



**FUNDAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA**



ALESSANDRO RIBEIRO DA SILVA

**Experimentação com Tecnologias Digitais em Atividades de Modelagem Matemática:
possíveis encaminhamentos para o ensino e a aprendizagem de Matemática**



CAMPO GRANDE - MS

2024

ALESSANDRO RIBEIRO DA SILVA

**Experimentação com Tecnologias Digitais em Atividades de Modelagem Matemática:
possíveis encaminhamentos para o ensino e a aprendizagem de Matemática**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Orientadora: Prof.^a Dr.^a Claudia Carreira da Rosa

CAMPO GRANDE - MS

2024

BANCA EXAMINADORA

Prof.^a Dr.^a Claudia Carreira da Rosa - Orientadora

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Cidade Universitária.

Prof.^a Dr.^a Aparecida Santana de Souza Chiari

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Cidade Universitária.

Prof.^a Dr.^a Eugenia Brunilda Opazo Uribe

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campos de Três Lagoas

CAMPO GRANDE - MS

2024

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à minha família e amigos.

“Ensinar é um exercício de imortalidade. De alguma forma continuamos a viver naqueles cujos olhos aprenderam a ver o mundo pela magia da nossa palavra. O professor, assim, não morre jamais”.

Ruben Alves

SILVA, Alessandro Ribeiro da. **Experimentação com Tecnologias Digitais em Atividades de Modelagem Matemática: possíveis encaminhamentos para o ensino e a aprendizagem de Matemática**. 2024. 207 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Instituto de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Campo Grande, 2024.

RESUMO

Esta dissertação está vinculada ao Grupo de Formação, Estudos e Pesquisas em Educação Matemática (GFEPEM) e a Ação de Extensão "Oficinas de Matemática - VEM PARA UFMS". Atualmente, há diferentes estratégias pedagógicas que buscam potencializar o ensino e aprendizagem de Matemática na Educação Básica. Dentre esses métodos ou metodologias, que visam fundamentar pesquisadores/professores durante suas práticas escolares, está a Modelagem Matemática, que nesta pesquisa é o principal aporte teórico, considerada com uma alternativa pedagógica concebida por Almeida, Silva e Vertuan (2021). E, unido a ela utilizamos a Experimentação com Tecnologia defendida por Borba, Silva e Gadanidis (2023) como uma forma de analisar como a Experimentação pode potencializar as contribuições do uso das Tecnologias Digitais na construção dos conhecimentos matemáticos e extramatemáticos de estudantes do ensino médio de acordo com as fases da Modelagem Matemática. Na busca de validar nosso objetivo realizamos um estudo em uma escola pública estadual localizada em Campo Grande-MS, com estudantes de duas turmas do 3.º ano do ensino médio, foram feitas observações em sala de aula, entrevistas individuais e em grupo, participação em atividades colaborativas nas plataformas *online*, como Canva e Mentimeter, e análise de materiais produzidos pelos participantes como os registros dos estudantes, além das anotações realizadas pelo pesquisador/professor. Nossas análises foram baseadas em três categorias definidas *a priori*. À vista disso, esta pesquisa é de cunho qualitativo interpretativo de acordo com Marcone e Lakatos (2003), e Moreira (2011). Como resultado podemos identificar nas fases da Modelagem após a Experimentação com Tecnologias, que os estudantes foram protagonistas na construção de seus conhecimentos matemáticos e extramatemáticos, com a mediação do pesquisador/professor. Dessa forma, realizaram experimentos com diversas Tecnologias Digitais e compararam com os resultados feitos de forma manual, vivenciando a partir da experiência a facilidade que as Tecnologias proporcionam. Assim, trabalharam em grupo de forma colaborativa, levantaram hipóteses, testaram dados produzidos das situações-problema em tempo real, criaram conjecturas, e por fim, validaram os modelos matemáticos obtido dos procedimentos (fases) da Modelagem Matemática.

Palavras-Chave: Modelagem. Ferramentas Digitais. Brincadeiras Lúdicas. Atividades Experimentais. Educação Matemática.

SILVA, Alessandro Ribeiro da. **Experimenting with Digital Technologies in Mathematical Modeling Activities: possible directions for teaching and learning mathematics**. 2024. 207 f. Dissertation (Master in Mathematics Education) - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Instituto de Matemática. Graduate Program in Mathematics Education, Campo Grande, 2024.

ABSTRACT

This dissertation is linked to the Group for Training, Studies and Research in Mathematics Education (GFPEM) and the Extension Action "Mathematics Workshops - VEM PARA UFMS". Currently, there are different pedagogical strategies that seek to enhance the teaching and learning of mathematics in basic education. Among these methods or methodologies, which aim to support researchers/teachers during their school practices, is Mathematical Modeling, which in this research is the main theoretical contribution, considered as a pedagogical alternative conceived by Almeida, Silva and Vertuan (2021). And, together with it, we used Experimentation with Technology defended by Borba, Silva and Gadanidis (2023) as a way of analysing how Experimentation can enhance the contributions of the use of Digital Technologies in the construction of mathematical and extramathematical knowledge of high school students according to the phases of Mathematical Modeling. In order to validate our objective, we carried out a study in a state public school located in Campo Grande - MS, with students from two classes in the 3rd year of high school. We conducted classroom observations, individual and group interviews, participated in collaborative activities on online platforms such as Canva and Mentimeter, and analysed the materials produced by the participants, such as the students' records, as well as the notes taken by the researcher/teacher. Our analysis was based on three categories defined a priori. In view of this, this research is of an interpretative qualitative nature according to Marcone and Lakatos (2003), and Moreira (2011). As a result, we can identify in the Modeling phases after the Experimentation with Technologies, that the students were protagonists in the construction of their mathematical and extramathematical knowledge, with the mediation of the researcher/teacher. In this way, they carried out experiments with various Digital Technologies and compared them with the results obtained manually, experiencing the ease that Technologies provide. Thus, they worked collaboratively in groups, raised hypotheses, tested data collected from problem situations in real time, created conjectures, and finally validated the mathematical models obtained from the procedures (phases) of Mathematical Modeling.

Keywords: Modeling. Digital Tools. Playful Games. Experimental Activities. Mathematics Education.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 -	Atividades intelectuais da Modelagem Matemática.....	31
Figura 2 -	A situação inicial e a situação final na Modelagem Matemática.....	38
Figura 3 -	Fases da Modelagem Matemática.....	38
Figura 4 -	Elementos que caracterizam uma atividade de Modelagem Matemática..	39
Figura 5 -	Fases de Modelagem Matemática e as ações cognitivas dos alunos.....	40
Figura 6 -	Inserção dos momentos de uma atividade experimental investigativa no ciclo de modelagem.....	54
Figura 7 -	Evidências de atribuição de significado na atividade de modelagem matemática com experimentação.....	55
Figura 8 -	Interface disponibilizada pelo site do Tracker.....	71
Figura 9 -	Interface do <i>software</i> GeoGebra.....	72
Figura 10 -	Fórmula do Erro Numérico.....	75
Figura 11 -	Tipos de aviões de papel.....	78
Figura 12 -	Prints de tela da captura com movimento feito no Tracker.....	90
Figura 13 -	Petecas utilizadas na atividade.....	92
Figura 14 -	Perguntas iniciais para Interação sem uso da Experimentação com Tecnologias Digitais.....	93
Figura 15 -	Anotação da estudante Daiane.....	100
Figura 16 -	Resultado do infográfico do grupo A.....	103
Figura 17 -	Resultado do infográfico do grupo B.....	103
Figura 18 -	Infográfico colaborativa construído com todos os grupos - Fase de Interação.....	104
Figura 19 -	Experimentação com a peteca - Grupo A.....	106
Figura 20 -	Desenho realizado pelo grupo B.....	108
Figura 21 -	Desenho realizado pelo grupo A.....	110
Figura 22 -	Hipótese levantada pelo grupo A.....	111
Figura 23 -	Estudantes importando seus vídeos para os drives, utilizando os computadores e seus celulares.....	112

Figura 24 -	<i>Print</i> de tela da Experimentação com a peteca - Grupo A.....	116
Figura 25 -	Primeiro gráfico plotado pelo programa Tracker - Grupo A.....	117
Figura 26 -	Segundo gráfico plotado pelo programa Tracker - Grupo A.....	118
Figura 27 -	Primeira regressão polinomial - Grupo A.....	119
Figura 28 -	Segunda regressão polinomial - Grupo A.....	120
Figura 29 -	Primeira função polinomial - Grupo A.....	121
Figura 30 -	Segunda função polinomial - Grupo A.....	122
Figura 31 -	<i>Print</i> de tela da Experimentação com a peteca - Grupo B.....	124
Figura 32 -	Gráfico plotado pelo Tracker - Grupo B.....	125
Figura 33 -	Regressão polinomial - Grupo B.....	126
Figura 34 -	Função polinomial - Grupo B.....	127
Figura 35 -	Experimentação com GeoGebra - Grupo A.....	129
Figura 36 -	Experimentação com GeoGebra - Grupo B.....	130
Figura 37 -	Vídeos sobre erro absoluto e erro relativo.....	131
Figura 38 -	Surgimento das Tecnologias Digitais nas fases da Modelagem.....	137
Figura 39 -	Resposta dos Grupos A e B.....	138
Figura 40 -	Conteúdos matemático e extramatemático nas fases da Modelagem.....	139
Figura 41 -	Esquema das estratégias utilizada na pesquisa.....	143
Figura 42 -	Fotografia dos Dardos Magnéticos.....	145
Figura 43 -	Questões norteadoras para discussão da situação-problema.....	146
Figura 44 -	Questões para a atividade colaborativa na plataforma <i>online</i> Mentimeter.....	149
Figura 45 -	Respostas às atividades colaborativas na plataforma Mentimeter.....	150
Figura 46 -	Sorteador de números.....	151
Figura 47 -	<i>Print</i> de tela com a Experimentação com os dardos magnéticos - Grupo A.....	156
Figura 48 -	Gráfico elaborados pelos grupos A.....	157

Figura 49 - Gráfico plotado pelo programa Tracker em relação aos dardos magnéticos - Grupo A.....	158
Figura 50 - Regressão polinomial do segundo grau - Grupo A.....	159
Figura 51 - Gráfico da função polinomial - Grupo A.....	161
Figura 52 - <i>Print</i> de tela com a Experimentação com os dardos magnéticos - Grupo A.....	162
Figura 53 - Gráfico plotado pelo programa Tracker em relação aos dardos magnéticos - Grupo B.....	163
Figura 54 - Regressão polinomial do segundo grau - Grupo B.....	164
Figura 55 - Gráfico da função polinomial - Grupo B.....	165
Figura 56 - Expressões algébricas e gráficos da função quadrática - Grupo A.....	166
Figura 57 - Expressões algébricas e gráficos da fórmula, reduzida - Grupo A.....	167
Figura 58 - Expressões algébricas e gráficos da fórmula canônica - Grupo A.....	167
Figura 59 - Expressões algébricas e gráficos da fórmula quadrática - Grupo B.....	168
Figura 60 - Expressões algébricas e gráficos da fórmula reduzida - Grupo B.....	169
Figura 61 - Expressões algébricas e gráficos da fórmula canônica - Grupo B.....	169
Figura 62 - Resultado da expressão algébrica.....	173
Figura 63 - Uso do GeoGebra para obtenção da posição do dardo em relação ao tempo - Grupo A.....	174

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 -	Autores da Modelagem Matemática e suas respectivas concepções.....	29
Quadro 2 -	Os três casos de Barbosa e suas respectivas definições.....	33
Quadro 3 -	Os casos de Modelagem.....	33
Quadro 4 -	Visão das perspectivas de Dionísio Burak.....	36
Quadro 5 -	Considerações sobre as fases da Modelagem Matemática.....	38
Quadro 6 -	Diferentes circunstâncias de Modelagem Matemática.....	41
Quadro 7 -	Aspectos relevantes na quarta fase das Tecnologias na Educação Matemática.....	45
Quadro 8 -	Autores selecionados na CNMEM/2023.....	49
Quadro 9 -	Planejamento da produção de dados.....	68
Quadro 10 -	Janelas e ferramentas do <i>GeoGebra</i>	72
Quadro 11 -	Detalhes para elaboração do gráfico plotado pelo programa Tracker....	88
Quadro 12 -	Detalhes para encontrar a representação da função polinomial de segundo grau.....	89
Quadro 13 -	Planejamento final.....	95
Quadro 14 -	Hipóteses e variáveis elaboradas pelos grupos A e B.....	113
Quadro 15 -	Função Polinomial do segundo grau no GeoGebra - Grupos A e B.....	128
Quadro 16 -	Respostas dos estudantes fase Interação - Petecas.....	140
Quadro 17 -	Hipóteses e variáveis elaboradas pelos grupos A e B.....	155
Quadro 18 -	Modelos encontrado pelos grupo A e B, por meio da atividade lançando dardos magnéticos.....	166
Quadro 19 -	Tecnologias que emergiram nas fases da Modelagem.....	180
Quadro 20 -	Conteúdos que emergiram nas fases da Modelagem.....	183
Quadro 21 -	Esquema das estratégias utilizada na pesquisa, na atividade de Dardos Magnéticos.....	186

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 -	Primeira relação entre os dados fornecidos pelo Tracker e modelo matemático - Grupo A.....	133
Tabela 2 -	Segunda relação entre os dados fornecidos pelo Tracker e modelo matemático - Grupo A.....	133
Tabela 3 -	Relação entre os dados fornecidos pelo Tracker e modelo matemático - Grupo B.....	134
Tabela 4 -	Relação entre os dados fornecidos pelo Tracker e modelo matemático, referentes a atividade de dardos magnéticos - Grupo A.....	170
Tabela 5 -	Relação entre os dados fornecidos pelo Tracker e modelo matemático, referentes a atividade de dardos magnéticos - Grupo B.....	171

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	16
2 MODELAGEM MATEMÁTICA, TECNOLOGIAS E EXPERIMENTAÇÃO NO ÂMBITO DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA.....	24
2.1 MODELAGEM MATEMÁTICA: UM RECORTE DA LITERATURA.....	24
2.2 MODELAGEM MATEMÁTICA: CONSIDERAÇÕES DE ALGUNS AUTORES...	29
2.3 CONCEPÇÃO DE MODELAGEM ADOTADA NA PESQUISA.....	37
2.4 TECNOLOGIAS DIGITAIS NAS ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA.....	44
2.5 EXPERIMENTAÇÃO COM TECNOLOGIAS NAS ATIVIDADES DA MODELAGEM MATEMÁTICA.....	51
3 ENCAMINHAMENTOS METODOLÓGICO.....	60
3.1 JUSTIFICATIVA DE PESQUISA.....	60
3.2 PESQUISA QUALITATIVA.....	63
3.3 CENÁRIO DE INVESTIGAÇÃO E CONTEXTO DA PESQUISA.....	66
3.4 PLANEJAMENTO DAS ATIVIDADES.....	68
3.5 PROCEDIMENTOS DE ANÁLISE DE DADOS.....	80
4 PRIMEIRA PARTE: TRABALHANDO AS TECNOLOGIAS E A ATIVIDADE DA PETECA.....	85
4.1 PRIMEIRO ENCONTRO.....	85
4.2 SEGUNDO ENCONTRO.....	94
4.3 TERCEIRO ENCONTRO (MOMENTO 1).....	114
4.4 ANÁLISE LOCAL DO DESENVOLVIMENTO DA ATIVIDADE DA PETECA, SEGUNDO AS CATEGORIAS A PRIORI.....	136
4.4.1 Categoria 1 (C1): Em relação às Tecnologias Digitais.....	136
4.4.2 Categoria 2 (C2): Em relação aos Conteúdos.....	137
4.4.3 Categoria 3 (C3): Em relação às Experiências.....	139
5 SEGUNDA PARTE: TRABALHANDO A ATIVIDADE DOS DADOS	

MAGNÉTICOS.....	145
5.1 TERCEIRO ENCONTRO (MOMENTO 2).....	145
5.2 QUARTO ENCONTRO.....	151
5.3 ANÁLISE LOCAL DO DESENVOLVIMENTO DA ATIVIDADE DOS DARDOS MAGNÉTICOS, SEGUNDO AS CATEGORIAS A PRIORI.....	175
5.3.1 Categoria 1 (C1): Em relação às Tecnologias Digitais.....	175
5.3.2 Categoria 2 (C2): Em Relação aos Conteúdos.....	181
5.4.3 Categoria 3 (C3): Em relação às Experiências.....	184
6 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES.....	188
APÊNDICE 1.....	207

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1 INTRODUÇÃO

Na atualidade, os educadores têm à disposição uma variedade de estratégias pedagógicas que possibilitam uma abordagem diferenciada em suas aulas na educação básica. Essas estratégias oferecem aos professores a oportunidade de introduzir novos métodos para o ensino de conteúdos específicos em sala de aula. Algumas dessas abordagens permitem que os estudantes participem de atividades durante o contraturno escolar, proporcionando condições mais favoráveis para as práticas educativas.

Para D'Ambrósio (2005), a construção de conhecimentos matemáticos vai muito além da mera aquisição de técnicas e habilidades, como a memorização de explicações de teorias isoladas que não contemplam as questões sociais e/ou histórico-culturais dos estudantes.

À vista disso, o ensino e a aprendizagem de Matemática baseado em aulas expositivas e com ênfase na memorização de fórmulas e procedimentos, são técnicas que têm demonstrado limitações diante das demandas da sociedade atual (Burak, 2017; Almeida; Silva Malheiro, 2019; Aguiar; Malheiros, 2020; Silva; Uribe; Rosa, 2022). Este formato, majoritariamente é “[...] centrado numa perspectiva de transmissão de uma ciência pronta e acabada, em que o professor centraliza o processo de ensino” (Burak 2017, p. 10).

Essa ideia de que a Matemática é uma ciência pronta e acabada, atualmente, não tem chamado mais a atenção dos estudantes, visto que estes estão ligados a outras transformações da sociedade como o uso de Tecnologias, por exemplo. Como consequência disso, entendemos que há uma necessidade, na educação básica, em adotar novas estratégias pedagógicas, em que os professores possam priorizar o protagonismo dos estudantes, ou seja, o papel ativo e responsável que um indivíduo desempenha na busca por seus objetivos, na tomada de decisões e na realização de ações que afetam sua vida e o ambiente ao seu redor.

Incentivar no estudante a capacidade de assumir a liderança e incentivá-lo a participar ativamente de situações e processos do cotidiano, por meio do desenvolvimento da Matemática na sala de aula, pode ser uma abordagem motivadora para que ele não encare essa disciplina como um desafio (Souza, 2020). Esse enfoque pode propiciar uma aprendizagem mais atraente, encorajadora e alinhada às demandas do século XXI, preparando o estudante para enfrentar os desafios e aproveitar as oportunidades que surgem em um mundo cada vez mais tecnológico.

A partir dessas reflexões, entendemos que a Modelagem Matemática¹ na Educação Matemática² pode ser considerada uma alternativa pedagógica (Almeida; Silva; Vertuan, 2021), visto que, utiliza situações-problema do mundo real, por exemplo, como ponto de partida para o ensino e aprendizagem da Matemática nos diferentes níveis educacionais (Bassanezi, 2013; Borssoi, 2013; Rosa 2009, 2013; Burak 2016; Santos, 2020; Silva, *et al.*, 2023). Por meio dessa tendência que engloba tanto o ensino quanto a pesquisa, os estudantes são incentivados a usar conceitos e habilidades matemáticas para resolver problemas autênticos, relacionados a contextos de diferentes realidades, podendo ser até mesmo de forma interdisciplinar.

As tendências da Educação Matemática, são como “pontes” que podem estabelecer relações entre as Instituições de Ensino Superior (IES) e a educação básica. Por intermédio dessas relações, podemos observar como estão sendo realizadas as pesquisas no cenário brasileiro, verificar como os dados qualitativos sobre como o ensino a aprendizagem de Matemática estão sendo abordados, bem como a relevância que estas abordagens representam para a sociedade.

Logo, justificamos o significado de tendência na Educação Matemática de acordo com Flemming, Luz e Mello (2005, p. 12), em que estas são ações que “sinalizam mudanças no contexto da Educação Matemática. Ao se mostrarem eficientes em sala de aula e ao serem utilizadas por muitos professores, estas formas de trabalho passam a ser consideradas como alternativas interessantes na busca da inovação em sala de aula”.

Por meio da Modelagem, os estudantes são desafiados a investigar, produzir e analisar dados, formular questões, transcrever para linguagem Matemática, realizar cálculos, criar representações Matemáticas e interpretar resultados, ainda mais, elaborar um modelo matemático que pode representar as situações-problema investigadas. Dessa forma, a Modelagem pode oportunizar que os estudantes tenham uma aprendizagem com base em assuntos de seus interesses, sendo individualmente ou em pequenos grupos e com auxílio de Tecnologias Digitais³.

¹ Consideraremos o termo “Modelagem” com o mesmo significado de Modelagem Matemática na Educação Matemática, objetivando uma leitura mais dinâmica e agradável.

² A consolidação da Educação Matemática como subárea da matemática e da educação, de natureza interdisciplinar, dá-se com a fundação, em 1908, da Comissão Internacional de Instrução Matemática – IMUK/ICMI, sob a liderança de Felix Klein, conforme D’Ambrósio (2004) durante a realização do Congresso Internacional de Matemáticos (Burak, 2017, p. 11).

³ Na presente produção científica, consideraremos os termos “Tecnologias” com o mesmo significado de Tecnologias Digitais na Educação Matemática, objetivando, também, uma leitura mais dinâmica e agradável.

É consenso entre pesquisadores, que a integração da Modelagem com as Tecnologias Digitais, podem oportunizar que os estudantes investiguem suas situações-problema, contribuindo para realizarem outras tarefas ou até mesmo validarem seus modelos ao passo que produzem os dados em tempo real (Silva; Almeida; Rosa, 2023; Silva *et al.*, 2023).

Neste trabalho, o termo "Tecnologias" refere-se ao conjunto de conhecimentos, técnicas, habilidades, métodos e processos utilizados para criar, desenvolver, produzir ou melhorar produtos, serviços ou sistemas, as tecnologias são os meios pelos quais a humanidade aplica seu conhecimento científico e técnico para resolver problemas ou melhorar as condições de vida (Kenski, 2012; Chiari, 2015, 2018a, 2018b; Borba; Silva; Gadani, 2023; Nascimento, 2023).

Quando utilizada nas atividades de Modelagem as Tecnologias Digitais com acesso à *internet* ou não (como os casos de aplicativos ou programas baixados em dispositivos móveis ou em computadores) podem proporcionar uma fonte de informações e dados de diferentes realidades conforme o interesse dos estudantes.

Além disso, as Tecnologias no âmbito educacional possibilitam o trabalho colaborativo, sendo presencialmente ou de forma *online*, permitindo que os estudantes discutam e avaliem cada situação proposta pelos integrantes de cada grupo, ao passo que esses questionamentos possam ser visualizados em projetores na sala de aula em tempo real, ou debatidos de forma assíncrona pela facilidade de acesso a qualquer momento que necessitarem.

No cenário brasileiro, percebemos que a relação entre a Modelagem Matemática e o uso de Tecnologias Digitais está em consonância com os princípios da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) “Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados” (Brasil, 2018 p. 267). Nesta perspectiva, com ênfase no Ensino Médio

Cabe ainda destacar que o uso de tecnologias possibilita aos estudantes alternativas de experiências variadas e facilitadoras de aprendizagens que reforçam a capacidade de raciocinar logicamente, formular e testar conjecturas, avaliar a validade de raciocínios e construir argumentações (Brasil, 2018, p. 539).

Logo, este documento oficial além de enfatizar a contextualização, a interdisciplinaridade e o uso de Tecnologias Digitais para potencializar o ensino e a

aprendizagem de conteúdos matemáticos na Educação Básica. Em sua quinta competência específica, ressalta a importância da Experimentação nas atividades de Matemática

Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (*Ibid.*, p. 540)

Em atividades de Modelagem desenvolvidas por Borssoi (2021), a autora afirma que “A experimentação, apoiada na tecnologia, atua como reguladora da relação entre conhecimento matemático e conhecimento da situação”. No campo da Educação Matemática “a experimentação se associa ao processo de geração de conhecimento em que novas ideias, ferramentas e procedimentos podem ser aprendidos e diferentes maneiras de encaminhá-la coexistem neste contexto” (Borba; Villarreal, 2005; Ye *et al.*, 2003 *apud* Borssoi, 2021, p. 126).

Essa abordagem integrada em Educação Matemática entre Modelagem Matemática, Tecnologias Digitais e a Experimentação pode ser uma estratégia diferenciada para o ensino e aprendizagem de Matemática. Com isso, para o desenvolvimento das atividades de Modelagem propostas nesse trabalho, levamos em consideração a utilização de brincadeiras lúdicas como “Brincar com petecas” e “Lançamentos de Dardos Magnéticos”. A utilização de brincadeiras lúdicas no ensino e na aprendizagem de Matemática na Educação Básica pode ser considerada relevante, pois oferece inúmeras possibilidades para o processo educativo (Ribeiro, 2019).

Neste trabalho, seguiremos o desenvolvimento das atividades de Modelagem conforme proposto por Almeida, Silva e Vertuan (2021). Para tanto, iniciaremos as atividades fazendo alguns questionamentos aos estudantes, visando familiarizá-los com as situações-problema. Por meio de debates e reflexões sobre as informações produzidas, eles poderão elaborar a definição do problema e, ao tentar respondê-lo, os estudantes construirão o modelo matemático e o validarão.

A Matemática, muitas vezes percebida como uma disciplina abstrata, difícil e desafiadora (Souza; Rosa, 2020), pode se tornar mais acessível e prazerosa por meio do uso de atividades lúdicas (Ribeiro, 2019). Essa abordagem está propícia a ocorrer em um ambiente livre de pressões, permitindo que o estudante se engaje de maneira mais natural e divertida.

Além disso, as atividades lúdicas também viabilizam aos estudantes a chance de desenvolver habilidades de relacionamento em grupo, pois eles interagem e colaboram uns com os outros (Brasil, 2018). Durante esse processo o estudante também aprende a fazer conexões entre o conhecimento, os recursos ou objetos utilizados nas atividades e sua própria realidade, podendo tornar a aprendizagem mais agradável e direcionada ao seu contexto.

Utilizaremos as Tecnologias Digitais, como o programa Tracker, para que os estudantes possam registrar as trajetórias tanto do movimento da peteca quanto dos dardos magnéticos. Essas trajetórias serão registradas por meio da filmagem dos estudantes em relação a seus próprios movimentos ao lançarem as petecas e os dardos. A partir dos dados produzidos dessas situações-problemas, será gerado um gráfico que permitirá aos alunos estudar os conceitos matemáticos relacionados.

Além disso, o *software* GeoGebra será empregado para que os estudantes possam trabalhar de forma mais abrangente os esses conceitos matemáticos, elaborando e validando o modelo matemático. Para complementar, faremos uso das plataformas *online* Canva e Mentimeter, com o intuito de promover o diálogo, a reflexão, o trabalho colaborativo e a troca de informações em tempo real entre os estudantes.

Com base nessas informações, voltamos nossa atenção para o objetivo geral desta pesquisa no campo da Educação Matemática, o qual busca analisar como a Experimentação pode potencializar as contribuições do uso das Tecnologias Digitais na construção dos conhecimentos matemáticos e extramatemáticos de estudantes do ensino médio de acordo com as fases da Modelagem Matemática.

Para alcançar esse objetivo, adotaremos como base teórica a Modelagem Matemática, considerada uma "alternativa pedagógica" (Almeida; Silva; Vertuan, 2021, p. 17). Dessa forma, iremos analisar as experiências relacionadas ao uso da Experimentação com Tecnologias nas atividades propostas, seguindo as fases de *Interação*, *Matematização*, *Resolução*, e *Interpretação de Resultados e Validação*.

Além disso, elencamos três categorias *a priori*, a saber: C1: Em relação às Tecnologias Digitais, visando as ferramentas digitais propostas aos estudantes quanto as que emergiram durante as atividades, observando suas potencialidades e suas restrições; C2: Em relação aos conteúdos, buscaremos analisar como os estudantes construíram seus conhecimentos matemáticos e extramatemáticos; e C3: Em relação à Experiência, apontaremos alguns aspectos contra e a favor do uso de estratégias pedagógicas em relação às aulas expositivas,

bem como observaremos as singularidades que possam ocorrer entre as Tecnologias utilizadas.

Segundo Moraes (2003, p.198), as categorias *a priori* “correspondem as construções que o pesquisador elabora antes de realizar a análise propriamente dita dos dados”.

Visando alcançar nossas categorias *a priori*, as quais são detalhadas na seção 3.5 desta pesquisa, desenvolvemos duas atividades de Modelagem Matemática com duas turmas do terceiro ano do ensino médio de uma escola estadual de tempo integral na cidade de Campo Grande, Mato Grosso do Sul.

No que tange a organização, detalharemos a estrutura da pesquisa, fornecendo uma visão geral dos principais componentes dos capítulos e seções que compõem o corpus dessa dissertação. Acreditamos que esta estrutura é fundamental para organizar e apresentar as informações de forma lógica e coerente, permitindo que os leitores compreendam as questões aqui abordadas.

Em relação ao capítulo 1 - Introdução, apresentamos elementos iniciais para contextualizar e estabelecer as bases do trabalho, nele abordamos a problematização, a relevância social, as justificativas, bem como os objetivos almejados.

No capítulo 2 - Fundamentação Teórica, falamos sobre a Modelagem Matemática no contexto da Educação Matemática e a concepção adotada nessa pesquisa, o uso das Tecnologias Digitais na Modelagem, e ainda, na Experimentação, como parte essencial para compreendermos a construção de conhecimentos matemático e extramatemático dos estudantes.

Em seguida, no capítulo 3 - Encaminhamentos Metodológicos, em primeiro lugar, realizamos o delineamento da pesquisa; em segundo, ressaltamos a motivação da escolha do tema e dos objetivos; em terceiro, fornecemos detalhes sobre o cenário de investigação e contexto da pesquisa; em quarto, apresentamos brevemente os pontos fundamentais que se fizeram presentes no planejamento das atividades de modelagem; e finalizando, em quinto lugar, discutiremos sobre as categorias *a priori*.

No capítulo 4 - Descrição e Análise de Dados - Primeira Parte: Trabalhando as Tecnologias e a atividade da Peteca, descreveremos as atividades desenvolvidas e suas análises, bem como as categorias *a priori* seguindo as fases da Modelagem Matemática conforme proposto por Almeida, Silva e Vertuan (2021). Além disso, abordaremos alguns pontos relevantes que nos levaram à adaptação de nosso planejamento inicial.

No capítulo 5 - Descrição e Análise de Dados - Segunda Parte: Trabalhando a atividade dos Dardos Magnéticos, relataremos as atividades desenvolvidas e as categorias *a priori*, assim como suas análises, ao longo das fases da Modelagem Matemática conforme proposto por Almeida, Silva e Vertuan (2021).

No capítulo 6 - Apresentamos a análise global das atividades, bem como algumas considerações que nos conduziram às conclusões desta investigação e, por último, as referências bibliográficas.

CAPÍTULO 2

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2 MODELAGEM MATEMÁTICA, TECNOLOGIAS E EXPERIMENTAÇÃO NO ÂMBITO DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Neste capítulo apresentamos a fundamentação teórica, retratando brevemente alguns autores que apoiam e/ou recorrem à Modelagem na sala de aula e espaços extraclasse, bem como suas respectivas concepções sobre essa tendência. Tendo como foco principal o ensino e a aprendizagem de Matemática no âmbito da Educação Matemática. Apresentaremos as fases das Tecnologias na Educação Matemática e, alguns estudiosos e suas pesquisas sobre o uso de Tecnologias Digitais nas atividades de Modelagem na Educação Matemática. Finalizando, abordamos pesquisadores que versam sobre a Experimentação na Modelagem com auxílio das Tecnologias Digitais no contexto da sala de aula.

2.1 MODELAGEM MATEMÁTICA: UM RECORTE DA LITERATURA

Originária da Matemática Aplicada a Modelagem na Educação Matemática passou a ser conhecida como Modelação por autores como Rodney Carlos Bassanezi e Maria Salett Biembengut. Para Bassanezi (2013, p. 38) “A Modelagem no ensino é apenas uma estratégia de aprendizagem, onde o mais importante não é chegar imediatamente ao modelo bem-sucedido, mas, caminhar seguindo etapas onde o conteúdo vai sendo sistematizado e aplicado”.

O autor expõe que este tipo de fazer Modelagem pode ser desenvolvida em cursos regulares ou não. E, “neste contexto recebe o nome de Modelação Matemática (modelagem em Educação)” (*Ibid.*, p. 38).

Agora, segundo Biembengut (2014, p. 202)

Para que o estudante possa adquirir conhecimentos acadêmicos e, ao mesmo tempo, aprenda a pesquisar, o processo de Modelagem requer uma adaptação devido à estrutura da Educação. Dessa feita, o objetivo primordial da Modelagem na Educação – Modelação é ensinar ao estudante os conteúdos do programa curricular da disciplina (e não curricular), a partir de um tema/assunto e, ao mesmo tempo, sob a forma de projeto, orientá-lo à pesquisa nos limites do processo educacional e na estrutura escolar.

Logo, para os autores a Modelação visa permitir que os estudantes realizem pesquisas sobre temas ou assuntos de seu interesse, ao mesmo tempo em que aprendem os conteúdos

curriculares. Além disso, a Modelação visa desenvolver habilidades essenciais, como a capacidade de traduzir as relações entre as variáveis e as constantes do problema na linguagem matemática, a prática de comunicar os resultados de forma simples para o público e o aprimoramento das habilidades que ajudam na escrita e na oralidade (Bassanezi, 2013; Biembengut, 2014).

