 8x + 3y = 2840 \\ 3x + 8y = 3540 \end{cases}$$

Utilizando $\tau_1$, temos que $x = \frac{2840 - 3y}{8}$, daí conclui-se que $x = 220$ e $y = 360$. Portanto o quilo do açúcar custa 220 réis e o quilo do café 360 réis.

**Terceiro passo:** Analisar a solução.

Observamos que o quilo do açúcar assim como o do café são números positivos, pois nesse caso não teríamos como comprar uma quantidade negativa de nenhum dos alimentos. Sendo assim podemos concluir que 220 e 360 é, portanto, uma possível solução do problema.

#### 4.2.2.1.1 Aspectos teóricos e tecnológicos da organização matemática $\tau_6$

Ao retomarmos novamente aos aspectos teóricos e tecnológicos de uma organização matemática, agora em particular referente à $\tau_6$, se repetem os mesmos elementos contidos nas outras tecnologias, diante desse caso, acreditamos não ser necessário repetir as explicações já realizadas. Entretanto, ao nos referirmos ao primeiro passo da técnica, recorremos às palavras do próprio autor para esclarecer esse passo quando diz:

> Por um problema em equação é exprimir por uma ou mais equações as relações que ligam entre si as quantidades conhecidas e desconhecidas, que entram no enunciado do problema. Para pôr um problema em equação não ha regras fixas e invariáveis, como para resolver as equações; temos porém o seguinte processo, pelo qual muitas vezes se consegue estabelecer a ou as equações do problema: Representa-se as quantidades desconhecidas por meio de letras; e depois indicam-se por meio de sinais as operações que faríamos para verificar os valores das incógnitas, se eles fossem conhecidos. (SERRASQUEIRO, 1929, p.102)

#### 4.2.2.2 Organização Didática

Ao analisar a organização didática correspondente a técnica $\tau_6$, notamos uma grande diferença quanto às organizações didáticas das técnicas descritas anteriormente. No entanto, é claro, existem algumas semelhanças, como por exemplo, a utilização de exercícios resolvidos para sistematizar a técnica de resolução. Mas o autor ao tratar de $\tau_6$, torna ainda mais evidente essa utilização, pois para tratar desse assunto, ele utiliza um total de onze exercícios resolvidos. Em nosso entendimento essa utilização de muitos exercícios é uma opção do autor, na busca de mostrar diversas problemáticas nas quais se pode aplicar esse conteúdo da matemática. Um dos pontos que nos chamou bastante a atenção, foi o fato, dessa organização, em nosso entendimento, estar de forma bem estruturada quanto a integração do tipo de tarefa $T_1$. Em outras palavras, ficamos contentes com a articulação feita pelo autor, quando utiliza algumas técnicas que resolvem as tarefas do tipo $T_1$ como um dos passos da técnica $\tau_6$. Outro ponto que nos chamou a atenção, foi que dentre esses problemas anunciados e resolvidos pelo autor está o seguinte problema:

> Um correio partiu de uma estação, caminhando 5 léguas em duas horas. Passadas 9 horas, partiu um segundo correio, caminhando 11 léguas em 3 horas. Pergunta-se a que distância este encontrará o primeiro. (SERRASQUEIRO, 1929, p.160)

A utilização desse problema em sua organização nos leva a crer que o autor estava muito bem informado, quando se refere a problemas tradicionais, visto que esse em particular, conforme nosso entendimento, pode ser uma adaptação do problema que a historiadora dos problemas Maria João Lagarto[15], nomeia como o *problema dos correios*, de acordo com essa autora, sua primeira versão encontra-se em uma aritmética portuguesa impressa no Porto e datada de 1555, *Tratado da Arte da Aritmética*, de Bento Fernandes. O impressionante é a existência de um segundo problema, também histórico que é chamado também pela historiadora de *problema das torneiras* cuja primeira versão dele acredita-se ter aparecido praticamente em simultâneo tanto na Alexandria como na China. Na Alexandria, Herão (10? - 75?), no seu livro *Métrica*, enuncia dois problemas envolvendo cisternas, e na China, o problema aparece no capítulo VI do livro *Nove capítulos da Arte Matemática*, de cerca do século I a.C.

---

[15] Maria João Lagarto – dados no site
http://www.malhatlantica.pt/mathis/problemas/macas/macas.htm#top

Assim, em nosso entendimento, isso nos mostra a potencialidade dos problemas propostos por José Adelino Serrasqueiro em sua obra *Tratado de Álgebra Elementar*.

#### 4.2.2.2.1 Aspectos de linguagem e momentos de estudo

Ao fazer menção a essa parte da organização didática do autor, percebemos ainda o predomínio dos dois aspectos de linguagem citados no tipo de tarefa $T_1$, são eles o registro na língua materna e o registro algébrico, no entanto, nesse momento há uma utilização maior do registro na língua materna, uma vez que, observamos essa forte presença tanto no enunciado dos problemas quanto nas resoluções propostas pelo autor desses mesmos problemas.

Quanto aos momentos de estudo, ao analisarmos esse tipo de tarefa, em nosso entendimento, nos deparamos na presença constante e única do momento de institucionalização da técnica, visto que ao enunciar uma tarefa desse tipo em seguida é feita sua resolução mostrando todos os passos da técnica que resolve esse tipo de tarefa. Em outras palavras, das onze tarefas propostas e resolvidas pelo autor para explicar esse tipo de tarefa, ele, institucionaliza a técnica de resolução, justamente através dessas tarefas.

### 4.2.3 Organização Matemática do Livro

Em primeiro lugar, o autor inicia o capítulo II de sua obra, capítulo este com o seguinte título: *Equações e problemas do primeiro grau a muitas incógnitas*, com definições e princípios gerais que fundamentam a resolução de muitas equações a muitas incógnitas, assim se define o que vem a ser equações simultâneas e sistemas de equações da seguinte forma: *"Chamam-se equações simultâneas as que são satisfeitas pelos mesmos valores das incógnitas; e a reunião dessas equações constituem um sistema de equações"* (SERRASQUEIRO, 1929, p. 120), em seguida o autor define o que é resolver um sistema e o que vem a ser solução de um sistema da seguinte forma *"Resolver um sistema é achar o valor das incógnitas que satisfazem ao mesmo tempo todas as equações. Solução de um sistema de equações é a reunião de valores das incógnitas que satisfazem ao mesmo tempo a todas as equações."* (SERRASQUEIRO, 1929. p. 120)

Em segundo lugar o autor enuncia duas propriedades referentes às raízes de um sistema de equações do primeiro grau e demonstra cada uma delas. As propriedades definidas por ele são as seguintes.

> a) As raízes de um sistema de equações não se alteram, quando se resolve uma das equações em ordem a uma das incógnitas, e se substitui o valor obtido em todas as outras equações.
> b) As raízes de um sistema de equações não se alteram quando se substitui uma d'elas pela equação que se obtem, combinando-a por meio da soma ou da subtração com uma ou mais equações do mesmo sistema. (SERRASQUEIRO, 1929, p. 120 e 121)

Em terceiro lugar, a partir de um exemplo no qual o autor resolve passo a passo, define-se o método de resolução de eliminação por comparação da seguinte forma:

> Tira-se de cada equação o valor da mesma incógnita, como se as outras fossem conhecidas; igualam-se estes valores dois a dois e assim temos de menos uma equação e de menos uma incógnita. Sobre as equações restantes opera-se do mesmo modo, e assim por diante até termos somente uma equação com uma incógnita, a qual resolvemos. O valor d'esta incógnita substitui-se no valor d'aquela, em que não entrar senão a que já está conhecida; e o mesmo se faz em relação ás incógnitas restantes. (SERRASQUEIRO, 1929, p. 124)

Em quarto lugar, o autor resolve mais um exemplo com o uso do método de resolução de eliminação por comparação.

Em quinto lugar anuncia uma nova tarefa e resolve mediante a utilização de um novo método, ao final da resolução da tarefa ele define este novo método que é chamado de eliminação por substituição da seguinte forma:

> Tira-se de uma das equações o valor de qualquer incógnita, como se as outras fossem conhecidas; substitui-se este valor em todas as outras equações, e d'este modo temos de menos uma equação e de menos uma incógnita. Sobre as equações restantes opera-se do mesmo modo, e assim por diante até termos somente uma equação com uma incógnita, a qual resolvemos. O valor d'esta incógnita substitui-se no valor d'aquela que não entrar senão a que já esta conhecida, e faz-se o mesmo em relação ás incógnitas restantes. (SERRASQUEIRO, 1929, p. 127)

Em sexto lugar o autor resolve outra tarefa e utiliza o mesmo método de resolução de eliminação por substituição.

Desta mesma forma, o autor finaliza sua explicação quanto ao tipo de tarefa $T_1$, e anuncia uma tarefa. Resolve-a e define um novo método de resolução, apresenta uma nova tarefa resolvida com este mesmo método definido, e assim define os seguintes métodos: Eliminação pela Redução e Método de Bezout ou método das Indeterminadas, o primeiro é definido da seguinte forma:

> Compara-se as equações duas a duas, transformando-as de modo que se tornem iguais os coeficientes da incógnita que se quer eliminar. Para isso, se os dois coeficientes forem primos entre si, multiplica-se cada equação pelo coeficiente da incógnita na outra; e, se não forem primos entre si, procurar-se

> o menor múltiplo dos dois coeficientes, e multiplicam-se as duas equações pelos coeficientes que resultarem da divisão d'esse menos múltiplo por cada um dos ditos coeficientes. Feito isto, somam-se ou subtraem-se as duas equações, segundo os termos, em que entra a incógnita de que se trata, tiverem diferentes ou os mesmos sinais; e d'este modo temos de menos uma equação e de menos uma incógnita. Sobre as equações restante opera-se de mesmo modo, até termos uma equação com uma incógnita, que resolvemos. O valor d'esta incógnita substitui-se n'aquela equação, em que não entrar senão uma outra incógnita; e o mesmo se faz para achar as incógnitas restantes. (SERRASQUEIRO, 1929, p. 131)

Já o segundo é definido assim:

> Multiplicam-se todas as equações menos uma por fatores indeterminados, e somam-se membro a membro, as equações resultantes e a que não foi multiplicada. Nas equações assim obtidas igualam-se a zero os coeficientes de todas as incógnitas menos uma, d'este modo temos uma equação em que entra somente uma incógnita do sistema proposto, a qual resolvemos; e no valor d'essa incógnita substituem-se os valores dos fatores indeterminados, dados pelas equações da condição. Tendo assim determinado o valor de uma incógnita, os valores das outras obtêm-se repetindo o mesmo cálculo. (SERRASQUEIRO, 1929, p. 143)

Tendo em vista a análise realizada nesse livro, fica nítido que a organização didática do autor Serrasqueiro no que diz respeito às técnicas de resolução do tipo de tarefa $T_1$, consiste em anunciar uma tarefa desse tipo, resolvê-la explicitando uma técnica em seguida definir em que consiste essa técnica e finalmente apresentar de uma tarefa resolvida a partir desta técnica definida. E assim o autor segue com esse mesmo esquema até finalizar a explicação das cinco técnicas de resolução para esse tipo de tarefa. Nota-se ainda na organização didática desse autor, tarefas tanto aritméticas quanto algébricas, o que nos agradou muito observar que ele, o autor, não dá importância somente para exercícios aritméticos tão pouco a exercícios algébricos, pelo contrário, ele lança mão de ambos os tipos de exercícios.

### 4.2.4 Organização didática, aspectos de linguagem e momentos de estudo do livro.

No que diz respeito à organização didática, nota-se a opção do autor em manter uma mesma organização quando se trata do tipo de tarefa $T_1$, apesar de serem apresentados cinco métodos de resolução de sistemas, métodos estes que descrevemos como técnicas de resolução, o autor insiste em manter a mesma organização didática para a apresentação de ambos, diante desse fato, achamos desnecessário escrever novamente essa organização, já que a descrevemos no tópico organização didática contida na técnica $\tau_1$.

Quanto aos aspectos de linguagem destacam-se a escrita em língua materna e o registro algébrico que são trabalhados de forma simultânea, já que ao desenvolver qualquer tarefa a partir de uma escrita algébrica, ao final, o autor sistematiza essa resolução mediante o uso de um texto na língua materna.

Ao analisar este livro, no que diz respeito aos momentos de estudos, notam-se as mesmas ocorrências já descritas por nós no tópico momentos de estudo da técnica $\tau_1$, acreditamos que essa repetição acontece pelo fato da organização matemática, assim como os aspectos de linguagem, se repetirem, diante desse fato optamos em não repetir a descrição desses momentos uma vez que já o fizemos nesse trabalho.