No Brasil, a Modelagem Matemática com foco no ensino, na Educação Matemática, tem sua história com início no final da década de 1970, início de 1980. De acordo com Biembengut (2016), nesse período, houve um movimento crescente para repensar os métodos de ensino da Matemática, visando torná-la mais relevante e contextualizada para os estudantes. Várias universidades brasileiras criaram grupos de pesquisa e programas de Pós-Graduação dedicados à Modelagem na Educação Matemática. Esses espaços acadêmicos contribuíram para o avanço teórico, prático da área e também para a formação de professores comprometidos com a prática da Modelagem visando o ensino na sala de aula.

Assim, a Modelagem no âmbito da Educação Matemática surge como uma estratégia de ensino e aprendizagem, da qual se busca encontrar na realidade uma representação ‘modelo’ e/ou ‘modelo matemático’ para tentar explicar matematicamente um fenômeno do mundo real (Bassanezi, 2013). Segundo o dicionário Aurélio da Língua Portuguesa, o termo ‘modelo’ é considerado uma “representação de algo a ser reproduzido, protótipo de um objeto, pessoa que posa para artista plástico ou fotógrafo, pessoa que serve de exemplo ou norma” (Ferreira, 2006, p. 559).

Para Almeida, Silva e Vertuan (2021, p. 13)

[...] a “criação de modelos” para representar algo pode ser percebida em diversas áreas com Arte, Moda, Engenharia, Matemática, entre outras. O que pode variar é finalidade para a qual os modelos são construídos, podendo prever o comportamento de um fenômeno, ser demonstrativo de algo (como uma maquete), ter um fim pedagógico (auxiliar na ilustração de algum conceito), ser descritivo de algo, entre outras.

Agora, no campo da Educação Matemática, em particular na Modelagem, consideramos que a terminologia ‘modelo matemático’ pode ser entendida como “uma representação simplificada da realidade sob a ótica daqueles que a investigam. Sua formulação, todavia, não tem um fim em si só, mas visa fomentar a solução de algum problema” (Almeida; Silva; Vertuan, 2021, p. 13).

Em consonância com os autores, segundo Rosa (2009, p. 39), “[...], em geral, modelo matemático é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado. Uma equação, um gráfico, uma tabela, uma figura, são exemplos de modelos matemáticos”.

A ação de fazer Modelagem muitas vezes leva os estudantes a chegarem num modelo matemático. Queremos deixar certo aqui que mais importante que o modelo é a investigação, a colaboração, a troca de experiências que os estudantes têm no ato de modelar, bem como sua postura nas tomadas de decisões sobre o fenômeno investigado (Rosa, 2013).

Atualmente, a Modelagem Matemática continua sendo uma abordagem relevante e amplamente estudada no contexto da Educação Matemática. Assim, neste estudo entendemos a Modelagem como uma alternativa pedagógica (Almeida; Silva; Vertuan 2021), em que suas atividades podem proporcionar a valorização do cotidiano, da interdisciplinaridade, da contextualização, das Tecnologias, do trabalho em equipe (colaborativo) e da aplicação dos conhecimentos matemáticos na sala de aula quanto em espaços extraclasse.

É consenso entre vários autores da Educação Matemática que o desenvolvimento de atividades de Modelagem na sala de aula surge de uma situação-problema, na qual os estudantes não possuem esquemas *a priori* para a solução desejada (Bassanezi, 2013; Borssoi, 2013; Rosa, 2013; Biembengut, 2016; Burak, 2016; Souza; Rosa, 2020; Almeida, Silva, Vertuan, 2021).

Logo, partindo de uma situação-problema, Bassanezi (2012) expõe que a Modelagem pode ser compreendida por meio de dois critérios consoante aos objetivos definidos pelos estudantes e professores.

É importante para aqueles que se dispõem a trabalhar com modelagem matemática estabelecer alguns critérios de qualidade. Os critérios devem ser adequados aos objetivos que devem ser bem definidos *a priori* – Por exemplo, **se vamos utilizar o processo de modelagem matemática para motivação de certos conteúdos matemáticos ou valorização da própria matemática, muitas vezes a validação dos modelos não é um critério fundamental para sua qualificação** – Neste caso, o alvo é o próprio aprendizado de matemática. Por outro lado, **se estamos mais interessados nos resultados fornecidos pelo modelo para entender a situação modelada então a sua validação é indispensável** (Bassanezi, 2012, p. 9, grifo nosso).

O autor afirma que os modelos matemáticos devem fornecer uma linguagem clara e sem ambiguidades, além de um conjunto de resultados (teoremas, definições e axiomas, por exemplo) que permitem o uso de métodos computacionais para obter soluções numéricas,

gráficas, algébricas e estatísticas (Bassanezi, 2013). No entanto, os modelos são simplificações da realidade, podendo deixar escapar aspectos fundamentais para sua validação e detalhes do fenômeno modelado. Portanto, é necessário considerar suas limitações e validar sua adequação (aproximação) à realidade.

No contexto da Modelagem Matemática, também é importante mencionar o papel da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM)⁴, que promove eventos, congressos e publicações voltados para a divulgação e o aprofundamento das discussões sobre Modelagem no Brasil. A SBEM, com auxílio do GT 10⁵, tem desempenhado um papel fundamental na consolidação dessa abordagem pedagógica e na troca de experiências entre pesquisadores e educadores matemáticos.

Nos anos seguintes às décadas de 70 e 80, a Modelagem ganhou cada vez mais espaço nas pesquisas e práticas educacionais em todo o país nos diferentes níveis educacionais por meio de precursores e seus adeptos dessa tendência. E, com isso, diferentes perspectivas teóricas foram consolidadas na Educação Matemática (inter)nacionalmente.

Com base na análise de uma amostra de produções na literatura internacional, Kaiser e Sriraman (2006) categorizaram as abordagens da Modelagem na Educação Matemática em cinco perspectivas e uma meta-perspectiva. As características dessas perspectivas serão apresentadas de acordo com algumas adaptações a partir dos trabalhos de Kaiser, Sriraman (2006), Tortola, Silva e Almeida (2011) e Biembengut (2016), a saber:

- Perspectiva Realística ou Aplicada: essa abordagem se fundamenta em situações-problema que são provenientes da indústria ou da ciência, tendo como objetivo o desenvolvimento de habilidades de problemas com aplicações. Dessa forma, está intrinsecamente relacionada aos aspectos práticos e instantâneos.
- Perspectiva Teórica ou Epistemológica: envolve a análise de situações-problema estruturadas para poder promover a construção de conceitos matemáticos. Para tanto, o objetivo primordial dessa perspectiva é o avanço das teorias Matemáticas.
- Perspectiva Educacional: é uma abordagem que relaciona as perspectivas Realística e epistemológica, pois incorpora situações-problema que se preocupam com o desenvolvimento de teorias Matemáticas. Seus objetivos podem ser classificados como didáticos, relacionados aos processos de aprendizagem, ou conceituais,

⁴ Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/>. Acesso em: 3 de fev. 2023

⁵ Disponível em: [10 Modelagem Matemática \(sbembrasil.org.br\)](http://www.sbembrasil.org.br/10-Modelagem-Matematica). Acesso em: 3 de fev. 2023

referentes à introdução de novos conceitos ou ao aprofundamento de conceitos já apresentados aos estudantes.

- **Perspectiva Sociocrítica:** enfatiza o pensamento crítico em relação ao papel e aos objetivos dos modelos matemáticos, assim como na atuação da Matemática na sociedade. Esta perspectiva tem a preocupação em formar estudantes independentes e capacitados para exercerem sua cidadania. Logo, pretende desenvolver no estudante uma visão crítica do mundo.
- **Perspectiva Contextual:** busca incorporar a Modelagem Matemática na sala de aula por meio de situações-problema que, visam motivar os estudantes e promover a aprendizagem. Essa abordagem está relacionada à interpretação de enunciados, em que a obtenção do modelo matemático se torna uma tarefa primordial.
- **Perspectiva Cognitiva:** é uma abordagem que busca compreender e analisar os processos cognitivos compreendidos na Modelagem Matemática. Seus objetivos de pesquisa envolvem a análise dos processos cognitivos durante o desenvolvimento das atividades de Modelagem e a compreensão desses processos. Em termos psicológicos, a perspectiva cognitiva visa promover os processos do pensamento matemático por meio do uso de modelos, enfatizando a Modelagem como um processo mental incluindo a abstração e a generalização.

À vista disso, em uma atividade de Modelagem, pode-se trabalhar com diferentes perspectivas, porém, é necessário que o pesquisador e/ou educador em matemático esteja familiarizado com todas essas concepções, conforme apontam Almeida e Vertuan (2010)

Conhecer as diferentes perspectivas e refletir sobre os aspectos relevantes em cada uma delas é potencializar a prática de Modelagem em sala de aula, uma vez que os professores podem trabalhar com estas atividades de modo contemplar diferentes perspectivas e, conseqüentemente, os diferentes aspectos inerentes às atividades de Modelagem (Almeida; Vertuan, 2010, p. 31).

Este reconhecimento dessas perspectivas na prática, poderá proporcionar melhores condições de ensino e aprendizagem para os estudantes quando desenvolvidas na sala de aula.

Adiante apresentaremos alguns teóricos que contribuíram de forma significativa para a disseminação da Modelagem na perspectiva da Educação Matemática no Brasil como: Rodney Carlos Bassanezi; Dionísio Burak; Jonei Cerqueira Barbosa e; Lourdes Maria Werle de Almeida. A concepção adotada nesta pesquisa vai ao encontro da última autora. Sendo assim, dedicamos uma seção exclusiva para expor o seu entendimento de Modelagem,

abordado em seu livro, juntamente com a professora Karina Alessandra Pessoa da Silva e o professor Rodolfo Eduardo Vertuan.

Queremos expor que o motivo das escolhas dos precursores e adeptos listados tem a ver com a aproximação de Modelagem Matemática que o autor desta pesquisa teve durante os três anos de experiência, na área da Educação Matemática, sendo no último ano da graduação, e nos dois anos como mestrando, em especial como integrante do Grupo de Formação, Estudos e Pesquisas em Educação Matemática (GFEPEM).

2.2 MODELAGEM MATEMÁTICA: CONSIDERAÇÕES DE ALGUNS AUTORES

Na literatura brasileira podemos encontrar diversificadas concepções de Modelagem Matemática. Não é nossa intenção, aqui, explicar detalhadamente tais definições de acordo com os precursores e/ou adeptos da Modelagem Matemática na Educação Matemática. Assim, exploraremos alguns detalhes sobre algumas concepções de Modelagem mais próximas de nossas pesquisas no grupo (GFEPEM).

Para facilitar a compreensão das concepções apresentadas neste trabalho, o Quadro 1 mostra a sequência na qual os autores serão apresentados, juntamente com suas respectivas definições de Modelagem.

Quadro 1 - Autores da Modelagem Matemática e suas respectivas concepções

AUTOR/CONCEPÇÃO	DESCRIÇÃO DA CONCEPÇÃO
Rodney Carlos Bassanezi ↓ “Estratégia de Ensino e Aprendizagem”	A modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real (Bassanezi, 2013, p. 16).
Jonei Cerqueira Barbosa ↓ “Ambiente de Aprendizagem”	A Modelagem é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade (Barbosa 2021, p. 6).
Dionísio Burak ↓ “Metodologia de Ensino”	A Modelagem Matemática constitui-se em um conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer previsões e tomar decisões (Burak, 1992, p. 18).
Lourdes Maria Werle de Almeida ↓ “Alternativa Pedagógica”	A modelagem constitui uma alternativa pedagógica na qual fazemos uma abordagem, por meio da matemática, de uma situação-problema não essencialmente matemática (Almeida; Silva; Vertuan, 2021, p. 17).

Fonte: Autor (2023)

Queremos ressaltar que o professor **Rodney Carlos Bassanezi**, segundo a literatura estudada, foi um dos primeiros precursores da Modelagem no Brasil a realizar pesquisas voltadas para o ensino na Educação Matemática, na década de 1983, em que passa orientar pesquisas na pós-graduação (Biembengut, 2009; Burak; Klüber, 2010). Para o professor Bassanezi “A modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real” (Bassanezi, 2013, p. 16). Nesta perspectiva, Bassanezi aponta a Modelagem como **estratégia de ensino e aprendizagem** e pressupõe a essa tendência a multidisciplinaridade, ou seja, essa forma de ensino e aprendizagem pode fazer conexões com outras áreas do conhecimento.

A modelagem matemática, em seus vários aspectos, é um processo que alia teoria e prática, motiva seu usuário na procura do entendimento da realidade que o cerca e na busca de meios para agir sobre ela e transformá-la. Nesse sentido, é também um método científico que ajuda a preparar o indivíduo para assumir seu papel de cidadão (*Ibid.*, p. 17).

Neste sentido, a Modelagem se torna eficiente quando os sujeitos envolvidos entendem que estão trabalhando com aproximações da realidade estudada. Assim, os modelos matemáticos, por exemplos, são representações de um fenômeno que pode envolver uma ou mais áreas do conhecimento.

Para Bassanezi (2013) a Modelagem deve seguir etapas: Experimentação, Abstração (seleção de variáveis, problematização ou formulação, formulação de hipóteses, simplificação), Resolução, Validação e Modificação. A Figura 1, mostra os esquemas de Modelagem, sendo que as setas contínuas indicam a primeira aproximação.

são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade”.

À vista disso, o professor Barbosa tem sua compreensão de Modelagem Matemática com vista à perspectiva sociocrítica, conforme apontam Kaiser e Sririman (2006). Esta forma de trabalhar a Modelagem está ligada diretamente na formação de sujeitos para atuar de forma ativa na sociedade, podendo conseguir analisar a utilidade da Matemática em questões imbricadas na sociedade.

Com base na perspectiva da psicologia discursiva e cultural, o discurso dos alunos nas atividades de modelagem ganha destaque, o que deve permitir que os alunos desenvolvam diversos tipos de discussões, como discussões matemáticas, tecnológicas e reflexivas, sendo esta última vista como indispensável para o desenvolvimento do pensamento crítico (Kaiser; Sririman, 2006, p. 306, tradução nossa).

Apoiado nessa perspectiva, Barbosa (2004, p. 4) fala sobre o que é um ambiente de Modelagem,

A meu ver, o ambiente de Modelagem está associado à problematização e investigação. O primeiro refere-se ao ato de criar perguntas e/ou problemas enquanto que o segundo, à busca, seleção, organização e manipulação de informações e reflexão sobre elas. Ambas atividades não são separadas, mas articuladas no processo de envolvimento dos alunos para abordar a atividade proposta. Nela, podem-se levantar questões e realizar investigações que atingem o âmbito do conhecimento reflexivo.

De acordo com o autor, esse conhecimento reflexivo diz respeito à natureza dos modelos e aos critérios utilizados em sua construção, aplicação e avaliação, constituindo-se como o principal argumento para o surgimento da abordagem sociocrítica associada à Modelagem Matemática no contexto (inter)nacional. Ou seja, de acordo com Barbosa (2001, p. 5). “O que chamamos de corrente sóciocrítica de Modelagem sublinha que as atividades devem potencializar a reflexão sobre a matemática, a própria Modelagem e seu significado social”.

É fundamental destacarmos que antes da corrente sociocrítica, existiam duas outras visões sobre a Modelagem Matemática no âmbito internacional: a pragmática e a científica. Ambas se relacionavam com os outros dois conhecimentos de acordo com Skovsmose (1990): sendo o primeiro, o conhecimento matemático; e o segundo, o conhecimento tecnológico.

Conforme supracitados, vimos que Barbosa concebe a Modelagem na Educação Matemática como um “Ambiente de Aprendizagem” numa perspectiva sociocrítica. Agora, discorreremos sobre os três casos que este estudioso apresentou para a sociedade acadêmica (inter)nacional, para que se possa desenvolver a Modelagem Matemática de forma gradativa na sala de aula, conforme apresentada no Quadro 2.

Quadro 2 - Os três casos de Barbosa e suas respectivas definições

Caso 1
A aula é dividida em quatro momentos: a) o convite – o professor apresenta a situação-problema e discute com os alunos; b) o trabalho em grupo – os alunos, organizados em grupos, buscam produzir uma resolução para a situação, tendo o acompanhamento do professor; c) a socialização – os grupos de alunos apresentam suas resoluções para discussão da turma; d) a formalização – o professor pode fazer formalizações (ou institucionalização) de estratégias ou de tópicos matemáticos.
Caso 2
Imaginemos, agora, a situação em que o professor apresentasse o mesmo problema para os alunos – o de antecipar quando o Lago do Sobradinho atingiria o volume mínimo para produção de energia elétrica –, porém, não desse os dados para sua resolução, como aqueles disponíveis na reportagem e na página da <i>Wikipédia</i>. Nesse caso, para abordá-la, os alunos teriam de coletar informações quantitativas (e mesmo qualitativas) sobre a situação-problema. O desenvolvimento da atividade demandaria mais tempo, pois a tarefa de coletar dados ficaria sob a responsabilidade dos alunos. Em resumo, o professor apresenta o problema, mas a coleta de dados e a resolução são de responsabilidade dos alunos.
Caso 3
Consideremos, agora, uma forma mais aberta de organizar atividades de Modelagem, dessa vez, dando também aos alunos a responsabilidade de formular o problema a ser resolvido. Em certo momento do ano letivo, o professor pediu que os alunos se organizassem em grupos e escolhessem temas de interesse para o desenvolvimento de um projeto. Eles são orientados a levantar informações sobre o tema, a formular e a resolver problemas. Também, o professor determina duas ou três datas para a apresentação de relatórios parciais escritos sobre o projeto, que seriam lidos e comentados por ele. O papel dos relatórios parciais é permitir a interlocução entre o professor e os alunos durante o desenvolvimento do projeto. Por fim, um dia é agendado para a apresentação oral dos projetos, quando o professor e os demais colegas podem tecer comentários sobre eles.

Fonte: Barbosa (2009, p. 4 - 5, adaptação nossa)

Para melhor entendimento dessas fases, o autor elaborou o Quadro 3, apropriando-se da relevância de sua obra científica.

Quadro 3 - Os casos de Modelagem

Fases	Caso 1	Caso 2	Caso 3
Elaboração do problema	Professor	Professor	Professor/Alunos
Coleta de dados	Professor	Professor/Alunos	Professor/Alunos

Resolução	Professor/Alunos	Professor/Alunos	Professor/Alunos
-----------	------------------	------------------	------------------

Fonte: Barbosa (2009, p. 6, adaptação nossa, negrito nosso)

Para tanto, as contribuições desse autor para o ensino e a aprendizagem de Matemática, no cenário da Educação Matemática, foi de grande importância. Barbosa inspirou vários pesquisadores que hoje são adeptos de sua concepção no campo acadêmico (inter) nacional.

Já o professor **Dionísio Burak**, em sua primeira perspectiva de Modelagem Matemática para o ensino e a aprendizagem de Matemática, parte de uma concepção em que ele considerava a Modelagem Matemática como uma **alternativa para o ensino de Matemática** na Educação Básica, atualmente, Ensino Fundamental - anos iniciais e anos finais, e Ensino Médio (Burak, 2016, grifo nosso). Essa concepção do professor Burak se relacionava à Matemática Aplicada, apresentando-se como destaque em sua dissertação de mestrado no ano de 1987, intitulada, “Modelagem Matemática, uma Metodologia Alternativa para o Ensino de Matemática na 5ª Série” (Klüber, 2012; Burak, 2016).

Durante sua passagem no mestrado, Burak busca novos caminhos na tentativa de facilitar o ensino de Matemática que era tido como deflagrado segundo o autor, assim, nesta linha de pensamento ele acreditava que

A intenção não era apenas tratar da Matemática como uma ciência, mas desenvolvê-la como um processo capaz de ajudar os educandos a construírem o conhecimento matemático, valendo-se do interesse que o assunto poderia despertar, tornando-os autônomos, capazes de pensar e construir estratégias próprias para resolverem as situações (Burak, 2016, p. 20).

Enquanto doutorando, o professor Dionísio Burak com base em ideias levantadas no mestrado, passa a considerar a Modelagem Matemática a partir de dois princípios fundamentais: **o interesse do grupo**, e a **coleta dos dados que deve ser realizada no ambiente onde se encontra o interesse do grupo** para o desenvolvimento das atividades de Modelagem (Klüber, 2007, grifo nosso), assim, o autor passa a assumir/modificar novas etapas para esta tendência, então, uma nova concepção de Modelagem Matemática começa a ser concebida.

Para Burak e Klüber (2010, p. 162)

A proposta de trabalho, contextualizado a partir da escolha de um tema de interesse dos grupos, encontra respaldo nas Diretrizes Curriculares Nacionais que preconiza

essa forma de tratar o conhecimento matemático e se constitui em um recurso que a escola possui para retirar o educando da condição de espectador passivo.

Agora, em sua segunda perspectiva de Modelagem Matemática para o ensino e a aprendizagem de Matemática, o próprio professor Dionísio Burak afirma que tais publicações explicam esta nova forma de definir a Modelagem Matemática, passando a concebê-la, como **metodologia de ensino**, em particular, para a Educação Básica (Burak, 1994, 1998, 2004 e 2006 *apud* Burak, 2016).

O embasamento teórico que sustenta essa visão se assenta nas teorias: Construtivista, Sociointeracionista e da Aprendizagem Significativa e em uma visão epistemológica de Ciência, que contempla outras áreas do conhecimento, dentre elas a Psicologia, a Sociologia, a Filosofia, a Antropologia, entre outras, além da Matemática (Burak, 2016, p. 18).

É importante ressaltar que tanto na primeira quanto na segunda perspectiva de Modelagem, o autor, desde seu mestrado sempre defendeu que a Modelagem Matemática “constitui-se em um conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer previsões e a tomar decisões” (Burak, 1987, p. 21 *apud* Klüber 2007, p. 72).

Para uma melhor compreensão da ideia de Modelagem defendida por esse pesquisador, Burak e Klüber (2010) explicam os processos e as ações de desenvolver Modelagem a partir dessa perspectiva:

[...] constituir-se em um conjunto de procedimentos, que significa algo unido, conjugado, contíguo de ações, caminhos a empreender com vista a um objetivo. Além disso, estabelecer um paralelo significa algo análogo, isomorfo, equivalente; e tem-se fenômenos presentes no cotidiano, considerando aquilo que é percebido pelo indivíduo, neste caso o estudante, que favoreçam, ou seja, possibilitam fazer previsões, realizar um prognóstico, diagnóstico pelo estudante e que permitam tomar decisão, isto é, favoreçam deliberar, ou estar desembaraçados diante de uma decisão. (*Ibid.*, p. 36).

Para isto ocorrer, alguns encaminhamentos foram propostos por Burak, conforme o Quadro 4. Observaremos que estas sugestões com o passar dos anos foram modificadas pelo próprio autor, adequando-se para o interesse dos estudantes durante o desenvolvimento das atividades de Modelagem Matemática.

Quadro 4 - Visão das perspectivas de Dionísio Burak

Antes	Depois
Etapas para o encaminhamento da Modelagem Matemática na perspectiva da Matemática Aplicada	Etapas para o encaminhamento da Modelagem Matemática na perspectiva da sala de aula
(Princípios com ideias inicialmente no mestrado e consolidadas no doutorado) Interesse do grupo, e a produção dos dados que deve ser realizada no ambiente onde se encontra o interesse do grupo.	
“Alternativa para o Ensino de Matemática” Burak (1987,1992)	“Metodologia de Ensino” Burak (1992, 1994, 1998, 2004, 2006)
1) escolha do tema;	1) escolha do tema;
2) ação exploratória;	2) pesquisa exploratória;
3) formulação do problema ou especificação do interesse;	3) levantamento do(s) problema(s);
4) construção do modelo (equacionamento do problema);	4) resolução do(s) problema(s) e o trabalho dos conteúdos matemáticos no contexto do tema;
5) validação do modelo; conforme Burak (1992),	5) análise crítica da(s) solução(ões).

Fonte: Burak (2016, 2017, grifo e adaptação nossa)

Neste contexto, para Burak e Klüber (2010, p. 157)

A Modelagem Matemática, na perspectiva da Educação Matemática assumida, [...] aquela que concebe a Matemática como um instrumento importante, mas sem desconsiderar as outras áreas que devem se fazer presentes no processo de ensino e de aprendizagem da Matemática. Nestes termos, volta-se, principalmente, à formação do estudante em nível da Educação Básica e modalidades desse nível de escolaridade.

Sobre esse viés, outro ponto importante que surge imbricado nas concepções de Burak é que, num primeiro momento em sua dissertação, o autor aborda o ‘modelo matemático’ como algo fundamental para o trabalho com Modelagem, pois esta ideia se apoiava na Matemática Aplicada. Já, em um segundo momento, durante sua tese, o ‘modelo matemático’ não é tido como foco principal, mas sim objetivava explicar matematicamente situações do cotidiano dos estudantes, ajudando estes a fazer predições e tomar decisões (Klüber, 2007).

Para tanto, conforme supracitado, a concepção concebida pelo professor Dionísio Burak sofre mudança durante três fases no percurso do autor, sendo a fase do mestrado, do doutorado e posteriormente ao doutorado com publicações por meio de trabalhos intensivos

com a Modelagem em escolas, nos quais foram apresentados em eventos, palestras, minicurso, oficinas, entre outros.

Por fim, apresentamos na próxima seção a concepção da professora Almeida, da qual tomamos como principal referência teórica para o desenvolvimento das atividades de Modelagem realizadas nesse trabalho.

2.3 CONCEPÇÃO DE MODELAGEM ADOTADA NA PESQUISA

Nesta seção, partimos da definição de Modelagem segundo o grupo de estudo, do qual participamos (GFEPEM). O grupo define Modelagem Matemática,

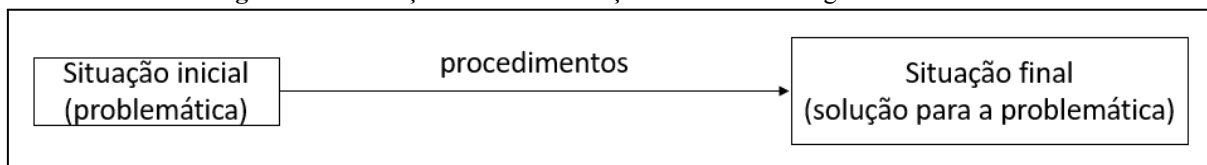
[...] como uma forma de ensinar os conteúdos matemáticos, por meio de problemas da realidade, de maneira que os alunos consigam relacionar esses conhecimentos matemáticos com outras ocasiões e não apenas em sala de aula, visando dar significados a esses conteúdos no dia a dia, e os torná-los menos abstrato (Souza, 2020, p. 36).

A definição do grupo supracitado tem suas aproximações com o entendimento de Modelagem de acordo com as fundamentações teórica e metodológica da professora **Lourdes Maria Werle de Almeida**. Tais contribuições são exploradas no livro, em sua segunda reimpressão, intitulado “Modelagem Matemática na Educação Básica” dos autores Almeida, Silva e Vertuan (2021).

Como já mencionado neste trabalho, os autores, inicialmente, versam sobre a origem da Modelagem, ressaltando a Matemática Aplicada como área pioneira.

É a partir dessa “importação” da Matemática Aplicada que a conceitualização e a caracterização da Modelagem Matemática na Educação Matemática têm tido diferentes abordagens e têm sido realizadas segundo diferentes pressupostos em relação às concepções pedagógicas que norteiam as práticas educativas e as estruturas teóricas das pesquisas científicas (Almeida; Silva; Vertuan, 2021).

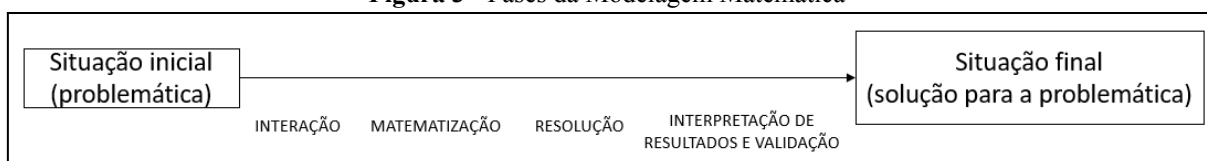
À vista disso, na Figura 2, os autores entendem que a Modelagem Matemática pode ser descrita “em termos de uma situação inicial (problemática), de uma situação final desejada (que representa uma solução para a situação inicial) e de um conjunto de procedimentos e conceitos necessários para passar da situação inicial para a final” (Almeida; Silva; Vertuan, 2021, p. 12).

Figura 2 - A situação inicial e a situação final na Modelagem Matemática

Fonte: Almeida, Silva e Vertuan (2021, p. 12, adaptação nossa)

A situação inicial tem referência na realidade, assim, é denominada de situação-problema, em que não há procedimentos *a priori* conhecidos. Já a situação final pode ser associada a diversas representações matemáticas, ou seja, um modelo matemático (*Ibid.*, 2021).

Utilizaremos o termo “**fases**”, definida por Almeida, Silva e Vertuan (2021, grifo nosso), para nos referirmos ao conjunto de procedimentos de uma situação-problema, em que são caracterizados como: *Interação, Matematização, Resolução, Interpretação de Resultados e Validação*, Figura 3.

Figura 3 - Fases da Modelagem Matemática

Fonte: Almeida, Silva e Vertuan (2021, p. 15, adaptação nossa)

Os detalhes de cada fase com base nos entendimentos dos autores estão expostos no Quadro 5.

Quadro 5 - Considerações sobre as fases da Modelagem Matemática

INTERAÇÃO
O termo “interação” remete ao “ato de interagir-se”, “informar-se sobre”, “tornar-se ciente de”. Em termos de atividade Modelagem Matemática, essa etapa representa um primeiro contato com uma situação-problema que se pretende estudar com finalidade de conhecer as características e especificidades da situação. Implica, portanto, cercar-se de informações sobre essa situação por meio de produção de dados quantitativos e qualitativos, seja mediante contato direto ou indireto. A interação conduz à formulação do problema e a definição de métodos para sua solução. Essa formulação é orientada pela fala de compreensão, de entendimento da situação. Todavia, ao mesmo tempo, essa formulação também requer que alguns aspectos já sejam conhecidos e é justamente esta função da interação - tornar alguns aspectos conhecidos. Assim, a escolha de um tema e a busca de informações a seu respeito consiste o foco central nessa fase. Ainda que seja uma etapa inicial, a interação pode se estender durante o desenvolvimento da atividade, considerando que a necessidade de novas informações pode emergir no decorrer do desenvolvimento da atividade de modelagem.
MATEMATIZAÇÃO

A situação-problema identificada e estruturada na fase de interação, de modo geral, apresenta-se em linguagem natural e não parece diretamente associada a uma linguagem Matemática, e assim gera-se a necessidade da transformação de uma representação (linguagem natural) para outra (linguagem Matemática). Essa linguagem Matemática evidencia o problema matemático a ser resolvido. A busca e elaboração de uma representação Matemática são medidas por relações entre as características da situação e os conceitos, técnicas e procedimentos matemáticos adequados para representar matematicamente essas características. Daí que a segunda fase da Modelagem Matemática é caracterizada por “matematização”, considerando esses processos de transição de linguagens, de visualização e de uso de símbolos para realizar descrições matemáticas. Essas descrições são realizadas a partir da formulação de hipóteses, seleção de variáveis e simplificação em relação às informações e ao problema definido na fase de interação.

RESOLUÇÃO

Esta fase consiste na construção de um modelo matemático com a finalidade de descrever a situação, permitir a análise dos aspectos relevantes da situação, responder às perguntas formuladas sobre o problema a ser investigado na situação e até mesmo, em alguns casos, viabilizar a realização de previsões para o problema em estudo.

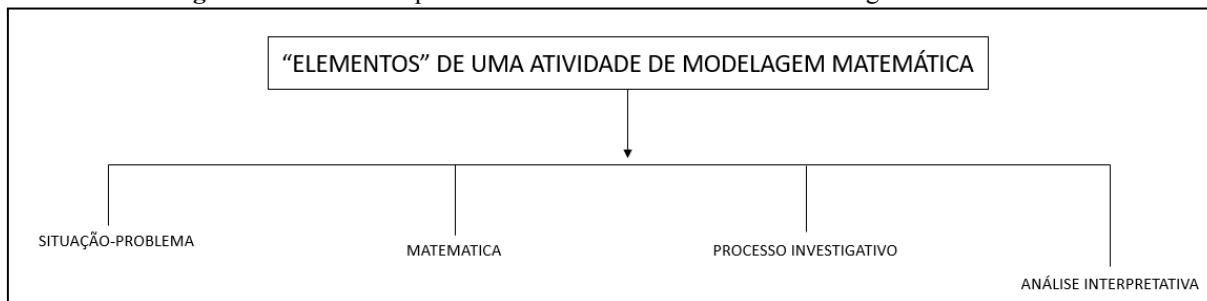
INTERPRETAÇÃO DE RESULTADOS E VALIDAÇÃO

A interpretação dos resultados indicados pelo modelo implica a análise de uma resposta para o problema. A análise da resposta constitui um processo avaliativo realizado pelos envolvidos na atividade e implica uma validação da representação Matemática associada ao problema, considerando tantos procedimentos matemáticos quanto a adequação da representação para a situação. Essa fase visa, para além da capacidade de construir e aplicar modelos, o desenvolvimento, nos estudantes, da capacidade de avaliar este processo de construção de modelos e os diferentes contextos de suas aplicações.

Fonte: Almeida, Silva e Vertuan (2021)

Os autores expõem que mesmo que essas fases constituam procedimentos no desenvolvimento de uma atividade de Modelagem, elas podem não acontecer de forma linear, caracterizando-se atividades mais dinâmicas. Por sua vez, existem de acordo com os autores aspectos que caracterizam a Modelagem, durante a identificação (procedimentos) dessas fases de desenvolvimento da Modelagem Matemática, Figura 4.

Figura 4 - Elementos que caracterizam uma atividade de Modelagem Matemática



Fonte: Almeida, Silva e Vertuan (2021, p. 17)

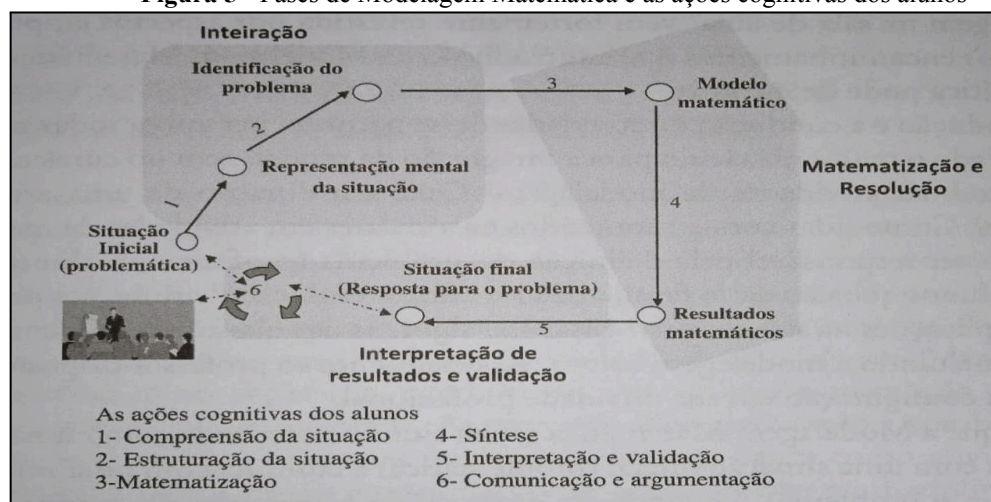
Levando em consideração esses elementos, existem características próprias das atividades de Modelagem segundo essa concepção, ou seja, “alternativa pedagógica na qual

fazemos uma abordagem, por meio da Matemática, de uma situação-problema não essencialmente Matemática” (Almeida; Silva; Vertuan, 2021, p. 17). Essas características fundamentais: “a) envolve um conjunto de ações cognitivas do indivíduo; b) envolve a representação e manipulações de objetos matemáticos; c) é direcionada para objetos e metas estabelecidas e/ou reconhecidas pelo aluno” (*Ibid.*, p. 17).

Essas características fundamentais iniciam logo na situação inicial, quando os estudantes tentam identificar suas intenções e limitações diante de um fenômeno. As ações cognitivas dos alunos iniciam durante os procedimentos da Modelagem de forma implícita; e explicitamente por meio de representações simbólicas, por exemplo. Essas ações cognitivas tendem a permear os conhecimentos matemáticos e extramatemáticos na tentativa de explicar e apresentar a situação em estudo (Almeida; Silva; Vertuan, 2021).

Na Figura 5, apresentamos a relação entre as fases do desenvolvimento de uma atividade de Modelagem e suas respectivas ações cognitivas.

Figura 5 - Fases de Modelagem Matemática e as ações cognitivas dos alunos



Fonte: Almeida, Silva e Vertuan (2021, p. 19)

Até o momento, nesta seção, apresentamos o campo de origem da Modelagem Matemática, o entendimento sobre Modelagem para os autores, as fases de desenvolvimento de uma atividade de Modelagem, e quais ações cognitivas podem estar presente nas fases de Modelagem. Logo, quando a Modelagem Matemática é percebida como uma alternativa pedagógica que abrange situações-problema que não necessariamente sejam da área da Matemática, “o foco está nos encaminhamentos e procedimentos que medeiam a transição da situação inicial para a situação final” (Almeida; Silva; Almeida, 2021, p. 20).

Agora, iremos expor como podemos levar a Modelagem Matemática tanto para sala de aula, quanto para espaços extraclasse, seguindo três aspectos importantes citados por Almeida, Silva e Vertuan (2021, p. 21), a saber: “i) o espaço e a condução das atividades de Modelagem Matemática no currículo escolar e/ou nas aulas de Matemática; ii) a atuação do professor nas aulas com Modelagem Matemática; iii) a familiarização dos alunos com atividades de Modelagem Matemática”.

i) o espaço e a condução das atividades de Modelagem Matemática no currículo escolar e/ou nas aulas de Matemática

Neste aspecto, na literatura brasileira, percebeu-se que ao desenvolver atividades de Modelagem Matemática no âmbito escolar, houve a identificação de três situações particulares, sendo a) no âmbito da própria aula de Matemática; b) em horários e espaço extraclasse; c) uma combinação dessas duas circunstâncias, conforme os detalhes apresentados no Quadro 6.

Quadro 6 - Diferentes circunstâncias de Modelagem Matemática

NO ÂMBITO DA PRÓPRIA AULA DE MATEMÁTICA
A inclusão das atividades de Modelagem Matemática no âmbito da própria aula de Matemática presume que no decorrer das aulas sejam frequentemente invocados aspectos de aplicação e Modelagem Matemática como forma de auxiliar a introdução de conceitos matemáticos. O mesmo pode ser feito no sentido inverso, quando novos conceitos, métodos e resultados matemáticos podem ser ativados para a realização de atividades de aplicação e modelagem. Nessa situação, por conseguinte, conteúdos matemáticos podem ser introduzidos ou aplicados por meio de atividades de Modelagem Matemática nas aulas regulares de Matemática. Nessa circunstância, a situação ideal, sem dúvida, seria aquela em que os problemas são um ponto de partida e a matemática necessária para resolvê-los é introduzida a partir da necessidade. Há de se ponderar, entretanto, que a resolução dos problemas abordados pode não se dar mediante conteúdos matemáticos “tratáveis” no currículo escolar daquela série ou daquela disciplina. Daí que uma certa flexibilidade em relação ao programa escolar e à disponibilidade do professor pode se tornar necessária nessa circunstância.
EM HORÁRIOS E ESPAÇO EXTRACLASSE
Quando atividades de Modelagem Matemática são desenvolvidas em horários e espaço extraclasse em vez de incluir as atividades de modelagem nas aulas regulares de Matemática, tais atividades são desenvolvidas em cursos ou atividades extracurriculares, especialmente realizadas para esse fim. Nesta circunstância, as aulas regulares podem mesmo permanecer inalteradas pela introdução da Modelagem Matemática no currículo do curso ou da disciplina. Assim, de modo geral, professores e alunos têm maior liberdade no que se refere ao atendimento de programas e curriculum predeterminados, podendo avançar em termos de conceitos e procedimentos matemáticos em relação a essa estrutura curricular estabelecida.
UMA COMBINAÇÃO DESSAS DUAS CIRCUNSTÂNCIAS
Uma prática que se tem mostrado constante refere-se a uma combinação das duas anteriores, ou seja, parte das atividades é desenvolvida em aulas de Matemática nos horários regulares e parte do desenvolvimento se dá em encontros extraclasse dos alunos com seu professor. Nessa condição, limitações associadas às circunstâncias anteriores podem ser diluídas. A flexibilidade em relação ao programa escolar e à disponibilidade do professor

que pode emergir da introdução da modelagem nas aulas regulares não representa mais uma “dificuldade” ao mesmo tempo em que as atividades de Modelagem Matemática passam a integrar as aulas regulares de Matemática.

Fonte: Almeida, Silva e Vertuan (2021, p. 21 - 22, adaptação nossa, grifo nosso)

Para os autores, na utilização de uma dessas três situações particulares da Modelagem, os professores podem estimular/propiciar que estudantes usem de conhecimentos matemáticos já conhecidos, para construir novos saberes matemáticos⁶. Em situações diversificadas, durante o desenvolvimento de atividades de Modelagem, “os alunos se deparam com um obstáculo para o qual não possuem, provisoriamente, conhecimentos suficientes para superá-lo, emergindo assim a necessidade de construir esse conhecimento por meio dessa atividade” (*Ibid.*, p. 23).

ii) a atuação do professor nas aulas com Modelagem Matemática

Esse aspecto enfatiza três tipos de comportamento de professores, os que se mantêm numa “zona de conforto”, sendo preferível situações conhecidas e monótonas. Aqueles que segundo os autores “ainda que anunciem um discurso manifestando seu desejo de ingressar em ambiente desconhecidos, suas práticas não revelam essa intenção de mudança” (Almeida; Silva; Vertuan, 2021, p. 24). E finalizando, há professores que buscam por novas práticas, e obtendo sucesso ou não nessas novas ações, procuram subsídios para superação em sala de aula, tentando não permanecer na “zona de conforto”.

Outro ponto relevante apontado pelos autores é que no desenvolvimento de uma atividade de Modelagem o professor deve agir/ser como um orientador.

a) orientar é indicar caminhos, é fazer perguntas, é não aceitar o que não está bom, é sugerir procedimentos; b) orientar não é dar respostas prontas e acabadas orientar não é sinalizar que “vale tudo”; c) orientar não é livrar-se de estudar, de se preparar para o exercício da função; d) orientar não é despir-se da autoridade de professor (Almeida; Silva; Vertuan, 2021, p. 24).

Diante dessas reflexões sobre o ato de orientar, o professor durante a atividade de Modelagem pode, fazer deferentes contribuições para ajudar os estudantes na construção de conhecimentos matemáticos.

⁶ Neste trabalho consideramos os termos "saberes matemáticos" e "conhecimentos matemáticos" como sinônimos, em que ambas as expressões referem-se ao conjunto de informações, habilidades e compreensão relacionados à disciplina da Matemática.

iii) a familiarização dos alunos com atividades de Modelagem Matemática

Os autores ponderam que em sua concepção de Modelagem Matemática (alternativa pedagógica), há a necessidade de articulação entre definição, investigação e resolução. Diante disso, Almeida, Silva e Vertuan (2021), entendem que a familiarização do aluno com a Modelagem pode ser realizada de forma **gradativa**, assim, caracterizam diferentes “momentos”, a saber:

Em um primeiro momento, professor coloca os alunos em contato com uma situação-problema juntamente com os dados e as informações necessárias. A investigação do problema, a dedução, a análise e a utilização de um modelo matemático são acompanhados pelo professor, de modo que as ações como definição de variáveis e hipóteses, a simplificação, a transição para a linguagem matemática, a obtenção e a validação do modelo bem como o seu uso para análise da situação, são em certa medida, orientadas e avaliadas pelo professor.

Posteriormente, em um segundo momento, uma situação-problema é sugerida pelo professor aos alunos, e estes, divididos em grupos, completam a coleta de informações para a investigação da situação e realizam a definição de variáveis e a formulação das hipóteses simplificadoras, a obtenção e a validação do modelo matemático e seu uso para análise da situação. O que muda, essencialmente, do primeiro momento para o segundo é a independência do estudante no que se refere à definição dos procedimentos extramatemáticos e matemáticos adequados para a realização da investigação.

Finalmente, no terceiro momento, os alunos, distribuídos em grupos, são responsáveis pela condução de uma atividade de modelagem, cabendo a eles a identificação de uma situação-problema, a coleta e a análise dos dados, as transcrições de linguagem, a identificação de conceitos matemáticos, a obtenção e a validação do modelo e seu uso para análise da situação, bem como a comunicação desta investigação para a comunidade escolar. (*Ibid.*, p. 26, adaptação nossa, grifo nosso).

Embora esses momentos não sejam uma prescrição rigorosa a ser seguida, para Almeida, Silva e Vertuan (2021, p. 27), quando utilizadas podem desenvolver nos estudantes a “habilidade de fazer modelagem”.

A partir dessa habilidade, um dos principais objetivos que podemos considerar presente na literatura bibliográfica é que a Modelagem Matemática torna visível aos estudantes as contribuições da Matemática no contexto escolar informal (fora do muro da escola), ou seja, simultaneamente, ao passo em que o aluno aprende os conteúdos matemáticos, ele pode explorar o mundo em sua volta, a partir da Matemática imbricada nos fenômenos da realidade vivenciados por eles (Almeida, 2010, Almeida; Silva; Vertuan, 2021).

2.4 TECNOLOGIAS DIGITAIS NAS ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Inicialmente, apresentaremos algumas considerações sobre o uso das Tecnologias Digitais na Educação Matemática com foco no ensino e na aprendizagem de Matemática (Borba; Penteado, 2010; Kenski, 2012; Borba; Silva; Gadani, 2023). A escolha por esses autores se deve à proximidade que o autor deste trabalho teve com eles durante sua passagem pelo mestrado, a qual está se finalizando. Posteriormente, voltamos nossa atenção para pesquisas que utilizaram as Tecnologias nas atividades de Modelagem, também, com foco no ensino e na aprendizagem de Matemática. Esses trabalhos foram correlatados em relatos de experiências, comunicações científicas, artigos, dissertações e teses.

Para começarmos nossa explanação do uso das Tecnologias na Educação, entendemos importante abordarmos as quatro fases das Tecnologias na Educação brasileira apresentadas por Borba, Silva e Gadani (2023). Essas fases oferecem uma base fundamental para entender como as Tecnologias vieram se integrando no âmbito da pesquisa em Educação Matemática.

Em 1980 o uso de calculadoras e computadores ganhavam espaço no âmbito da Educação Matemática (Borba; Silva; Gadani, 2023). A primeira fase acontece com o surgimento do *software* LOGO, que se iniciou por volta de 1985. Termos como “tecnologias informáticas” (TI) ou tecnologias computacionais eram usualmente utilizados por profissionais para se referirem ao uso de computadores e *softwares* no meio escolar.

Seguindo, “A segunda fase tem início na primeira metade dos anos 1990, a partir da acessibilidade e popularização do uso de computadores pessoais” (*Ibid.*, p. 30). Diversificados *softwares* educacionais começam ser produzidos, suas faces eram amigáveis e proporcionavam uma linguagem intuitiva, dinâmica, visual e experimental. Dentre muitos, os *softwares* de Geometria dinâmica (GD) se destacavam por suas interfaces fáceis de manipular.

Em 1999, o uso da *internet* faz com que a terceira fase se inicie. Para os autores, “Em educação, a internet começa a ser utilizada como fonte de informações e como meio de comunicação entre professores e estudantes” (Borba; Silva; Gadani, 2023). Assim, além das expressões “TI” o uso de “tecnologias da informação” e “tecnologias da informação e comunicação” (TIC) passa a ser usado com frequência.

Por volta de 2004, a quarta fase tem seu início com o advento da *internet* rápida. A partir desse momento o uso da expressão “Tecnologias Digitais” é caracterizada por diferentes aspectos, consoante Borba, Silva e Gadanidis (2023), apresentados no Quadro 7.

Quadro 7 - Aspectos relevantes na quarta fase das Tecnologias na Educação Matemática

GeoGebra	• Integração entre GD e múltiplas representações de funções; • cenários inovadores de investigação matemática.
Multimodalidade	• Diversificados modos de comunicação passaram a estar presentes no ciberespaço; • uso de vídeos na internet; • fácil acesso de vídeos em plataformas ou repositórios (YouTube e TED Talks); • produção de vídeos com câmeras digitais e softwares de edição com interfaces amigáveis.
Novos designs e interatividade	• Comunicadores online - telepresença (Skype); • ambientes virtuais de aprendizagem (Moodle, ICZ e Second Life); • aplicativos online (applets); • objetos virtuais de aprendizagem (RIVED).
Tecnologias móveis ou portáteis	• Celulares inteligentes, tablets, laptops, dentre outros; • Comunicação por sms; • multifuncionalidade; • câmeras digitais, jogos e outros aplicativos; • multiconectáveis (USB); • interação através do toque em tela; • acesso internet.
Performance	• Estar online em tempo integral; • internet na sala de aula; • reorganização de dinâmicas e inserções nos ambientes escolares; • redes sociais (Facebook); • compartilhamento de vídeos (YouTube); • a Matemática dos estudantes passa a ir além da sala de aula; • torna-se pública no ciberespaço; • presente em diversos tipos de diálogos e cenários sociais.
Performance Matemática digital	• Uso das artes na comunicação de ideias matemáticas; • estudantes e professores como artistas; • produção audiovisual e disseminação de vídeos na internet; • narrativas multimodais e múltiplas identidades online; • surpresas, sentidos, emoções e sensações matemáticas; • ambientes multimodais de aprendizagem; • novas imagens públicas sobre a Matemática e os matemáticos.

Fonte: Borba, Silva e Gadanidis (2023, p. 43 - 44, grifo nosso, adaptação nossa)

Por curiosidade, é relevante destacar a continuação da coleção "Tendências em Educação Matemática", na qual Borba, Souto e Canedo Junior (2022) exploram a quinta fase intitulada "Tecnologias Digitais e COVID-19", assunto discutido no capítulo 1 do livro.

É consenso entre pesquisadores e professores matemáticos que o uso das Tecnologias Digitais na Educação Matemática, por exemplo, sozinha não é capaz de fazer com que os estudantes construam conhecimentos matemáticos (Borba; Penteado, 2010; Kenski, 2012; Borba; Silva; Gadanidis, 2023). E, além disso, esses autores abordam que as Tecnologias podem ser relacionadas com outras tendências, métodos e técnicas pedagógicas na Educação Matemática.

Neste contexto, ao longo dos anos de 2002 a 2023 notamos um aumento significativo na literatura, sobre pesquisas que exploraram a relação entre Modelagem Matemática e Tecnologias Digitais. Sobre essa afirmativa, nossa pretensão agora é mostrar alguns resultados de pesquisadores como: Araújo (2002), Malheiros (2004), Bassanezi (2013), Dalla Vecchia (2012), Borsoi, (2013), Silva; Borsoi; Almeida (2015), Silva, Barone e Basso (2016), Silva, Almeida e Rosa (2023).

Assim, queremos voltar nossos olhares para a pesquisa de Araújo (2002, p. 44) em que a autora aponta para um “crescente envolvimento dos computadores na Modelagem Matemática”. Após um levantamento, em sua pesquisa sobre Modelagem e Tecnologias com contribuições de autores (inter)nacionais, a autora expõe quatro aspectos relevantes nesta primeira década do século XXI:

- a possibilidade de lidar com problemas mais complexos e dados mais realísticos;
- a possibilidade de melhor se concentrar nos processos de Modelagem devido ao alívio que as tecnologias proporcionam aos cálculos de rotina;
- a possibilidade de melhor compreender os problemas por meio de variação de parâmetros, estudos numéricos, algébricos e gráficos;
- a possibilidade de lidar com problemas que podem ser inacessíveis do ponto de vista teórico para uma dada idade, por meio de simulações numéricas ou gráficas (Blum; Niss, 1991 *apud* Araújo, 2002, p. 44, adaptação nossa).

Neste momento da literatura, podemos notar que o uso das Tecnologias na Modelagem vem com o intuito de executar cálculos complexos. Assim, enquanto o computador ficava disponível para a realização dos cálculos, fórmulas e lógica Matemática os estudiosos poderiam se preocupar apenas com a compreensão e interpretação das situações-problema investigadas.

Para Bassanezi (2013, p. 30) em muitas situações “A resolução de um modelo está sempre vinculada ao grau de complexidade empregado em sua formulação e muitas vezes só pode ser viabilizada por meio de métodos computacionais, dando uma solução numérica aproximada.”

Outro ponto importante relatado pelo autor, em umas de suas turmas de formação era que, “Inicialmente, vistos com certa desconfiança pelos professores do ensino fundamental, não acostumados ao seu uso em salas de aula, as calculadoras e os microcomputadores passaram a fazer parte integrante do processo de modelagem” (*Ibid.*, p. 258).

Logo, a intenção de apresentar a utilidade das máquinas como instrumento de ensino era o objetivo do autor para aquela turma de formação. Pois, neste contexto, para Bassanezi, (2013, p. 206) “Ignorar a presença de computadores e calculadoras na educação matemática é condenar os estudantes menos favorecidos a uma subordinação total a subempregos”.

Agora, na segunda década do século XXI, encontram-se estudos em que as Tecnologias exercem um papel mais participativo nas atividades de Modelagem. Aqui a função de executar cálculos complexos para a elaboração de modelos matemáticos não é o principal foco das novas Tecnologias “Tecnologias Digitais” (Borssoi, 2013; Silva; Borssoi; Almeida, 2015).

Neste contexto, entendemos que as Tecnologias Digitais oportunizam a utilização de *softwares*, aplicativos e programas disponíveis em computadores, *tablet* e/ou celulares, os quais, fazem uso da *internet* ou não. A intenção não é apenas fazer cálculos, mas também explorar diferentes formas de produzir dados e informações provenientes das diferentes áreas do conhecimento. Entretanto, é importante ressaltar que cada Tecnologia tem suas características específicas em relação aos conceitos matemáticos. Ou seja, um conceito matemático em um programa pode não ser o mesmo em outro.

Em Dalla Vecchia (2012), o pesquisador utiliza como *software* principal para a construção de jogos o *Scratch*. Nessa situação, o uso computacional está muito além de executar cálculos, mas sim promover nos estudantes a mudança de postura, privilegiando neles aspectos como: a investigação, a exploração, a reorganização do pensamento e a cidadania. Nesta perspectiva, o autor busca encontrar nas discussões aspectos que relacionam a Modelagem e as Tecnologias Digitais.

Não se trata de apenas usar a tecnologia como mediadora no processo de MM, mas sim de considerar que os modelos construídos são feitos para se atualizarem na realidade do mundo cibernético. É esse o caso que pode ser considerado na construção de jogos eletrônicos. Ao observar esse processo por meio da ótica da MM, tem-se como consequência que aquilo que está sendo analisado e construído surgiu de um contexto que diz respeito ao ambiente no qual o jogo irá se desenvolver, isto é, o locus no qual os modelos que orientam o jogo irão se atualizar é a realidade do mundo cibernético (Dalla Vecchia, 2012, p. 20).

Durantes as atividades o autor relata que os estudantes tiveram dificuldades em relação às funcionalidades das Tecnologias utilizadas, bem como observou que

de um lado os alunos apresentavam dificuldades em identificar as características matemáticas que podiam estar associadas a uma determinada situação que não se associava diretamente ao conteúdo; e, de outro, ao estudarem um conteúdo matemático, apresentavam dificuldades em relacionar com situações que não eram estritamente matemáticas (*Ibid.*, p. 12).

Evidenciando em tópicos as contribuições acerca do uso das Tecnologias no desenvolvimento de atividades de Modelagem propostas para estudantes, Borssoi (2013, p. 172), mostra como as TD se fizeram presentes no processo de ensino e aprendizagem de Matemática:

- As atividades são pensadas de modo a avançar gradativamente em grau de dificuldade, permitindo ao aluno que os novos conhecimentos sejam integrados à estrutura cognitiva a partir de conhecimentos prévios identificados, à medida do possível, pelo professor;
- Oferecem a possibilidade de que os alunos se envolvam em atividades autênticas, e de modo autêntico, podendo definir temas de interesse para desenvolver Modelagem Matemática;
- Muitas vezes despertam a intencionalidade do aluno, provocando-o a tomar uma atividade de ensino como atividade de aprendizagem;
- Atribuem maior responsabilidade ao aluno, em relação a ambientes convencionais de ensino;
- Permitem aprendizagem de conceitos não essencialmente matemáticos;
- Promove o trabalho colaborativo, quando os alunos passam a *pensar juntos* com os pares, com o professor, com a tecnologia;
- Motivam o aluno a mobilizar a tecnologia como parceira intelectual;
- Estabelecem aproximações com a prática profissional, mesmo quando relacionada às expectativas futuras;
- Proporcionam a avaliação formativa do aluno ao longo da unidade de ensino;
- Permitem ao professor mais oportunidade para buscar evidências de aprendizagem significativa.

Para a autora, tais processos contribuíram de forma significativa para a transformação tanto dos professores quanto dos estudantes.

Para Silva, Borssoi e Almeida (2015, p. 165)

O aspecto interativo de muitas das novas tecnologias permite criar ambientes em que os alunos possam aprender fazendo, ao mesmo tempo em que recebem feedback e podem aprimorar continuamente seus conhecimentos construindo novos conhecimentos. Com essas tecnologias, conceitos difíceis de entender podem ser visualizados quando softwares de modelagem e simulação adequados são associados ao ensino.

As autoras relatam que as Tecnologias Digitais podem possibilitar o acesso a diferentes fontes de informações, incluindo bancos de dados *online*, bibliotecas digitais, além de poder conectar com estudiosos da área sem levar em consideração a distância (Silva; Borssoi; Almeida, 2015).

Para Silva, Barone e Basso (2016, p. 427) “Ao incorporar as tecnologias digitais em ambientes que proponham a investigação de situações que envolvam modelagem matemática, significa que há oportunidade para valorizar o trabalho cognitivo dos sujeitos envolvidos na construção de conceitos matemáticos”. Os autores buscam refletir sobre a importância do uso das Tecnologias Digitais durante o processo de ensino e aprendizagem de Matemática ao fazer Modelagem.

Com base nos resultados apresentados na XII Conferência Nacional sobre Modelagem Matemática (CNMEM/2023), Silva, Almeida e Rosa (2023) apontam alguns resultados a partir de uma revisão bibliográfica da literatura de autores, que também versam sobre Modelagem e Tecnologias na Educação Básica, esses estudiosos são apresentados no Quadro 8.

Quadro 8 - Autores selecionados na CNMEM/2023

PESQUISAS	REFERÊNCIAS
T1	SILVA, R. S. da. Cadeias de Markov e modelagem matemática: da abstração pseudo-empírica à abstração refletida com uso de objetos virtuais . 2015. 191f. Tese (Doutorado em Informática na Educação) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Informática Educação do Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias, Porto Alegre, 2015.
D1	COSTA, F. A. O ensino de funções trigonométricas com o uso da modelagem matemática sob a perspectiva da teoria da aprendizagem significativa . 2017. 142f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. 2017.
D2	MENEZES, B.S. de. Game para Smartphones e Ambientes de Aprendizagem . 2019. 83 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciência) - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2019.

D3	SILVA, J. A. L. Modelagem Matemática e o ensino da geometria plana em atividades remotas para os 8.º anos . 2021. 141 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade do Estado do Pará, Programa de Pós-Graduação em Educação- PPGED, Belém, 2021.
D4	TRAINOTTI, A. A educação estatística e a modelagem matemática na formação crítica dos estudantes do ensino médio de escolas do município de Rio do Sul - SC . 2019. 97f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciência) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Instituto de Matemática e Estatística, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática.
D5	SILVA, A. D. P. Modelagem matemática e tecnologias digitais para o ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos . 2019. 119f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal do Oeste do Pará, Instituto de Ciências da Educação, Programa de Pós-Graduação em Educação, Santarém, 2019.
D6	SILVA, C. A. da. Modelagem e Tecnologia: alternativas metodológicas para a Educação Matemática . 2019. 107f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Filosofia e Ciências, Marília/SP, 2019.
D7	GAYESKI, R. G. Big Data e Educação Matemática: algumas aproximações . 2019. 135f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2019.

Fonte: Silva, Almeida e Rosa (2023, p. 6 - 7, grifo nosso, adaptação nossa)

Os resultados apresentados em Silva, Almeida e Rosa (2023), estão em consonância com as categorias elencadas pelos autores, a saber: Concepções da Modelagem Matemática; Metodologias utilizadas nas pesquisas e; Tecnologias Digitais. Pode-se perceber que a partir dessas categorias de análise foi possível

[...] avaliar a qualidade e a consistência das pesquisas, além de revelar tendências e inovações metodológicas. [...] a identificação das Tecnologias utilizadas pelos pesquisadores, oferece uma visão abrangente das ferramentas disponíveis, permitindo a compreensão de seu impacto nas atividades de Modelagem Matemática e fornecendo visões para o desenvolvimento de práticas mais eficazes (Silva; Almeida; Rosa, 2023, p. 13).

Queremos evidenciar que todos os estudiosos citados nesta seção contribuíram de alguma forma para entendermos como as pesquisas que fazem uso das Tecnologias nas atividades de Modelagem atingiram seus objetivos. Assim, com base nas leituras poderemos explorar novos rumos nesta pesquisa, contribuindo para a Educação nos diferentes níveis.

Para tanto, o uso das Tecnologias neste trabalho será integrado às fases de Modelagem Matemática propostas por Almeida, Silva e Vertuan (2021), para oportunizar aos estudantes um cenário repleto de ferramentais digitais, por meio dos recursos tecnológicos apresentados pelo professor/pesquisador e as demais que surgiram durante as atividades. Entendemos que o uso das Tecnologias pode ser explorado desde a Situação inicial (problemática) passando

pelos procedimentos, até chegar na Situação final (solução para situação inicial). Neste mesmo contexto, adotaremos os critérios da Experimentação para as análises da produção de dados.

2.5 EXPERIMENTAÇÃO COM TECNOLOGIAS NAS ATIVIDADES DA MODELAGEM MATEMÁTICA

Na sala de aula, a Experimentação pode assumir um papel importante no processo de construção de aprendizagem do estudante. A partir dela, o estudante tem a oportunidade de manipular materiais concretos, computacionais, geométricos e/ou algébricos, produzir dados e informações, elaborar conjecturas, levantar hipóteses, transcrever um fenômeno estudado para linguagem Matemática, mobilizar ideias de conceitos abstratos por meio de materiais físicos e trabalhar de forma colaborativa entre grupos (Giordan, 1999; Malheiros 2004; Suart e Marcondes, 2009; Borba; Penteado, 2010; Madruga; Klug, 2015; Almeida; Silva Malheiro, 2019, Araki 2020; Rocha; Araki; Silva, 2023; Borba; Silva; Gadani, 2023).

Neste trabalho, consideramos o significado de Experimentação de acordo com Giordan (1999). O autor destaca que a Experimentação pode exercer uma função de instrumento para o desenvolvimento de algumas competências, a saber:

Saber selecionar e hierarquizar variáveis, segundo critérios de pertinência para a compreensão dos fenômenos, controlar e prever seus efeitos sobre os eventos experimentais, encadear logicamente sequências de dados extraídos de experimentos, são consideradas, na visão positivista, competências de extremo valor para a educação científica do aluno (*Ibid.*, p. 4).

Além disso, a Experimentação, para o autor, oportuniza a construção do conhecimento científico conforme os dados e informações são produzidos sobre o fenômeno estudado. Neste contexto, a Experimentação “[...] quando aberta às possibilidades de erro e acerto mantém o aluno comprometido com sua aprendizagem, pois ele a reconhece como estratégia para resolução de uma problemática da qual ele toma parte diretamente, formulando-a inclusive” (Giordan, 1999).

Nos estudos de Suart e Marcondes (2009, p. 52) advertem que “muitas atividades experimentais ainda são desenvolvidas e executadas em sala de aula com o objetivo de motivar o aluno ou comprovar fatos e teorias previamente estudados em sala de aula”.

Entretanto, para as autoras, as pesquisas precisam alcançar mais que a motivação e a comprovação de teorias, necessitam envolver os estudantes em problemas reais e tentar solucioná-los, “priorizando a participação ativa do educando no processo de aprendizagem” (*Ibid.*, p. 52).

Nestes argumentos, Suart e Marcondes (2009, p. 57) apoiam e desenvolvem a Experimentação investigativa a partir de 3 aulas, sendo separadas da seguinte forma:

- Pré-laboratório (primeira aula): a professora discute com os alunos alguns conceitos essenciais para o desenvolvimento e compreensão do problema proposto; os alunos propõem as hipóteses para investigação e se reúnem em grupos para elaborar o procedimento experimental;
- Laboratório (segunda aula): os alunos vão para o laboratório executar o experimento previamente verificado pela professora, analisar os dados obtidos e inferir suas conclusões;
- Pós-laboratório (terceira aula): discussão com toda a sala para a conceituação final e possíveis generalizações.

À vista disso, investigar todo o processo de Experimentação: pré-laboratório, laboratório e pós-laboratório, foi possível analisar de forma qualitativa as habilidades cognitivas manifestadas pelos estudantes durante a atividade proposta, bem como a aprendizagem alcançada na atividade (Suart; Marcondes, 2009).

Para Madruga e Klug (2015, p. 59) “A experimentação faz parte da vida escolar e do cotidiano. As boas atividades experimentais têm por fundamento a solução de problemas da realidade dos alunos e, além disso, são geradoras de conflitos cognitivos entre o que o aprendiz já sabe e o que busca saber”.

Neste contexto, os autores argumentam que

A função da experimentação em sala de aula não se limita apenas a prática voltada para a ilustração das teorias e conceitos e, como forma, de demonstração de verdades definitivas. A função da experimentação vai muito além: é ferramenta ou estratégia que objetiva tornar o aluno sujeito de sua aprendizagem mediante um ambiente investigativo; sendo que este sujeito é o principal responsável pelo seu desenvolvimento, através de questionamentos, hipóteses, interpretações e reflexões, ou seja, levando em consideração os conhecimentos prévios dos mesmos, para que haja a reconstrução do conhecimento (*Ibid.*, p. 66 - 67).

Entretanto, esses e outros autores relatam que as habilidades e competências, por meio da Experimentação não necessariamente têm que ser desenvolvidas em laboratórios modernos

com equipamentos sofisticados. Pelo contrário, ocorrem também em locais alternativos, ou seja, nos diferentes espaços escolares (Madruga; Klug, 2015; Araki; Kato, 2022).