## 4.3 TERCEIRA PARTE - Análise dos PCN e do Guia do livro didático PNLD-2008.

Nosso objetivo com a análise dos PCN e do Guia de Livros Didáticos PNLD-2008, é sobretudo, identificar elementos significativos para nós, que contemplem o processo de ensino e aprendizagem de Sistemas de Equações Algébricas Lineares, para isso extraímos um total de 68 unidades de registros, da seguinte forma: 41 dos PCN subdivididas em 21 nas quais aparece explicitamente a palavra álgebra e 20 associadas explicitamente à palavra equações. No que se refere às outras 27, são unidades retiradas do Guia do PNLD-2008 nas quais em cinco delas encontramos a palavra equação e em 21 delas a palavra álgebra. De posse dessas unidades de registros, sentimos a necessidade de agrupá-las em categorias, e assim definimos sete categorias que descrevemos a seguir.

**Categoria 01 - Linguagem**

Definimos esta categoria e agrupamos as unidades significativas que acreditamos suscitar no leitor certos pensamentos acerca de quais elementos de linguagem os autores lançam mão para o ensino do conteúdo de matemática nos livros didáticos, em particular os sistemas de equações. Sendo assim, destacamos unidades que utilizam, dentre outros termos, os seguintes: linguagem atual, linguagem familiar, linguagem acessível, linguagem coloquial, linguagem algébrica, linguagem aritmética, linguagem geométrica e linguagem simbólica.

A fim de tornar explicitas algumas dessas unidades significativas, após uma leitura e interpretação dos textos oficiais, incluímos um total de dezesseis unidades significativas do PCN e quatro do PNLD-2008 nessa categoria. A categoria ao todo pode ser vista em nosso anexo II, no entanto destacamos uma das unidades significativas para podermos realizar algumas observações no que se refere a essa categoria.

Assim destacamos a seguinte unidade significativa do PNC:

> É interessante também propor situações em que os alunos possam investigar padrões, tanto em sucessões numéricas como em representações geométricas e identificar suas estruturas, construindo a linguagem algébrica para descrevê-los simbolicamente. Esse trabalho favorece a que o aluno construa a idéia de Álgebra como uma linguagem para expressar regularidades. (BRASIL,1998, p. 117. Grifo nosso)

Torna-se visível, em nosso entendimento, a presença nessa unidade das observações quanto à utilização da linguagem, em diferentes aspectos, hora na forma explicitamente numérica, hora na forma explicitamente geométrica e é claro hora na forma explicitamente álgebra. Entendemos que essa é uma observação muito pertinente realizada nesse documento, pois, entendemos também que a utilização de diversos tipos de linguagem para expor uma ideia vem, é claro, somar no processo de ensino e aprendizagem, uma vez que, o aluno estará em contato com essas linguagens em sua vida escolar.

**Categoria 02- Contextualização**

Na categoria da contextualização, definida por nós, agrupamos unidades significativas, que expõem o ensino da matemática escolar de forma a aproximá-lo de seus usos em diversos contextos, mostrando-o como um saber inserido na cultura e na história. Em outras palavras, inserimos nessa categoria de análise todas as unidades que nos remetem à utilização da matemática escolar, quer na própria matemática, quer nas práticas sociais ou até mesmo em outras áreas do conhecimento, assim levamos em consideração unidades de registros que utilizam os termos, situação-problema, problemas do cotidiano e utilização da matemática em outras áreas. Dessa forma agrupamos nessa categoria um total de sete unidades significativas do PCN e uma do PNLD-2008. Dessa forma destacamos a seguinte unidade:

> A percepção de regularidades, que pode levar à criação de modelos simbólicos para diversas situações, e a capacidade de traduzir

> simbolicamente problemas encontrados no dia-a-dia, ou provenientes de outras áreas do conhecimento, devem ser gradativamente desenvolvidas para se chegar ao uso pleno da linguagem e das técnicas da álgebra. (BRASIL, 2008, p. 16. Grifo nosso)

Nessa unidade significativa extraída do PNLD-2008, fica explícito a ideia da categoria que definimos como contextualização, dessa forma conseguimos agrupar elementos como esse, que diz respeito aos problemas escritos de forma a contemplar as situações do dia-a-dia do aluno e, ou até mesmo a utilização da matemática em outras áreas de conhecimento. Essa categoria pode ser vista ao todo no anexo III.

**Categoria 03 – Sistematização**

Nessa categoria agrupamos as unidades significativas que estão diretamente ligadas à determinação de que maneira consiste, de acordo com a cultura de uma determinada instituição, a organização matemática previamente estabelecida de um conteúdo matemático, aqui em particular dos sistemas de equações. Associado a esta categoria entendemos estar ligado os seguintes termos; sintaxe das representações, regras para resolução, classificações, padrões e generalizações.

Dessa forma extraímos um total de treze unidades significativas, em que nove são do PCN e quatro do PNLD-2008. Assim destacamos a seguinte unidade significativa para utilizar como exemplo a essa categoria, e enfatizamos que as unidades significativas que compõem essa categoria se encontram no anexo IV. Notamos no fragmento a seguir que o documento busca explicitar uma das funções da álgebra, e ainda enfatiza a existência, que entendemos ser instituída por uma determinada instituição, a existência de dois momentos de preparação para o uso desta parte da matemática.

> Há ainda a função da álgebra para exprimir relação entre grandezas ou conjuntos numéricos, que se realiza, por exemplo, por meio de estudo de funções. Existem dois momentos de preparação para tal uso da álgebra. O estudo de regularidades em seqüências numéricas ou de figuras é um deles (...). Uma outra é a expressão de relações funcionais, como as fórmulas de área de figuras planas, por exemplo. (BRASIL, 2008, p.44. Grifo nosso)

**Categoria 04 - Articulação**

Definimos esta categoria e inserimos nela frases que entendemos resgatar aspectos referentes à junção de diferentes campos de conteúdo, a união entre o conhecimento novo e o conhecimento já visto, o trabalho conjunto entre conceitos, algoritmos e procedimentos ou até mesmo a ausência ou defasagem desses elementos. Dessa forma destacamos três unidades significativas que estão agrupadas nessa categoria. A fim de uma melhor compreensão do leitor transcrevemos uma delas, porém as outras se encontram no anexo V.

> O trabalho com a Álgebra também está presente em atividades e problemas envolvendo noções e conceitos referentes aos demais blocos, como ao generalizar os procedimentos para calcular o número de diagonais para qualquer polígono, ao indicar a expressão que relaciona duas grandezas, ao calcular medidas da tendência central de uma pesquisa. (BRASIL,1998, p.84. Grifo nosso)

Nessa unidade destacamos o fato do documento estar fazendo menção a articulação da álgebra com outros blocos de conhecimento, bloco que ele exemplifica a seguir com a geometria e a estatística.

**Categoria 05 - Técnicas, Procedimentos e Métodos**

Inserimos nessa categoria as unidades de registros que explicitam o modo de fazer, ou seja, de que modo resolver uma determinada questão. Em outras palavras, ao lermos estes fragmentos, fomos levados a pensar em um conjunto de elementos próprios que articulados nos conduzem a realização de uma determinada tarefa.

Assim encontramos um total de quatorze unidades significativas que podem ser vistas no anexo VI, no entanto, como exemplo, extraímos a seguinte unidade e grifamos os pontos explícitos ligados a essa categoria:

> Nesse documento, recomenda-se que o estudo das técnicas convencionais para resolver equações seja desenvolvido apenas no quarto ciclo, pois em caso contrário os conteúdos do terceiro ciclo ficarão mais extensos, dificultando o trabalho com os demais blocos. Entretanto, é possível que nesse ciclo os alunos traduzam algumas situações problema por equações. (BRASIL, 1998, p. 122. Grifo nosso)

**Categoria 06 – Organização do Estudo da Álgebra**

Compomos esta categoria com as unidades significativas que remetem, em nosso entendimento, de forma explícita uma proposta ligada a uma determinada estrutura do setor do ensino da Álgebra. Ou seja, construímos esta categoria, a partir de unidades que nos levaram a observar certa proposta de como organizar o ensino da Álgebra. Isso fica claro na seguinte unidade de registro retirada do PCN, que nos diz respeito ao ensino da álgebra:

> Para uma tomada de decisões a respeito do ensino da álgebra, deve-se ter, evidentemente, clareza de seu papel no currículo, além da reflexão de como a criança e o adolescente constroem o conhecimento matemático, principalmente quanto à variedade de representações. (BRASIL, 1998, p.116. Grifo nosso)

Nessa categoria destacamos um total de trinta unidades significativas que podem ser vistas por completo no anexo VII.

**Categoria 07 – Cidadania**

A Categoria Cidadania foi constituída por nós com as unidades significativas, que expõe em seu contexto ideias que valorizam a construção pelo aluno, a participação, a ação, a compreensão, a autonomia dentre outros elementos que consideramos aqui, elementos que contribuem para uma formação cidadã do indivíduo. Dessa forma destacamos um total de cinco unidades significativas que podem ser lidas no anexo VIII, no entanto transcrevemos em seguir uma delas para exemplificar ao leitor.

> O estudo da Álgebra constitui um espaço bastante significativo para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização, além de lhe possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para resolver problemas. (BRASIL, 1998, p. 115. Grifo nosso)

Dessa destacamos nessa unidade, o fato do documento expor a ideia de que o estudo da álgebra proporciona certa capacidade de abstração e generalização, dessa forma acreditamos ser uma ferramenta que torna, em nosso entendimento, o educando autônomo na resolução de algumas tarefas e isso, com certeza, é um ponto positivo.

## 4.4 QUARTA PARTE – Sistemas de Equações do Primeiro Grau em livros contemporâneos

Como introdução a este tópico, inicialmente vamos inserir nosso objeto de estudo na teoria que vem nos dando suporte para a análise, a Teoria Antropológica do Didático, e com isso recorremos aos níveis do saber.

Conforme podemos observar o programa de ensino vinculado à formação de 6º ao 9º ano no Brasil é composto por algumas *disciplinas*, como Português, Geografia, História, Matemática, dentre outras. Em nossa pesquisa, a disciplina a qual vamos focalizar é a Matemática. Por sua vez, a disciplina é composta por alguns *domínios de estudo*, como a Aritmética, que estuda os números suas propriedades e as operações que se pode efetuar com eles e a Geometria que se ocupa com linhas, ângulos, figuras e sólidos. Entretanto, nosso interesse é na Álgebra que entendemos ser o ramo da Matemática que estuda as generalizações dos conceitos e operações da Aritmética. Em outras palavras, o *domínio de estudo* que estamos observando é o algébrico. De acordo com análises realizadas no Guia de livros didáticos PNLD – 2008, nesse *domínio de estudo* temos os seguintes *setores*: equações, inequações, sistemas de equações e sistemas de inequações. *Setores* estes no âmbito de 6º ao 9º ano.

Nossa pesquisa visa analisar dentre estes setores os sistemas de equações do primeiro grau que contenham duas equações e duas incógnitas, uma vez que observamos a possibilidade de se ter sistemas de equações com mais de duas equações e com inúmeras incógnitas de grau superior ao primeiro.

**Matemática Paratodos de Luiz Marcio Imenes e Marcelo Lellis**

Nesse momento vamos descrever a análise geral das praxeologias que entendemos estarme contidas no livro *Matemática Paratodos* - oitavo ano do ensino fundamental, de Luiz Marcio Imenes e Marcelo Lellis, livro publicado em 2006 pela editora Scipione. Este se vincula em uma coleção de quatro livros que são destinados ao sexto, sétimo, oitavo e nono ano do ensino fundamental. De acordo com o PNLD 2008: "Os conteúdos da coleção são bem escolhidos e abordados com base em situações significativas e contextualizadas. Também são retomados, ampliados e aprofundados ao longo dos livros, sempre de forma significativa." (BRASIL, 2008. p.114)

Os autores formulam este livro em treze capítulos, acrescido de sete tópicos; (1) *problemas e exercícios complementares*; (2) *supertestes para auto-avaliação;* (3) *dicionário;* (4) *conferindo respostas;* (5) *sugestão de leitura;* (6) *referências bibliográficas* e (7) *bloco de folhas especiais*, totalizando um exemplar com 323 páginas. Nosso trabalho tem como foco o décimo segundo capítulo intitulado *"Sistemas de equações"*, para este capítulo o autor destinou quatorze páginas.

O *setor de estudo* que analisamos nesse livro encontra-se praticamente no final do exemplar. Na primeira página, os autores iniciam esse setor (Sistemas de equações) com a seguinte Seção "Ação". Em nosso entendimento esta seção é utilizada para compor o que Chevallard chama de primeiro encontro, ou seja, é o momento em que o aluno se depara pela primeira vez com esse tipo de tarefa, que o autor chama de quebra-cabeça. Nesse ponto é indagada à possibilidade de se fazer grupos para discutir e resolver, e ainda, vale usar qualquer método de resolução. Instante importante, em nosso entendimento, uma vez que, quando os autores dizem que pode ser resolvido com qualquer método, acreditamos que esse caso se encaixa no segundo momento que é justamente o momento da exploração de um tipo de tarefa e elaboração de uma técnica. Em outras palavras, os autores já na primeira seção desse capítulo *"Ação"*, contemplam dois dos seis momentos de estudo, momentos estes que descrevemos em nosso referencial teórico.

Na segunda página, é enunciado um problema semelhante aos do quebra-cabeça, entretanto, esse problema os autores resolvem. Tal resolução é desenvolvida passo a passo com explicações detalhadas de todo desenvolvimento da tarefa, esse de acordo com nosso entendimento é o momento da constituição do entorno teórico tecnológico juntamente com a institucionalização, ou seja, terceiro e quinto momento de estudo descrito pela TAD, essa resolução termina no final da quarta página.

Da quinta a sétima página, é enunciado um total de trinta tarefas divididas da seguinte forma: seis referentes à explicação do conteúdo, dez para fazer em sala e quatorze para fazer em casa. Esclarecemos que estas duas últimas categorias foram consideras, pelo fato dos autores intitularem-nas como *"Problemas e exercícios"* e como *"Problemas e exercícios para casa"*. Temos assim, esse bloco, caracterizado como momento de trabalho com a técnica, observa-se também que é retomado o momento da exploração da técnica e também o momento de avaliação, uma vez que, nesse total de tarefas, notamos a presença de algumas que não podem ser resolvidas simplesmente com a aplicação da técnica explicitada pelo autor. Para nós, esse é um ponto muito importante encontrado no livro dos autores, a retomada de dois momentos de estudo, nos quais os alunos observam que uma determinada técnica não é absoluta, e sim devemos aperfeiçoá-la ao longo do tempo e das tarefas, na intenção de ter uma técnica com um maior alcance. Em síntese, com essas trinta tarefas propostas, os autores, conseguiram englobar três dos seis momentos de estudo, e isso em nosso entendimento é importantíssimo, já que poderia ser caracterizado apenas o momento de trabalho com a técnica.

No que se refere ao próximo item "Os sistemas e o método da substituição", que se encontram na oitava página, os autores iniciam expondo uma tarefa seguida de sua técnica de resolução. Para esse item observa-se então, o momento de institucionalização de outra técnica (método da substituição) de resolução, em seguida, ao propor seis tarefas referentes a esta resolução é constituído o momento de construção do entorno teórico tecnológico juntamente com o momento da avaliação dessa técnica proposta no exercício resolvido. Em seguida ocupando da nona à décima primeira página, encontram-se um total de dezenove tarefas para se trabalhar com a técnica.

Para finalizar este capítulo do livro, da décima segunda a décima quarta página os autores utilizam um tópico chamado “Problemas”, tal tópico segue um esquema semelhante aos anteriores, um problema seguido de sua resolução, seis tarefas referente a este problema, oito tarefas para resolver em sala e onze para fazer em casa.

Não podemos deixar de falar, do item posto no final do livro chamado de “problemas e exercícios complementares”. Nesse, o autor propõe um total de vinte e cinco tarefas, sendo assim, em nosso entendimento os autores lançam mão do quarto momento de estudo, momento do trabalho com a técnica. No que se refere ao item “super testes para auto avaliação”, os autores implementam uma lista contendo oito tarefas, no entanto, concluímos que este item não se constitui apenas de um momento de trabalho com a técnica, uma vez que observamos nesta lista de tarefas, algumas que não se resolvem aplicando simplesmente a técnica explicitada no capítulo de sistemas de equação. Em outras palavras, se o aluno tentar resolver esses exercícios com a técnica explicitada pelo autor, não vai obter a resposta correta. Concluímos assim, que esse momento, é o momento chamado na TAD de avaliação da técnica, este, proporciona ao aluno, a observação do alcance da técnica aprendida anteriormente.

Para concluir, observamos que o autor segue um determinado esquema no que se refere ao capítulo de sistemas de equações. Esquema este que nos agrada, uma vez que o autor passa pelos seis momentos de estudos descritos por Chevallard e ainda retomam alguns desses momentos no decorrer de sua obra. Agrada-nos também, pelo fato de propor exercícios, não apenas com a intenção de que os alunos trabalhem com a técnica, e sim além de trabalhar, avalie esta técnica aplicada, na intenção de cada vez mais contribuir com a tentativa de fazer com que os alunos explorem os tipos de tarefas, elaborando uma técnica e construindo um entorno teórico tecnológico. No entanto, os próprios autores institucionalizam em alguns pontos a técnica de resolução, não deixando a cargo do professor esse momento.

Em síntese concordamos com a visão do documento oficial, Guia do PNLD – 2008 a respeito dessa obra quando explicita:

> Os conteúdos da coleção são bem escolhidos e abordados com base em situações significativas e contextualizadas. Também são retomados, ampliados e aprofundados ao longo dos livros, sempre de forma significativa. O incentivo à participação do aluno no processo de ensino-aprendizagem é uma característica fundamental desta obra. Destacam-se a boa articulação entre os campos da Matemática e desta com outras áreas do conhecimento. (BRASIL, 2008, p. 114)

Conforme explicitado em nosso referencial teórico, na essência da noção de praxeologia encontramos duas noções interligadas, são elas; tipo de tarefa e tarefa, ainda em nosso referencial teórico, enfatizamos que o tipo de tarefa é um conjunto contendo infinitas tarefas que podem ser resolvidas por uma mesma técnica. Sendo assim não poderíamos deixar de explicitar esses elementos, tipo de tarefa, tarefa, e é claro das suas respectivas técnicas de resolução, as tecnologias que as justificam e a teoria que as fundamentam, elementos esses que encontramos indícios explícitos ou implícitos nos livros didáticos analisados. Esses elementos encontram-se descritos a seguir.

### 4.4.1 Tipo de tarefa $T_3$ - Modelar um problema que recaia em um sistema de equações do primeiro grau com duas equações e duas variáveis.

Nesse tipo de tarefa foram reunidas as tarefas nas quais o enunciado leva o estudante a extrair os dados do problema e registrar os valores desconhecidos como incógnitas. Em seguida, é levado a escrever o sistema de equações do primeiro grau com duas equações e duas incógnitas equivalente ao enunciado proposto.

Observamos que pertencente a este tipo de tarefa $T_3$ encontra-se um total de duas tarefas no Livro do Imenes (2006) e com base em nossas observações as tarefas referentes a este tipo trazem além da escrita na língua materna uma representação a partir de uma linguagem não ostensiva, com figuras que auxiliam na resolução do problema. Para melhor entendimento enunciaremos aqui, uma tarefa desse tipo retirada do livro do Imenes (2006).

“A soma de dois números é 3. A diferença entre eles é 2.

Passe a sentença acima para um sistema de equações.”

[Neste exercício citado acima encontra-se o desenho do rosto de um menino e uma senhora, posicionados um frente ao outro. Associado a cada um deles uma fala com os seguintes dizeres: Menino – *Um número é x. O outro é y*. Senhora – *E a diferença é x – y.]*

#### 4.4.1.1 Organização Matemática

Na intenção de sermos o mais claro possível quanto à organização matemática do tipo de tarefa $T_3$, vamos utilizar uma tarefa associada a este tipo do livro do Imenes encontrada na página 226 em um tópico intitulado de exercício. Nesse sentido vamos apresentar as técnicas utilizadas por ele para resolver essas tarefas. Acrescentamos aqui, que essas tarefas podem ser resolvidas a partir de uma técnica que chamaremos de $\tau_7$ composta por cinco passos sequenciais, que são os seguintes: primeiro passo, associar a um dos valores desconhecidos a incógnita *x*. Segundo passo, associar ao outro valor desconhecido a incógnita *y*. Terceiro passo, escrever a primeira sentença do problema na forma algébrica. Quarto passo, escrever a segunda sentença na forma algébrica e por fim, o quinto passo, escrever o sistema com as duas sentenças montadas.

Associados à técnica $\tau_7$, que descrevemos anteriormente, destacamos três elementos tecnológicos, que são: os conceitos de incógnita, equações e sistemas de equações, exemplificaremos os passos dessa técnica explicaremos mais detalhadamente os elementos tecnológicos.

Para exemplificar a técnica aqui descrita utilizaremos uma tarefa extraída do livro do Imenes (2006 p.46), e vamos resolvê-la passo a passo a partir da técnica descrita.

"A soma de dois números é 3. A diferença entre eles é 2.

Passe a sentença acima para um sistema de equações."

[Relembramos que nesse exercício encontra-se o desenho do rosto de um menino e uma senhora, posicionados um frente ao outro. Associado a cada um deles uma fala com os seguintes dizeres: Menino – *Um número é x. O outro é y*. Senhora – *E a diferença é x – y.]*

**Primeiro passo:** um número (valor desconhecido) associamos *x*.

**Segundo passo:** outro número (valor desconhecido) associamos *y*.

**Terceiro passo:** escrever em forma de equação a primeira sentença. $x + y = 3$

**Quarto passo:** escrever em forma de equação a primeira sentença. $x - y = 2$

**Quinto passo:** escrever o sistema com as duas equações.

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

#### 4.4.1.1.1 Aspectos teóricos e tecnológicos da organização matemática

Tomamos como referência os elementos tecnológicos descritos na tabela acima, em alguns casos sentimos a necessidade de recorrer a páginas anteriores deste mesmo exemplar do autor Imenes (2006) para clarificar nossos argumentos. Relembramos que tais argumentos pertencem ao domínio de estudo da Álgebra.

Ao analisar o contexto no qual está inserido esta tarefa, acreditamos ser necessário descrever os aspectos teóricos e tecnológicos da organização matemática do autor Imenes (2006), com isso observamos que a condução deste item é imerso em um tópico chamado "Problemas e exercícios" que contém um total de seis tarefas. A tarefa aqui analisada é a primeira deste conjunto.

Ao propor a tarefa, o autor explicita alguns elementos que acreditamos serem fragmentos da técnica de resolução da tarefa, por exemplo, quando ele explicita *"Um número é x",* proposta esta que acreditamos ser justificada pelo conceito de incógnita que é dado pelo próprio autor como "(...) incógnita, (...), representa um número desconhecido cujo valor queremos descobrir." (IMENES, 2006, p. 75). É oportuno neste momento, para esclarecimento do leitor, fazer um pequeno comentário sobre variável na intenção de não levantar dúvidas quanto o uso do termo incógnita ao invés de variável. De acordo com o autor, variável é uma letra que representa um número qualquer. Entretanto o valor dessa letra pode variar. Nas palavras do autor: "A distinção entre variável e incógnita tem interesse didático, pois contribui para construção de significados na aprendizagem da álgebra, na Ciência Matemática essa distinção não tem relevância." (IMENES, 2006 p. 75)

Ressaltamos que esta observação é feita pelo autor em nota para os professores, acreditamos que a intenção do autor é propiciar subsídios para os educadores explicarem e exemplificarem a diferença entre os dois conceitos para seus alunos, uma vez que é citado em seu exemplar, tanto incógnita quanto variável.

Outros dois elementos tecnológicos que acreditamos estarem implícitos nos fragmentos da técnica proposta pelo autor, agora não somente para o professor, são: modelagem matemática e equações.

O autor na página 75 exemplifica da seguinte forma o que vem a ser uma equação:

> Uma fórmula é usada para expressar uma idéia válida para diversos números. Por isso, dizemos que as letras da fórmula são variáveis. A idéia expressa pela fórmula é, normalmente uma relação entre grandezas. Já a equação têm outro sentido. Suas letras são entendidas como incógnitas, isto é, ficam no lugar de números que devemos descobrir. (IMENES, 2006, p. 75)

No entanto recorremos no mesmo exemplar em um tópico intitulado pelo autor como dicionário, ele define equação da seguinte forma: “Sentença matemática na qual aparece um sinal de igual e uma ou mais letras, chamadas incógnitas, que representam números desconhecidos.” (IMENES, 2006, p. 301)

Notamos que com estas explicações o autor conduz o aluno a partir do enunciado da questão a escrever equações equivalentes a descrição feita, com as equações escritas na forma algébrica recorre ao sistema de equações que é explicitado em seu texto como sendo “Duas ou mais equações cujas soluções devem ser comuns”. (IMENES, 2006, p. 311)

Observamos que de posse desses elementos tecnológicos citados o autor propõem uma caracterização de uma técnica para a resolução das tarefas contidas nesse tipo de tarefa.

#### 4.4.1.2 Organização Didática

Neste trabalho compreende-se como organização didática o conjunto de todas as técnicas, tecnologias e teorias utilizadas pelo autor, a partir de nossa leitura, para conduzir o estudo efetivo de um dado tipo de tarefa.

Nós descrevemos aqui com base nas observações realizadas no livro Matemática do autor Imenes (2006) como foram organizadas as definições e os conceitos para conduzir o estudo de sistemas de equações do primeiro grau com duas equações e duas incógnitas, mais precisamente como modelar um problema que recaia em um sistema de equações, tal qual nós definimos no tipo de tarefa $T_3$.