Para Almeida; Silva Malheiro (2019), o professor pode estimular os estudantes por meio de questionamentos, fazendo com que os estudantes reflitam sobre suas ações, ou seja, estimulando o trabalho entre a teoria (conteúdos aprendidos em sala) e a prática (aplicação dos conteúdos), desde o seu primeiro contato com a Experimentação. Os autores pontuam que

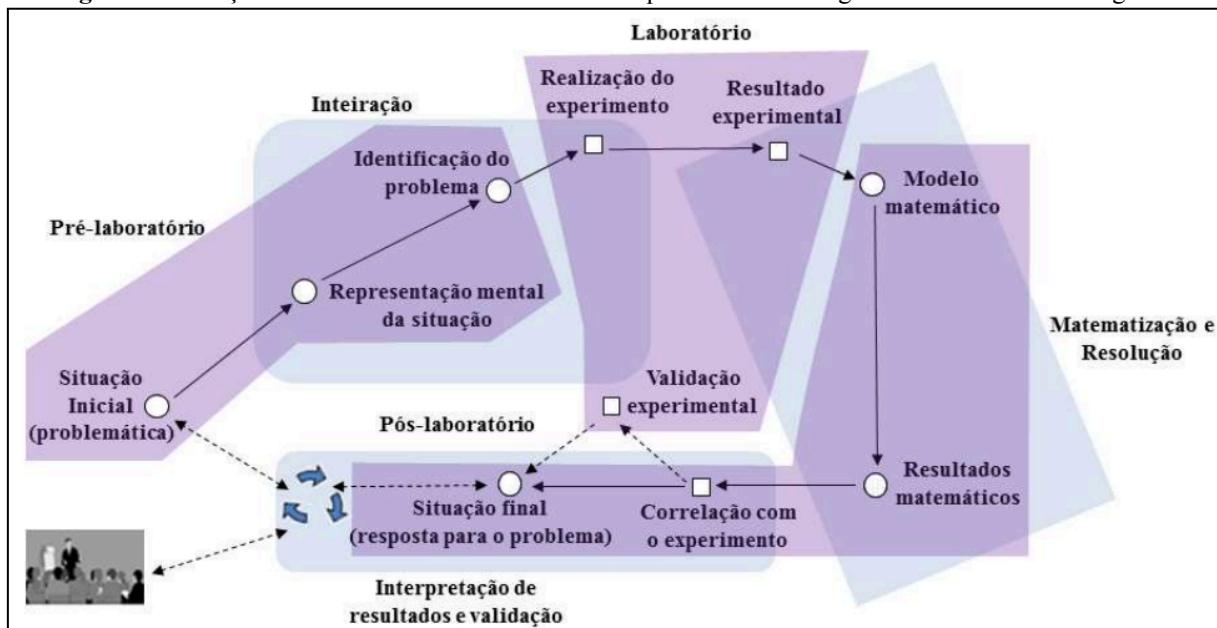
A partir da experimentação, das interações entre os alunos e das intervenções docentes, os conhecimentos puderam ser compartilhados e construídos, já que na medida que os objetos eram manipulados e os resultados encontrados eram expostos, os temas iam sendo discutidos e compreendidos (*Ibid.*, p. 404).

Assim, por meio da utilização de materiais concretos foi possível estudar os conceitos abstratos dos conteúdos matemáticos envolvidos, oportunizando que os estudantes manipulassem as propriedades e definições apresentados na teoria, além de proporcionar a troca de ideias reforçando um espaço colaborativo entre grupos.

No que tange a relação entre a Experimentação e a Modelagem Matemática, buscamos na literatura alguns trabalhos que aliaram essas duas estratégias pedagógicas. Na pesquisa conduzida por Araki (2020), o autor analisou “Como atividades experimentais investigativas desenvolvidas em um contexto de aulas com Modelagem Matemática contribuem para a atribuição de significado para o objeto matemático por alunos dos anos finais do Ensino Fundamental?”. As atividades realizadas tanto na sala de aula como no contraturno às atividades escolares, contaram com a participação de estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental.

A concepção de Modelagem adotada pelo foi autor foi de Almeida, Silva e Vertuan (2012), em que foram analisados os signos produzidos pelos estudantes envolvidos no desenvolvimento de três atividades: Calorímetro, Canhão de vórtex e Plano inclinado. Para a Experimentação o autor se baseou na ideia de Sandri (2018). A Figura 6, mostra a relação entre a Experimentação (representado em roxo) e as fases da Modelagem Matemática (representado em azul) elaborada por Araki (2020), os quadrados ações provenientes das ações da Modelagem e os círculos das ações da Experimentação.

Figura 6 - Inserção dos momentos de uma atividade experimental investigativa no ciclo de modelagem

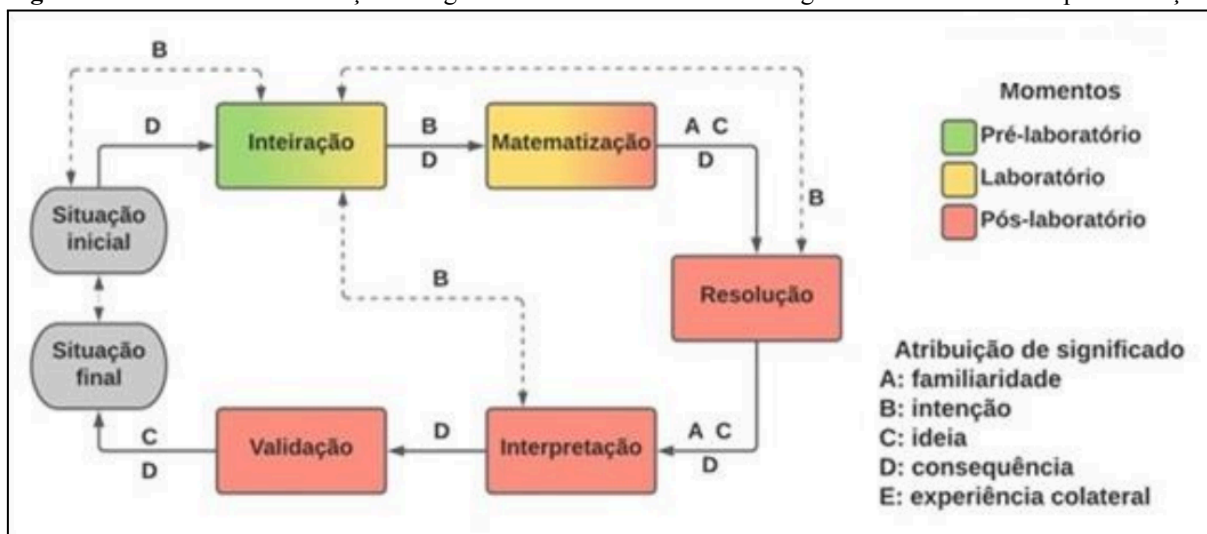


Fonte: Araki (2020, p. 153), adaptado de Almeida, Silva e Vertuan (2012)

Em sua conclusão, Araki (2020) após analisar as três atividades, entende que os signos produzidos acerca do problema se mostraram mais presentes no decorrer da fase de inteiração, na fase de matematização os signos referentes ao experimento puderam ser evidenciados e interpretação dos resultados e os signos produzidos para os objetos matemáticos que emergiram no decorrer da atividade eram mais presentes nas fases de matematização, resolução e interpretação dos resultados.

Em seu estudo Rocha, Araki e Silva (2023) investigaram sobre as atribuições de significado no processo de comunicação em uma atividade de Modelagem Matemática com Experimentação, os participantes foram estudantes do 2º ano do Ensino Médio. Os autores alegam que “A temática da atividade está relacionada à propriedade de crioscopia em que os estudantes analisaram em que condições uma amostra de solução perde calor mais rapidamente” (*Ibid.*, p. 107). Buscam relacionar ambas as estratégias pedagógicas conforme a Figura 7, seguindo a concepção de Almeida, Silva e Vertuan (2012), bem como a Experimentação de acordo com Suart e Marcondes (2009).

Figura 7 - Evidências de atribuição de significado na atividade de Modelagem Matemática com experimentação



Fonte: Rocha, Araki e Silva (2023)

Para os autores, nas atividades de Modelagem com Experimentação, a investigação é um processo importante que pode possibilitar a construção do conhecimento dos estudantes durante o desenvolvimento das fases de Modelagem (Rocha; Araki; Silva, 2023). Dessa maneira, entendemos que a comunicação presente nas atividades de Modelagem com Experimentação pode oferecer indicações sobre como os estudantes atribuem significados aos objetos matemáticos ou não.

A Modelagem Matemática é normalmente correlacionada com outras estratégias pedagógicas no âmbito da Educação Matemática. Neste contexto, vamos ao encontro da definição de Experimentação com Tecnologias conforme Borba e Penteado (2010, p. 41) “Para tentar expandir a investigação em sala de aula em direção a temas mais gerais, buscamos integrar a experimentação com tecnologia ao trabalho de modelagem”.

Para melhor compreensão, os autores expõem que

O trabalho com a modelagem e com enfoque experimental sugere que há pedagogias que se harmonizam com as mídias informáticas de modo a aproveitar as vantagens de suas potencialidades. Essas vantagens podem ser vistas como sendo a possibilidade de experimentar, de visualizar e de coordenar de forma dinâmica as representações algébricas, tabulares, gráficas e **movimentos do próprio corpo** (*Ibid.*, p. 44, grifo nosso).

Borba e Penteado (2010) enfatizam que processo de Experimentação pode estar diretamente relacionado às Tecnologias, sendo que as ferramentas digitais permitem que a investigação seja realizada de maneira mais proativa por parte dos envolvidos.

Em sua pesquisa Malheiros (2004) busca analisar “Como os alunos estão utilizando conteúdos matemáticos em um ambiente onde a Modelagem é uma das estratégias pedagógicas?”. O estudo teve como cenário a disciplina Matemática Aplicada, ministrada para o curso de Ciências Biológicas da Unesp, Rio Claro. A partir do levantamento bibliográfico realizado pela autora e das quatro atividades propostas, pode-se observar que:

As atividades de experimentação-com-tecnologias também se mostraram extremamente importantes para o desenvolvimento dos trabalhos de Modelagem, pois, ao estimular a investigação e discussão matemática em sala de aula, através de atividades investigativas com a utilização de recursos tecnológicos, o professor instigava os alunos a realizarem investigações nos problemas que surgiam durante o desenvolvimento dos trabalhos de Modelagem (*Ibid.*, p. 166).

O enfoque na Experimentação-com-Tecnologia e o uso da *internet*, foram um dos destaques na pesquisa dessa autora, pois, além das produções de dados e observações, puderam abordar questões históricas e culturas de acordo com as atividades propostas.

Na pesquisa de Araki (2020), o autor utiliza as Tecnologias Digitais para a elaboração e validação das hipóteses levantadas inicialmente pelos estudantes, bem como para resolver e validar os modelos matemáticos. Com auxílio de *softwares* específicos propõe que os estudantes encontrem os objetos matemáticos para representar o experimento relacionada a atividade “Canhão de Vórtex”, por exemplo. Os experimentos ajudaram os estudantes nas tomadas de decisões durante as fases da Modelagem, confirmando a fala de alguns autores sobre esta tendência (Burak 2010; Bassanezi 2013; Rosa, 2013; Brasil 2018; Klüber, 2017).

Em consonância com os autores citados nesta seção, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) expõe que, apesar da Matemática “ser, por excelência, uma ciência hipotético-dedutiva, porque suas demonstrações se apoiam sobre um sistema de axiomas e postulados, é de fundamental importância também considerar o papel heurístico das experimentações na aprendizagem da Matemática” (Brasil, 2018, p. 265).

Segundo Borba, Silva e Gadanidis (2023, p. 55 - 56)

[...] exploramos a noção de experimentação com tecnologias ao buscarmos atribuir um design experimental a uma atividade matemática. Dessa forma, buscamos formar cenários de investigação matemática, ou seja, um ambiente heurístico, de descobertas, de formulação de conjecturas acerca de um problema e busca por possíveis e diversificadas soluções.

Com base nessas afirmativas, a BNCC em suas competências específicas de Matemática e suas tecnologias para o ensino médio, argumenta que

Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (Brasil, 2018, p. 531)

Neste cenário, esse órgão educacional, salienta que professores explorem em suas práticas escolares diferentes recursos pedagógicos como, por exemplo, a Experimentação e os recursos providos das Tecnologias, além da Modelagem Matemática como já citado anteriormente.

Finalizamos esta seção, pontuando os vários aspectos importantes que devem ser levados em considerações no desenvolvimento de atividades, em particular, de Modelagem aliada a Experimentação com Tecnologias Digitais, conforme articulam Borba e Villarreal (2005) *apud* Borba, Silva e Gadani (2023, p. 57 - 58):

- Criação e simulação de modelos matemáticos;
- geração de conjecturas matemáticas;
- exploração de diversas formas de resoluções;
- manipulação dinâmica de objetos construídos;
- realização de teste de conjecturas usando um grande número de exemplos, modificando representações de objetos, simulando componentes de construção etc;
- convencimento sobre a veracidade de conjecturas;
- elaboração de novos tipos de problemas e construção matemáticas;
- criação e conexão entre diferentes (e múltiplos) tipos de representações de objetos matemáticos;
- exploração do caráter visual, dinâmico e manipulativo de objetos matemáticos;
- incentivo à combinação de raciocínio intuitivo, indutivo ou abdutivo, que pode contribuir com o desenvolvimento do raciocínio dedutivo;
- criação de atividades matemáticas “abertas controladas”, ou seja, com direcionalidade ao seu objetivo;
- ensinar e aprender Matemática de forma alternativa;
- compreensão de conceitos;
- conhecimentos de novas dinâmicas, formas de conectividade e relações de poder em sala de aula;

- envolvimento com um novo tipo de linguagem (informática) na comunicação matemática, além da escrita;
- criação de diferentes tipos de símbolos e notações matemáticas;
- aprofundamento em variados níveis de rigor matemático;
- identificação de incoerências conceituais e/ou aprimoramento do enunciado.

Tais pontos mencionados pelos autores têm como papel principal a construção do conhecimento matemático com base na dimensão heurística, ou seja, a partir de ações que envolve o ato de investigação por parte dos estudantes durante as fases da Modelagem, por exemplo.

Na busca em atender nosso objetivo geral, que é “analisar como a Experimentação pode potencializar as contribuições do uso das Tecnologias Digitais na construção dos conhecimentos matemáticos e extramatemáticos de estudantes do ensino médio de acordo com as fases da Modelagem Matemática”, adotaremos como aporte teórico, nesta pesquisa, a concepção de Modelagem concebida por Almeida, Silva e Vertuan (2021), a Experimentação de acordo com Giordan (1999). E ainda, o entendimento de Tecnologias Digitais conforme Kenski (2012). “Para tentar expandir a investigação em sala de aula em direção a temas mais gerais, buscamos integrar a experimentação com tecnologia ao trabalho de modelagem” (Borba; Penteado, 2010).

CAPÍTULO 3

ENCAMINHAMENTOS METODOLÓGICOS

3 ENCAMINHAMENTOS METODOLÓGICO

Neste capítulo, apresentamos o percurso metodológico em cinco etapas. Na primeira etapa, realizamos o delineamento da pesquisa por meio da contextualização; na segunda etapa, ressaltamos a motivação da escolha da pesquisa qualitativa que conduziu o processo investigativo, a produção e as análises de dados. Na terceira etapa, fornecemos detalhes sobre o cenário de investigação e contexto da pesquisa. Durante a quarta etapa, buscamos apresentar brevemente os pontos fundamentais que se fizeram presentes no planejamento das atividades de Modelagem. E finalizando, na quinta e última etapa, discorremos sobre os procedimentos de análise de dados.

3.1 JUSTIFICATIVA DE PESQUISA

O processo de ensino e aprendizagem da Matemática, idealizado como uma prática educativa em constante ação, deve se estender a diferentes espaços, lugares, contextos e situações. Essa abordagem visa não apenas proporcionar aos estudantes a aquisição de conteúdos específicos, mas também estimular debates sobre diversas questões sociais, incluindo política, economia e aspectos histórico-culturais.

Ademais, a incorporação de brincadeiras, jogos, materiais manipuláveis e Tecnologias se revelam como elementos capazes não apenas de potencializar a compreensão da Matemática, mas também de tornar as aulas mais intuitivas e atrativas. Validando essas afirmações D'Ambrósio (2021, p. 43) expõe que “A Matemática tem, como qualquer outra forma de conhecimento, a sua dimensão política e não se pode negar que seu progresso tem tudo a ver com o contexto social, econômico, político e ideológico. Isso é muitas vezes ignorado e mesmo negado”.

Este pensamento do professor D'Ambrósio, é compartilhado por alguns autores, com suas pesquisas no âmbito da Educação Matemática como Rosa (2009, 2013); Borssoi (2013); Souza (2020); Silva *et al.* (2023). Assim, entendemos que somente as aulas tradicionais⁷/expositivas não são capazes de atender as diversificadas demandas da sociedade.

⁷ Concordamos com Kenski (2012), em que a aula tradicional era um ambiente [...], onde, anteriormente, predominava a lousa, o giz, o livro, e a voz do professor” (p. 46).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais - Ensino Médio (PCNEM), enfatiza que a aprendizagem dos estudantes em relação à Matemática deve contribuir não apenas para o conhecimento técnico, mas também para uma compreensão mais abrangente, desenvolvendo habilidades para interpretar e realizar experimentos com fenômenos reais, compreender procedimentos e equipamentos do cotidiano social e profissional, além de articular uma visão do mundo cultural e social (Brasil, 2000).

Além disso este documento oficial enfatiza que a aprendizagem Matemática e suas Tecnologias pode

[...] ser conduzida para estimular a efetiva participação e responsabilidade social dos alunos, discutindo possíveis ações na realidade em que vivem, desde a difusão de conhecimento a ações de controle ambiental ou intervenções significativas no bairro, ou localidade, para que os alunos sintam-se de fato detentores de um saber significativo (*Ibid.*, p. 54).

A Base Nacional Comum Curricular, em sua segunda competência para o ensino médio, adverte que

[...] deve-se também considerar a reflexão sobre os distintos papéis que a educação matemática pode desempenhar em diferentes contextos sociopolíticos e culturais, como em relação aos povos e comunidades tradicionais do Brasil, articulando esses saberes construídos nas práticas sociais e educativas (Brasil, 2018, p. 534).

Neste contexto, ao trabalhar o ensino e a aprendizagem de Matemática na sala de aula, utilizando estratégias diferenciadas como a Modelagem Matemática, a Experimentação e as Tecnologias Digitais, poderemos como pesquisadores e/ou educadores matemáticos proporcionar que os estudantes na Educação Básica, em particular no ensino médio, tenham melhores condições para a organização e construção de conhecimentos matemáticos, bem como possam atender as habilidades e competências legitimadas na Base Nacional Comum Curricular.

Queremos ressaltar que as competências não têm uma ordem preestabelecida. Elas formam um todo conectado, de modo que o desenvolvimento de uma requer, em determinadas situações, a mobilização de outras (Brasil, 2018, p. 530), por sua vez, embora cada habilidade esteja associada a determinada competência, isso não significa que ela não contribua para o desenvolvimento de outras. Assim, entendemos que há uma flexibilização para a definição anual dos currículos, bem como das propostas pedagógicas de cada escola.

[...] os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados (*Ibid.*, p. 529).

Assim, a partir de algumas reflexões com base em leituras realizadas da literatura bibliográfica na área da Educação Matemática e de alguns pontos pertinentes na BNCC e PCNEM, acreditamos que o uso da Modelagem Matemática, unido aos métodos de Experimentação com Tecnologia possam contribuir para melhoria na qualidade do ensino e da aprendizagem de Matemática.

A concepção de Modelagem adotada neste trabalho vai ao encontro de Almeida, Silva e Vertuan (2021), sendo esta definida como uma alternativa pedagógica. A Modelagem para os autores, pode ser descrita a partir de uma situação inicial, levando em consideração um conjunto de procedimentos ancorados na Matemática ou não, até chegar na situação final. Esse conjunto de procedimentos são necessários para a configuração, estruturação e resolução de uma situação-problema, partindo do interesse de pequenos grupos de estudantes, podendo ser caracterizado em fases, a saber: *Interação, Matematização, Resolução, Interpretação de Resultados e Validação*.

À vista disso, nosso objetivo geral no campo da Educação Matemática, busca analisar como a Experimentação pode potencializar as contribuições do uso das Tecnologias Digitais na construção dos conhecimentos matemáticos e extramatemáticos de estudantes do ensino médio de acordo com as fases da Modelagem Matemática. Para atender a nossa problemática, procuramos fazer observações e analisar os meios/métodos de investigação utilizados pelos estudantes no decorrer das atividades de Modelagem.

Inicialmente, a idealização da temática ocorreu na escrita do Trabalho de Conclusão de Curso do autor desta dissertação, intitulada: “Modelagem Matemática e o uso de Tecnologias Digitais: Possibilidades e desafios no ensino e aprendizagem de Matemática à luz de *softwares* educacionais”, a qual foi defendida em 16 de dezembro de 2021.

Posteriormente, foram apresentados trabalhos relevantes com o tema em questão em alguns eventos (local, regional e nacional) e revistas científicas (periódicos). Esses trabalhos foram desenvolvidos dentro do Grupo de Formação, Estudos e Pesquisa em Educação Matemática (GFPEM), vinculado ao Instituto de Matemática (INMA) e ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PPGEduMat) da Universidade Federal de Mato

Grosso do Sul (UFMS). Os integrantes do grupo supracitado são estudantes de graduação, mestrado e doutorado; professores da Educação Básica; mestres e doutores.

3.2 PESQUISA QUALITATIVA

Assumimos neste trabalho uma abordagem de pesquisa qualitativa, frequentemente, adotada no âmbito da Educação Matemática (Garnica, 2001; Bicudo, 2012; Klüber; Burak, 2012). Encontramos nos pressupostos desse método de pesquisa aspectos relevantes que se aproximam de nossos objetivos, conforme expresso por Garnica (2001, p. 42)

A pesquisa qualitativa, concordamos, é um meio fluido, vibrante, vivo e, portanto, impossível de prender-se por parâmetros fixos, similares à legislação, às normas, às ações formalmente pré-fixadas. Em abordagens qualitativas de pesquisa, não há modelos fixos, não há normatização absoluta, não há a segurança estática dos tratamentos numéricos, do suporte rigidamente exato. É investigação que interage e, interagindo, altera-se. É uma alteração que se aprofunda nas malhas do fazer e forma-se em ação.

Para Bicudo (2012) pesquisa qualitativa em Educação pode ser compreendida por

[...] um modo de proceder que permite colocar em relevo o sujeito do processo, não olhado de modo isolado, mas contextualizado social e culturalmente; mais do que isso e principalmente, de trabalhar concebendo-o como já sendo sempre junto ao mundo e, portanto, aos outros e aos respectivos utensílios dispostos na circunvizinhança existencial, constituindo-se, ao outro e ao mundo em sua historicidade (Bicudo, 2012, p. 17).

A pesquisa qualitativa, tem-se mostrado uma abordagem frequente no cenário educacional brasileiro. Assim, tem sido amplamente empregada para investigar as experiências, percepções e significados atribuídos pelos sujeitos envolvidos nesse processo, proporcionando uma compreensão mais abrangente e contextualizada, tal como, a prática da Modelagem na Educação Matemática (Klüber; Burak, 2012).

Nesta proposta metodológica há critérios que visam garantir a qualidade e a validade dos estudos qualitativos, proporcionando uma base sólida para a interpretação e utilização dos resultados obtidos. Ao seguir esses critérios, os pesquisadores podem assegurar a confiabilidade de suas pesquisas qualitativas (Moreira, 2018). Logo, o primeiro critério é a **credibilidade**, sendo necessário que o pesquisador estabeleça uma relação de confiança com os participantes, demonstre uma compreensão profunda do contexto estudado e utilize

métodos adequados para produção e análise dos dados. A triangulação, ou seja, a utilização de múltiplas fontes de dados e a busca por diferentes perspectivas, também é um componente importante para a credibilidade.

O segundo critério apontado pelo autor é a **transferibilidade**, aqui o pesquisador deve fornecer informações detalhadas sobre o contexto, os participantes e o processo de pesquisa, permitindo que outros avaliem se os resultados podem ser aplicáveis em diferentes cenários (Moreira, 2018). O terceiro critério, **dependibilidade** (fidedignidade) mostra a importância do pesquisador em documentar todas as etapas do processo de pesquisa, desde a produção até a análise dos dados, de forma clara e sistemática. Finalmente, o último critério é a **confirmabilidade** (objetividade) nele o pesquisador deve ser transparente em relação às suas próprias influências e preconceitos, buscando minimizar o impacto de suas crenças e valores nos resultados (Moreira, 2018).

Além desses critérios, também, assumimos esta dissertação como parte de uma pesquisa interpretativa, buscando desempenhar um papel fundamental na compreensão e reflexão dos dados produzidos. Assim, compreendemos que a pesquisa qualitativa interpretativa valoriza a participação ativa dos sujeitos da pesquisa, buscando perceber suas perspectivas e dar voz às suas experiências. Ao envolver os participantes (estudantes) como colaboradores no processo de pesquisa, essa abordagem promove a inclusão, a diversidade de vozes e a representatividade daquele meio social (Moreira, 2011), permitindo que os resultados reflitam de forma mais precisa a realidade vivida por eles.

Neste sentido, concordamos com Marcone e Lakatos (2003, p. 224) ao expor sobre a pesquisa qualitativa interpretativa

A finalidade da pesquisa científica não é apenas um relatório ou descrição de fatos levantados empiricamente, mas o desenvolvimento de um caráter interpretativo, no que se refere aos dados obtidos. Para tal, é imprescindível correlacionar a pesquisa com o universo teórico, optando-se por um modelo teórico que serve de embasamento à interpretação do significado dos dados e fatos colhidos ou levantados.

Nestas perspectivas, buscamos apoio nos aspectos teóricos e metodológicos da Modelagem Matemática na Educação Matemática, considerando-a como parte principal no desenvolvimento das atividades propostas nesse trabalho. Além disso, adotamos, em parte, as perspectivas advindas da Experimentação e das Tecnologias Digitais no cenário da Educação Matemática. Segundo Moreira (2011, p. 49) a pesquisa qualitativa interpretativa

Ela procura analisar criticamente cada significado em cada contexto. O pesquisador, nessa perspectiva, pergunta-se continuamente que significados têm as ações e os eventos de ensino, aprendizagem, avaliação e currículo para os indivíduos que deles participaram. Indaga-se permanentemente sobre o que está acontecendo e com isso se compara com o que está acontecendo em outros contextos.

Ainda, fazendo uso de uma abordagem qualitativa de cunho interpretativo, em relação às análises de dados, o autor continua expondo que

A análise interpretativa dos dados gera asserções de conhecimento, as quais são publicadas pelo pesquisador sob a forma de um relatório ou artigo de pesquisa. Nessa etapa assume grande importância outra faceta da pesquisa qualitativa: a narrativa. Ao invés de usar gráficos, coeficientes, tabelas estatísticas para apresentar resultados e asserções de conhecimento, o pesquisador interpretativo narra o que fez e sua narrativa concentra-se não nos procedimentos, mas nos resultados. Suas asserções dependem de sua interpretação só terão validade para o leitor (que pode ser um colega pesquisador um professor, um administrador, o próprio sujeito da pesquisa) na medida em que este concorda com essa interpretação (Moreira, 2011 p. 51).

Na escolha por essa metodologia, buscaremos refletir de forma ampla sobre a Experimentação com Tecnologias Digitais nas diferentes fases da Modelagem, notadamente: Situação inicial (problemática) - *Interação, Matematização, Resolução e Interpretação de Resultados e Validação* - Situação final (solução para situação inicial), concebidas pelos estudiosos Almeida, Silva e Vertuan (2021).

Essas fases, buscam dar ênfase aos diferentes contextos do cotidiano dos estudantes bem como visam proporcionar a construção de conhecimentos extramatemáticos, “caracterizando-se como um conjunto de procedimentos mediante o qual se definem estratégias de ação do sujeito em relação a um problema” (*Ibid.*, p. 15).

A proposta de Modelagem Matemática com atividades experimentais nesta pesquisa foi pensada a partir da segunda situação apontada por Almeida, Silva e Vertuan (2021, p. 21, grifo nosso) “a) no âmbito da própria aula de Matemática, **b) em horários e espaço extraclasse** e, c) uma combinação dessas duas circunstâncias”. O espaço para a realização das atividades de Modelagem (produção de dados) aconteceu no período matutino em que os estudantes recebem reforço escolar, em particular, das aulas de Matemática.

Para esta segunda situação os autores afirmam que

b) Quando atividades de Modelagem Matemática são desenvolvidas em horários e espaços extraclasse em vez de incluir as atividades de modelagem nas aulas

regulares de matemática, tais atividades são desenvolvidas em cursos ou atividades extracurriculares, especialmente realizadas para esse fim. Nesta circunstância, as aulas regulares podem mesmo permanecer inalteradas pela introdução da Modelagem Matemática no currículo do curso ou da disciplina. Assim, de modo geral, professores e alunos têm maior liberdade no que se refere ao atendimento de programas e curriculum predeterminados, podendo avançar em termos de conceitos e procedimentos matemáticos em relação a essa estrutura curricular estabelecida (*Ibid.*, p. 22).

As atividades propostas neste trabalho, juntamente com estratégias pedagógicas fundamentadas nas práticas experimentais com tecnologias sob o aporte teórico da Modelagem, buscaram propiciar nos estudantes a descoberta de novos conhecimentos matemáticos e extramatemáticos, bem como fomentar uma ampla formação cidadã e acadêmica. Pois, enfatizamos como ponto de partida situações-problema que, podem estar vinculadas à realidade dos estudantes, sendo algo que já tenham experienciado, ou ouvido falar previamente sobre o “Brincar com Petecas” e/ou “Lançar dardos Magnéticos”.

Além disso, ambas as atividades “Brincando com Peteca” e “Lançando Dardos Magnéticos” se enquadram no segundo momento de Almeida, Silva e Vertuan (2021), ou seja, os estudantes partem de uma situação-problema previamente apresentada pelo professor que é acompanhada de um conjunto de informações. Os estudantes, organizados em pequenos grupos, formulam as hipóteses para dedução do modelo matemático e, posteriormente, procedem à validação desse modelo.

Portanto, uma abordagem com base na pesquisa qualitativa interpretativa, poderá proporcionar a identificação de desafios, possibilidades, limitações e impactos nas atividades experimentais com Tecnologias Digitais nas fases da Modelagem Matemática, contribuindo tanto para o aprimoramento do ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos e extramatemáticos em sala de aula, na Educação Básica em particular no ensino médio, bem como para o pensamento investigativo, reflexivo, colaborativo e computacional entre os estudantes.

3.3 CENÁRIO DE INVESTIGAÇÃO E CONTEXTO DA PESQUISA

Em 2023, conforme delineado no Projeto Político-Pedagógico (PPP) da escola onde conduzimos a produção de dados, observamos que a instituição contou com 356 estudantes matriculados, além de 33 professores, dos quais 8 são efetivos e estavam em sala de aula,

enquanto 25 eram convocados, com 6 atuando nos itinerários profissionais e 3 desempenhando a função de professores de apoio aos estudantes PCDs.

Conforme descrito no PPP da escola, a disciplina de Matemática desempenha um componente fundamental na formação da sociedade, contribuindo para a construção da formação do futuro cidadão. Com ênfase em projetos no laboratório de Matemática, na elaboração de trabalhos para eventos internos e externos, como feiras e olimpíadas, e na preparação para a OBMEP e o Enem, os planejamentos visam proporcionar meios para a compreensão de ideias com um caráter instrumental amplo, ultrapassando sua dimensão específica de investigação e configurando-se como um espaço de elaboração e compreensão de ideias intrinsecamente relacionadas ao contexto social e cultural.

Para atingir esses objetivos, a escola adota como metodologia o emprego de situações-problema, desafiando os estudantes a pensar, analisar, julgar e decidir pela melhor compreensão. A Modelagem Matemática, nesse sentido, desempenha um papel formativo, auxiliando na estruturação do pensamento e do raciocínio lógico, além de ter uma aplicação prática tanto no cotidiano quanto em outras áreas do conhecimento e nas atividades profissionais.

No que se refere à avaliação, esta ocorre de maneira processual e formativa, integrada em todos os momentos das atividades propostas, com acompanhamento constante do desempenho do estudante. Leva-se em consideração o envolvimento na realização das atividades, permitindo a análise de avanços e dificuldades. A produção de modelos matemáticos proporciona uma revisão reflexiva dos conhecimentos, contribuindo para a compreensão do mundo em que vivem.

A pesquisa envolveu o desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática em duas turmas do 3º ano do ensino médio, compreendendo um conjunto de 44 estudantes (meninos e meninas) com idades entre 17 anos. Segundo a direção escolar, os estudantes do terceiro ano do ensino médio são participativos e colaboram com as atividades e projetos de fora do âmbito escolar, o que nos deixa mais tranquilos para realizar as atividades.

Essas turmas fazem parte de uma Escola Estadual de Educação Integral que oferece o Ensino Médio Regular e o Ensino Médio Integrado Profissional (Curso técnico em Informática). Em média, há 21 estudantes por turma, porém, nos cursos Técnico Integrado a média de estudantes por turma é igual à 23. A escola é localizada no município de Campo Grande-MS.

A pedido do professor/pesquisador em Matemática ao docente responsável pela disciplina, foram concedidos/reservados os espaços extraclasse como Laboratório de Informática, Laboratório de Matemática e a quadra esportiva coberta, além do pátio da escola, para a realização das atividades propostas. O desenvolvimento das atividades de Modelagem Matemática pode ocorrer na sala de aula, bem como em espaços extraclasse conforme os entendimentos de Almeida, Silva e Vertuan (2021).

À vista disso, planejamos desenvolver três atividades com os estudantes, sendo a primeira “Brincando com Petecas”, a segunda “Lançando de Dardos Magnéticos” e a terceira “Jogando Aviões de Papel”. O desenvolvimento dessas atividades foi realizado, utilizando as aulas de Recomposição de Aprendizagem (RA) para disciplina de Matemática, sendo duas aulas semanais nas terças-feiras. Conforme, acordado com a direção, ao exibir as imagens dos estudantes, vamos preservar suas identidades. Para isso, adotamos nomes fictícios e as imagens foram obscurecidas o suficiente para não permitir o reconhecimento dos alunos.

As aulas de RA eram realizadas nos dois primeiros períodos para o 3º ano A, enquanto para o 3º ano B ocorriam nos dois últimos períodos. Devido à união das duas turmas para a realização das atividades, os encontros foram programados todas as terças-feiras, abrangendo os quatro tempos. Além das aulas de RA, os estudantes de ambas as turmas tinham um total de oito aulas semanais de Matemática.

3.4 PLANEJAMENTO DAS ATIVIDADES

O planejamento das atividades foi programado para acontecer em três encontros, pois a direção escolar liberou 12 aulas de 50 minutos, nas manhãs de terças-feiras, sendo que cada encontro seria composto por quatro aulas, conforme disposto no Quadro 9.

Quadro 9 - Planejamento da produção de dados

Encontro/ Data	Atividade	Aula
	- Encontro na sala de aula.	1º tempo
	- Apresentação da proposta aos estudantes.	
	- Deslocamento dos estudantes aos espaços extraclasse (Laboratório de Matemática, Laboratórios de Informática e pátio da escola).	

Primeiro encontro 23/5/2023	- Apresentação com slides e conversa com os estudantes sobre Modelagem Matemática, Experimentação e Tecnologias Digitais.	
	- Apresentação do Programa Tracker e Software GeoGebra	2º tempo
	- Formação de Grupos	
	- Apresentação do primeiro tema (Situação inicial - problemática: Brincando com Peteca)	
	- Interação	3º tempo
	- Matematização	4º tempo
	- Resolução	
Segundo encontro 30/5/2023	- Interpretação de Resultados e Validação	1º tempo
	- Situação final - solução para situação inicial	
	- Apresentação do segundo tema (Situação inicial - problemática: Lançando Dardos Magnéticos)	2º tempo
	- Interação	
	- Matematização	3º tempo
	- Resolução	
	- Interpretação de Resultados e Validação	4º tempo
	- Situação final - solução para situação inicial	
Quarto encontro 6/6/2023	- Apresentação do terceiro tema (Situação inicial - problemática: Lançamento de Aviones de papel)	1º tempo
	- Interação	
	- Matematização	2º tempo
	- Resolução	3º tempo
	- Interpretação de Resultados e Validação	
	- Situação final - solução para situação inicial	4º tempo
	- Encerramento da produção de dados	

Fonte: Autor (2023, negrito nosso)

É relevante salientar que, ao longo da execução das atividades, nos deparamos com algumas interrupções que nos instigaram a refletir sobre ajustes no planejamento inicial. Nesse sentido, na seção 4.2, é apresentado o Quadro 13, no qual detalhamos as modificações realizadas. Nesse processo, empenhamos em manter o alinhamento com os objetivos

pedagógicos, garantindo que, mesmo diante das mudanças, pudéssemos continuar proporcionando uma experiência educacional aos estudantes.

No primeiro encontro, inicialmente, convidamos os estudantes a fazerem grupos de sua afinidade, em que esses grupos deveriam conter quatro, cinco ou seis integrantes, conforme o segundo momento de familiarização apontado por Almeida, Silva e Vertuan (2021). Com seus grupos concluídos, iniciamos a apresentação dos *slides*, no qual discutimos alguns pontos importantes sobre a Modelagem Matemática e as Tecnologias Digitais.

Como parte do planejamento, esclarecemos que realizaríamos filmagens e capturas de imagens durante o desenvolvimento das atividades. No entanto, garantimos que não seriam identificados. Dando sequência, apresentamos aos estudantes tanto o programa Tracker quanto o *software* GeoGebra. Durante o desenvolvimento das atividades de Modelagem orientamos os estudantes quanto ao uso desses dois *softwares*, que consideramos fundamentais para validar alguns objetos matemáticos, bem como suas propriedades, características e definições.

A apresentação do programa Tracker e do *software* GeoGebra teve como objetivo proporcionar um nivelamento dos conhecimentos dos estudantes em relação ao uso desses recursos tecnológicos. A utilização das Tecnologias Digitais não é comum na Educação Básica (Oliveira; Melo; Franco, 2020), assim, acreditamos essencial que os estudantes tenham a oportunidade de experimentar e manipular as propriedades e características de objetos matemáticos estudados por eles, na sala de aula.

Ao possibilitar o nivelamento o domínio dessas ferramentas digitais aos estudantes, buscamos proporcionar um ambiente mais equitativo, no qual todos os alunos pudessem vivenciar a oportunidade de explorar as potencialidades desses recursos tecnológicos de maneira mais consistente, bem como refletir sobre os desafios que as Tecnologias poderiam ocasionar.

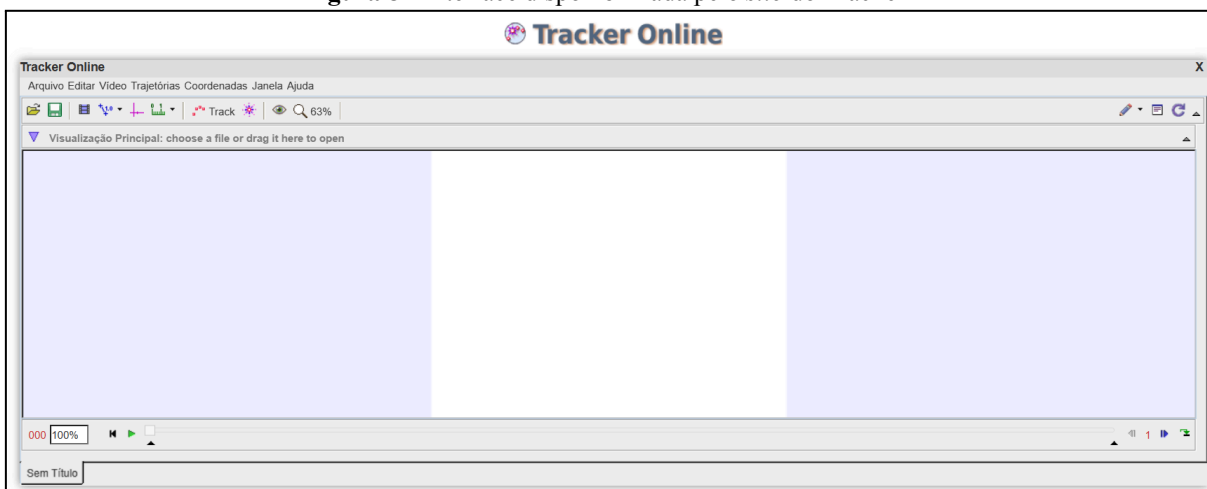
Logo, visamos proporcionar a compreensão dos conteúdos matemáticos utilizando o Tracker e GeoGebra, promovendo a autonomia e a colaboração no processo de aprendizagem por meio da Experimentação com Tecnologias, além de preparar os estudantes para enfrentar os desafios propostos durante as atividades de Modelagem.

Em relação ao programa Tracker, esta é uma ferramenta gratuita de análise e modelagem de vídeo construída no *framework Java Open Source Physics* (OSP) com código aberto (Tracker, 2023), ou seja, o Tracker é um *software* livre, assim, podemos redistribuí-lo

e/ou modificá-lo sob os termos da GNU General Public License, Versão 3, tendo mais de 2 milhões de usuários em 26 idiomas até o momento dessa pesquisa.

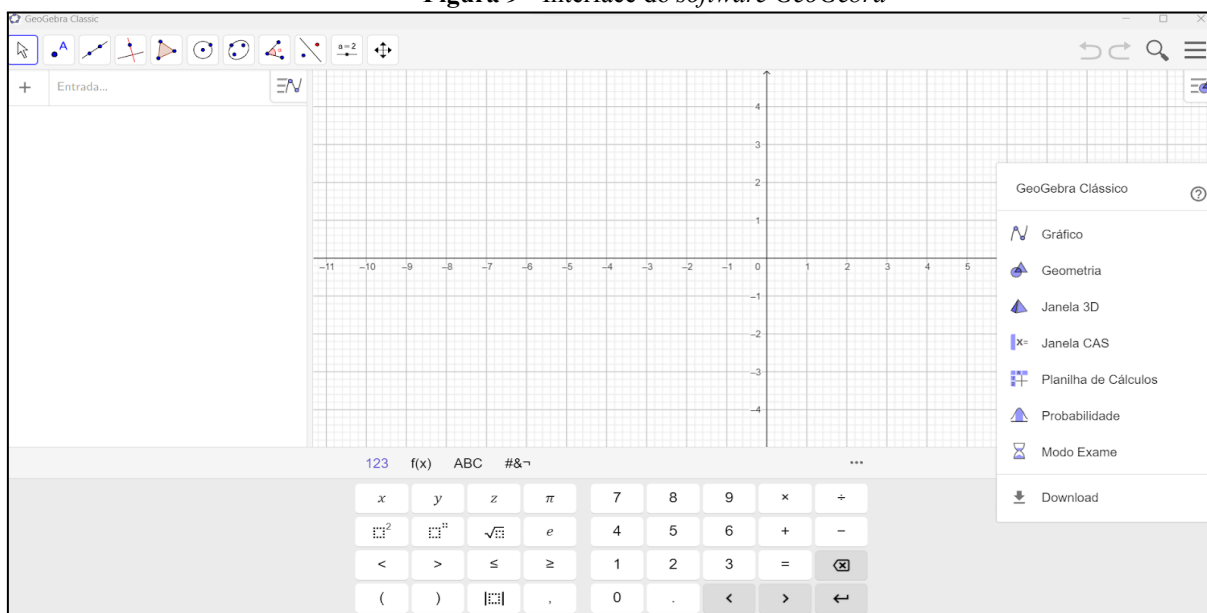
A Figura 8, mostra um exemplo da interface do programa. E a partir dela, iniciamos de forma didática os detalhes das ferramentas do Tracker como importar o vídeo, os ajustes de corte de vídeos, a fita métrica com transferidor, os eixos de coordenadas e o controle de trajetória. Após isso, apresentamos aos estudantes como plotar o gráfico de acordo com as opções de ajuste de curva no programa.

Figura 8 - Interface disponibilizada pelo *site* do Tracker



Fonte: Tracker (2023)

No que diz respeito ao *software* GeoGebra, esta é uma ferramenta digital que pode ser utilizada, em particular, nas aulas de Matemática. Este aplicativo auxilia a compreensão da geometria, álgebra, cálculo, planilhas, gráficos e estatísticas (Hohenwarter, 2021). E ainda, permite explorar esses conceitos matemáticos de forma intuitiva, interativa e visual, facilitando a Experimentação, a compreensão e a aprendizagem da Matemática de forma interdisciplinar. A figura 9, mostra a interface inicial do GeoGebra.

Figura 9 - Interface do *software GeoGebra*

Fonte: Hohenwarter (2021)

O aplicativo nos apresenta uma interface composta por várias janelas, assim, dentro de cada interface estão as ferramentas para identificação das características, definições e propriedades dos objetos matemáticos que se pretende estudar, conforme o Quadro 10.

Quadro 10 - Janelas e ferramentas do GeoGebra

Janela da Álgebra	A janela da álgebra exibe uma representação simbólica dos objetos matemáticos criados no GeoGebra, como pontos, retas, funções, entre outros. É possível a atribuição de valores e a realização de cálculos algébricos relacionados aos objetos.
Janela da Planilha	A janela da planilha oferece uma grade de células, semelhante a uma planilha eletrônica, nas quais se pode inserir dados numéricos, realizar cálculos e realizar operações estatísticas. É uma ferramenta útil para análise de dados e execução de cálculos numéricos.
Janela de Visualização	A janela da visualização exibe uma representação gráfica dos objetos matemáticos criados, como gráficos de funções, desenhos geométricos, entre outros. Essa janela permite tanto a visualização quanto a interação com definições e propriedades de maneira dinâmica e em tempo real.
Barra de Ferramentas	A barra de ferramentas contém uma variedade de ícones e botões que representam as ferramentas disponíveis no GeoGebra. Essas ferramentas incluem recursos para criar pontos, retas, polígonos, funções, além de recursos para transformações geométricas, análise de dados, bem como fornece acesso rápido e conveniente às principais funcionalidades do <i>software</i> .
Barra de Menu	A barra de menu, localizada no topo da interface, contém uma série de opções e menus que permitem acessar recursos adicionais do GeoGebra, como ajustar configurações, importar/exportar arquivos, acessar recursos avançados, como cálculo simbólico, estatísticas, entre outros.

Fonte: Autor (2023)

Dando início à primeira atividade compreendida pela *Situação Inicial "Brincando com Peteca"*, buscamos falar de forma breve como se brincava com as petecas. Assim, os estudantes poderiam jogar em duplas ou até mesmo em grupos maiores, formando círculos ou filas. O jogo poderia ser praticado tanto de forma recreativa, apenas para diversão, quanto de forma competitiva, com o estabelecimento de regras e pontos, isso dependeria das escolhas dos alunos. Falamos que a peteca deveria ser impulsionada para o alto com um movimento de chute ou batida com a mão, e os jogadores teriam que continuar a batê-la sucessivamente, sem deixá-la tocar o chão.

À vista disso, ao iniciar a atividade na fase da *Interação*, utilizamos apresentações de *slides* para fazer indagações sobre a peteca. Estas questões norteadoras, inicialmente, pretende instigar os estudantes a refletirem em seus respectivos grupos sobre diversos aspectos relacionados à peteca. No âmbito dessas discussões, esperamos que os estudantes explorassem curiosidades, tais como a origem da peteca, países que têm tradição no jogo, suas regras e os materiais que podem ser empregados na confecção das petecas. Essas reflexões visou despertar a participação colaborativa dos alunos, podendo promover uma compreensão contextualizada sobre o tema.

Posteriormente, os grupos apresentaram suas ideias, hipóteses e pensamentos com base em suas reflexões sobre a temática abordada (peteca). Após a discussão entre os grupos, disponibilizamos, além das considerações e conjecturas de cada grupo, o *site* oficial da Confederação Brasileira de Peteca (CBP)⁸, o qual continham informações valiosas para que os estudantes pudessem adquirir conhecimentos extramatemáticos.

Nessa fase, para a Experimentação com Tecnologia, propusemos que os estudantes acessassem a plataforma *online* Canva. A escolha do Canva fundamenta-se em sua interface intuitiva e na facilidade de colaboração em tempo real, o que permitiria aos estudantes contribuição simultânea para a criação de infográficos. Além disso, a projeção em tempo real possibilitou que todos os estudantes acompanhassem, de maneira imediata, as interações e contribuições de seus colegas, promovendo um ambiente participativo, estimulando a troca de ideias. Para finalizar, realizamos um novo debate entre os estudantes após o uso das Tecnologias Digitais.

⁸ Site oficial da Confederação Brasileira de Peteca: <https://cbpeteca.org.br/historia-da-peteca/>. Acesso em: 1 jul. 2023.

Os estudantes com seus respectivos grupos foram convidados a brincar de peteca no pátio da escola e quadra esportiva, local esse que foi devidamente determinado pelo professor responsável pela turma. Receberam, informações para poderem gravar os vídeos com seus próprios celulares, bem como captarem imagens se for preciso.

Seguindo para a fase de *Matematização*, é importante ressaltar que esta fase merece muita atenção do professor/pesquisador, pois é possível surgir muitos questionamentos e dúvidas dos estudantes em relação à utilização das Tecnologias Digitais (programa Tracker e o *software* GeoGebra). Embora, no início, tenha sido realizado uma apresentação desses recursos tecnológicos, pode ser que os estudantes tivessem dificuldades para manipular e experimentar os mesmos.

A Experimentação com Tecnologia, nessa fase, é majoritariamente, com a interface, janelas dentro dos *softwares* dinâmicos. Fizemos indagações por meio da mediação, para que os estudantes chegassem às *definições de variáveis* e a um possível *modelo matemático*. Além disso, questionamos os estudantes sobre os conteúdos matemáticos que surgiram nessa fase.

Na fase de *Resolução*, oportunizamos os estudantes a realizarem a Experimentação com Tecnologias por meio do *software* GeoGebra, incentivando os grupos a chegarem em um modelo matemático com a finalidade de descrever a *situação-problema*, bem como responder à *definição do problema*. Incentivamos, que eles fizessem os cálculos dos objetos matemáticos encontrados manualmente, e após isso mostramos no GeoGebra como eles poderiam encontrar os mesmos resultados de forma rápida, com melhor visualização a partir dos gráficos, e mostramos como eles poderiam fazer simulações em tempo real modificando os dados se necessário.

No segundo encontro, damos início à fase da *Interpretação de Resultados e Validação*, apresentamos um método de validação de dados fornecidos do fenômeno estudado com os dados obtidos por meio do modelo matemático. Ou seja, apresentamos de forma superficial um conteúdo de nível superior, denominado Erros Numéricos - com ênfase no erro absoluto e no erro relativo. Este método consiste em fazer a diferença entre os dados do fenômeno em estudo e os dados do modelo, e esse resultado deve ser dividido pelos dados fornecidos pelo fenômeno e após isso deve-se multiplicá-lo por 100, para dar o resultado em porcentagem. Para exemplificar, apresentamos a Figura 10.

Figura 10 - Fórmula do Erro Numérico

ERRO
 ERRO ABSOLUTO

$$E_A = \Delta = |A - a|$$

 A : Valor exato.
 a : Valor aproximado.
 ERRO RELATIVO

$$E_R = \delta = \frac{E_A}{A} \times 100$$

Fonte: (cf. Matemática Rapidola..., 2023)

Embora seja um conteúdo do ensino superior, esse método proporcionou aos estudantes um contato com outros conteúdos não programados para aquele nível de ensino, sendo esta uma característica das atividades de Modelagem Matemática (Rosa, 2009, 2013). Posteriormente, propusemos que os estudantes apresentassem seus modelos matemáticos, validando como chegou nos resultados, observando quais características, definições e propriedades foram utilizadas no decorrer do processo da atividade, até chegar à *Situação Final* com seu modelo validado.

Dando início à segunda atividade compreendida pela *Situação Inicial* "**Lançando Dardos Magnéticos**", buscamos falar de forma breve o funcionamento do jogo. Neste jogo, em vez de utilizar dardos pontiagudos, são usados dardos com pontas magnéticas que aderem a uma superfície metálica, geralmente um alvo circular. O objetivo do jogo é similar ao do dardo convencional: os estudantes lançavam os dardos em direção ao alvo e tentavam acertar os pontos mais altos possíveis.

Logo ao iniciar a fase da *Interação*. Seguindo a apresentação de *slides*, fizemos questionamentos acerca do jogo de dardos magnéticos, a saber: Como e onde surgiu os dardos magnéticos? Quem já lançou dardos magnéticos? Quais curiosidades podemos encontrar sobre o jogo de dardos magnéticos? Os dardos magnéticos, é um jogo profissional ou uma brincadeira lúdica?

Com o intuito de promover uma abordagem educativa em que os estudantes pudessem, simultaneamente, se divertir e estudar desenvolvemos um cenário de questões pensadas estrategicamente para despertar o interesse dos estudantes no jogo de dardos magnéticos. Buscamos criar um ambiente educacional que não apenas introduzisse a dinâmica do jogo, mas também incentivasse a interação entre os participantes, promovendo a colaboração entre os grupos formados.

Após os estudantes, em seus respectivos grupos, realizarem reflexões, levantarem hipóteses e criarem conjecturas sobre o conjunto de questões apresentado a eles, incentivamos cada grupo a compartilhar seus resultados. Buscamos promover a interação entre todos os integrantes de cada grupo e os demais participantes da sala de aula.

Entendemos que cada grupo traz consigo uma perspectiva única e um conjunto de habilidades, podendo tornar a colaboração um elemento essencial para a aprendizagem de todos. O debate entre os grupos é fundamental, pois propicia a troca de conhecimento, bem como promove um ambiente onde a diversidade de opiniões é valorizada.

Seguindo ainda na fase da *Interação* dessa segunda atividade “Lançando Dardos Magnéticos”, convidamos os alunos a realizar a Experimentação com Tecnologias por meio da plataforma *online* Mentimeter. Esta plataforma, destaca-se pela capacidade de ser projetada, proporcionando uma experiência visual para a audiência⁹. Assim como na plataforma Canva, no Mentimeter, os estudantes teve a oportunidade de ver suas respostas em tempo real, podendo promover a interatividade entre todos os grupos durante apresentações e atividades colaborativas.

Incentivamos que os estudantes discutissem sobre alguns *sites* onde poderiam obter informações sobre o jogo de dardos magnéticos¹⁰, e posteriormente fornecemos o *link* da plataforma *online* Mentimeter¹¹. Na interação nessa plataforma, elaboramos diversos cenários de perguntas, exigindo respostas individuais, com cada integrante possuindo seu próprio acesso. No entanto, estimulamos a promoção de debates entre eles para discutirem as respostas que planejaram apresentar. Ao final, os estudantes numa roda de conversa,

⁹ O termo "audiência" refere-se às pessoas que estão participando da apresentação ou atividade na plataforma. Neste caso, são os estudantes que interagem com a apresentação projetada no Mentimeter em tempo real.

¹⁰ Primeiro *site*, disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Dardos>. Acesso em 30 mai. 2023. Segundo *site*, disponível em: <https://psycatgames.com/pt/magazine/party-games/darts/>. Acesso em: 30 mai. 2023. Terceiro *site*, disponível em: <https://blog.jogajunto.net/dardos-conheca-o-popular-esporte-de-precisao/>. Acesso em: 30 mai. 2023.

¹¹ *Link* disponível em: <https://www.menti.com/>. Acesso em: 30 mai. 2023.

debateriam as respostas entre todos os integrantes, visando maior fixação do conteúdos extramatemáticos aprendidos.

Encerrando a fase de *Interação*, convidamos os estudantes a gravarem vídeos lançando os dardos magnéticos com seus respectivos grupos, assim como a captarem imagens do jogo. Tanto a gravação quanto as imagens seriam produzidas com base na orientação do professor/pesquisador. Disponibilizamos dois espaços para essa atividade: o pátio da escola, em uma área onde não estivesse ocorrendo aulas, e a quadra esportiva da escola.

Na fase de *Matematização*, embora os estudantes já tenham experiência anterior com o Tracker e o GeoGebra na primeira atividade, e essas Tecnologias estejam recentes em suas memórias, é possível surgirem dúvidas específicas relacionadas aos conteúdos matemáticos abordados na atividade de dardos magnéticos. Diante disso, ficamos disponíveis para esclarecer quaisquer questionamentos que pudessem surgir durante a execução da atividade, garantindo um entendimento mais aprofundado dos conteúdos envolvidos tanto matemáticos quanto extramatemáticos.

Nessa etapa, a Experimentação com Tecnologia se concentra principalmente na interação com a interface, janelas e funcionalidades dos *softwares* dinâmicos Tracker e GeoGebra. Por meio da mediação, apresentamos questionamentos que orientaram os estudantes na definição de variáveis e na elaboração de um possível modelo matemático. Ademais, promovemos discussões sobre os conteúdos matemáticos que emergiram ao longo dessa fase.

Adentrando na fase de *Resolução*, propiciamos aos estudantes a continuidade da Experimentação com Tecnologias, focalizando no uso do *software* GeoGebra. Encorajamos os grupos a validar os modelos matemáticos desenvolvidos na fase anterior (*Matematização*), comparando as previsões geradas pelos modelos no GeoGebra com os resultados reais obtidos nos vídeos do lançamento dos dardos magnéticos, no Tracker.

Durante esse processo, os estudantes puderam ajustar seus modelos, aprimoraram a precisão da trajetória dos dardos magnéticos. Ressaltamos a importância desse momento para consolidar o entendimento dos conceitos matemáticos aplicados no modelo da trajetória, reforçando a interação entre a teoria e a prática do objeto matemáticos em estudo.

Finalizando, na fase da *Interpretação de Resultados e Validação*, seguimos os mesmos padrões de execução conforme apresentado na primeira atividade dessa pesquisa, a fim de validar o modelo matemático por meio dos dados fornecidos do fenômeno, ou seja, da *definição do problema*. Assim, utilizamos os Erros Numéricos - com ênfase no erro absoluto e

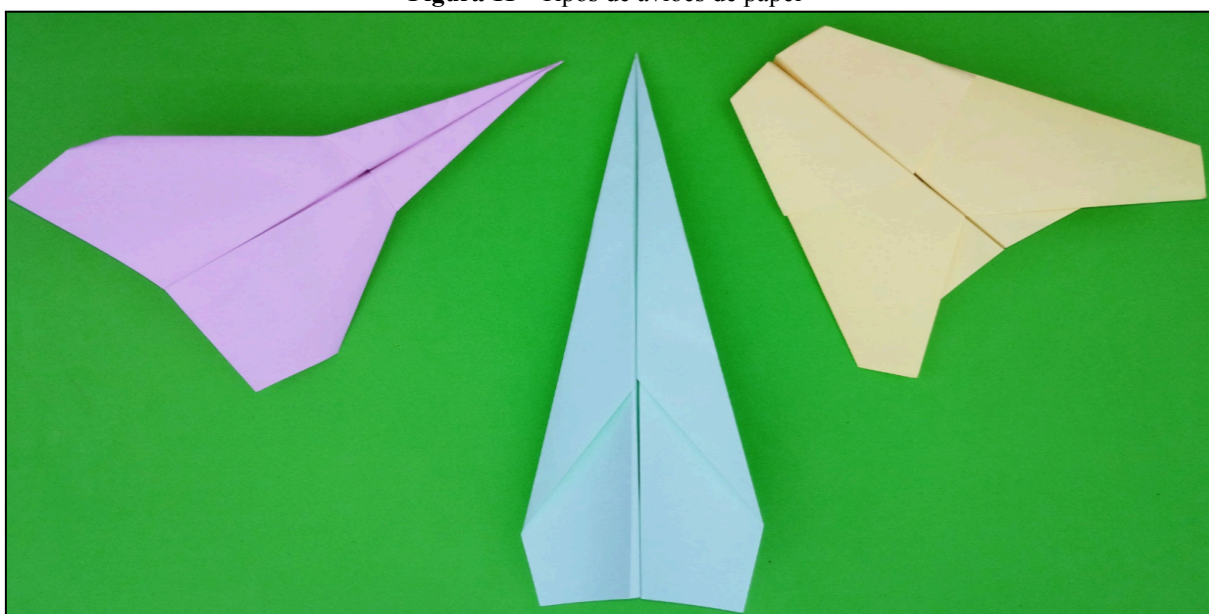
no erro relativo. Essa abordagem implica subtrair os dados observados do fenômeno em análise pelos dados do modelo, dividindo o resultado pelos dados fornecidos pelo fenômeno. Posteriormente, multiplica-se esse resultado por 100, para expressar o valor em porcentagem.

Na *Situação Final*, incentivamos os grupos a apresentarem suas respostas, buscando observar como cada um chegou à solução final.

Dando início à terceira e última atividade compreendida pela *Situação Inicial* "**Jogando Aviões de Papel**", buscamos abordar de maneira sucinta esta brincadeira. Explicamos que para lançar os aviões de papel, os estudantes deveriam segurar o avião pela parte traseira e lançar com um movimento rápido e preciso do braço. O objetivo era lançar o avião de forma que ele voasse o mais longe e o mais alto possível.

Para a atividade, iniciamos com uma imagem de três tipos de aviões confeccionado pelo professor/pesquisador, conforme a Figura 11. Queríamos com essa figura motivar os estudantes a confeccionar seus próprios aviões, assim, cada grupo seria convidado a fazer seus próprios aviões e testá-los.

Figura 11 - Tipos de aviões de papel



Fonte: Autor (2023)

Com início a fase de *Integração*, damos continuidade a apresentação dos *slides*, assim, buscamos envolver os estudantes com alguns questionamentos relevantes sobre a temática, a saber: Como e onde surgiu o primeiro avião? Quem construiu o primeiro avião e quem conseguiu fazer o primeiro avião decolar? Há competições de aviões de papel? Quem já

brinco com aviões de papel? Quais outros materiais recicláveis podemos confeccionar um avião? Qual modelo de avião de papel pode ir mais longe?

Após os debates realizados em cada grupo, convidamos os integrantes a formarem uma roda de conversa. Nesse espaço, cada grupo teve a oportunidade de compartilhar suas reflexões acerca dos questionamentos propostos. Em seguida, os incentivamos a utilizar as Tecnologias Digitais (*sites*) de sua escolha para buscar as informações necessárias, contando com o auxílio dos recursos tecnológicos que considerassem pertinentes a atividade.

Ademais, durante os debates intergrupais, motivamos os estudantes a escolherem uma plataforma, seja ela *online* ou não, na qual poderiam colaborar no processo da atividade. Desta maneira, o resultado poderia ser apresentado e visualizado por todos, assim, utilizamos o projetor para facilitar a compreensão coletiva e estimular o debate entre os grupos.

Na sequencia, os estudantes foram convidados a confeccionar seus próprios aviões de papel, e posteriormente irem para a quadra esportiva da escola para realizarem as filmagens e captar as imagens necessárias para dar continuidade a atividade.

Na fase de *Matematização*, os estudantes tiveram a oportunidade de utilizar o programa Tracker e o *software* GeoGebra para conduzirem a Experimentação com Tecnologias. Outros *softwares* dinâmicos também poderiam ser escolhidos por eles, desde que fossem pertinentes à atividade. Entretanto, damos total liberdade aos estudantes para escolherem o objeto matemático que desejavam explorar, baseando-se na trajetória dos aviões por eles filmados.

Dessa forma, os incentivamos eles refletir sobre quais conteúdos matemáticos, além das funções Afim e funções polinomiais do segundo grau, poderiam ser observados nesta atividade. Na fase de *Resolução*, instigamos os estudantes a explorarem diversas Tecnologias Digitais em busca de *softwares* dinâmicos adicionais capazes de solucionar a *definição do problema*. Essa definição seria elaborada com base nas hipóteses e conjecturas levantadas pelos estudantes durante a fase de Interação e *Matematização*, bem como por meio da transcrição da linguagem da realidade para a linguagem Matemática.

Na etapa de *Interpretação de Resultados e Validação*, ficamos atentos para identificar quais objetos matemáticos poderíamos sugerir aos estudantes para a validação adequada da *situação-problema*. Nessa última atividade, os estudantes teriam maior autonomia tanto na escolha das Tecnologias Digitais quanto nos conteúdos que desejassem explorar a partir da *situação-problema*. Na *Situação Final*, propusemos que cada grupo apresentassem suas conjecturas e compartilhassem os caminhos percorridos.

3.5 PROCEDIMENTOS DE ANÁLISE DE DADOS

Para a produção de dados, foram utilizados diferentes instrumentos, a saber:

- Diversos espaços educacionais: Trabalhar com os estudantes em diversos ambientes educacionais contribuiu para a prática e experimentação escolar, viabilizando a produção de dados empíricos, observações e análises críticas dos alunos.
- Entrevistas individuais e em grupo: As entrevistas individuais permitiram explorar experiências pessoais dos estudantes em sua singularidade, enquanto nas entrevistas em grupo foram observadas dinâmicas sociais e construções coletivas que puderam contribuir para que os alunos aprendessem a trabalhar em equipe.
- Participação colaborativa em plataformas online: Os estudantes foram envolvidos em ambientes virtuais, pois compreendíamos que as plataformas online podiam oportunizar a coleta de dados em tempo real, bem como promover interações dinâmicas, colaborativas e inclusivas.
- Análise de materiais produzidos pelos estudantes: As anotações dos estudantes foram examinadas, pois entendíamos que tínhamos acesso a uma fonte rica de informações que refletia diretamente no processo de construção de conhecimentos matemáticos e extramatemáticos dos alunos.
- Anotações realizadas pelo professor/pesquisador: As anotações realizadas durante as atividades forneceram uma perspectiva reflexiva e interpretativa sobre as interações e observações no campo de pesquisa.

Além disso, os estudantes foram convidados a responder em grupo um questionário final (relatório), apresentado no APÊNDICE 1, do qual poderia potencializar nossas considerações finais sobre as temáticas estudadas. Assim, os alunos utilizaram os computadores com a *internet* cedida pela escola. Porém, os alunos que responderam o questionário em seus celulares, utilizaram a própria *internet* (dados móveis), ou usufruíram dos dados móveis do professor/pesquisador. Foi destacado que as respostas seriam em grupos, pois acreditávamos que poderiam ser melhor formuladas entre debates e reflexões.

Com o intuito de atingir o objetivo geral da pesquisa, foram inicialmente construídas três categorias *a priori*, as quais foram definidas a partir do propósito fundamental da investigação desta pesquisa.

A categoria C1: "Em relação às Tecnologias Digitais" foi concebida para atender às demandas de incorporar as Tecnologias Digitais no ensino básico, visando promover acessibilidade e inclusão. Isso se torna especialmente relevante diante da realidade em que muitos estudantes não dispõem de computadores e dispositivos móveis em suas residências. Dessa forma, almejamos criar oportunidades para que os estudantes integrem conteúdos específicos da Matemática e outras áreas do conhecimento, as Tecnologias e sua própria realidade.

Nesta categoria, almejamos também evidenciar como os estudantes conduziram as Experimentações com as Tecnologias sugeridas, tais como o programa Tracker, *software* GeoGebra, Canva, Mentimeter e *sites*, durante as atividades de Modelagem Matemática, bem como aquelas que poderão emergir durante a terceira atividade. Como mencionado anteriormente, compreendemos o conceito de Experimentação com Tecnologias segundo a abordagem de Borba e Penteado (2010).

Os autores destacam que ao permitir que os estudantes visualizem as representações de objetos matemáticos, manipulem, realizem movimentos de translação, investiguem, colaborem em equipe, dialoguem sobre possíveis hipóteses e criem conjecturas através da transição da linguagem natural para a linguagem Matemática, esses estudantes têm a oportunidade de enriquecer sua experiência de aprendizagem sobre o fenômeno em estudo.

Além disso, a elaboração dessa categoria visa não apenas observar as diversas Tecnologias que podem surgir durante as fases da Modelagem, mas também propiciar o contato diretamente dos estudantes com essas Tecnologias, possibilitando a troca de informações que os auxiliem de maneira efetiva nas atividades e os preparem para os desafios futuros relacionados as transformações tecnológicas presentes na sociedade, sendo este outro enfoque da Experimentação com Tecnologias defendidos por Borba e Penteado (2010).

A categoria C2: "Em relação aos conteúdos" aborda os objetos matemáticos e extramatemáticos que podem emergir durante o desenvolvimento das atividades nas fases de Modelagem. O objetivo desta categoria foi identificar os diferentes conteúdos entrelaçados nas atividades pelos estudantes, uma vez que pode existir uma variedade de conhecimento matemático ou extramatemático para solucionar uma determinada situação-problema. Neste contexto, os estudantes poderiam se deparar com conteúdos que abrangem tanto o seu nível de ensino, consoante a estrutura curricular, quanto tópicos de outros níveis educacionais.

Durante a fase de *Interação*, é comum que os estudantes realizem reflexões sobre conhecimentos extramatemáticos, pois estão iniciando o contato com o fenômeno em estudo.