Em primeiro lugar, o autor inicia o conteúdo de sistemas de equações por um tópico chamado *AçãoAçãoAção* com o título *Quebrando a Cabeça*. Nesse tópico é proposta a formação de grupos para resolver quatro tarefas propostas pelo autor. Ao propor estas tarefas é enfatizado através de uma frase em negrito que se pode utilizar qualquer método de resolução.

Em segundo lugar, o autor enuncia uma quinta tarefa, com base neste enunciado é descrito passo a passo a técnica de resolução referente a esta tarefa. Em seguida inicia um setor chamado *Conversando sobre o texto*, que é colocado em letras maiúsculas dentro de um retângulo com linhas horizontais, acreditamos ser uma forma que o autor encontrou para chamar a atenção dos estudantes para com este tópico. Nesse, são feitas três perguntas voltadas aos conceitos, maneiras de resolução e propriedades dos sistemas de equações do primeiro grau com duas equações e duas variáveis.

Para finalizar, o autor insere um tópico de exercícios com treze tarefas, entretanto a terceira delas é resolvida pelo autor, e com isso ele explicita uma nova técnica para resolver sistemas de equações do primeiro grau com duas equações e duas variáveis.

#### 4.4.1.2.1 Aspectos de Linguagem e Momentos de Estudo

Ao analisar este tipo de tarefa $T_3$, observamos os elementos pertencentes a organização matemática e didática contidas no livro do autor Imenes (2006). Entretanto acreditamos na necessidade de descrever os elementos de linguagem compreendidos nessa organização.

Na intenção de esclarecer a presença desses elementos, recorremos a uma tarefa contida no livro do autor Imenes (2006).

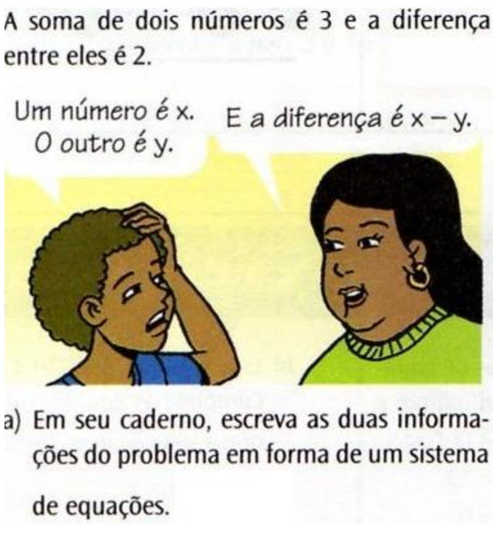


Figura 08 – Articulação entre registros. (IMENES, 2006. Exercício 01. p. 235)

Ao observamos esta tarefa, notamos que ela é composta pela articulação de quatro registros de linguagem distintos. O primeiro deles encontra-se no enunciado, quando o autor utiliza a língua materna para expor a tarefa (Nota-se a presença dos números 2 e 3 neste enunciado, no entanto, não nos referimos ao registro aritmético pois acreditamos que a presença deles é somente para dar sentido a frase).

O segundo registro refere-se à presença dos personagens dialogando, de um lado um menino e a sua frente uma senhora, consideramos este registro como diálogo entre personagens. Definimos nesse trabalho como sendo registro de diálogo entre personagem quando se encontra a exposição de um ou mais personagens que através de um balão de diálogo estabelece alguma (s) informação (ões) para outro personagem. Em outros casos pode haver uma tentativa de diálogo com o leitor. Para exemplificar melhor os dois casos utilizaremos dois exercícios do livro do Imenes (2006). O primeiro refere-se ao diálogo entre personagens, o segundo diálogo entre o personagem e o leitor.

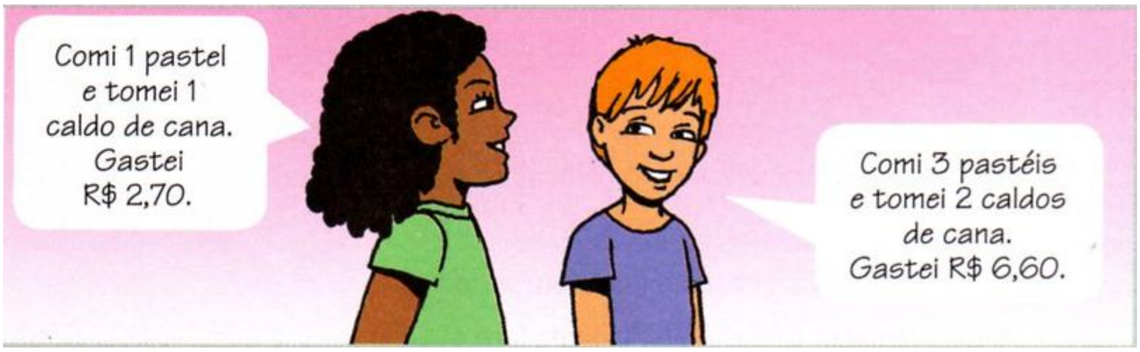


Figura 09 - Diálogo entre personagens.(IMENES, 2006. Quebra-Cabeça 02. p. 232)


Figura 10: Diálogo personagens com o Leitor. (IMENES, 2006. Exercício 17. p. 240)

Notamos ainda que no menino (personagem) a presença do gesto de colocar a mão na cabeça que consideramos ter certa relevância neste registro, pois para nós ele expressa um momento de raciocínio, por isso chamamos de registro gestual.

Portanto consideramos nesse trabalho como registro gestual toda representação através de um desenho ou um fato no qual é caracterizado o gesto do personagem, gestos esses como, apontar para um determinado elemento, colocar a mão do queixo mostrando como se estivesse pensando, cruzando os braços no sentido de não saber, abrindo os braços para expressar exclamação e piscando para indicar uma dica.

Como quarto registro, temos que observar a fala de cada personagem, e quando a senhora diz *"E a diferença é $x$ - $y$"* nota-se a presença da linguagem algébrica, uma vez que, ela utiliza $x$ e $y$ como generalizações de dois números e a expressão $x - y$ como a generalização da diferença entre dois números quaisquer.

Como síntese nota-se nessa tarefa a presença simultânea e articulada do registro em língua materna, registro de diálogo de personagens, registro gestual e registro algébrico, no qual reforçamos a ideia em que estes registros geralmente não aparecem isolados, pelo contrário, em muitos casos eles se articulam entre si o que consideramos um ponto importante no ensino da matemática, e ainda conforme orienta o Parâmetro Curricular Nacional de matemática, entendemos que, de fato, a articulação entre os registros de linguagem é uma estratégia didática importante para expandir as condições de o aluno aprender.

Ao nos referirmos a momentos de estudo, observamos que ao enunciar esta tarefa, em nosso entendimento, há uma presença significativa de conceitos que acreditamos que tenham sido estudado anteriormente, como por exemplo, as quatro operações: adição, subtração, multiplicação e divisão. E ainda os primeiros passos da Álgebra que consideramos como a representação de números desconhecidos por uma incógnita. Diante desta informação, notamos então uma forte presença do primeiro momento, encontro (reencontro) com o tipo de tarefa.

No entorno da tarefa proposta pelo autor Imenes (2006) encontramos fragmentos da técnica, no entanto, o autor leva o aluno a busca de elementos que a complete, nota-se isso quando no enunciado é dito "A soma de dois números é 3" e na fala da senhora (personagem) ela propõe que podemos escrever que a diferença entre dois números pode ser escrito como $x - y$. Observe que no fragmento da técnica dado a expressão da diferença, no entanto o enunciado propõe a soma, e isso nos leva a acreditar que o autor induz o aluno a explorar o tipo de tarefa e a técnica o que caracteriza então o segundo momento. Em nosso entendimento esse é o momento mais forte presente nessa tarefa e o modo pelo qual é proposto nos agrada, pois observamos que o autor tem como intenção levar aluno a refletir sobre o assunto em questão e a trilhar o seu próprio caminho, uma vez que ele ainda não esta traçado.

Ao observar o entorno no qual está inserida esta tarefa, notamos que a mesma encontra-se em um tópico intitulado “Problemas e exercícios” que contem um total de seis tarefas. Neste ponto acreditamos que a intenção do autor é proporcionar aos alunos um momento de trabalho com a técnica, ou seja, o quarto momento.

Nota-se a presença do diálogo entre dois personagens nessa tarefa, ao nos focalizarmos nessas falas, acreditamos que a intenção do autor é relembrar alguns elementos tecnológicos já estudados neste mesmo exemplar, como por exemplo, ao expressar a ideia de um determinado número que não conhecemos podemos representá-lo como $x$, $y$, $z$, ou seja, uma incógnita. Ao subtrairmos então dois números quaisquer podemos expressá-lo da forma $x - y$, $y - z$. Pode ser que esse instante não se configure como a constituição de um entorno tecnológico teórico (Terceiro Momento), mas ressaltamos que certamente já tenha sido vivido este momento anteriormente, quando o autor trabalha estes conceitos, quando dá os primeiros passos rumo ao setor algébrico.

Ainda ao considerarmos a fala dos personagens, uma vez que já tenha ocorrido o momento de constituição do entorno tecnológico teórico consideramos assim como um momento em que o autor busca institucionalizar a técnica de resolução quando afirma: *“Um número é x, o outro é y. E a diferença é x – y”.*

Para finalizar ressaltamos que na análise desse tipo de tarefa não identificamos o sexto momento, avaliação, mas notamos que no decorrer do tópico ao qual contem as seis tarefas existe este momento pelo qual o aluno vai avaliar o alcance da técnica proposta pelo autor.

### 4.4.2 Tipo de tarefa $T_4$ - Montar um sistema de equações com duas equações e duas incógnitas cuja solução seja dois números dados.

Este conjunto de tarefas ao qual chamamos de tipo de tarefa $T_4$ é constituído de todas as tarefas cujo enunciado proposto leva o aluno a montar um sistema de equações com duas equações e duas incógnitas. Entretanto nos dados da tarefa já são fornecidos os respectivos valores solução de cada incógnita.

De acordo com nossa análise no livro didático aqui em questão, encontramos três tarefas desse tipo, de início pensamos ser uma quantia pequena de atividade para um dado tipo de tarefa, mas nos chamou bastante a atenção o fato do autor do livro enfatizar explicitamente para os professores que estas tarefas têm um grande valor conceitual, sendo assim fomos levados a analisar esse tipo mesmo acreditando ser um número bastante reduzido de tarefa. A fim de ser o mais claro possível quanto a esse tipo de tarefa, exemplificamos nossa análise a partir da seguinte tarefa encontrada no livro didático do autor Imenes (2006):

"Invente um sistema de duas equações e duas incógnitas. Mas atenção: a solução do sistema deve ser *x = 5* e *y = - 2*." (IMENES, 2006, p.236 ex: 06)

### 4.4.2.1 Organização Matemática

Ao inferirmos a nossa análise do livro didático do autor Imenes, observamos que o mesmo possui um total de três tarefas desse tipo, porém, não encontramos uma técnica no corpo do exemplar para resolver essas tarefas. Entretanto, o autor faz nota sobre esse tipo de tarefa na assessoria pedagógica do livro, explica a técnica de resolução para o professor, isso nos leva a acreditar que a intenção do autor é primeiramente proporcionar um momento para o aluno explorar e construir uma técnica de resolução, em segundo lugar, deixar a cargo do professor o desenvolvimento dessa técnicas com os alunos.

Essa técnica que chamaremos nesse trabalho de $\tau_8$ é composta de cinco passos sequenciais, que são os seguintes: Primeiro passo, escrever uma expressão qualquer com as incógnitas *x* e *y*. Segundo passo, escrever uma segunda expressão com as incógnitas *x* e *y* diferente da equação anterior. Terceiro passo, substituir *x* e *y* pelos valores dados no enunciado da tarefa na expressão do passo 1. Quarto passo, substituir *x* e *y* pelos valores dados no enunciado da tarefa na expressão do passo 2, por fim, quinto passo, montar o sistema de equações.

Associado à essa técnica de resolução, destacamos os seguintes elementos tecnológicos: equação do primeiro grau com duas incógnitas e sistemas de equações que após aplicarmos a técnica $\tau_8$ em um exemplo passaremos a descrevê-los.

Para exemplificar a técnica acima utilizaremos uma tarefa do livro do autor Imenes e resolveremos passo a passo a partir dessa técnica.

*"Invente um sistema de duas equações e duas incógnitas. Mas atenção: a solução do sistema deve ser x = 5 e y = -2."* (IMENES, 2006, p.236 ex: 06)

**Primeiro passo -** Escrever uma expressão qualquer com as incógnitas *x* e *y*.

*3x + 5y*

**Segundo passo -** Escrever uma segunda expressão com as incógnitas *x* e *y* diferente da equação anterior.

*2x – 3y*

**Terceiro passo-** Substituir *x* e *y* pelos valores dados no enunciado na expressão do passo 1.

*3x + 5y => 3.5 + 5.(-2) = 5*

**Quarto passo -** Substituir *x* e *y* pelos valores dados no enunciado na expressão do passo 2.

*2x – 3y => 2.5 - 3.(-2) = 16*

**Quinto passo -** Montar o sistema de equações.

$$\begin{cases} 3x + 5y = 5 \\ 2x - 3y = 16 \end{cases}$$

#### 4.4.2.1.1 Aspectos teóricos e tecnológicos da organização matemática $\tau_8$

Conforme nossa análise, observamos que referente a essa técnica de resolução estão vinculados os conceitos de equações do primeiro grau com duas incógnitas assim como os conceitos de sistemas de equações, chegamos a essa conclusão, por via de fato, pois está explicitado pelo autor, nesse caso para os professores, que essa atividade tem valor conceitual e deve ser valorizada pelo educador. Ainda nessa vertente, observamos que é visível que para se construir uma equação, ele o aluno, deve ter noção ou até domínio do que se trata, e conforme ele o autor, equação é uma sentença matemática na qual aparece um sinal de igual e uma ou mais letras, chamadas incógnitas, que representam números desconhecidos, já os sistemas de equações são duas ou mais equações cujas soluções devem ser comuns. (IMENES, 2006)

### 4.4.2.2 Organização Didática

Ao nos referirmos à organização didática do autor, observamos de imediato em que ponto encontram-se inseridas as tarefas desse tipo, sendo assim as encontramos em dois lugares distintos, a primeira tarefa localiza-se em um tópico chamado *problemas e exercícios* que deve ser feito em sala de aula e as outras duas em outro tópico chamado *problema e exercícios para casa*. Em nosso entendimento, essa organização didática do autor é clara e merecedora de nosso elogio, pois, de início ele proporciona aos alunos a oportunidade de resolverem a tarefa em sala de aula com o auxílio do professor, dessa forma, acreditamos que nesse instante é construído uma técnica de resolução pelo aluno ou até mesmo pelo professor. Ao chegar em casa, o aluno, agora sem o auxílio do professor vai resolver as duas outras tarefas, só que nesse momento já está constituída uma técnica de resolução para esse tipo de tarefa.

#### 4.4.2.2.1 Aspectos de linguagem e momentos de estudo

Com base em nossas observações, a linguagem associada a este tipo de tarefa encontra-se, em sua maioria com registros em língua materna e em alguns casos com registro algébrico.

Quanto aos momentos de estudo, recorremos novamente à posição em que se encontram as tarefas desse tipo. Logo nos remetemos novamente a dois lugares distintos, o primeiro deles em que se encontra uma das tarefas, está no bloco de atividades destinadas a sala de aula, nesse caso entendemos que essa tarefa está propiciando o primeiro e o segundo momento, ou seja, momento do primeiro encontro com o tipo de tarefa e o momento de exploração de um tipo de tarefa e elaboração de uma técnica, acreditamos que essa primeira tarefa proporciona esse momento de estudo, em primeiro lugar, por ser uma tarefa ainda não proposta para os alunos, pois, em nossa extensa análise do livro não encontramos anteriormente nenhuma tarefa desse tipo, em segundo lugar não é proporcionado ao aluno uma técnica explícita para resolver esse tipo de tarefa. Entretanto essa técnica só é vista na assessoria didática, parte que o livro do aluno não possui. Por outro lado ao observamos as outras duas tarefas desse mesmo tipo, que estão inseridas no conjunto de tarefas para serem resolvidas em casa. Em nosso entendimento, acreditamos que elas proporcionam o momento de trabalho com a técnica, isso porque já se tem uma técnica constituída pelo próprio aluno ou pelo professor, em sala, para resolver esse tipo de tarefa, e agora é a hora de aplicá–la.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo principal dessa pesquisa é analisar como era proposto o ensino de Sistemas de Equações do Primeiro Grau em livros didáticos utilizados em escolas brasileiras na primeira republica, e como é proposto hoje nos livros didáticos destinados aos anos finais do ensino fundamental. Este foi o objetivo que acompanhou todo o desenvolvimento desse trabalho.

Retomando a primeira parte do capítulo de análise, nota-se que durante o período denominado de primeira república, foram realizadas cinco reformas federais na educação brasileira, nesse contexto podemos destacar que o objetivo do ensino secundário era de preparar o educando para os cursos superiores. O ensino secundário teve em média a duração de seis anos e tinha um núcleo comum de conteúdos a serem ensinados, nesse núcleo encontramos a disciplina de matemática, pertencente a essa disciplina o conteúdo de Sistemas de Equações do Primeiro Grau, isso nos aponta a valorização do estudo desse conteúdo, haja vista que ele aparece em todos os programas de ensino desse período.

Ainda nessa parte do capítulo, observamos o aparecimento da Álgebra Linear e sua implantação nas escolas brasileiras impulsionada pelo Movimento da Matemática Moderna, que no Brasil se consolidou em 1961, esse acontecimento certamente teve uma forte influência na escrita do livro contemporâneo analisado, o que não podemos dizer ter ocorrido no livro do autor José Adelino Serrasqueiro, uma vez que, este livro é anterior ao período do movimento.

Na segunda parte desse capítulo, destacamos a análise de um livro didático utilizado no Colégio Pedro II, o resultado dessa análise nos aponta a valorização da linguagem materna além da linguagem algébrica nas explicações das tarefas. Nota-se ainda, o fato do autor alternar na apresentação da técnica um exemplo algébrico, seguindo então, da explicação da mesma técnica em língua materna. No transcorrer dessas explicações destacamos a valorização dos elementos tecnológicos que justificam cada passo da técnica, esses elementos por sua vez são explicitados pelo autor, e não deixados a responsabilidade somente do educador. Essa alternância ocorre em todo decorrer do capítulo analisado. Esses fatos nos levam a perceber a valorização do autor na institucionalização da técnica de resolução. Dessa forma, observamos a predominância do momento de institucionalização juntamente com o momento de trabalho com a técnica, dessa forma aproximamos o autor da obra em um modelo clássico conforme classificação de Gascón (2003). Ainda nos remetendo a análise desse livro, obtivemos como resultado algumas representações feitas por ele, o autor, representações essas que em sua maioria são feitas mediante símbolos algébricos, esses são os objetos que são denominados por Chevallard de ostensivos.

Ao nos referirmos à terceira parte do capítulo de análise, estamos nos remetendo aos PCN e o Guia de Livros Didáticos – 2008, e em nossa análise concluímos que esses documentos valorizam a utilização de diversas linguagens, a contextualização das tarefas, a sistematização do conteúdo, a articulação com outras disciplinas, as técnicas aplicadas para resolução das tarefas, a organização do estudo da álgebra e por fim a presença da ideia de cidadania no contexto da matemática.

Na quarta e última parte desse capítulo, descrevemos a análise em um livro contemporâneo, essa análise aponta para uma obra muito bem estruturada. Mostra que o autor lança mão de diversas formas de linguagem, dentre elas temos a linguagem materna, a algébrica e o diálogo entre personagem. Essa articulação em nosso entendimento é um ponto muito positivo, pois, acreditamos que facilita o entendimento do conteúdo pelos alunos. Quanto aos momentos de estudo destacamos nessa obra que predomina os momentos de trabalho com a técnica, uma vez que observamos a presença de várias tarefas, a constituição do entorno teórico tecnológico e a institucionalização da técnica. Sendo assim, conforme a classificação de Gascón (2003) essa obra encontra-se inserida em um modelo construtivista.

Para finalizar nossas considerações, destacamos alguns elementos que nos chamaram bastante a atenção. Ao observarmos a análise realizada em ambos os livros, de épocas diferentes, existem elementos bastante próximos, como por exemplo: o uso da linguagem algébrica e da linguagem materna. Mesmo que esta observação nos remeta a seguinte conclusão. Que ambas as linguagens acima citadas eram mais valorizadas no livro utilizado na primeira republica, do que no livro contemporâneo. Podemos justificar esta valorização, principalmente pelas ferramentas disponíveis nessa época, uma vez que destacamos que as outras linguagens, como a foto ou até mesmo o desenho, não esta disponível para este período. Em nossas observações destacamos que este livro, para época era bem desenvolvido e utilizava o que tinha de melhor e mais sofisticado, no que diz respeito a livros Didáticos. Quando voltamos nossos olhares para o livro contemporâneo, destacamos que em sua estrutura gráfica, também é utilizado o que tem de melhor em tecnologia. Encontramos fotos, gráficos, personagens, diálogos, dentre outros elementos. Dessa forma, mesmo que haja uma comparação entre os livros, concluímos que ambos têm o mesmo valor, a mesma importância, se comparados em suas épocas.

# REFERÊNCIAS


ARICLÊ, Vechia; KARL, M. Lourenz. *Programa de Ensino da Escola Secundária Brasileira: 1850 – 1951*. Curitiba: Ed. do Autor, 1998.

BARDIN, Laurence. *Análise de Conteúdo*. 3. ed. Lisboa: Edições 70, 2004.

BOSCH, M. (1999).*Un punto de vista Antropológico: La evolución de los instrumentos de representación en la actividad Matemática***.** IV Simpósio SEIEMIV (Huelva 2000). Ponencia invitada al Seminário de Investigación I, "Representación y comprensión" (Versión preliminar, 30-6-2000). disponível em: http://www.ugr.es/local/seiem/IV_Simposio.htm**.** Acessado em 20/12/2006.

BRASIL. Ministério da Educação / Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: matemática- 1º e 2º ciclos. Brasília: MEC/SEF, 1998.

_____. Ministério da Educação. *Programa Nacional do Livro Didático*, 2007. Disponível em: <http://www.fnde.gov.br/download/pnld/editalpnld2007.pdf. >. Acesso em: 08.05.2008.

BRECHENMACHER, Frédéric. *Les matrices: formes de représentation et pratiques opératoires (1850-1930).* Centro Alexandre Koyré. CultureMATH – Site expert ENS Ulm / DESCO - 20/12/2006. Disponível em: <http://www.dma.ens.fr/culturemath/histoire%20des%20maths/htm/Brechenmacher/mtrices _index.htm>. Acessado em: 01/2010.

CHEVALLARD, Y. *El anáiis de las práticas docentes en la teória antropológica de lo didático. Recherches en Didactique des Mathématiques.* v.19, no 2, pp.221-266, 1999.

CHEVALLARD, Y; BOSCH, M; GASCÓN, J. *Estudar Matemáticas: O elo perdido entre o ensino e a aprendizagem*. Porto Alegre: Artmed Editora, 2001.

_____. (1999) *L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique*. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 19, n. 2, p. 221-266. Tradução em espanhol de Ricardo Barroso Campos. Disponível em: <http://www.uaq.mx/matematicas/redm/art/a1005.pdf>. Acesso em 15/06/ 2008.

_____. *La transposición didáctica del saber sábio al saber enseñado.* Tradução de Claudia Gilman. 3.ed. Buenos Aires: Aique 1998.

_____. *Concepts fondamentaux de la Didactique: perspectives apportées par un approche anthropologique.* In: Recherches en Didactique des Mathématiques. V. 12, nº 1, p. 73-112, 1992.

_____.; BOSCH, M. *Ostensifs et sensibilité aux ostensifs dans l'activité mathématique*. Artigo publicado na RDM - Recherches en Didactique des Mathématiques, no 19/1, 1999, p. 77-124.

CHERVEL, A. *História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa.* Porto Alegre: Teoria e Educação, n. 2, p. 177-229, 1990.

COIMBRA, Jarbas L. *Alguns Aspectos Problemáticos Relacionados ao Ensino-Aprendizagem da Álgebra Linear.* 2008. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática) - Universidade Federal do Pará.

GASCÓN, J. *La necessidade de utilizar modelos em didática de las matemáticas.* Educ. Mat. Pesqui: São Paulo, v.5, n.2, pp.11-37, 2003.

GATTI, Bernardete A. *A construção da pesquisa em educação no Brasil.* Editora Líber. Brasília: 2006.

GIANFALDONI, Mônica e MOROZ, Melania. *Processo de Pesquisa Iniciação*. Editora Líber. Brasília: 2006.

LISBANORE, Ana Cristina L. S.. *As concepções alternativas de alunos da 8ª série do ensino fundamental sobre o fenômeno do efeito estufa*, 2007. Dissertação (Mestrado). Universidade Estadual de Maringa.

MELLO, Marcelo Soares T. de. *Inovações pedagógicas no currículo dos cursos de formação de profissionais da educação física: contribuições teórico-metodológicas da pratica pedagógica*, 2003. Tese (Doutorado), Universidade Federal de Pernambuco.