Nessa etapa, buscarão realizar reflexões tanto individualmente quanto em equipe, na tentativa de formular hipóteses e criar conjecturas que os situem diante da situação-problema. Desta maneira, puderam ampliar sua compreensão sobre a área de conhecimento sendo Matemática ou extramatemática, explorando diversos aspectos que acharam ser relevantes para a resolução do problema em questão, chegando a *definição do problema* ou seja, a questão problemática.

Na fase de *Matematização*, os estudantes teve a possibilidade de revisitar os mesmos aspectos da fase anterior; contudo, é comum que, nessa fase, ocorra a transcrição da linguagem natural para a linguagem Matemática. Frequentemente, aqui, os estudantes estabelecem hipóteses diversas e criam variáveis para atender ao modelo matemático em construção. Desta forma, os conteúdos matemáticos, bem como suas propriedades, definições, axiomas e características desempenham um papel conclusivo para a finalização do modelo.

Nas últimas duas fases da Modelagem, a saber: *Resolução* e *Interpretação de Resultados e Validação*, tanto os conteúdos matemáticos quanto os extramatemáticos estão mais consolidados nos modelos matemáticos construídos pelos estudantes. Nessa fase, juntamente com o professor, os estudantes realizam uma verificação do modelo, determinando se este será eficaz para abordar a problemática em questão. Caso seja necessário, os alunos têm a oportunidade de revisar e analisar suas hipóteses, conjecturas e variáveis na tentativa de validar seu modelo matemático.

A categoria C3: "Em relação à Experiencia" teve como propósito analisar como os estudantes conduziram suas experiências em relação à integração das Tecnologias nas fases da Modelagem por meio da Experimentação. Ao explorar essas estratégias pedagógicas, buscamos compreender de que forma os estudantes interagem, aprendem e assimilam conteúdos matemáticos e extramatemáticos.

Logo, mediante às observações e análises, esperamos identificar como a Modelagem Matemática e as Tecnologias Digitais influenciam a organização e construção de conhecimentos dos estudantes, bem como a capacidade de usar esses conhecimentos nas situações-problema de cada atividade proposta nesta pesquisa. Portanto, abordamos algumas características do uso dessas estratégias em comparação com as aulas expositivas, bem como as distinções entre as próprias Tecnologias utilizadas.

Na Modelagem Matemática, analisamos a participação do estudantes quanto às fases: *Interação*, *Matematização*, *Resolução* e, *Interpretação de Resultados e Validação*. Observando em qual das fases os alunos tiveram mais dificuldade e/ou facilidade, destacar os

pontos que entendemos fundamentais para a conclusão da Modelagem como tendência da Educação Matemática.

No que tange a Experimentação com Tecnologias nas atividade de Modelagem, observamos aspectos como:

- A interatividade e o engajamento dos estudantes durante as atividades;
- Observar a proficiência dos alunos no manuseio das ferramentas digitais específicas utilizadas nas Experimentações, como *softwares* dinâmicos, plataformas *online* digitais e *sites*, entre outros;
- Verificar a capacidade dos estudantes em explorar criativamente as possibilidades oferecidas pelas Tecnologias Digitais durante as atividade de Modelagem;
- Analisar como os alunos utilizam as Tecnologias para solucionar problemas práticos durante as Experimentações, observando se estes aplicam conceitos aprendidos nas disciplinas em diferentes áreas;
- Verificar a capacidade dos alunos em utilizar as Tecnologias para produzir, analisar e interpretar dados resultantes das Experimentações, refletindo sobre os conceitos matemáticos e extramatemáticos;
- Observar o trabalho colaborativo e reflexivo entre cada integrante em seu respectivo grupo e entre todos os grupos durantes as rodas de conversas;
- Verificar como as Tecnologias Digitais são integradas no desenvolvimento da Modelagem Matemática, observando com acontece a organização e construção de conhecimentos dos estudantes.

CAPÍTULO 4

DESCRIÇÃO E ANÁLISE DE DADOS

4 PRIMEIRA PARTE: TRABALHANDO AS TECNOLOGIAS E A ATIVIDADE DA PETECA

Neste capítulo, procederemos com a descrição e análise do desenvolvimento da primeira parte dos encontros com os estudantes, bem como a primeira atividade de Modelagem, seguindo as fases da Modelagem Matemática de acordo com Almeida, Silva e Vertuan (2021).

Para tal, adotamos os encaminhamentos propostos pelos autores, que incluem: i) A Modelagem Matemática inicia-se com uma Situação Inicial (problemática) e percorre uma série de procedimentos, representados pelas fases de Interação, Matematização, Resolução, Interpretação de Resultados e Validação, culminando na Situação Final (solução para a situação inicial); ii) Dentre as três situações particulares exploradas no desenvolvimento das atividades de Modelagem na seção 2.3, optamos por abordar a situação b) em horários e espaços extraclasse; e iii) No que tange aos momentos de familiarização com a Modelagem, nos concentramos no segundo momento, conforme também delineado na seção 2.3.

Destacamos alguns pontos relevantes que conduziram à adaptação do nosso planejamento inicial, conforme exposto no capítulo anterior. Simultaneamente à análise e interpretação dos dados, nos deparamos com as categorias *a priori*, as quais foram embasadas nos pressupostos teóricos desta pesquisa.

Seguindo a perspectiva de Moraes (2003) e Moraes e Galiuzzi (2011), nas pesquisas, consideramos as três categorias *a priori*, definidas "antes da análise". Conforme os autores, cada categoria representa um conjunto de unidades de análise organizadas com base em algum aspecto de semelhança. É relevante ressaltar que as categorias são construções linguísticas e não possuem limites precisos, enfatizando a importância de uma descrição cuidadosa para apresentar as opções e interpretações do pesquisador aos leitores e outros interlocutores.

4.1 PRIMEIRO ENCONTRO

Em uma terça-feira, no dia 23/5/2023, por volta das 07h45min, ocorreu o primeiro encontro com os estudantes das duas turmas do 3º ano do ensino médio na sala de aula.

Seguindo o combinado com o professor responsável por ambas as turmas, os estudantes foram conduzidos ao Laboratório de Matemática.

Ao chegar no Laboratório de Matemática, com a colaboração do professor responsável pela turma e da profissional técnica de informática, começamos a organizar os equipamentos, como o projetor, para dar início à apresentação de *slides* aos estudantes. Neste momento, surgiu o primeiro contratempo, pois o projetor possuía apenas entrada VGA¹², e o *notebook* do professor/pesquisador não dispunha dessa entrada. Atualmente, é perceptível que muitos dos novos modelos de *notebooks* lançados no mercado não vêm equipados com a tradicional entrada VGA.

Diante dessa disparidade entre os dispositivos modernos e os recursos da sala de aula, tentamos explorar alternativas, como adaptador e conexão HDMI¹³ x VGA, para superar essas limitações e proporcionar um ambiente educacional adequado para os estudantes. No entanto, não obtivemos sucesso, pois o adaptador de conexão HDMI (entrada), emprestado por um dos professores da escola, também não reconheceu o conector HDMI (saída) do *notebook* do professor/pesquisador.

Conforme Trainotti (2019), o mau funcionamento dos computadores nas escolas da Educação Básica tem se tornado uma preocupação recorrente. Muitos computadores nas escolas enfrentam problemas como lentidão, travamentos frequentes e falhas no sistema operacional, afetando diretamente o processo de ensino e aprendizagem dos estudantes.

Diante da falta de sucesso ao longo do tempo, decidimos, em conjunto com o professor da sala e a técnica de informática, levar os estudantes para o Laboratório de Informática, pois, segundo eles, lá havia um projetor fixo que funcionaria com o cabo Universal Serial Bus (USB). No entanto, ao chegar no Laboratório de Informática, constatamos um segundo contratempo: foram necessários três computadores para que a técnica em informática conseguisse conectar o projetor. Houve também a necessidade de trocar teclados e *mouses* que não funcionavam naquele momento.

Esses casos de mau funcionamento de equipamentos nos Laboratórios de Informática podem ser constatados na literatura, como evidenciam Rodrigues e Costa (2023, p. 10), ao afirmarem que “há um grande número de laboratórios subutilizados ou funcionando parcialmente devido ao grande número de computadores quebrados e sem acesso à *internet*”.

¹² VGA significa “*Video Graphics Array*”, que numa tradução livre seria algo como “padrão de disposição gráfica para vídeo”.

¹³ HDMI significa “*High-Definition Multimedia Interface*” que numa tradução livre seria algo como “Interface Múltipla de Alta Definição”.

Após esses contratempos, iniciamos nossa apresentação aos estudantes e explicamos que realizaríamos filmagens e captaríamos imagens deles durante as atividades. Contudo, deixamos claro que suas imagens seriam preservadas. Com a concordância de todos os estudantes, prosseguimos com as apresentações, abordando de forma sucinta alguns pontos sobre a Modelagem Matemática como tendência da Educação Matemática.

Durante a apresentação, questionamos se eles já tinham tido contato com a Modelagem Matemática e o que achavam dessa proposta. Em nossas anotações, observamos que eles não tiveram contato direto com tal estratégia, mas mostraram interesse em experimentar, por ser algo diferente e inovador.

Quando abordamos o tema Modelagem, os estudantes participaram fazendo perguntas como: *“Por que todos os professores não usam esses métodos para ensinar?”; “Quando que surgiu a Modelagem?”; “Que tipo de realidade nós vamos estudar com o senhor professor?”*. Essas são algumas das várias perguntas que embasaram os debates realizados com os estudantes sobre a Modelagem. Além disso, falamos brevemente sobre o ambiente/cenário em que desenvolveríamos as atividades de Modelagem, nossa ideia era plantar a semente da curiosidade, deixá-los pensando sobre o assunto.

Ao discutirmos sobre as Tecnologias e Tecnologias Digitais, percebemos que os estudantes se mostraram mais atentos por se tratar de um assunto mais próximos deles. Eles mencionaram que usavam o Laboratório de Informática da escola para pesquisas de todas as disciplinas, sendo este o único meio de aprendizagem de conteúdos por meio das Tecnologias. Ao questionarmos sobre o significado de Tecnologias, responderam que são os *“celulares, computadores, notebooks, entre outros dispositivos eletrônicos”*.

Quando perguntamos sobre Tecnologias Digitais, muitos afirmaram que *“não há diferença das Tecnologias”*, mas não souberam explicar; outros apontaram que seriam os *“softwares educacionais, internet, e sistemas eletrônicos”*, levando-nos a refletir que já haviam pesquisado sobre a temática em outras ocasiões. Embora sejam termos próximos, esses são difíceis de explicar, mesmo por pesquisadores da área.

Perguntamos se acreditavam que as Tecnologias poderiam potencializar seus conhecimentos matemáticos, e a maioria respondeu afirmativamente, pois sabiam da existência de *softwares* e programas que auxiliam no processo de ensino e aprendizagem. Ao questionarmos se conheciam algum aplicativo que ajudava na aprendizagem de conceitos matemáticos, mencionaram o *Photomath, Maple Calculator* e *Geometria Calculadora*.

Quando indagamos se conheciam o programa Tracker e a maioria nunca tinha ouvido falar, iniciamos uma breve explicação sobre ele. Falamos que usaríamos esse recurso tecnológico nas atividades propostas, explicando de forma compreensível como essa Tecnologia Digital poderia contribuir para construir seus próprios conhecimentos matemáticos e até mesmo extramatemáticos. Mostramos o passo a passo da utilização desse programa, desde a importação de um vídeo até o gráfico plotado pelo Tracker, e ainda elaboramos o Quadro 11, para consulta dos estudantes, caso necessário.

Quadro 11 - Detalhes para elaboração do gráfico plotado pelo programa Tracker

Etapas	Recurso	Ferramenta
1	Vídeo	a) Importar; b) Nome do arquivo; c) Abrir.
2	Ajuste de corte de vídeo	a) Quadro inicial; b) Tamanho do intervalo; c) Quadro final.
3	Fita métrica com transferidor	a) Novo; b) Bastão métrico.
4	Mostrar ou ocultar os eixos de coordenadas	-
5	Mostrar ou ocultar o controle de trajetória	a) Novo; b) Ponto de massa; c) Definir propriedades da massa; d) Nome.
6	Manter a tecla “Shift” pressionada	a) Seguir o ponto de massa, clicando em cima dele.
7	Massa A (t, y)	a) Clicar duas vezes em “Massa A (t, y)”.
8	Abrindo a janela: Ferramenta de Dados	a) Clicar em “Analisar”; b) Escolher o melhor “ajuste de curva”.

Fonte: Autor (2023)

Os estudantes acompanharam atentos a explicação detalhada sobre como manipular o Tracker. Ao final, consideraram o Quadro 11 intuitivo, como expresso por um estudante: "*Que bom esse quadro, professor, ajudará quando formos realizar as atividades*".

Após a obtenção do gráfico pelo programa Tracker, os estudantes foram orientados a extrair os dados fornecidos e transferi-los para o *software* GeoGebra. Essa transferência tinha o objetivo de determinar a função que melhor representaria a curva em análise. Explicamos aos estudantes sobre o GeoGebra, destacando que esta é outra Tecnologia Digital que

usaríamos para embasar nossas atividades de Modelagem. Apesar de ser um *software* mais conhecido, a maioria dos estudantes nunca o tinha utilizado.

Posteriormente, elaboramos o Quadro 12 com a intenção de simplificar esse processo durante a execução das atividades propostas.

Quadro 12 - Detalhes para encontrar a representação da função polinomial de segundo grau

Etapa	Tracker / GeoGebra	Recurso	Ferramenta
1	Tracker	Janela: Ferramenta de Dados	a) Copiar as coordenadas (t, y).
2	GeoGebra	Disposições	a) Janela: Planilha de Cálculos; b) Colar as coordenadas (t, y) e selecioná-las; c) Análise Bivariada; d) Modelo de Regressão: Polinomial; e) Anotar a função polinomial apresentada pelo aplicativo.
3	GeoGebra	Janela: Gráfico	a) Escrever a função polinomial na Janela: Álgebra;

Fonte: Autor (2023)

Os estudantes demonstraram atenção a essa etapa, pois envolvia a integração de duas Tecnologias Digitais. Durante esse momento, observamos que eles conversavam entre si, avaliando positivamente a transição do Tracker para o GeoGebra, inclusive tentando baixar os programas nos computadores da escola.

Além disso, discutiram sobre o uso da planilha, conforme a fala de um estudante: “*Não imaginava que podíamos fazer isso com a planilha, ninguém usa isso mais*”. Outro estudante comentou: “*Nunca usei as planilhas, parece ser fácil, né*”. Então, explicamos aos estudantes que, por meio da planilha eletrônica no *software* GeoGebra, poderíamos visualizar gráficos dos dados produzidos, algo que realizaríamos. Destacamos que na planilha poderíamos alterar os dados em tempo real, o que ajudaria na resolução de nossa *situação-problema*, além de oportunizar a interdisciplinaridade entre os conteúdos de diferentes áreas.

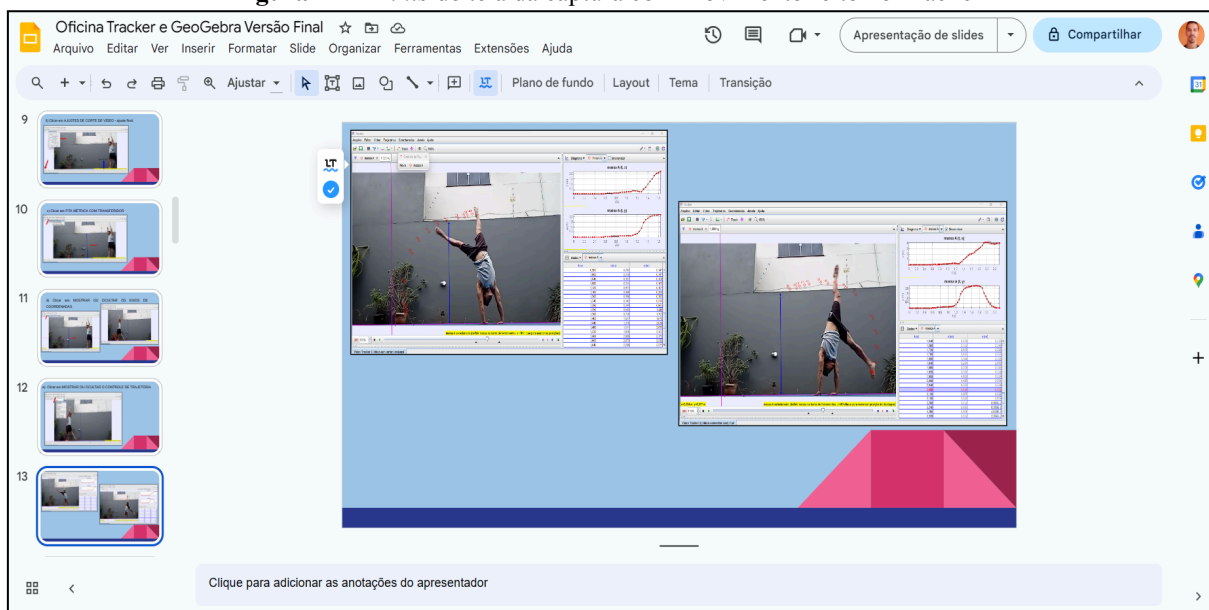
Um dos grupos levantou a questão sobre o significado de "Modelo de Regressão Polinomial", conforme apresentado no *slide* para todos, o que despertou o interesse de outros grupos pelo mesmo tema. Respondemos à indagação explicando o que é esse modelo e destacando sua importância. Salientamos que, embora esse conteúdo fosse desconhecido para

eles, era comum que em atividades de Modelagem Matemática surgissem temas inéditos. Logo, os conteúdos na Modelagem não surgem de forma linear, conforme apresentados nos livros de Matemática (Rosa, 2009, 2013).

Durante esse processo, mostramos aos estudantes como explorar, inicialmente, a interface do software GeoGebra, abrangendo elementos como a janela algébrica, janela de visualização, barras de ferramentas, barras de menu e planilha de cálculo. Nessa exploração, apresentamos as propriedades, conceitos e definições necessários para que eles compreendessem as representações das curvas que poderiam encontrar com os dados iniciais transferidos do programa Tracker para o GeoGebra.

O vídeo para a apresentação dos *slides* referentes ao passo a passo utilizado na explicação dentro do programa Tracker e *software* GeoGebra foi produzido pelo professor/pesquisador, conforme mostra a Figura 12.

Figura 12 - Prints de tela da captura com movimento feito no Tracker



Fonte: Autor (2023)

Os detalhes no movimento, capturados pelo programa Tracker e apresentados na trajetória (pontos vermelhos na Figura 12), instigaram nos estudantes um interesse evidente em explorar as funcionalidades do programa. Rapidamente, despertaram curiosidade e indagaram sobre as atividades planejadas, questionando se teriam a habilidade de reproduzir os movimentos que estavam sendo executados.

Alguns estudantes expressaram o desejo imediato de realizar o *download* do programa nos computadores; contudo, depararam-se com a necessidade de uma senha, conhecimento restrito à técnica responsável. Nesse contexto, assegurei aos alunos que, no próximo encontro, solicitaríamos à profissional que procedesse com a instalação do programa Tracker nos computadores.

A interface do programa Tracker revelou-se intuitiva, e, após as explicações iniciais, os estudantes já manifestaram o desejo de manipulá-la. Nesse sentido, informamos que em breve eles teriam a oportunidade de interagir com o Tracker, utilizando as gravações dos vídeos que eles próprios produziram. Alguns estudantes indagaram: "*Professor, será hoje que iremos mexer nesse aplicativo? ... espero que sim, achei muito interessante e fácil*". Esclarecemos que as atividades seguiriam fases predefinidas, e embora fosse necessário respeitar essa sequência, logo chegaria a oportunidade para explorar os aplicativos. Concluímos essa etapa destacando nossa satisfação ao perceber o entusiasmo evidenciado pelos estudantes.

Após essa introdução inicial, procedemos à apresentação dos conceitos de Modelagem e Tecnologias. Buscando enfatizar o segundo momento de familiarização proposto por Almeida, Silva e Vertuan (2021), solicitamos aos estudantes que formassem pequenos grupos conforme suas afinidades, visando motivá-los a realizar as atividades com colegas próximos em termos de afinidade. Nesse contexto, alinhamo-nos à perspectiva de Araki e Kato (2022, p. 5): "Por se tratar de uma primeira experiência com a Modelagem, os estudantes tiveram a liberdade de formar os próprios grupos, o que poderia facilitar a troca de ideias entre os integrantes".

Como resultado, foram formados oito grupos de estudantes, assim, optamos por selecionar dois para apresentar as análises dos dados produzidos: os grupos A e B, sendo que ambos os grupos continham quatro integrantes.

A escolha do grupo A se fundamenta no fato de que este demonstrou interesse e entusiasmo desde o início até a finalização das atividades, com todos os seus integrantes participando ativamente nas diferentes fases da Modelagem. Composto por estudantes aplicados, o grupo A destacou-se pelo envolvimento efetivo, evidenciado por respostas detalhadas e pelas reflexões excelentes sobre as atividades e suas experiências.

Quanto à escolha do grupo B, justificamos sua seleção devido à participação parcial nas atividades propostas. Este grupo apresentou dificuldades em manter a atenção durante o desenvolvimento das atividades, revelando desafios relacionados à concentração. As respostas

ao questionário indicaram certas dificuldades na leitura e interpretação das questões por parte dos membros do grupo B. É importante ressaltar que, apesar de termos descrito apenas dois grupos, nossa análise abrangeu toda a experiência da produção de dados, e ainda, os nomes dos estudantes citados são nomes fictícios para preservar a identidade de cada aluno.

Após essa exposição, iniciamos as análises e descrições da nossa primeira atividade intitulada "Brincando com Peteca". Dando continuidade à apresentação dos *slides*, exibimos uma fotografia contendo duas petecas, que foram providenciadas para os estudantes, conforme ilustra a Figura 13.

Figura 13 - Petecas utilizadas na atividade



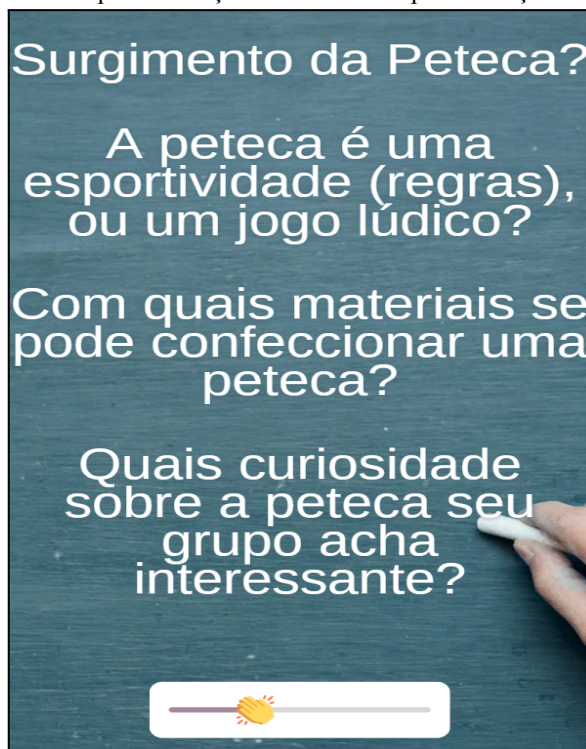
Fonte: Autor (2023)

Para abordar a *Situação Inicial (Problemática)*, propomos aos estudantes a observação da trajetória Matemática da peteca entre dois jogadores. Em seguida, alguns estudantes que haviam demonstrado interesse anteriormente em saber qual atividade realizaríamos com o programa Tracker questionaram: "*Então, iremos seguir a trajetória da peteca, professor?*". Confirmamos que sim!

Iniciamos, efetivamente, a primeira fase da Modelagem Matemática, conforme defendido por Almeida, Silva e Vertuan (2021): a fase da *Interação*. Buscando despertar a curiosidade dos estudantes sobre a *Situação Inicial*, lançamos perguntas provocativas para estimular a experimentação nas atividades de Modelagem. Por meio do diálogo entre os integrantes de cada grupo, instigamos a reflexão com base em seus conhecimentos prévios

sobre a temática (Malheiros, 2004; Araki, 2020; Rocha; Araki; Silva, 2023). Tais perguntas provocativas são apresentadas na Figura 14.

Figura 14 - Perguntas iniciais para Interação sem uso da Experimentação com Tecnologias Digitais



Fonte: Autor (2023)

Neste instante, ouvimos a integrante do grupo A. Ana: *“Eu sei o que é uma peteca, mas nunca brinquei com ela”*. Sua colega logo refutou, Beatriz: *“Sério, quem nunca brincou de jogar peteca?”*. Em resposta, Ana disse: *“Eu! Meus amigos gostam de jogar vídeo game, ficam no pc, no celular e não praticam brincadeiras desse tipo”*. Outra colega entra na conversa, Celine: *“Eu fico no computador, mas sempre jogo voleibol, brinco na rua com os amigos”*. Outra integrante expõe que, Beatriz: *“Eu já fiz peteca com EVA e pedra em outra escola, mas não era na aula de matemática”*.

Assim, observamos que, apesar de uma integrante daquele grupo ter se envolvido na brincadeira com a peteca, ela não demonstrava preocupação com os conceitos matemáticos presentes na trajetória do objeto. Indagamos sobre a disciplina na qual Beatriz havia confeccionado a peteca, e ela revelou que a elaborou durante uma aula de Artes. Concluindo as contribuições do grupo A, Daiane enfatizou: *“Essas atividades motivam mais a gente a aprender, né?”*. Os demais integrantes concordaram com entusiasmo em resposta à observação de Daiane.

Ao debaterem entre si em pequenos grupos, os estudantes tiveram a oportunidade de aprimorar habilidades comunicativas, como a capacidade de expressar ideias de forma clara e coerente, além de fortalecerem a habilidade de escuta ativa ao considerar diferentes perspectivas. O diálogo estimula o pensamento crítico, permitindo que os alunos analisem a situação-problema sob diversas óticas e desenvolvam soluções colaborativas. Além disso, a prática do debate em grupo fomenta o desenvolvimento da empatia, já que os estudantes são desafiados a compreender e respeitar as opiniões dos colegas.

Após analisarmos o diálogo mencionado, concordamos com autores, como Giordan (1999), Malheiros (2004), Suart e Marcondes (2009), Almeida e Malheiros (2019), Rocha, Araki e Silva (2023), os quais destacam que a Experimentação, mediada pelo diálogo do professor, pode propiciar a troca de ideias, a formulação de hipóteses explicativas e, além disso, pode viabilizar o desenvolvimento conceitual, atitudinal e cognitivo dos estudantes. Em outras palavras, a construção do conhecimento emerge das ações e atitudes dos próprios estudantes.

4.2 SEGUNDO ENCONTRO

O segundo encontro ocorreu em uma terça-feira, no dia 6/6/2023. Antes de retomarmos as análises e descrições da primeira fase, *Interação*, referente ao primeiro encontro, é relevante mencionar que, ao longo da semana seguinte ao primeiro encontro, fomos informados pela coordenação escolar de que, no dia programado para o nosso segundo encontro (uma terça-feira, 30/5/2023), os estudantes participariam da prova da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) e, portanto, não poderiam se reunir conosco.

Compreendemos que essas circunstâncias, que impactam o planejamento do professor, pode resultar na perda de interesse por parte da turma. O intervalo prolongado entre uma atividade e outra pode influenciar diretamente na continuidade e no engajamento dos estudantes. Além disso, a interrupção das atividades pode impactar negativamente na fixação de informações, já que os estudantes podem esquecer conceitos previamente aprendidos. Pode também gerar desafios na retomada das atividades, demandando esforços adicionais para recapturar a atenção e reconectar os estudantes ao conteúdo, conforme percebemos em alguns estudantes durante a retomada das atividades.

Visto ao exposto, Ovando Neto (2019, p. 111), continua relatando que

Neste sentido, consideramos que desenvolver atividades de Modelagem Matemática desafia o professor a reconsiderar seu planejamento constantemente, uma vez que não é possível prever o que pode emergir durante a atividade. Por meio de nossa experiência frente à modelagem na sala acreditamos que os professores também apresentam muitas dificuldades ao inserirem atividades e precisam se familiarizar a dar aulas com Modelagem Matemática.

Estas situações são recorrentes e podem acontecer em diferentes contextos, na literatura bibliográfica, por exemplo, segundo Ovando Neto (2019, p. 110), relata que

Embora tivéssemos um planejamento elaborado para cada uma das atividades, na prática houve diversas mudanças por diferentes motivos que nos levaram a traçar novos caminhos ao longo da coleta dos dados, seja por desmotivação de alguns alunos, falta de sequência das aulas e inexperiência de nós mesmo frente à modelagem.

Assim, planejar e fazer reflexões sobre o desenvolvimento das atividades de Modelagem é sempre pertinente, pois nessas reflexões podemos fazer mudanças necessárias para o bom andamento das atividades, mesmo quando interrompidas. Estar preparado para reavaliar o planejamento e seguir outros caminhos é essencial.

Como exposto no Quadro 13, no dia 6/6/2023, prosseguimos com o desenvolvimento das atividades. Todavia, no dia 13/6/2023, por ser feriado nacional, não foi possível realizar a produção de dados. Além disso, conforme a direção, os estudantes tinham outras atividades já agendadas para as próximas terças-feiras, após o dia 27/6/2023, o que resultou na interrupção das nossas atividades.

Dessa maneira, com base nessas considerações, justificamos a alteração em nosso planejamento inicial, previamente apresentado no capítulo anterior intitulado "Encaminhamentos Metodológicos".

Quadro 13 - Planejamento final

Data / Encontros	Atividade	Aula
	- Contratempos:	1º tempo
	a) Projetor, somente, com entrada VGA; cabo adaptador HDMI x VGA, não funcionou;	
	b) Computadores em mau funcionamento; trocas de teclados e <i>mouses</i> dos computadores.	2º tempo

Primeiro encontro 23/5/2023	- Apresentação breve da Modelagem e Tecnologias Digitais aos estudantes.	3º tempo
	- Formação de Grupos.	
	- Apresentação do primeiro tema (Situação inicial - problemática: Brincando com Peteca)	4º tempo
	- Situação Inicial - problemática	
30/5/2023	- OBMEP (Planejamento interrompido)	-
Segundo encontro 6/6/2023	- Retomada da Situação Inicial - problemática	1º tempo
	- Interação	2º tempo
		3º tempo
	- Matematização	4º tempo
13/6/2023	- Feriado nacional (Planejamento interrompido)	-
Terceiro encontro 20/6/2023	- Resolução	1º tempo
	- Interpretação de Resultados e Validação	2º tempo
	- Situação final - solução para situação inicial	3º tempo
	- Apresentação do segundo tema (Situação inicial - problemática: Lançando Dardos Magnéticos)	
	- Interação	4º tempo
Quarto encontro 27/6/2023	- Matematização	1º tempo
	- Resolução	2º tempo
	- Interpretação de Resultados e Validação	3º tempo
	- Situação final - solução para situação inicial	4º tempo
	- Encerramento da produção de dados	

Fonte: Autor (2023, negrito nosso)

Agora, retomando as análises e descrições da fase de *Interação* da Modelagem, que se iniciou no final do último encontro. Buscamos incentivar os estudantes a compartilharem as experiências de seus respectivos grupos com toda a sala de aula. Após cada integrante de cada

grupo se manifestar, promovemos um debate geral para ouvir as contribuições de cada participante.

Perguntamos para o grupo A, se eles poderiam iniciar falando suas respostas, Celine: *“Sim. Quero começar falando que todos do grupo já brincaram de peteca, menos a Ana”*. Então, mesmo sabendo da resposta, pois já havíamos conversado com este grupo, estimulamos a integrante Ana, explicar para todos os grupos os motivos. Ana: *“Como já falei para o senhor, meus amigos gostam do mundo digital, celular, computador e jogos. E na escola nunca tive oportunidade de brincar de peteca, essa será minha primeira vez”*.

Perguntamos se ela estava animada para ter sua primeira experiência com as petecas, Ana *“Sim! Até porque além de jogar e me divertir vou aprender matemática que é outra coisa muito diferente e legal e em grupo”*. Com o intuito de estimular Ana, parabenizamos por sua resposta, e, perguntamos se o grupo A queria expor mais alguma informação. Então, Beatriz respondeu *“Só respondendo às questões, não sabemos como surgiu as petecas, a peteca é um esporte e lazer, a peteca pode ser confeccionada com diferentes materiais como: papel, EVA, fita adesiva, penas brancas e coloridas, borracha, com pedrinhas para sustentar a base”*.

Ao incentivar os estudantes a debaterem sobre as considerações de cada grupo, proporcionamos que eles trocassem informações sobre diversificados tipos de conhecimentos extramatemáticos no que diz respeito a peteca. Este tipo de discussão não apenas estimula a troca de informações sobre as técnicas e estratégias envolvidas no jogo, mas também fomenta o desenvolvimento de habilidades sociais, como a comunicação, o trabalho em equipe e colaborativo, e o respeito mútuo.

Percebemos que a experiência de compartilhar conhecimentos sobre essa atividade lúdica não apenas enriqueceu os saberes prévios dos estudantes, como também promoveu a construção de vínculos interpessoais e o fortalecimento do senso de comunidade na sala de aula. Neste diálogo entre estudantes/estudantes e estudantes/professor em relação ao tema proposto, segundo Malheiros (2004, p. 43 - 44)

[...] para que os alunos se envolvam com tal proposta, é necessário que estudantes e professor possuam um diálogo aberto, pois, neste cenário, é essencial que os alunos aceitem o convite e, para que isso ocorra, o professor precisa saber "como" realizá-lo. Portanto, para que esta proposta aconteça, alunos e professor precisam estar interagindo e convergindo para o mesmo objetivo.

Seguindo as orientações da autora, voltamos nossa atenção ao grupo B, perguntamos se poderíamos escutar as conclusões que eles chegaram. Em resposta, Arthur: *“Sim. Já*

brincamos com petecas, não sabemos como surgiu, é esporte e lazer, não sabemos como confeccionam as petecas”.