MIGUEL, A.; FIORENTINI, D.; MIORIM, M. *Álgebra ou Geometria: para onde pende o pêndulo?* Pró-Posições. São Paulo: Cortez, v. 3, n.1[7], p. 39-54, mar. 1992.

MIORIM, M. A. *Introdução à História da Educação Matemática*. São Paulo: Atual, 1998.

NEVES, Késia C.R. *Um Exemplo de Transposição Didática: o caso das matrizes.* 2009. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática) - Universidade Estadual de Maringá.

OLIVEIRA, Eliane de; ENS, Romilda T.; ANDRADE, Daniela B. S. F. ; MUSSIS, Carlo R. de. *Análise de conteúdo e pesquisa na área da educação. Revista Diálogo Educacional,* Curitiba, V.4, n.9, p.11-27, maio/agosto.2003.

SALDANHA, Vera Peceguini. *Didática transpessoal: perspectivas inovadoras para uma educação integral*, 2006. Tese (Doutorado), Universidade Estadual de Campinas.

VALENTE, W.R. *Uma história da Matemática Escolar no Brasil.* São Paulo: Annablueme, 1999.

VALENZUELA, Silvia Terezina F.. *O uso de dispositivos didáticos para o estudo de técnicas relativas a sistemas de equações lineares no ensino fundamental*, 2007. Dissertação (Mestrado), Universidade Federal do Mato Grosso do Sul.

VECHIA, Ariclê; LORENZ, Karl Michael. *Programa de ensino da escola secundária brasileira: 1850-1951.* Curitiba: Ed. do Autor, 1998.

ZOTTI, Solange Aparecida. Sociedade, *educação e currículo no Brasil : dos jesuítas aos anos de 1980* - Campinas, SP : Autores Associados, 2004.

# DESCRIÇÃO DAS FONTES PRIMÁRIAS

SERRASQUEIRO, José Adelino. *Tratado de Álgebra Elementar*. 16ª edição, 1929.

IMENES, Luiz M; LELLIS, Marcelo C. *Matemática Paratodos:* 7ª série . São Paulo: Scipione, 2006.

Decreto n.º 1075 de 22 de novembro de 1890.[16]

Decreto nº 3914 de 26 de janeiro de 1901.

Decreto nº 8660 de 05 de abril de 1911.

Decreto nº 11530 de 18 de março de 1915.

Decreto nº 16782-A de 13 de janeiro de 1925.

[16] Decretos encontradas no site http://www2.camara.gov.br/legislacao/publicacoes/republica, acesso realizado em 13 de março de 2009.

# ANEXO I

**Lista de problemas do Tratado de Álgebra de José Adelino Serrasqueiro**

**265-**Um indivíduo pagou 6$100 réis de 20 moedas, uma de 500 réis e outras de 200 réis. Quantas moedas deu de cada espécie? (7 e 13)

**266-**Tenho duas vezes a idade que tu tinhas, quando eu tinha a idade que tu tens; e quando tu tiveres a idade que eu tenho, teremos ambos juntamente 63 anos. Quantos anos tenho? (28)

**267-**Achar um número composto de quatro algarismo, sabendo que: 1º a soma dos seus algarismos é 25; 2º o algarismo das dezenas é igual do algarismo das centenas com dos milhares; 3º o dobro do algarismo das dezenas é igual a soma do algarismo das unidades com o das centenas; 4º ajuntando 8082 ao número pedido, obtem-se este mesmo número escripto em ordem inversa. (1789).

**268-**Achar um número composto de quatro algarismos, sabendo que: 1º o algarismo das centenas é igual a soma do algarismo da dezenas com os das unidades;2ºo algarismo das dezenas é igual ao dobro da soma do algarismo de milhares com das unidades; 3º o número pedido dividido pela soma dos seus algarismos, dá o quociente 109 e o resto 9; 4º subtraindo o número pedido do número formado com os mesmos algarismo escriptos em ordem inversa obtem-se o resto 819. (1862).

**269-**Dois indivíduos, A e B, fizeram uma especulação e constituíram para isso um capital, que lhes rendeu a 7 ½% ao ano. A teve o seu dinheiro na empresa 18 meses. B 2 ½% anos, e cada um ganhou 72$000 réis.Qual foi a entrada de cada um? (64$000 réis, 384$000 réis).

**270-**Um individuo poz a juros duas quantias, a menor a 5% e a maior a 45% e recebe o juro total de 141$000 réis. Qual é o valor de cada uma das quantias, sabendo-se que têm entre si a razão 2:3? (1:200$000 réis, 1:800$000 réis).

**271-**Um individuo contratou receber por cada tiro que acertasse, tanto quanto pagaria se errasse; ajustou a 200 réis cada lebre, a 100 réis cada perdiz e a 80 réis cada coelho; deu 30 tiros, sendo que d'este tantos ás lebres como de perdizes errou, e d'estas trouxe 6. Quantos tiros deu o caçador a cada espécie de caça, sabendo que receberia 3$500 réis, se não errasse nenhum? (o caçador atirou 7 tiros ás lebres, 13 ás perdizes e 10 aos coelhos).

**272-**Um individuo, que possue 120:000 cruzados, deixa em testamento a cada um dos seu netos 12:000 cruzados, e a cada neta 9:000 cruzados por esta disposição nada resta d'aquela soma. Se pelo contrário cada neta tivesse 12:000 cruzados e cada neto 9:000 cruzados.Quantos eram os netos e as netas? (7 e 4)

**273**-Um individuo deu a um creado, para comprar 8 kg de açúcar e 3 de café 3$000 réis, e creado devia trazer 160 réis de troco.O creado porém se enganou-se, comprou 3kg de açúcar e 8 kg de café e teve de dar 540 réis do seu bolso.Qual era o preço do açúcar e qual do café? (220 réis 360 réis)

**274**-Uma mulher tomou dois creados e ajustou dar a cada um por ano 28$000 réis, um fato e um par de sapatos. Despediu o primeiro no fim de 8 meses e deu lhe 19$080 réis e no fim de 9 ½ meses, e deu-lhe 25$560 réis e um par de sapatos. Quanto valia o fato e quanto os sapatos? (3$960 réis, 1$800 réis)

**275**-Um vazo contém 12 litros de vinho e 18 litros de água ,e um outro vazo contém 9 litros de vinho e 3 de água. Quantos litros se devem tomar de cada vazo para que misturando-os , se tenha 14 litros com partes iguais de vinho e água? (10, 4).

**276-** Um individuo possue um capital que põe a juros com uma certa taxa.Outro , que possue mais 10:000 francos do que o primeiro , e que põe seu capital a render mais 1% . recebeu mais 800 francos de juro.Finalmente um terceiro , que possue mais 15:000 francos do que o primeiro ; e põe o seu capital a render mais 2% , recebeu de juros mais 1:5000 francos do que o primeiro.Qual era o capital de cada uma das taxas? (30:000, 40:000,45:000,4%,5% e 6%)

**277-** Um homem encarrega-se de transportar vazos de porcelana, com a condição de pagar por cada vazo que quebrasse tanto, quanto receberia se o entregasse em bom estado. Em primeiro lugar, entregaram-lhe 2 vazos pequenos, 4 médios e 9 grandes. Quebrou os médios e entregou os outros inteiros e recebeu 28 francos. Depois entregaram-lhe 7 vazos pequenos , 3 médios e 5 grandes, quebrou os grandes, entregou os outros inteiros e recebeu só três francos. Finalmente entregaram-lhe 9 vazos pequenos , 10 médios e 11 grandes, quebrou estes últimos e recebeu 4 francos. Qual foi o preço do transporte de um vazo de cada grandeza? (2,3 e 4 francos)

**278-** Um individuo tem de percorrer uma certa distancia. Depois de ter caminhado 20 km, acelerou o seu passo de um kilometro por hora. Se tivesse caminhado sempre com esta velocidade, teria gasto menos 40 minutos em fazer uma viagem, e se conservasse o passo primitivo, teria chegado 20 minutos mais tarde. Que distancia tinha ele percorrido? (30 Kilometro).

**279-** Quatro jogadores convencionaram que, no fim de cada partida, aquele que perdesse dobraria o dinheiro de cada um dos outros. O primeiro perdeu a primeira partida, o segundo perdeu a segunda, o terceiro perdeu a terceira e quarto perdeu a quarta. No fim do jogo cada jogador acha-se com 240$000 réis. Qual era a entrada de cada um? (495$000, 255$000, 135$000 e 75$000).

## ANEXO II

**Categoria 01 – Linguagem**

| **Documento** | **Unidade de Registro** | **Página** |
|---|---|---|
| 14E PCN | Embora o contato com representações fracionárias seja bem menos freqüente nas situações do cotidiano seu estudo também se justifica, entre outras razões, por ser fundamental para o desenvolvimento de outros conteúdos matemáticos (proporções, equações, cálculo algébrico). | 104 |
| 15A PCN | Para uma tomada de decisões a respeito do ensino da Álgebra, deve-se ter, evidentemente, clareza de seu papel no currículo, além da reflexão de como a criança e o adolescente constroem o conhecimento matemático, principalmente quanto à variedade de representações. | 116 |
| 15E PCN | Assim, é mais proveitoso propor situações que levem os alunos a construir noções algébricas pela observação de regularidades em tabelas e gráficos, estabelecendo relações, do que desenvolver o estudo da Álgebra apenas enfatizando as manipulações com expressões e equações de uma forma meramente mecânica. | 117 |
| 11E PCN | Resolução de situações-problema por meio de um sistema de equações do primeiro grau, construindo diferentes procedimentos para resolvê-lo, inclusive o da representação das equações no plano cartesiano, discutindo o significado das raízes encontradas em confronto com a situação proposta | 89 |
| 20E PCN | Os contextos dos problemas deverão ser diversificados para que eles tenham oportunidade de construir a sintaxe das representações algébricas, traduzir as situações por meio de equações (ao identificar parâmetros, incógnitas, variáveis), e construir as .regras. para resolução de equações. | 123 |
| 5A PCN | No decorrer do trabalho com os números, é fundamental estudar algumas relações funcionais pela exploração de padrões em seqüências numéricas que levem os alunos a fazer algumas generalizações e compreender, por um processo de aproximações sucessivas, a natureza das representações algébricas. A construção dessas generalizações e de suas respectivas representações permite a exploração das primeiras noções de álgebra | 68 |
| 5E PCN | produzir e interpretar diferentes escritas algébricas expressões, igualdades e desigualdades identificando as equações, inequações e sistemas; | 82 |
| 21A PCN | Iniciar o estudo da sintaxe que o aluno está construindo com as letras poderá completar a noção da álgebra como uma linguagem com regras específicas para o manuseio das expressões, ou seja, o cálculo algébrico. Esse trabalho é significativo para que o aluno perceba que a transformação de uma expressão algébrica em outra equivalente, mais simples, facilita encontrar a solução de um problema. | 118 |
| 8A PCN | O trabalho com a Álgebra, neste ciclo, tem como ponto de partida a pré álgebra desenvolvida no ciclo anterior, em que as noções algébricas são exploradas por meio de jogos, generalizações e representações matemáticas (como gráficos, modelos), e não por procedimentos puramente mecânicos, para lidar com as expressões e equações. | 84 |
| 3A PCN | Embora nas séries iniciais já se possa desenvolver alguns aspectos da álgebra, é especialmente nas séries finais do ensino fundamental que as atividades algébricas serão ampliadas. Pela exploração de situações problema, o aluno reconhecerá diferentes funções da Álgebra (generalizar padrões aritméticos, estabelecer relação entre duas grandezas, modelizar, resolver problemas aritmeticamente difíceis), representará problemas por meio de equações e inequações (diferenciando parâmetros, variáveis, incógnitas, tomando contato com fórmulas), compreenderá a sintaxe. (regras para resolução) de uma equação. | 50 |
| 1A PCN | No entanto, é importante salientar que ainda hoje nota-se, por exemplo, a insistência no trabalho com a linguagem da teoria dos conjuntos nas séries iniciais, a formalização | 19 |

| | | |
|---|---|---|
| | precoce de conceitos, o predomínio absoluto da Álgebra nas séries finais e as poucas aplicações práticas da Matemática no ensino fundamental. | |
| 9E PCN | Assim, no trabalho com a Álgebra é fundamental a compreensão de conceitos como o de variável e de função; a representação de fenômenos na forma algébrica e na forma gráfica; a formulação e a resolução de problemas por meio de equações (ao identificar parâmetros, incógnitas, variáveis) e o conhecimento da .sintaxe. (regras para resolução) de uma equação. | 85 |
| 10E PCN | Tradução de situações-problema por equações ou inequações do primeiro grau, utilizando as propriedades da igualdade ou desigualdade, na construção de procedimentos para resolvê- las, discutindo o significado das raízes encontradas em confronto com a situação proposta. | 88 |
| 20A PCN | É interessante também propor situações em que os alunos possam investigar padrões, tanto em sucessões numéricas como em representações geométricas e identificar suas estruturas, construindo a linguagem algébrica para descrevê-los simbolicamente. Esse trabalho favorece a que o aluno construa a idéia de Álgebra como uma linguagem para expressar regularidades. | 117 |
| 9A PCN | Desse modo, o ensino de Álgebra precisa continuar garantindo que os alunos trabalhem com problemas, que lhes permitam dar significado à linguagem e às idéias matemáticas. | 84 |
| 19E PCN | Nesse documento, recomenda-se que o estudo das técnicas convencionais para resolver equações seja desenvolvido apenas no quarto ciclo, pois em caso contrário os conteúdos do terceiro ciclo ficarão mais extensos, dificultando o trabalho com os demais blocos. Entretanto, é possível que nesse ciclo os alunos traduzam algumas situações problema por equações. | 122 |
| 5E PNLD | Apesar de serem exceções, ainda persistem as que utilizam, de forma abusiva, a linguagem de conjunto na resolução de equações e inequações. | 45 |
| 2E PNLD | No entanto, as pesquisas em Educação Matemática têm apontado a importância de se introduzir o uso da linguagem algébrica mais cedo – não com o tratamento de equações, acompanhado de suas classificações e fatorações – mas com a preparação do aluno para entender a linguagem simbólica que expresse abstrações e generalizações. | 43 |
| 3A PNLD | A percepção de regularidades, que pode levar à criação de modelos simbólicos para diversas situações, e a capacidade de traduzir simbolicamente problemas encontrados no dia-a-dia, ou provenientes de outras áreas do conhecimento, devem ser gradativamente desenvolvidas para se chegar ao uso pleno da linguagem e das técnicas da álgebra. | 16 |
| 4A PNLD | O uso da linguagem algébrica, para expressar generalizações que se constituam em propriedades de outros campos da Matemática, é outra função da álgebra que deve ser, pouco a pouco, introduzida. | 16 |