Como as respostas deles foram bem sucintas, perguntamos se alguém queria relatar mais alguma coisa, ideia, informação. Em resposta ele disse que não. Assim, perguntamos: E, se utilizássemos a *internet* como Tecnologia Digital para pesquisar sobre as petecas, e depois sairmos lá fora para brincar de peteca, seria interessante? Responderam que sim!

A experiência de lidar com estudantes que relutam em participar das atividades propostas pode ser tanto desconfortável quanto desafiadora para os professores. A resistência dos alunos pode derivar de uma variedade de fatores, como desinteresse, insegurança ou desconexão percebida entre o conteúdo e suas experiências pessoais. Esta experiência com o grupo B demandou sensibilidade por parte do professor/pesquisador, que precisou encontrar maneiras de superar esses obstáculos e motivar a participação dos estudantes.

Neste contexto, a ambientalização emergiu como um aspecto relevante, exigindo paciência e empatia com os integrantes do grupo B. Conforme as atividades avançavam, esse grupo gradualmente reconheceu a importância de participar das atividades propostas.

Com base nas considerações supracitadas, Bonafini (2004) adverte que

[...] cabe ao professor coordenar os grupos de trabalho, ficando atento às dúvidas dos estudantes com relação à execução da atividade, procurando não interferir demasiadamente nas opções conceituais dos alunos. Antes de dar respostas, o professor deve incentivar o aluno a explicitar livremente suas ideias sobre o fenômeno em estudo (Bonafini, 2004, p. 288).

Para Almeida, Silva e Vertuan (2021, p. 33)

Quando os alunos trabalham juntos com o mesmo objetivo e produzem um produto ou solução final comum, têm a possibilidade de discutir os méritos das diferentes estratégias para resolver o mesmo problema e isso pode contribuir significativamente para a aprendizagem dos conceitos envolvidos.

Durante o debate entre os integrantes de cada grupo, constatamos que alguns membros do grupo B estavam ocupados mexendo em seus celulares, envolvidos em jogos *online*, por exemplo. Essa observação nos conduz à reflexão de que podemos direcionar pesquisas que beneficiem esses jovens adeptos de jogos *online*, à semelhança do estudo conduzido por Souza (2020), que utilizou o jogo *online Free Fire* como estratégia para o ensino e aprendizagem de Matemática.

Outros aspectos percebidos no grupo B incluíam saídas para conversas com membros de outros grupos, momentos em que alguns baixavam a cabeça e aguardavam que os demais fornecessem as respostas, solicitações frequentes para ir ao banheiro com duração prolongada, desviando-se das atividades planejadas devido às restrições de tempo. No entanto, quando abordamos a ideia de buscar informações com o auxílio das Tecnologias Digitais e brincar posteriormente com as petecas, observamos um aumento do entusiasmo por parte deles.

Nesse contexto, em relação ao grupo B, compartilhamos das mesmas considerações abordadas por Santos (2021, p. 97) acerca dos estudantes, nos quais “Eles se julgaram incapazes antes mesmo de ler e se inteirar do que se tratava, e o que os deixou um pouco mais animados foi o fato de saírem da sala de aula”. Apesar de terem se envolvido em atividades externas à sala de aula, essas não resultaram em motivação significativa em relação às propostas apresentadas.

Após esse debate entre os grupos sobre os questionamentos iniciais apresentados na Figura 14, a Experimentação com Tecnologias nessa fase da Modelagem torna-se mais evidente, utilizando as Tecnologias Digitais como aquelas “baseadas em códigos binários por meio dos quais é possível informar, comunicar, interagir e aprender” (Kenski, 2012, p. 31).

Ou seja, propomos que os grupos fizessem uma atividade colaborativa em grupo na plataforma *online* Canva, utilizando-se do site oficial da Confederação Brasileira de Petecas (CBP), para produzirem informações que acharem relevante. No Canva foi proposto que os estudantes desenvolvessem ações manuais quanto digitais. Na primeira ações manuais incentivamos eles a selecionar *templates*, em que poderiam escolher modelos predefinidos que se adequem aos seus infográficos. Ensinamos eles quanto a customização de elementos, em que poderiam personalizar texto, cores e fontes para atender às suas preferências e às necessidades específicas.

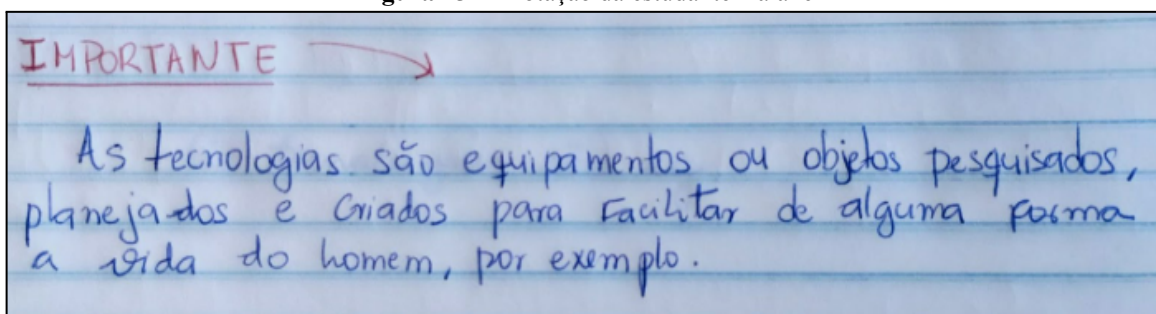
Fornecemos auxílios para que os estudantes fizessem adições de imagens e ilustrações próprias, escolhendo diferentes elementos visuais da biblioteca do Canva para enriquecer o seu trabalho. Incentivamos na manipulação de *layout*, ajustando elementos na tela, redimensionamos, organizamos e alinhamos para criar um *layout* visualmente atraente.

Já nas ações digitais, sugerimos um ambiente por meio da edição colaborativa em tempo real com colegas de classe. Mostramos para os estudantes como realizar exportação e impressão de seus respectivos infográficos em diferentes formatos (*PDF*, imagem, etc.) e imprimi-lo para apresentações físicas se necessário. Além disso, exploramos o uso de

elementos interativos, como *links* e botões, para criar apresentações dinâmicas; bem como o acesso a uma variedade de fontes e ícones para personalização dos conteúdos.

Após um determinado tempo, fomos visitar os grupos para observar quais eram suas reações durante a manipulação com a plataforma *online* Canva, quanto ao acesso à *internet* bem como ao site da CBP. Dessa forma, pergunta a Ana, como estavam se saindo com a integração das Tecnologias Digitais. Ana, respondeu: “*Professor, estamos discutindo aqui, que o senhor falou que Tecnologias pode ser tudo que foi criado pelo homem, né?*”. Isso mesmo, o que mais concluíram?. Ana “*Isso foi o que o senhor falou na apresentação dos slides*”. Logo Daiane, pronunciou-se “*Sim, professor, eu anotei aqui oh*”, na Figura 15, apresentamos a anotação da Daiane.

Figura 15 - Anotação da estudante Daiane



Fonte: Autor (2023)

Finalizando o diálogo entre os integrantes do grupo A, a estudante Celine conclui: “*Então já estávamos utilizando as Tecnologias como lápis e papel, não é? Porém, agora as Tecnologias são “Digitais”, porque é um software e plataformas virtuais, né?*”.

Foi notável observar que o Grupo A demonstrou atenção durante a explicação do professor/pesquisador, pois anotavam tudo que era dito, faziam perguntas entre eles e para o professor. este grupo não apenas observou a palestra, mas também participou, pareciam interessados, discutiam entre si. Ao registrar algumas informações, conceitos e detalhes, os estudantes podem fortalecer seus conhecimentos, podendo permitir que estes revisem e reforcem o material de forma autônoma, facilitando a assimilação e a recordação, conforme apresentado na Figura 15, a anotação da estudante Daiane.

Além disso, entendemos que o ato de escrever durante a aula pode potencializar o envolvimento cognitivo, contribuindo para uma compreensão mais profunda do conteúdo. Assim, incentivar os estudantes a fazerem anotações não apenas promove a organização do

conhecimento, mas também fortalece suas habilidades de autodirigir o aprendizado, tornando-se uma estratégia para o desenvolvimento acadêmico.

No decorrer do trabalho colaborativo em grupos, podemos ver as reações positivas dos integrantes do grupo A, por exemplo. E, a respeito disso, concordamos com Bonafini (2004, p. 88)

Todavia, devido à própria limitação da mídia escrita em não poder representar alguns efeitos cinestésicos, tais como a expressão de contentamento dos alunos quando “encontram” resultados satisfatórios observados na interação com o sistema CBL¹⁴, um gesto, um sorriso, acabam sendo também uma característica desta análise [...].

As emoções vivenciadas pelos estudantes ao longo do processo experimental com as Tecnologias, no desenvolvimento das atividades de Modelagem, desempenharam um fator importante para poderem construir seus conhecimentos de maneira agradável.

De acordo com Oliveira Júnior (2020, p. 19), “a aprendizagem com emoções positivas possibilita e estimula uma reutilização/uma repetição de ações, já que podem estar relacionadas com o prazer, a recompensa”. Desta forma, durante as atividades, foi perceptível que a integração das Tecnologias nas aulas de Matemática por meio da Experimentação pode ser interessante e potencializadora.

Então, parabenizamos o grupo A pela dedicação, e fomos ver os integrantes do grupo B. Chegando no grupo perguntam para Cássio como seu grupo estava se saindo com o trabalho colaborativo. Em resposta Cassio argumenta: *“Agora ficou mais tranquilo, naquela hora não tínhamos muitas informações, mas agora com ajuda da internet está sendo mais fácil”*. Perguntamos, novamente, se eles achavam que a integração das Tecnologias Digitais facilitavam a busca por informações sobre um determinado assunto.

Logo, Bruno respondeu: *“Acredito que sim professor, com o uso da Tecnologia podemos obter informações que não sabíamos”*. Neste instante, Cassio fala: *“Mas professor, eles [referente a Arthur e Bruno] não querem fazer comigo a construção da apresentação [construção do infográfico], só querem ficar no celular jogando”*. Então, pedimos mais proatividade aos integrantes, e falamos que outra hora eles poderiam jogar com mais tempo.

Com respaldo nas falas dos estudantes, percebemos que o acesso ao *site* da CBP, permitiu aos estudantes explorarem perspectivas diversas e atualizadas sobre as petecas,

¹⁴ Segundo Bonafini (2004, p. 34) “O CBL (Calculator Based Laboratory – [...]) também é um dispositivo utilizado para a coleta de dados. É um aparelho portátil que funciona com pilhas e, por possuir memória e um microprocessador próprio, é possível utilizá-lo como um dispositivo autônomo na medição de grandezas”.

enriquecendo a compreensão da *situação-problema*. Logo, compreendemos que a utilização de Tecnologias Digitais também pode proporcionar o desenvolvimento de competências digitais, essenciais na realidade dos alunos.

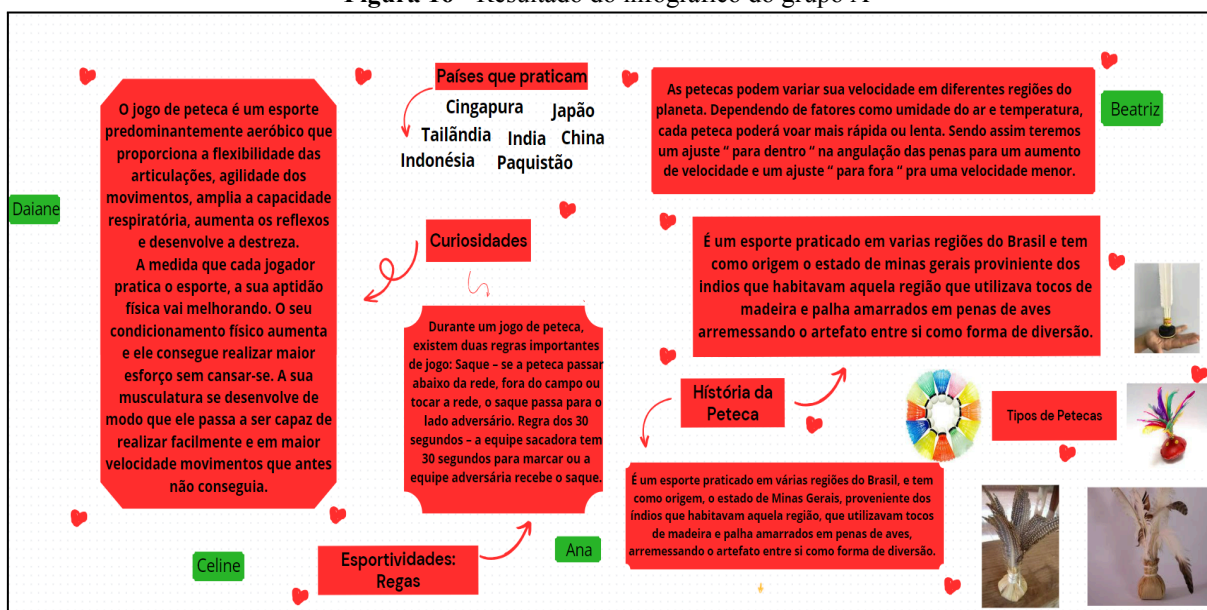
Quando propomos que os estudantes buscassem no site da CBP informações sobre seu surgimento, esportividade, lazer e curiosidades sobre a peteca. Queríamos oportunizar a Experimentação com Tecnologias, porque a ação de manipular a plataforma virtual inserindo, movendo e excluindo imagens, caixas de textos, formas geométricas podem configurar o ato de os estudantes serem protagonistas de seus conhecimentos extramatemáticos.

Conversando com o grupo A, a integrante Ana falou: *“O Canva é uma plataforma muito rica professor, podemos fazer muitas coisas”*. Complementando sua fala, Celine falou: *“Verdade, eu já conhecia o Canva, mas nunca tinha feito atividades aqui [na plataforma Canva], estou achando muito fácil mexer nele”*. Também, perguntamos para Daiane, como estava se saindo ao utilizar a Tecnologia Digital. Em resposta Daiane diz: *“Professor, é ótimo mexer no Canva, quando vamos colocando as informações aqui [no infográfico] vamos aprendendo sobre a peteca”*. Já a integrante Beatriz, estava concentrada, porém, interrompemos ela e perguntamos, como estava a experiência com tudo aquilo, se estava aprendendo. Beatriz responde: *“Nossa, estou aprendendo muito sobre as petecas e como mexer no Canva, gostei muito”*.

Nas falas das integrantes do Grupo A, podemos notar que elas demonstraram interesse ao explorar o site da Confederação Brasileira de Peteca (CBP), bem como na incorporação das informações e imagens obtidas na plataforma Canva. Ao utilizar informações diretamente da fonte oficial, as estudantes garantiram a precisão e a confiabilidade dos dados apresentados em seu trabalho. Essa prática possibilitou a eles que desenvolvessem habilidades de pesquisa, seleção crítica de informações e a capacidade de integrar recursos digitais de maneira autônoma.

Continuando com a atividade, os estudantes permitiram que suas criatividade se manifestassem e, em diálogo com os colegas do grupo, foram capazes de conduzir experimentações por meio da integração com as Tecnologias Digitais nesta etapa da Modelagem (*Interação*), conforme evidenciado no infográfico final apresentado pelo grupo A, na Figura 16.

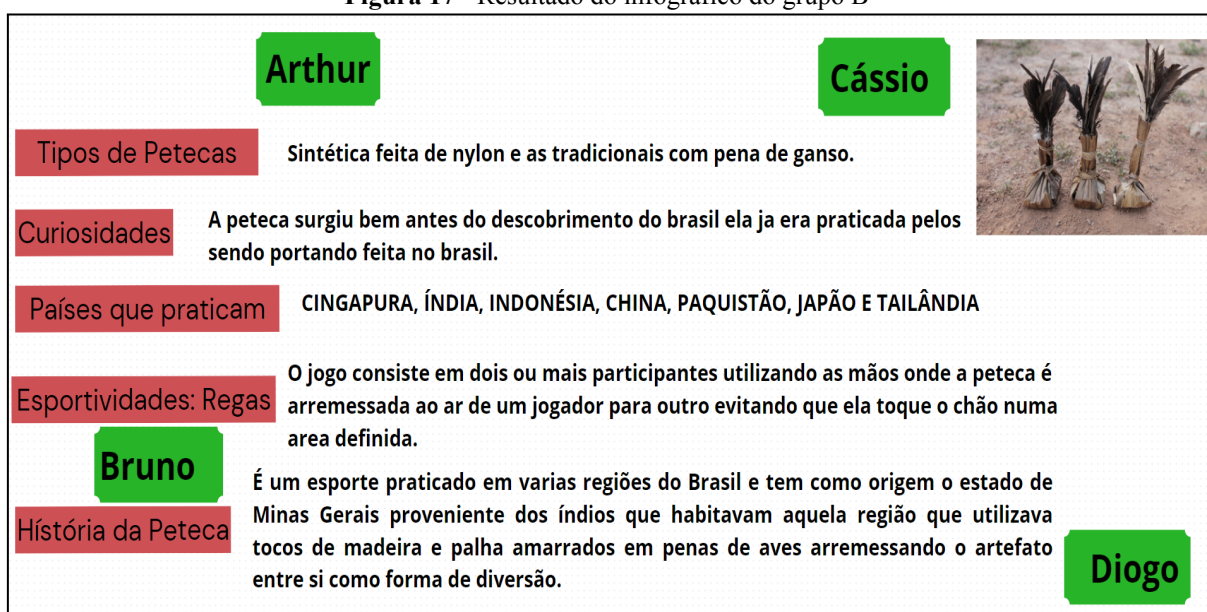
Figura 16 - Resultado do infográfico do grupo A



Fonte: Autor (2023, adaptação nossa)

No processo de seleção de informações, observamos que as integrantes do Grupo A debateram sobre os assuntos e imagens mais apropriadas para a elaboração do conteúdo na plataforma Canva. Após uma reflexão entre o grupo, as integrantes tomaram decisões acerca das informações que seriam importadas para o Canva. O infográfico do Grupo A integra o resultado da construção dos infográficos de todos os grupos, assim como o infográfico do Grupo B, mostrado na Figura 17.

Figura 17 - Resultado do infográfico do grupo B

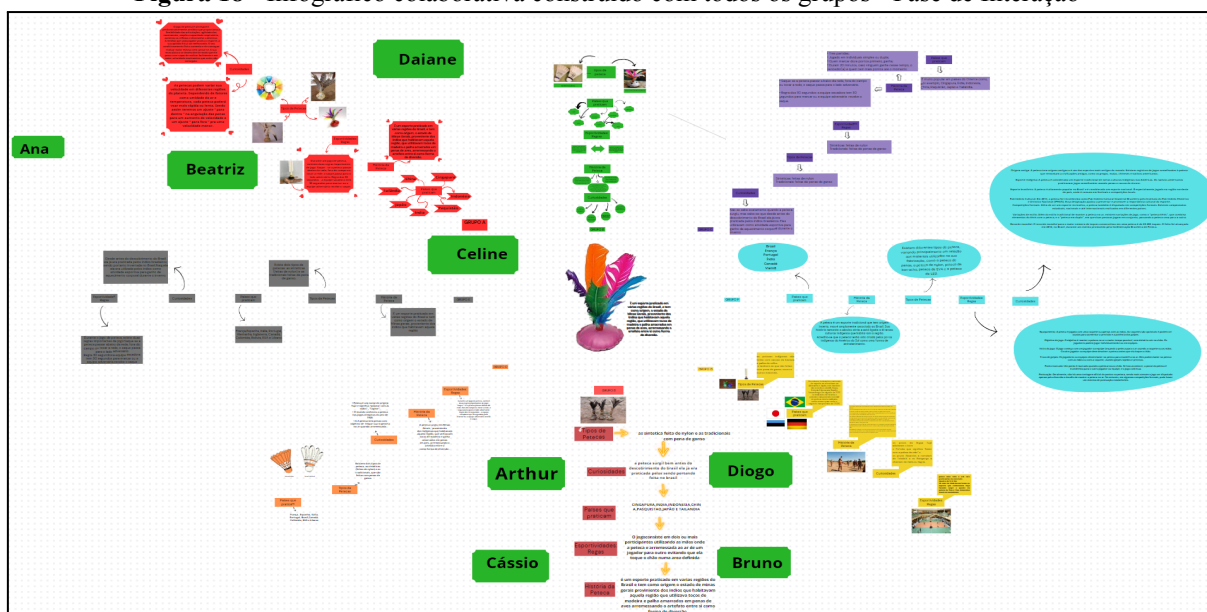


Fonte: Autor (2023, adaptação nossa)

Agora, na Figura 18, é possível observar a Experimentação com Tecnologia conduzida simultaneamente por todos os grupos na plataforma *online* Canva. Nas caixas de texto na cor verde, apresentamos exemplificações dos estudantes dos Grupos A e B, interagindo no ambiente virtual da plataforma Canva. Esta abordagem exemplificada com nomes fictícios visa preservar a integridade dos estudantes, evitando a exposição de seus nomes e *e-mails*.

Desde o início até a conclusão dessa tarefa, criamos um cenário que oportunizou aos estudantes terem contato com uma plataforma não criada para o âmbito educacional, mas que poderia ser utilizada para fins pedagógicos. Dessa forma, eles buscaram informações e dados de outras fontes e, na interface do Canva, apresentaram suas ideias finais após uma reflexão entre seus próprios grupos.

Figura 18 - Infográfico colaborativa construído com todos os grupos - Fase de Interação



Fonte: Autor (2023, adaptação nossa)

A Figura 18 apresentou a Experimentação com Tecnologias, na qual os estudantes foram se apropriando de espaços dentro da plataforma à medida que preenchiam com informações sobre as petecas. Eles debatiam, faziam reflexões, inseriam e retiravam figuras, bem como caixas de texto, manipulavam o tamanho da fonte e navegavam de forma autônoma na interface do Canva.

Após a conclusão do infográfico final, observou-se que os estudantes conseguiram desenvolver conhecimentos extramatemáticos sobre as petecas, conforme evidenciado nos

diálogos com os integrantes do Grupo A. Em relação ao Grupo B, sua participação no infográfico foi finalizada de maneira parcial. Os integrantes Cassio e Diogo expressaram o desejo de continuar adicionando informações ao Canva, uma vez que os outros membros do grupo não haviam colaborado.

Dado o caráter colaborativo e *online* dessa atividade na plataforma Canva, consideramos interessante permitir que tanto os integrantes do Grupo B quanto os de outros grupos continuassem contribuindo com informações e imagens para o infográfico. Além disso, poderiam manter os debates sobre os diversos aspectos relacionados às petecas, destacando uma potencialidade do uso das Tecnologias Digitais.

Portanto, podemos afirmar que houve uma integração efetiva das Tecnologias, possibilitando que os estudantes pesquisassem, manipulassem, experimentassem e trocassem ideias, elaborando conjecturas sobre a temática por meio dos recursos disponíveis na plataforma Canva durante a construção de seus conhecimentos. Nesse contexto, concordamos com Almeida, Silva e Borssoi (2021, p. 142), que destacam que "a experimentação, apoiada na tecnologia, atua como reguladora da relação entre conhecimento matemático e conhecimento da situação".

Nesta primeira fase, podemos observar algumas características que mostram a ação de Experimentação com Tecnologias que os estudantes realizaram como: transferência de informações produzidas do *site* da CBP para a plataforma Canva, exploração das ferramentas digitais, diálogo, tomada de decisão, criatividade e colaboração.

Além disso, podemos notar a facilidade em que eles aprenderam a utilizar a plataforma *online* Canva. Esta facilidade dos estudantes em manipular as Tecnologias Digitais vem sendo notória em alguns estudos na Educação Matemática ao longo dos anos, como em: Bonafini (2004); Malheiros (2004); Borba e Penteado (2010); Borssoi (2013); Araki (2020); Almeida, Silva e Borssoi (2021); Santos (2021); Silva, Almeida e Rosa (2023); Silva et al. (2023).

Como finalidade desta fase (*Interação*), os estudantes após as experiências até aqui informaram-se, estudaram e conheceram as características e especificidades da situação-problema. À vista disso, por ser a primeira vez dos estudantes desenvolvendo atividades de Modelagem, propomos a *Definição do problema*¹⁵: ***Levando em consideração a trajetória da peteca entre dois jogadores, há uma relação entre a distância desses***

¹⁵ Neste trabalho, utilizaremos os termos "problema" e "problemática" com o mesmo significado de *Definição do problema*, a fim de manter o dinamismo na leitura.

jogadores e a altura em que a peteca pode atingir?. Para Almeida, Silva e Vertuan (2021, p. 15) “A interação conduz à formulação do problema e a definição de metas para a sua resolução essa formulação é orientada pela falta de compreensão de entendimento da situação”.

Iniciando a fase de *Matematização*, os estudantes dirigiram-se ao pátio da escola para começar a brincar com as 25 petecas fornecidas. Em seguida, solicitamos que filmassem suas jogadas (orientando sobre a posição ideal para uma captura eficiente no Tracker). Cada grupo realizou essa etapa e selecionou a melhor filmagem para, posteriormente, analisar suas jogadas no Laboratório de Informática, com base na *definição do problema* supracitado.

Na Figura 19, é possível observar duas jogadoras do Grupo A realizando experimentações por meio dos lances, da posição e da força aplicada na peteca. A satisfação nos movimentos dos estudantes era evidente enquanto se divertiam com as petecas. Eles buscavam compreender a relação entre a distância ao lançar a peteca em direção às colegas e a altura que a peteca poderia atingir, atentando-se com a definição inicial do problema.

Figura 19 - Experimentação com a peteca - Grupo A



Fonte: Autor (2023)

Por muitas tentativas e erros, elas, assim, como todos os grupos, continuaram gravando e realizando a experimentação por meio de seus celulares, alternando entre posições mais próximas e mais distantes, além de alterna de jogadores buscando a gravação mais clara para as futuras análises da trajetória da peteca.

Durante essa fase de Experimentação, os estudantes utilizaram Tecnologias como celulares, *internet* e *WhatsApp*. Enquanto dois jogavam, os demais integrantes do grupo buscavam os melhores lances, filmando ou tirando fotos para uma análise posterior. Os integrantes dos grupos saíam de seus respectivos lugares para ver como os outros estavam fazendo, e isso gerava uma interação entre todos os participantes dos grupos.

Enquanto exploravam a trajetória da peteca em busca de relações, os estudantes se divertiam. Ana expressou seu entusiasmo, sugerindo levar a peteca para casa e compartilhar com amigos. Ao concordarmos, todos os estudantes receberam uma peteca ao final da atividade. Todos os estudantes no final da atividade ficaram com as petecas, isso nos leva a pensar que atividades lúdicas podem abrir caminhos para que os estudantes despertem o interesse em aprender Matemática, por exemplo.

Sobre essa reação dos estudantes, percebemos que o uso de jogos, atividades práticas e dinâmicas promoveu a participação deles, estimulando-os a curiosidade e favorecendo-os a construção de conhecimento de maneira divertida. Além disso, essas abordagens lúdicas proporcionaram oportunidades para o desenvolvimento de habilidades socioemocionais, das quais podem preparar os alunos não apenas para refletir sobre informações, mas também para desenvolver o conhecimento de forma prática em situações do mundo real (Rosa, 2013, Souza, 2020).

Perguntamos aos integrantes do grupo B, como estava as imagens captadas e as filmagens, o integrante Cassio falou: *“Ainda não capturamos nem filmamos, estamos brincando para pegar prática”*, em seguida Bruno *“logo fazemos professor, só mais um pouco”*. Falamos, ok!, porém, que eles precisavam fazer antes de entrarmos para o Laboratório de Informática para analisar as filmagens.

Considerando que não teríamos os momentos de familiarização propostos por Almeida, Silva e Vertuan (2021), ou seja, apenas o segundo momento, os passos da primeira atividade, "Brincando com Peteca", foram executados com cautela. Cada etapa foi conduzida com atenção, permitindo que os estudantes realizassem suas tarefas de maneira tranquila.

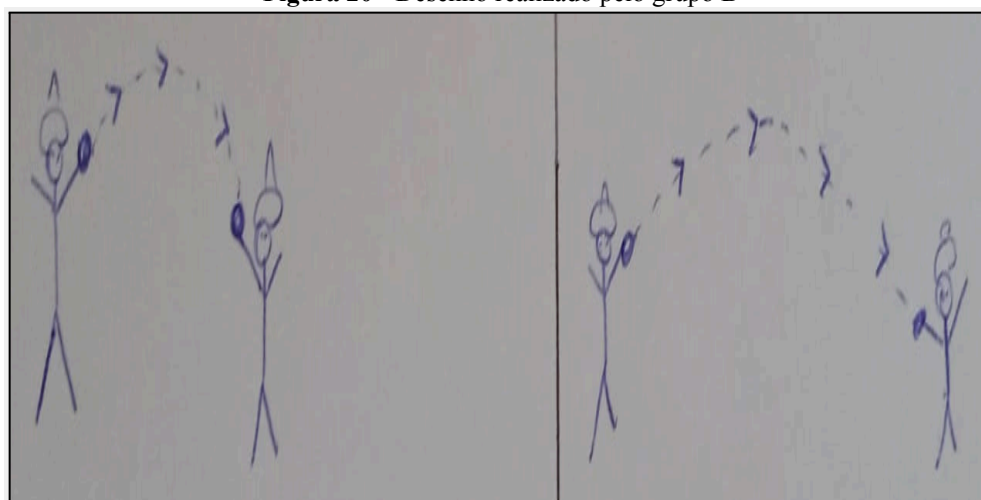
Voltando às atividades, na tentativa de compreender melhor que relação seria essa, entre os jogadores e a altura que a peteca poderia atingir. Perguntei ao grupo B como estavam se saindo, e quais hipóteses eles poderiam levantar das jogadas realizadas. Cassio: *“Professor, não importa a distância, podemos lançar a peteca muito alto ou não, para nosso colega”*. Ao ouvir essa fala, pedimos para eles aguardarem que iremos anotar sua fala. Como assim,

perguntei, e Cassio respondeu: *“Somos fortes e podemos sempre lançar a peteca na mesma altura”*.

Questionamos Arthur se seria possível mesmo que os jogadores estivessem muito próximos ou muito distantes. Em resposta Arthur: *“Sei lá, eles falaram que sim. Então vou com eles”*. Falamos para eles, desenhem para nós em uma folha essas jogadas e, fiquem analisando se é correto o que estão me falando, e continuem experimentando, também.

Após desenharem voltamos ao grupo B, e questionamos eles, então como ficou o desenho, o que o vocês puderam concluir? Bruno: *“Desenhamos assim professor”*, Figura 20. Elogiamos o grupo, falando que estava ótimo a representação.

Figura 20 - Desenho realizado pelo grupo B



Fonte: Autor (2023)

Perguntamos novamente o que eles haviam concluído. Cassio: *“No desenho pensamos igual, que não importava a distância conseguiríamos jogar a peteca na mesma altura, mas erramos”*. Outro integrante complementa, Arthur: *“É professor, quando fomos nos afastando percebemos que tínhamos que bater mais forte, e teve um momento que a peteca nem chegava no outro jogador”*. Assim, parabenizamos eles pela observação, e falamos que no Laboratório de Informática iríamos comprovar isso e ver o porquê de isso acontecer.

A partir do diálogo estabelecido com os integrantes do grupo B, compreendemos que proporcionar diversas formas de Experimentação para validar as ideias iniciais dos estudantes é uma estratégia eficaz para potencializar seus conhecimentos. Inicialmente, eles conjecturaram a possibilidade de lançar a peteca a uma altura significativa,

independentemente da distância, e confirmaram essa suposição por meio do desenho realizado e diálogo entre os integrantes.

Contudo, durante os lançamentos, chegaram à conclusão de que tal feito não seria possível, refutando, assim, suas conjecturas iniciais. Esse processo estimulou o aprendizado de maneira mais concreta, como evidenciado ao longo da atividade, sendo este processo fundamental para que aconteça a aprendizagem do coletivo (Giordan, 1999; Malheiros 2004; Madruga; Klug, 2015).

O processo de levantar hipóteses, confirmá-las e posteriormente refutá-las durante a execução da atividade não apenas demonstrou a capacidade de reflexão dos estudantes, mas também evidenciou a necessidade de uma abordagem prática para fortalecer o aprendizado. Dessa maneira, ao proporcionar oportunidades para que os estudantes experimentem, cometam equívocos e reavaliem suas ideias, contribuímos não apenas para a consolidação de conhecimentos matemáticos, mas também podemos possibilitar a interação entre eles e o trabalho em equipe. Logo, os alunos obtiveram êxito durante o processo de construção do conhecimento, o que é esperado em atividades de Modelagem Matemática (Rosa, 2009, 2013; Souza, 2020; Silva *et al.*, 2023).

Após esse bate-papo com o grupo B, fomos falar com os integrantes do grupo A. “Olá pessoal, o que já pensaram sobre o *problema*: “*Levando em consideração a trajetória da peteca entre dois jogadores, há uma relação entre a distância desses jogadores e a altura em que a peteca pode atingir?*” Imediatamente, a integrante Ana responde: “*Professor, antes de falar sobre isso, quero dizer que é muito legal brincar de peteca com os colegas!*”, A integrante demonstrava muito interesse e satisfação na brincadeira com petecas.

Além dos integrantes do grupo A, observamos que todos os estudantes estavam se divertindo com as petecas. Alguns optaram por se dirigir à quadra coberta da escola para evitar possíveis interferências do vento, enquanto outros não se preocuparam com esse aspecto.

Então perguntamos, que ideias, hipóteses, reflexões levantaram sobre a pergunta que fizemos. Pedimos para falarem devagar, pois gostaríamos de anotar. Novamente a integrante Ana diz: “*Primeiro: é o vento, temos que levar em consideração se venta ou não; segundo: os lançamentos nunca são os mesmos, e com vento piora. Quando começamos a gravar estava muito vento, agora não, podemos gravar novamente?*”. Beatriz: “*Terceiro: o peso da peteca influência na jogada!*” Nesta fala percebemos que os integrantes percebem que a força do ar pode interferir no lançamento da peteca devido ao seu peso. Continuando, Celine: “*Quarto:*

por que não confeccionamos nossa peteca, professor?”. Então explicamos que levaria muito tempo, e não teríamos tanto tempo para realizar todas as atividades propostas se fossemos confeccionar.