**Legenda:** A numeração refere a ordem em que foram retiradas as unidades de registro dos documento. Segue-se então uma letra, **A** – unidade referente a palavra álgebra, **E** – unidade referente a palavra equação e por fim a sigla referente ao documento em que foi retirado a unidade **PNLD** – Resenha do livro didático, Plano Nacional do Livro Didático e **PCN** – Parâmetros Curriculares Nacionais.

Exemplo: Ao encontrar **14E PCN** – temos a décima quarta unidade significativa que refere-se a palavra equação dos Parâmetros Curriculares Nacionais.

Enfatizamos nesse momento que a referida legenda vale para os seguintes anexos II, III, IV, V, VI, VII, e VIII.

## ANEXO III

**Categoria 02 - Contextualização**

| Documento | Unidade de Registro | Página |
|---|---|---|
| 11E PCN | Resolução de situações-problema por meio de um sistema de equações do primeiro grau, construindo diferentes procedimentos para resolvê-lo, inclusive o da representação das equações no plano cartesiano, discutindo o significado das raízes encontradas em confronto com a situação proposta | 89 |
| 12A PCN | O estudo da Álgebra constitui um espaço bastante significativo para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização, além de lhe possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para resolver problemas | 115 |
| 3A PNLD | A percepção de regularidades, que pode levar à criação de modelos simbólicos para diversas situações, e a capacidade de traduzir simbolicamente problemas encontrados no dia-a-dia, ou provenientes de outras áreas do conhecimento, devem ser gradativamente desenvolvidas para se chegar ao uso pleno da linguagem e das técnicas da álgebra. | 16 |
| 10E PCN | Tradução de situações-problema por equações ou inequações do primeiro grau, utilizando as propriedades da igualdade ou desigualdade, na construção de procedimentos para resolvê- las, discutindo o significado das raízes encontradas em confronto com a situação proposta. | 88 |
| 9A PCN | Desse modo, o ensino de Álgebra precisa continuar garantindo que os alunos trabalhem com problemas, que lhes permitam dar significado à linguagem e às idéias matemáticas. | 84 |
| 10A PCN | Ao se proporem situações-problema bastante diversificadas, o aluno poderá reconhecer diferentes funções de Álgebra (ao resolver problemas difíceis do ponto de vista aritmético, ao modelizar, generalizar e demonstrar propriedades e fórmulas, estabelecer relações entre grandezas). Assim, no trabalho com a Álgebra é fundamental a compreensão de conceitos como o de variável e de função; a representação de fenômenos na forma algébrica e na forma gráfica; a formulação e a resolução de problemas por meio de equações (ao identificar parâmetros, incógnitas, variáveis) e o conhecimento da sintaxe. (regras para resolução) de uma equação. | 84 |
| 4E PCN | É provável que ao explorar situações-problema que envolvam variação de grandezas o aluno depare com equações, o que possibilita interpretar a letra como incógnita | 49 |
| 11A PCN | O trabalho com a Álgebra também está presente em atividades e problemas envolvendo noções e conceitos referentes aos demais blocos, como ao generalizar os procedimentos para calcular o número de diagonais para qualquer polígono, ao indicar a expressão que relaciona duas grandezas, ao calcular medidas da tendência central de uma pesquisa. | 84 |

## ANEXO IV

**Categoria 03 – Sistematização**

| Documento | Unidade de Registro | Página |
|---|---|---|
| 16A PNLD | Há ainda a função da álgebra para exprimir relação entre grandezas ou conjuntos numéricos, que se realiza, por exemplo, por meio de estudo de funções. Existem dois momentos de preparação para tal uso da álgebra. O estudo de regularidades em seqüências numéricas ou de figuras é um deles(...). Uma outra é a expressão de relações funcionais, como as fórmulas de área de figuras planas, por exemplo. | 44 |
| 17A PNLD | Uma outra situação que se inclui na iniciação à álgebra é a determinação do elemento desconhecido em uma igualdade matemática. | 44 |
| 11E PCN | Resolução de situações-problema por meio de um sistema de equações do primeiro grau, construindo diferentes procedimentos para resolvê-lo, inclusive o da representação das equações no plano cartesiano, discutindo o significado das raízes encontradas em confronto com a situação proposta | 89 |
| 20E PCN | Os contextos dos problemas deverão ser diversificados para que eles tenham oportunidade de construir a sintaxe das representações algébricas, traduzir as situações por meio de equações (ao identificar parâmetros, incógnitas, variáveis), e construir as regras para resolução de equações. | 123 |
| 5E PCN | Produzir e interpretar diferentes escritas algébricas expressões, igualdades e desigualdades identificando as equações, inequações e sistemas; | 82 |
| 21A PCN | Iniciar o estudo da sintaxe que o aluno está construindo com as letras poderá completar a noção da álgebra como uma linguagem com regras específicas para o manuseio das expressões, ou seja, o cálculo algébrico. Esse trabalho é significativo para que o aluno perceba que a transformação de uma expressão algébrica em outra equivalente, mais simples, facilita encontrar a solução de um problema. | 118 |
| 6A PCN | Devido à complexidade que caracteriza os conceitos e procedimentos algébricos não é desejável que no terceiro ciclo se desenvolva um trabalho visando ao aprofundamento das operações com as expressões algébricas e as equações. É suficiente nesse ciclo que os alunos compreendam a noção de variável e reconheçam a expressão algébrica como uma forma de traduzir a relação existente entre a variação de duas grandezas. | 68 |
| 3A PCN | Embora nas séries iniciais já se possa desenvolver alguns aspectos da álgebra, é especialmente nas séries finais do ensino fundamental que as atividades algébricas serão ampliadas. Pela exploração de situações problema, o aluno reconhecerá diferentes funções da Álgebra (generalizar padrões aritméticos, estabelecer relação entre duas grandezas, modelizar, resolver problemas aritmeticamente difíceis), representará problemas por meio de equações e inequações (diferenciando parâmetros, variáveis, incógnitas, tomando contato com fórmulas), compreenderá a sintaxe (regras para resolução) de uma equação. | 50 |
| 9E PCN | Assim, no trabalho com a Álgebra é fundamental a compreensão de conceitos como o de variável e de função; a representação de fenômenos na forma algébrica e na forma gráfica; a formulação e a resolução de problemas por meio de equações (ao identificar parâmetros, incógnitas, variáveis) e o conhecimento da .sintaxe. (regras para resolução) de uma equação. | 85 |
| 17E PCN | Para isso, não é necessário que eles já conheçam as técnicas de resolução de equações do primeiro grau, mas que percebam o novo significado da letra P, agora uma incógnita: P + P x 0,4 = 11,20. | 119 |
| 19A PCN | Embora se considere importante que esse trabalho chamado de pré álgebra aconteça nas séries iniciais, ele deve ser retomado no terceiro ciclo para que as noções e conceitos algébricos possam ser ampliados e consolidados | 117 |
| 14A PNLD | Além do uso das letras para representar um valor desconhecido, a álgebra é utilizada para expressar generalizações de propriedades, por exemplo, da aritmética. | 43 |
| 4E PCN | É provável que ao explorar situações-problema que envolvam variação de grandezas o aluno depare com equações, o que possibilita interpretar a letra como incógnita | 49 |

## ANEXO V

**Categoria 04 – Articulação**

| **Documento** | **Unidade de Registro** | **Página** |
|---|---|---|
| 2A PCN | Atualmente, há consenso a fim de que os currículos de Matemática para o ensino fundamental devam contemplar o estudo dos números e das operações (no campo da Aritmética e da Álgebra), o estudo do espaço e das formas (no campo da Geometria) e o estudo das grandezas e das medidas (que permite interligações entre os campos da Aritmética, da Álgebra, e da Geometria e de outros campos do conhecimento) | 49 |
| 11A PCN | O trabalho com a Álgebra também está presente em atividades e problemas envolvendo noções e conceitos referentes aos demais blocos, como ao generalizar os procedimentos para calcular o número de diagonais para qualquer polígono, ao indicar a expressão que relaciona duas grandezas, ao calcular medidas da tendência central de uma pesquisa. | 84 |
| 4A PNLD | O uso da linguagem algébrica, para expressar generalizações que se constituam em propriedades de outros campos da Matemática, é outra função da álgebra que deve ser, pouco a pouco, introduzida. | 16 |

## ANEXO VI

**Categoria 05 – Técnicas, Procedimentos e Métodos**

| Documento | Unidade de Registro | Página |
|---|---|---|
| 13E PCN | Além das situações do cotidiano os números negativos também surgiram no interior da Matemática na resolução de equações algébricas. | 98 |
| 18E PCN | Ao longo desses ciclos é importante que os alunos percebam que as equações, sistemas e inequações facilitam muito as resoluções de problemas difíceis do ponto de vista aritmético. | 122 |
| 17A PNLD | Uma outra situação que se inclui na iniciação à álgebra é a determinação do elemento desconhecido em uma igualdade matemática. | 44 |
| 11E PCN | Resolução de situações-problema por meio de um sistema de equações do primeiro grau, construindo diferentes procedimentos para resolvê-lo, inclusive o da representação das equações no plano cartesiano, discutindo o significado das raízes encontradas em confronto com a situação proposta | 89 |
| 12A PCN | O estudo da Álgebra constitui um espaço bastante significativo para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização, além de lhe possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para resolver problemas | 115 |
| 21A PCN | Iniciar o estudo da sintaxe que o aluno está construindo com as letras poderá completar a noção da álgebra como uma linguagem com regras específicas para o manuseio das expressões, ou seja, o cálculo algébrico. Esse trabalho é significativo para que o aluno perceba que a transformação de uma expressão algébrica em outra equivalente, mais simples, facilita encontrar a solução de um problema. | 118 |
| 3A PCN | Embora nas séries iniciais já se possa desenvolver alguns aspectos da álgebra, é especialmente nas séries finais do ensino fundamental que as atividades algébricas serão ampliadas. Pela exploração de situações problema, o aluno reconhecerá diferentes funções da Álgebra (generalizar padrões aritméticos, estabelecer relação entre duas grandezas, modelizar, resolver problemas aritmeticamente difíceis), representará problemas por meio de equações e inequações (diferenciando parâmetros, variáveis, incógnitas, tomando contato com fórmulas), compreenderá a .sintaxe. (regras para resolução) de uma equação. | 50 |
| 11A PCN | O trabalho com a Álgebra também está presente em atividades e problemas envolvendo noções e conceitos referentes aos demais blocos, como ao generalizar os procedimentos para calcular o número de diagonais para qualquer polígono, ao indicar a expressão que relaciona duas grandezas, ao calcular medidas da tendência central de uma pesquisa. | 84 |
| 9E PCN | Assim, no trabalho com a Álgebra é fundamental a compreensão de conceitos como o de variável e de função; a representação de fenômenos na forma algébrica e na forma gráfica; a formulação e a resolução de problemas por meio de equações (ao identificar parâmetros, incógnitas, variáveis) e o conhecimento da .sintaxe. (regras para resolução) de uma equação. | 85 |
| 17E PCN | Para isso, não é necessário que eles já conheçam as técnicas de resolução de equações do primeiro grau, mas que percebam o novo significado da letra P, agora uma incógnita: P + P x 0,4 = 11,20. | 119 |
| 10E PCN | Tradução de situações-problema por equações ou inequações do primeiro grau, utilizando as propriedades da igualdade ou desigualdade, na construção de procedimentos para resolvê- las, discutindo o significado das raízes encontradas em confronto com a situação proposta. | 88 |
| 6E PCN | resolver situações-problema por meio de equações e inequações do primeiro grau, compreendendo os procedimentos envolvidos; | 82 |

| | | |
|---|---|---|
| 19E PCN | Nesse documento, recomenda-se que o estudo das técnicas convencionais para resolver equações seja desenvolvido apenas no quarto ciclo, pois em caso contrário os conteúdos do terceiro ciclo ficarão mais extensos, dificultando o trabalho com os demais blocos. Entretanto, é possível que nesse ciclo os alunos traduzam algumas situações problema por equações. | 122 |
| 10A PCN | Ao se proporem situações-problema bastante diversificadas, o aluno poderá reconhecer diferentes funções de Álgebra (ao resolver problemas difíceis do ponto de vista aritmético, ao modelizar, generalizar e demonstrar propriedades e fórmulas, estabelecer relações entre grandezas). Assim, no trabalho com a Álgebra é fundamental a compreensão de conceitos como o de variável e de função; a representação de fenômenos na forma algébrica e na forma gráfica; a formulação e a resolução de problemas por meio de equações (ao identificar parâmetros, incógnitas, variáveis) e o conhecimento da sintaxe (regras para resolução) de uma equação. | 84 |

# ANEXO VII

**Categoria 06 – Organização do Estudo da Álgebra**

| Documento | Unidade de Registro | Página |
|---|---|---|
| 1A PNLD | Esses conteúdos têm sido organizados em cinco grandes campos: números e operações; álgebra; geometria; grandezas e medidas; e tratamento da informação. As competências associadas a esses campos são mencionadas a seguir. | 15 |
| 15A PCN | Para uma tomada de decisões a respeito do ensino da Álgebra, deve-se ter, evidentemente, clareza de seu papel no currículo, além da reflexão de como a criança e o adolescente constroem o conhecimento matemático, principalmente quanto à variedade de representações. | 116 |
| 16A PNLD | Há ainda a função da álgebra para exprimir relação entre grandezas ou conjuntos numéricos, que se realiza, por exemplo, por meio de estudo de funções. Existem dois momentos de preparação para tal uso da álgebra. | 44 |
| 18E PCN | Ao longo desses ciclos é importante que os alunos percebam que as equações, sistemas e inequações facilitam muito as resoluções de problemas difíceis do ponto de vista aritmético. | 122 |
| 15E PCN | Assim, é mais proveitoso propor situações que levem os alunos a construir noções algébricas pela observação de regularidades em tabelas e gráficos, estabelecendo relações, do que desenvolver o estudo da Álgebra apenas enfatizando as manipulações com expressões e equações de uma forma meramente mecânica. | 117 |
| 18A PNLD | Algumas coleções justificam a fórmula de Bhaskara geometricamente. Essa é uma ótima ocasião para integrar os campos álgebra e geometria. Outros a justificam pelo processo de completar quadrados. | 45 |
| 10A PNLD | O campo da álgebra é pouco trabalhado na 5ª série. No entanto, algumas coleções já incorporam a preparação para o estudo da álgebra nesta série, como tem sido indicado nas pesquisas. Este campo, em geral, concentra-se nas 7ª e 8ª séries, em mais da metade das coleções. Além disso, seis das coleções dedicam à álgebra cerca de 40% do livro da 7ª série. Em algumas dessas coleções, também na 6ª série, o espaço dedicado à álgebra é grande. | 31 |
| 1E PNLD | Em muitas coleções, dá-se pouca ênfase ao conceito de operação inversa, que tanto pode contribuir para desenvolver a compreensão das estratégias de resolução de equações. | 41 |
| 20E PCN | Os contextos dos problemas deverão ser diversificados para que eles tenham oportunidade de construir a sintaxe das representações algébricas, traduzir as situações por meio de equações (ao identificar parâmetros, incógnitas, variáveis), e construir as regras para resolução de equações. | 123 |
| 2E PNLD | No entanto, as pesquisas em Educação Matemática têm apontado a importância de se introduzir o uso da linguagem algébrica mais cedo – não com o tratamento de equações, acompanhado de suas classificações e fatorações – mas com a preparação do aluno para entender a linguagem simbólica que expresse abstrações e generalizações. | 43 |
| 5A PCN | No decorrer do trabalho com os números, é fundamental estudar algumas relações funcionais pela exploração de padrões em seqüências numéricas que levem os alunos a fazer algumas generalizações e compreender, por um processo de aproximações sucessivas, a natureza das representações algébricas. A construção dessas generalizações e de suas respectivas representações permite a exploração das primeiras noções de álgebra | 68 |
| 12A PCN | O estudo da Álgebra constitui um espaço bastante significativo para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização, além de lhe possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para resolver problemas | 115 |
| 3E PCN | Devido à complexidade que caracteriza os conceitos e procedimentos algébricos não é | 68 |

| | | |
|---|---|---|
| | desejável que no terceiro ciclo se desenvolva um trabalho visando ao aprofundamento das operações com as expressões algébricas e as equações. | |
| 16A PCN | Assim, é mais proveitoso propor situações que levem os alunos a construir noções algébricas pela observação de regularidades em tabelas e gráficos, estabelecendo relações, do que desenvolver o estudo da Álgebra apenas enfatizando as .manipulações. com expressões e equações de uma forma meramente mecânica. | 116 |
| 7A PNLD | A primeira delas diz respeito à própria classificação dos conteúdos. A que foi adotada segue a tendência das avaliações anteriores; está em razoável sintonia com propostas curriculares vigentes e agrupa os conteúdos da matemática escolar em cinco campos: números e operações (N), álgebra (A), geometria (G), grandezas e medidas (GM) e tratamento da informação (TI). | 28 |
| 8A PCN | O trabalho com a Álgebra, neste ciclo, tem como ponto de partida a pré álgebra desenvolvida no ciclo anterior, em que as noções algébricas são exploradas por meio de jogos, generalizações e representações matemáticas (como gráficos, modelos), e não por procedimentos puramente mecânicos, para lidar com as expressões e equações. | 84 |
| 6A PCN | Devido à complexidade que caracteriza os conceitos e procedimentos algébricos não é desejável que no terceiro ciclo se desenvolva um trabalho visando ao aprofundamento das operações com as expressões algébricas e as equações. É suficiente nesse ciclo que os alunos compreendam a noção de variável e reconheçam a expressão algébrica como uma forma de traduzir a relação existente entre a variação de duas grandezas. | 68 |
| 3A PNLD | A percepção de regularidades, que pode levar à criação de modelos simbólicos para diversas situações, e a capacidade de traduzir simbolicamente problemas encontrados no dia-a-dia, ou provenientes de outras áreas do conhecimento, devem ser gradativamente desenvolvidas para se chegar ao uso pleno da linguagem e das técnicas da álgebra. | 16 |
| 3A PCN | Embora nas séries iniciais já se possa desenvolver alguns aspectos da álgebra, é especialmente nas séries finais do ensino fundamental que as atividades algébricas serão ampliadas. Pela exploração de situações problema, o aluno reconhecerá diferentes funções da Álgebra (generalizar padrões aritméticos, estabelecer relação entre duas grandezas, modelizar, resolver problemas aritmeticamente difíceis), representará problemas por meio de equações e inequações (diferenciando parâmetros, variáveis, incógnitas, tomando contato com fórmulas), compreenderá a sintaxe. (regras para resolução) de uma equação. | 50 |
| 4A PCN | Esse encaminhamento dado a Álgebra, a partir da generalização de padrões, bem como o estudo da variação de grandezas possibilita a exploração da noção de função nos terceiro e quarto ciclos. Entretanto, a abordagem formal desse conceito deverá ser objeto de estudo do ensino médio. | 51 |
| 8A PNLD | O estudo das funções, aí incluído o da proporcionalidade e dos tópicos de matemática financeira, foi considerado no campo da álgebra. | 29 |
| 20A PCN | É interessante também propor situações em que os alunos possam investigar padrões, tanto em sucessões numéricas como em representações geométricas e identificar suas estruturas, construindo a linguagem algébrica para descrevê-los simbolicamente. Esse trabalho favorece a que o aluno construa a idéia de Álgebra como uma linguagem para expressar regularidades. | 117 |
| 9A PCN | Desse modo, o ensino de Álgebra precisa continuar garantindo que os alunos trabalhem com problemas, que lhes permitam dar significado à linguagem e às idéias matemáticas. | 84 |
| 19A PCN | Embora se considere importante que esse trabalho chamado de pré álgebra aconteça nas séries iniciais, ele deve ser retomado no terceiro ciclo para que as noções e conceitos algébricos possam ser ampliados e consolidados | 117 |
| 4A PNLD | O uso da linguagem algébrica, para expressar generalizações que se constituam em propriedades de outros campos da Matemática, é outra função da álgebra que deve ser, pouco a pouco, introduzida. | 16 |
| 14A PNLD | Além do uso das letras para representar um valor desconhecido, a álgebra é utilizada | 43 |

| | | |
|---|---|---|
| | para expressar generalizações de propriedades, por exemplo, da aritmética. | |
| 19E PCN | Nesse documento, recomenda-se que o estudo das técnicas convencionais para resolver equações seja desenvolvido apenas no quarto ciclo, pois em caso contrário os conteúdos do terceiro ciclo ficarão mais extensos, dificultando o trabalho com os demais blocos. Entretanto, é possível que nesse ciclo os alunos traduzam algumas situações problema por equações. | 122 |
| 14A PCN | Existem também professores que, na tentativa de tornar mais significativa a aprendizagem da Álgebra, simplesmente deslocam para o ensino fundamental conceitos que tradicionalmente eram tratados no ensino médio com uma abordagem excessivamente formal de funções. Convém lembrar que essa abordagem não é adequada a este grau de ensino. | 116 |
| 10A PCN | Ao se proporem situações-problema bastante diversificadas, o aluno poderá reconhecer diferentes funções de Álgebra (ao resolver problemas difíceis do ponto de vista aritmético, ao modelizar, generalizar e demonstrar propriedades e fórmulas, estabelecer relações entre grandezas). Assim, no trabalho com a Álgebra é fundamental a compreensão de conceitos como o de variável e de função; a representação de fenômenos na forma algébrica e na forma gráfica; a formulação e a resolução de problemas por meio de equações (ao identificar parâmetros, incógnitas, variáveis) e o conhecimento da sintaxe. (regras para resolução) de uma equação. | 84 |
| 2A PCN | Atualmente, há consenso a fim de que os currículos de Matemática para o ensino fundamental devam contemplar o estudo dos números e das operações (no campo da Aritmética e da Álgebra), o estudo do espaço e das formas (no campo da Geometria) e o estudo das grandezas e das medidas (que permite interligações entre os campos da Aritmética, da Álgebra, e da Geometria e de outros campos do conhecimento) | 49 |

## ANEXO VIII

**Categoria 07 – “Cidadania”**

| **Documento** | **Unidade de Registro** | **Página** |
|---|---|---|
| 12A PCN | O estudo da Álgebra constitui um espaço bastante significativo para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização, além de lhe possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para resolver problemas. | 115 |
| 20A PCN | É interessante também propor situações em que os alunos possam investigar padrões, tanto em sucessões numéricas como em representações geométricas e identificar suas estruturas, construindo a linguagem algébrica para descrevê-los simbolicamente. Esse trabalho favorece a que o aluno construa a idéia de Álgebra como uma linguagem para expressar regularidades. | 117 |
| 21A PCN | Iniciar o estudo da sintaxe que o aluno está construindo com as letras poderá completar a noção da álgebra como uma linguagem com regras específicas para o manuseio das expressões, ou seja, o cálculo algébrico. Esse trabalho é significativo para que o aluno perceba que a transformação de uma expressão algébrica em outra equivalente, mais simples, facilita encontrar a solução de um problema. | 118 |
| 15E PCN | Assim, é mais proveitoso propor situações que levem os alunos a construir noções algébricas pela observação de regularidades em tabelas e gráficos, estabelecendo relações, do que desenvolver o estudo da Álgebra apenas enfatizando as manipulações com expressões e equações de uma forma meramente mecânica. | 116 |
| 20E PCN | Os contextos dos problemas deverão ser diversificados para que eles tenham oportunidade de construir a sintaxe das representações algébricas, traduzir as situações por meio de equações (ao identificar parâmetros, incógnitas, variáveis), e construir as regras para resolução de equações. | 123 |