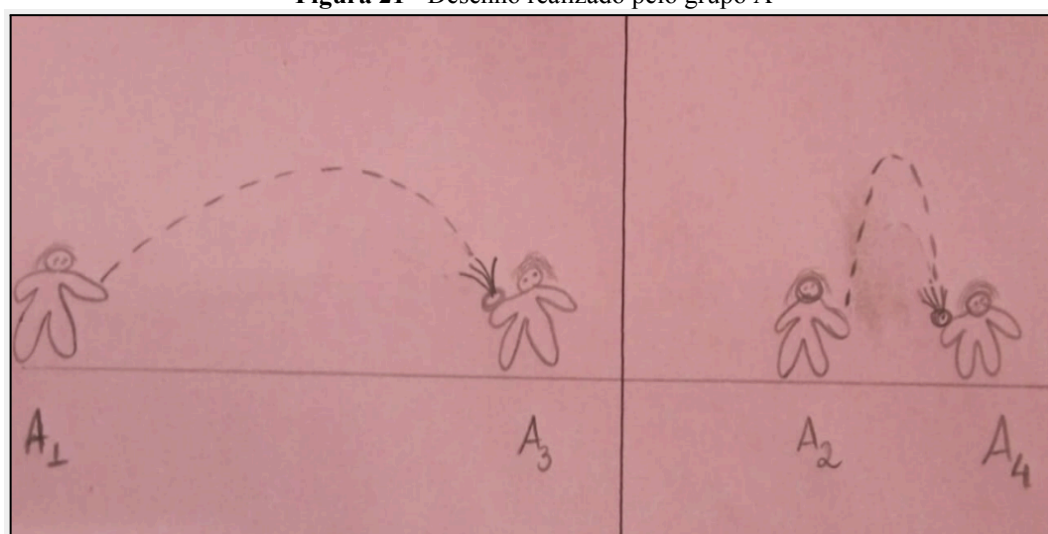
Com base no diálogo anterior, os estudantes registraram anotações importantes ao considerar o lançamento da peteca entre dois jogadores. Aspectos como o vento, a resistência do ar e o peso da peteca foram identificados como elementos que influenciam nas jogadas. Notávamos que as observações feitas pelo grupo A refletiam as mesmas considerações presentes nas falas dos demais grupos durante a experimentação.

À vista disso, segundo Suart e Marcondes (2009) os estudantes quando se encontram em situações em que são oferecidas oportunidades e tempo para desenvolver habilidades de investigação nos laboratórios, podem formular mais e melhores questões, propor hipóteses e questionar o experimento em comparação com estudantes que foram limitados a experimentos tradicionais durante o processo de ensino.

Neste momento, Celine questiona: *“Temos mais atividades diferentes, quais, professor?”* Então, falamos que era segredo, que logo revelariamos. Assim, para finalizar, pedimos que o grupo desenhasse a trajetória da peteca, observando a problemática, pois ajudaria eles a verem qual relação é essa que procuramos.

Como resultado do desenho do grupo A, os integrantes realizaram dois tipos de lançamentos: um com os jogadores mais próximos e outro com os jogadores mais distantes, a fim de identificar observações e compreender a relação presente no lançamento, conforme demonstrado na Figura 21.

Figura 21 - Desenho realizado pelo grupo A

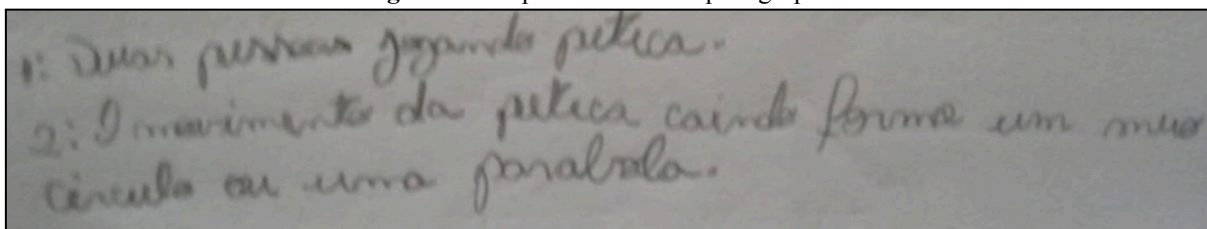


Fonte: Autor (2023)

Ao contrário do grupo B, o grupo A propôs hipóteses iniciais ao observar que a distância entre dois jogadores poderia influenciar a altura alcançada pela peteca. Essa conjectura foi confirmada não apenas nas discussões entre os integrantes, mas também no desenho elaborado e nas jogadas realizadas durante a interação entre as jogadoras.

Voltando ao diálogo, perguntamos, pelo desenho, o que eles tinham concluído. Celine *“Se os jogadores estão mais longe, a trajetória da peteca forma tipo uma parábola mais aberta. Ao contrário, a parábola fica mais fechada e temos que jogar mais alto para dar tempo de o colega pegar”*. A Figura 22, mostra a anotação que o grupo A fez.

Figura 22 - Hipótese levantada pelo grupo A



Fonte: Autor (2023)

Elogiamos, e perguntamos se tinham algo mais para contribuir. Daiane: *“Definimos dois tipos de distância, numa distância imaginamos os jogadores 4 metros longe um do outro, e na outra imaginamos 1,5 metros”*. Com isso, perguntamos qual a melhor distância para se brincar com a peteca. Em resposta, Ana: *“A distância de 4 metros é melhor”*. E também, perguntamos se já haviam feito os vídeos em relação às duas distâncias, e elas responderam que sim!

Após os experimentos realizados por meio das jogadas entre os integrantes de cada grupo, os estudantes foram convidados a ir ao Laboratório de Informática para analisarem seus vídeos sob a orientação do professor/pesquisador, bem como dar continuidade às suas análises, conforme evidenciado na Figura 23.

Figura 23 - Estudantes importando seus vídeos para os *drives*, utilizando os computadores e seus celulares



Fontes: Autor (2023)

No Laboratório de Informática, solicitamos que cada grupo exportasse seus vídeos para o computador da escola. Cada grupo utilizava um ou dois computadores devido à falta de equipamentos e espaço no laboratório. Por esse motivo, alguns estudantes recorreram aos celulares para acessar o *drive*, *WhatsApp*, *e-mail*, além do *software* GeoGebra.

A *internet* (dados móveis) utilizada pelos estudantes em seus dispositivos móveis era fornecida pelo professor/pesquisador. Além disso, vale ressaltar que o programa Tracker, quando utilizado no celular, perde parte de suas funcionalidades, ao contrário do GeoGebra, que mantém sua utilidade de forma intuitiva após ser baixado no celular.

Embora a Tecnologia seja uma boa alternativa, a falta de aparelhos em bom estado às vezes dificulta o desenvolvimento das atividades. Podemos constatar esse fato por meio do relato de Nascimento (2023), que ao tentar realizar atividades utilizando computadores em turmas do Ensino Fundamental anos iniciais, deparou-se com o mau funcionamento dos equipamentos.

Preparamos atividades para nossos 20 alunos, pensamos em possibilidades acerca dos alunos apresentarem dificuldades com o software escolhido, mas apenas cinco computadores funcionaram e descobrimos isso com todos os alunos já dentro do laboratório. Não pensamos nessa possibilidade, pois quando visitamos o laboratório de informática para planejar a atividade, visualmente todos os computadores estavam intactos, mas não testamos (Nascimento, 2023, p. 12).

Logo, é importante testar os computadores antes de desenvolver as atividades nos Laboratórios de Informática, a fim de garantir que todos estejam funcionando adequadamente.

A partir disso, é necessário pensar em estratégias que possam atender à quantidade de estudantes conforme a disponibilidade de equipamentos em bom funcionamento.

Hipóteses e Variáveis

Antes de apresentarmos os gráficos encontrados pelos grupos A e B, juntamente com seus modelos matemáticos correspondentes, discutiremos as hipóteses e variáveis que surgiram durante a Experimentação nos lançamentos, conforme registrado no Quadro 14.

Quadro 14 - Hipóteses e variáveis elaboradas pelos grupos A e B

GRUPO ↓	HIPÓTESES	VARIÁVEIS
A	- levar em consideração se venta ou não; - os lançamentos nunca são os mesmos; - Se queremos ganhar uma partida de peteca, temos que lançar a peteca mais rápido. - Por que não confeccionamos nossa peteca?; - Há vários modelos matemáticos baseados na Física. - Movimento na horizontal: Movimento uniformemente (MU); - Movimento na vertical: Movimento uniformemente variado (MUV); - $V_0 = 0$, - O movimento da peteca caindo forma um meio círculo ou uma parábola; - Descrevemos a variação da altura pelo tempo por meio da função polinomial de segundo grau; - Na função polinomial do segundo grau teremos que considerar o termo $a \neq 0$. - Transformação das unidades de comprimentos.	$g = 9,8 \frac{m}{s^2}$: aceleração da gravidade. $t = x$: tempo em segundos, pode ser uma variável independente. $y = f(x)$: altura em metros atingida pela peteca nos instantes t. Pode ser um valor de uma função polinomial para um dado x.
B	- O peso da peteca influencia na jogada; - Realizar cortes velozes (quando um jogador pula e bate na peteca com muita força, usando as mãos), pode ajudar que o outro jogador não pegue a peteca; - Os cortes velozes bem-sucedido são melhores quando o jogador pula; - A trajetória pode ser representada por uma função polinomial do segundo grau; - os números não são exatos, igual nos livros; - A velocidade no vértice da parábola é zero (Física).	a, b e c: são constantes reais. m = Metro cm = Centímetro

Fonte: Autor (2023)

As hipóteses e variáveis foram desenvolvidas durante as discussões dos estudantes em seus grupos, conforme registrado no questionário que responderam após as duas atividades propostas.

4.3 TERCEIRO ENCONTRO (MOMENTO 1)

O primeiro momento do terceiro encontro ocorreu na terça-feira, dia 20/6/2023, marcando o início da fase de *Resolução* da Modelagem Matemática. Nesse momento da atividade, os estudantes, em seus respectivos grupos, iniciaram a importação de seus vídeos de lançamento da peteca para o programa Tracker. O objetivo era continuar a construção de seus conhecimentos matemáticos e extramatemáticos, com base na *definição do problema*: “*Levando em consideração a trajetória da peteca entre dois jogadores, há uma relação entre a distância desses jogadores e a altura em que a peteca pode atingir?*”.

Colocamos na tela da apresentação dos *slides*, o Quadro 13, com todas as informações, assim, os estudantes conseguiram importar seus vídeos, bem como acessar as ferramentas da interface do Tracker, a saber: Ajustes de corte de vídeos; Fita Métrica com Transferidor; Mostrar ou Ocultar os eixos de Coordenadas e; Mostrar ou ocultar os eixos de Trajetória, conforme havíamos demonstrado.

Os integrantes do grupo A, comentam que, Beatriz: “*Professor esse aplicativo ou programa Tracker é bem fácil de mexer, cada um de nós iremos fazer o passo a passo e depois escolhemos o melhor gráfico, pode?*”. Em resposta, falamos que sim, pois, conforme eles experimentam por meio dessa Tecnologia Digital (Experimentação com Tecnologia), eles poderiam construir melhor seus conhecimentos a respeito dos objetos matemáticos presentes no programa.

Pela fala de Beatriz e nas observações em outros grupos, percebemos a facilidade demonstrada pelos estudantes na manipulação das Tecnologias Digitais durante as atividades. Ao serem introduzidos ao programa Tracker os alunos rapidamente se adaptaram à interface intuitiva dessa ferramenta. A agilidade com que exploraram as funcionalidades do programa e como se envolveram na captura e análise de dados revelaram uma aptidão natural para lidar com as Tecnologias.

Neste contexto, Scheller (2014, p. 2), relata que

Aprender matemática e paralelamente, aprender a pesquisar com auxílio de tecnologias digitais, *softwares*, computadores, *internet*, faz com que estes adquiram uma importância natural como recursos que permitam a abordagem de problemas cujos dados reais requerem habilidades de seleção e análise. Nesse sentido, é mister propiciar ao estudante oportunidades para o desenvolvimento de habilidades relacionadas à representação, compreensão, comunicação e pesquisa, como também a contextualização sociocultural, independente da disciplina ou do contexto. A

escola pode contribuir estimulando o estudante a fazer pesquisa, tanto no espaço da sala de aula como fora dela.

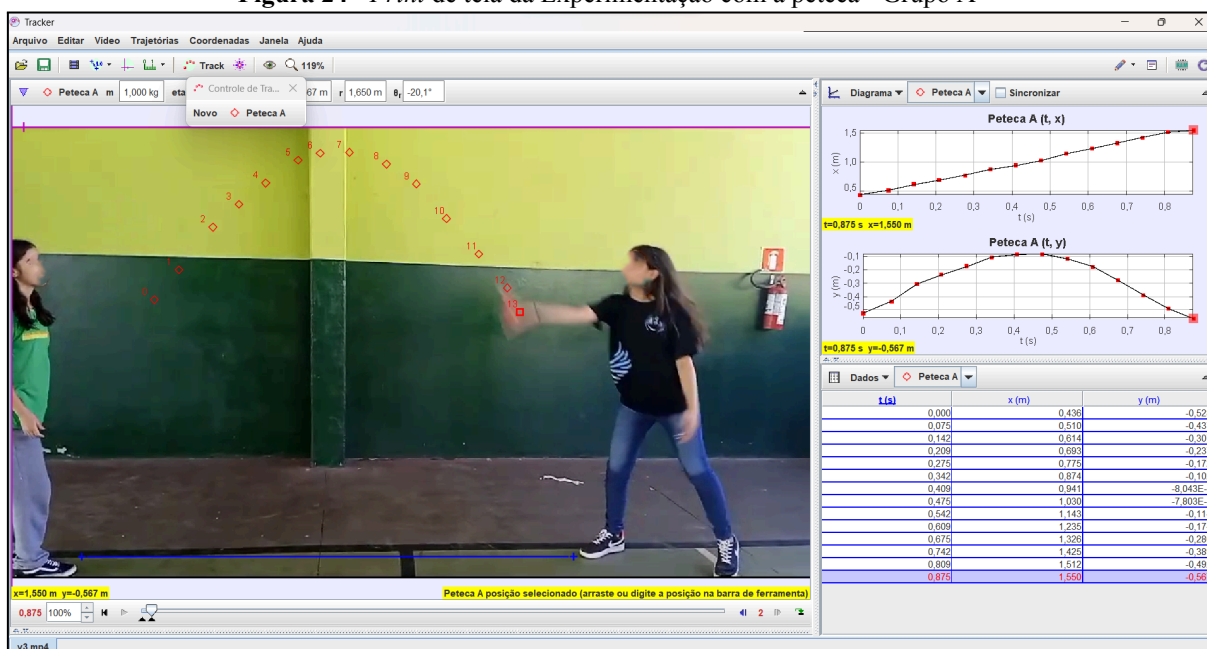
Essa habilidade foi evidenciada não apenas na execução das tarefas propostas, mas também nas interações entre os grupos, onde trocaram impressões sobre as funcionalidades dos programas e discutiram estratégias, buscando facilitar a interação com o ambiente virtual do Tracker. Logo, ações de arrastar, soltar, clicar, digitar, redimensionar, construir, alterar parâmetros e por fim, construir o gráfico, permitiriam eles explorarem o *software*, bem como possibilitaram que eles construíssem seus próprios conhecimentos matemáticos.

Perguntamos a integrante Celine, como estava se saindo quanto a manipulação do programa Tracker. Celine respondeu: “*Professor embora cada um terá sua vez, vamos nos ajudando, para tentar fazer bem certinho o passo a passo, assim, está sendo fácil*”. Então perguntamos se o trabalho em grupo é melhor. E, prontamente Celine respondeu: “*Sim, porque tem coisas que eu sei e outro não sabe e assim em diante*”. Algumas ações dos integrantes do grupo A, pôde ser observada nos *prints* que pedíamos para eles captarem conforme utilizavam as ferramentas do Tracker.

Celine reconheceu que o compartilhamento de informações se revela como uma vantagem, uma vez que aquilo que ela domina pode se complementar ao que outra integrante do grupo ainda não compreende totalmente, enriquecendo assim a experiência de aprendizagem coletiva.

Na Figura 24, é possível notar que as integrantes do grupo A já haviam importado o vídeo para o Tracker. Elas utilizaram as ferramentas disponíveis, como a fita métrica e os eixos de coordenadas, para traçar a trajetória da peteca por meio do ponto de massa (Peteca).

Figura 24 - Print de tela da Experimentação com a peteca - Grupo A

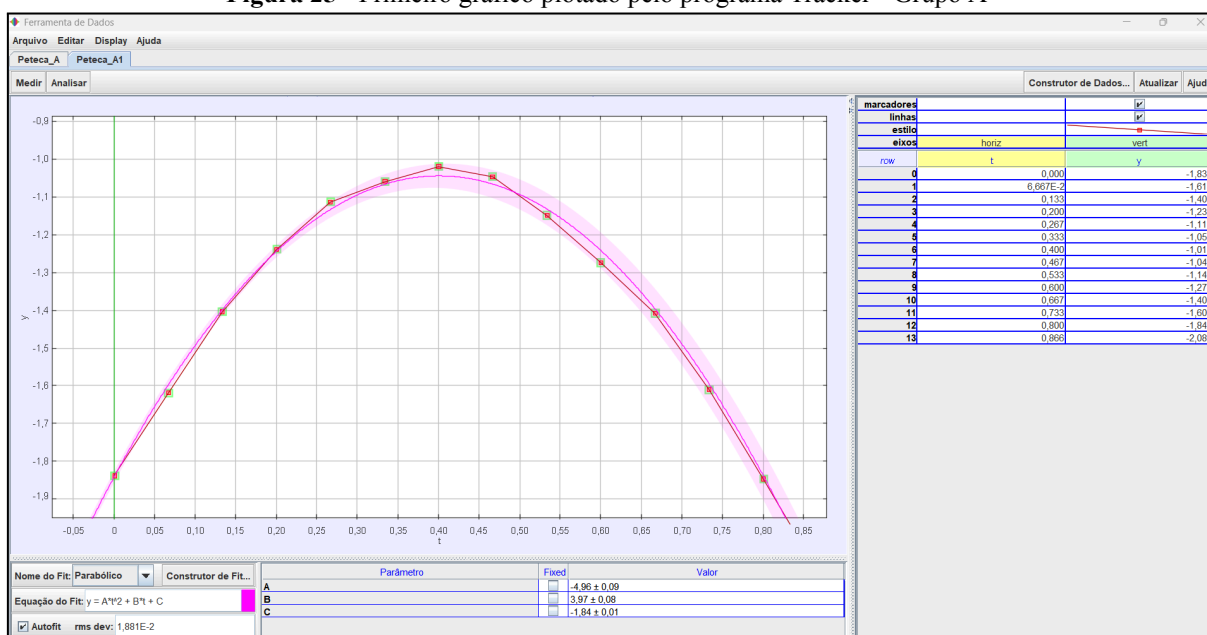


Fontes: Autor (2023)

As estudantes iniciaram o processo no programa Tracker, realizando a captura da trajetória da peteca por meio de seus vídeos. Utilizando as funcionalidades do Tracker, marcaram os pontos relevantes em coordenadas (t, y) para representar a posição do objeto ao longo do tempo. Essas ações, juntamente com a exploração das ferramentas disponíveis na interface do programa, permitiram que os estudantes não apenas capturassem a trajetória do objeto, mas também analisassem e apresentassem visualmente as informações de forma prática, reforçando a ideia da Experimentação com Tecnologias.

As integrantes do grupo A construíram dois gráficos. Na Figura 25, analisaram a trajetória da peteca com os jogadores a uma distância de um metro e meio uma da outra. Já na Figura 26, elaboraram o gráfico seguindo a trajetória da peteca com os jogadores a uma distância de um metro e meio.

Figura 25 - Primeiro gráfico plotado pelo programa Tracker - Grupo A

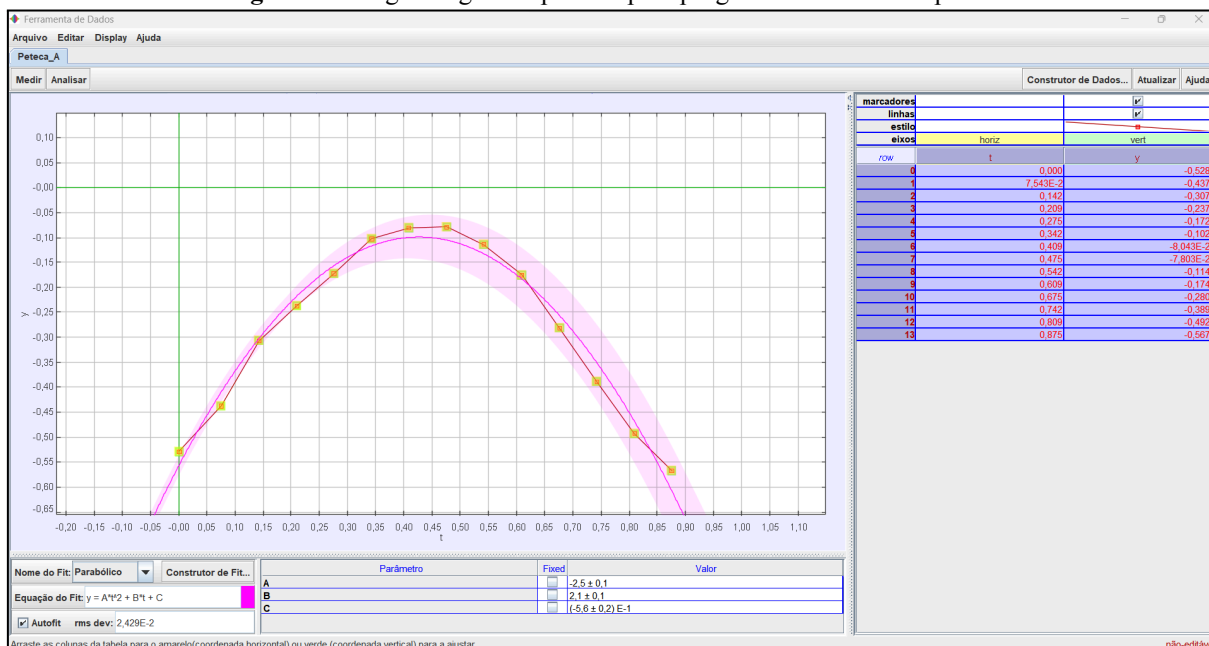


Fontes: Autor (2023)

Ao analisar a Figura 25, observamos que a interface do programa Tracker oferece uma variedade de ferramentas que possibilitam aos estudantes plotar o gráfico. Dessa forma, eles podem inicialmente movimentar o gráfico ao clicar na base inferior e no lado esquerdo. Adicionalmente, para avaliar a melhor curva, o aplicativo apresenta a opção "Analisar".

Ao selecioná-la, abre-se a opção de ajuste de curva, conforme ilustrado na Figura 26. Os estudantes optaram pela curva parabólica, gerando assim uma função quadrática, juntamente com seu respectivo gráfico. Durante nossas observações, era possível notar os integrantes de todos os grupos experimentando as curvas que melhor se ajustavam. O programa Tracker oferece diversos ajustes de curvas, entre eles: Linear, Parabólico, Cúbico, Senoidal, Exponencial e Logarítmico.

Figura 26 - Segundo gráfico plotado pelo programa Tracker - Grupo A

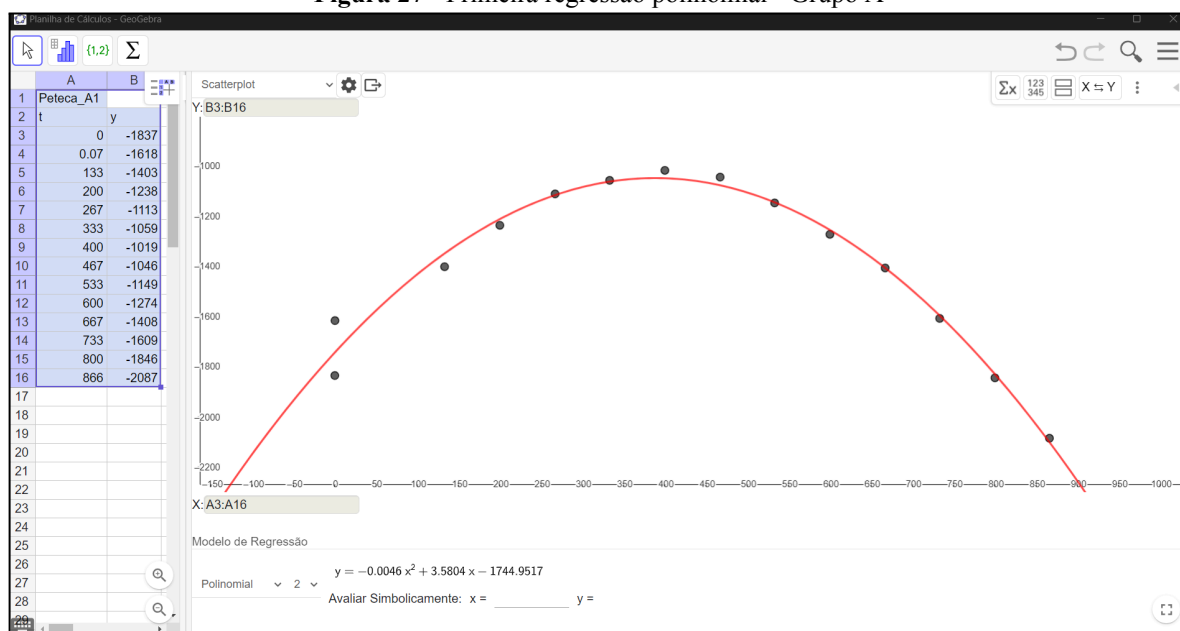


Fontes: Autor (2023)

Na tentativa de entender o porquê da escolha da curva parabólica, questionamos os integrantes do grupo A. Perguntamos por que escolheram uma parábola para representar a trajetória da peteca. Ana: “*Professor, quando lançamos a peteca estamos fazendo um lançamento oblíquo, assim, a peteca verticalmente faz um movimento parabólico por que a gravidade atua nela, assim, vamos analisar o espaço percorrido em relação ao tempo, está certo?*”. Indagamos se o raciocínio das integrantes estava correto. Dessa forma, como sugestão nossa, as integrantes produziram os dados e os transfiram para o *software* GeoGebra, comparando-as com as hipóteses levantadas.

Dando sequência junto aos grupos, sobre como estava sendo transferido os dados produzidos do programa Tracker para o GeoGebra, começamos uma conversa com o grupo A. Perguntamos se elas tinham alguma dificuldade. Em resposta, Celine: “*Não professor, já encontramos as funções que representam nossos dados do Tracker, usando o passo a passo que o senhor mandou no WhatsApp [além de projetar os passo a passo, mandamos no grupo feito pelos estudantes para nossas comunicações, o passo a passo]*”. Neste momento, eles apresentaram os *prints* de tela, conforme mostra a Figura 27 e a Figura 28.

Figura 27 - Primeira regressão polinomial - Grupo A

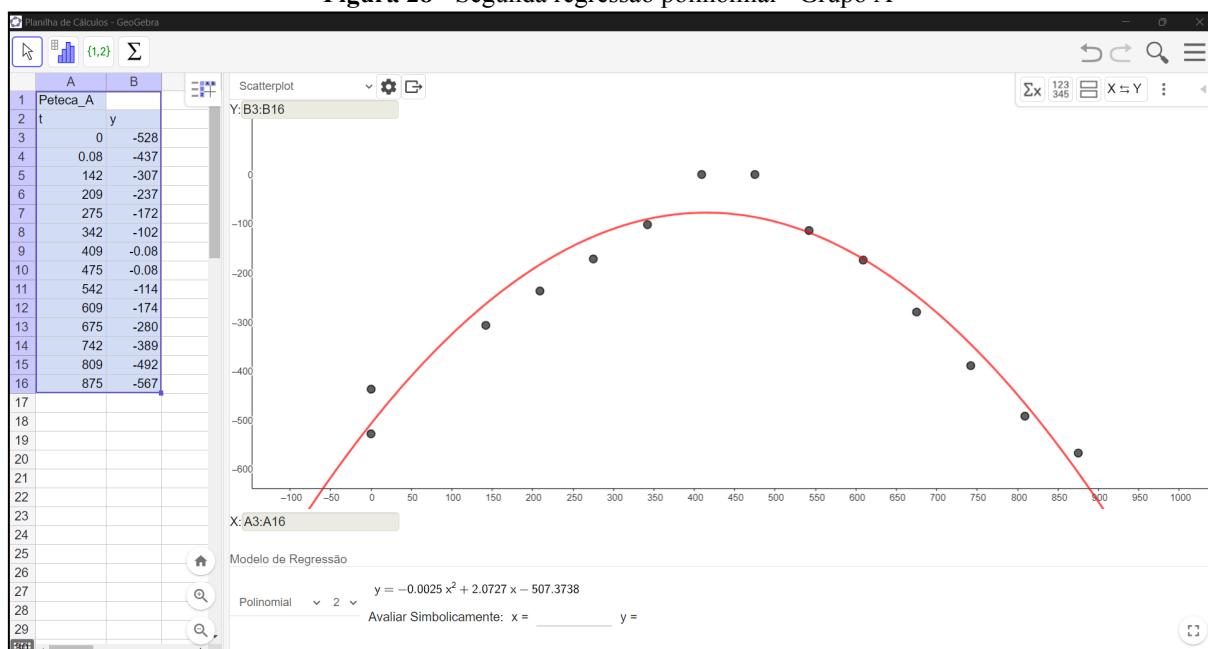


Fonte: Autor (2023)

Ao ver as regressões polinomiais, pedimos para eles explicarem se tiveram dificuldades. Beatriz falou “*Não tivemos dificuldades, copiamos os dados do Tracker, usando o GeoGebra classic online - abrimos a Janela de Planilha, selecionamos uma célula e colamos os dados nela [esses dados podem ser observados no canto esquerdo superior das respectivas figuras]*”, e depois perguntamos o que fizeram.

Em conclusão, Daiane disse; “*selecionamos os dados e clicamos em análise bivariada, e escolhemos o modelo da regressão polinomial que foi o parabólico [a função polinomial obtida, pode ser vista na parte inferior de ambas as figuras]*”. Parabenizamos o grupo A, pois fizeram todos os passos corretamente.

Figura 28 - Segunda regressão polinomial - Grupo A

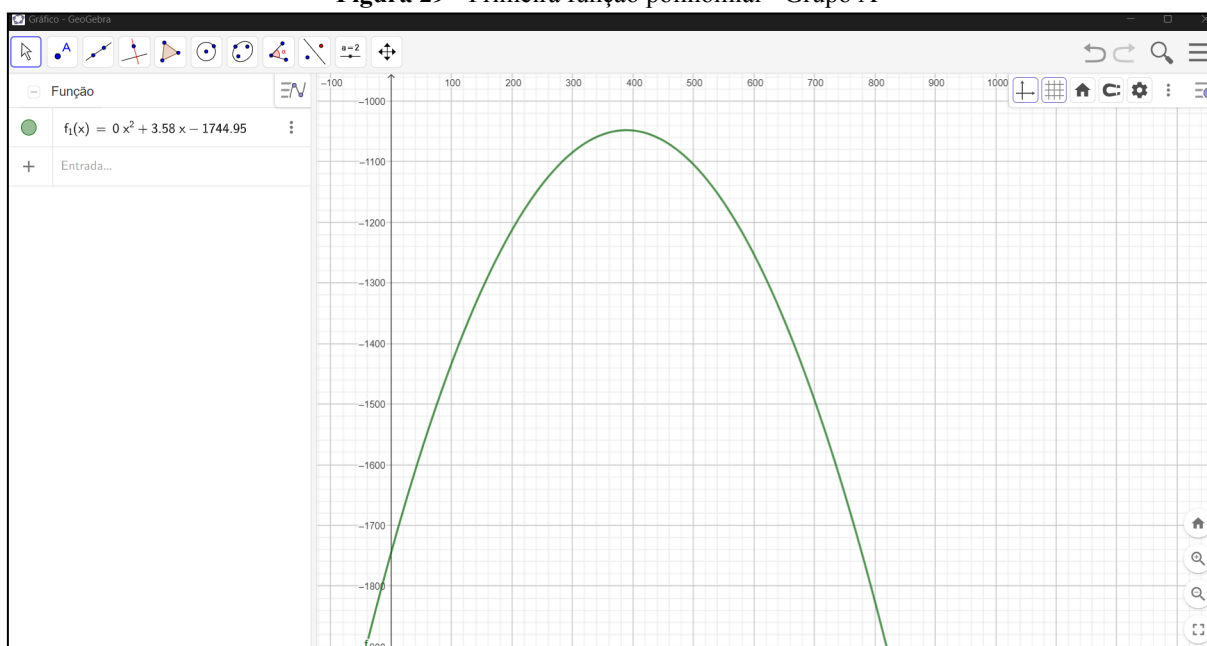


Fonte: Autor (2023)

Pedimos então que o grupo A, escrevesse essa lei de formação na Janela Algébrica do GeoGebra para, então, ver algumas propriedades, conceitos e definições referentes a função polinomial encontrada, bem como comparar os dados fornecidos pelo Tracker. Em observação, todos os grupos estavam conseguindo realizar as devidas tarefas ao mesmo tempo, o que estava sendo ótimo para realização de nossa atividade.

Após uma volta no Laboratório de Informática, voltamos a conversar com o grupo A para ver como estavam se saindo quando ao gráfico apresentado pelo GeoGebra por meio da função polinomial obtida dos dados fornecidos pelo programa Tracker. Como respostas eles mostraram os *prints* de tela contendo ambas as representações gráficas, conforme a Figura 29 e a Figura 30.

Figura 29 - Primeira função polinomial - Grupo A



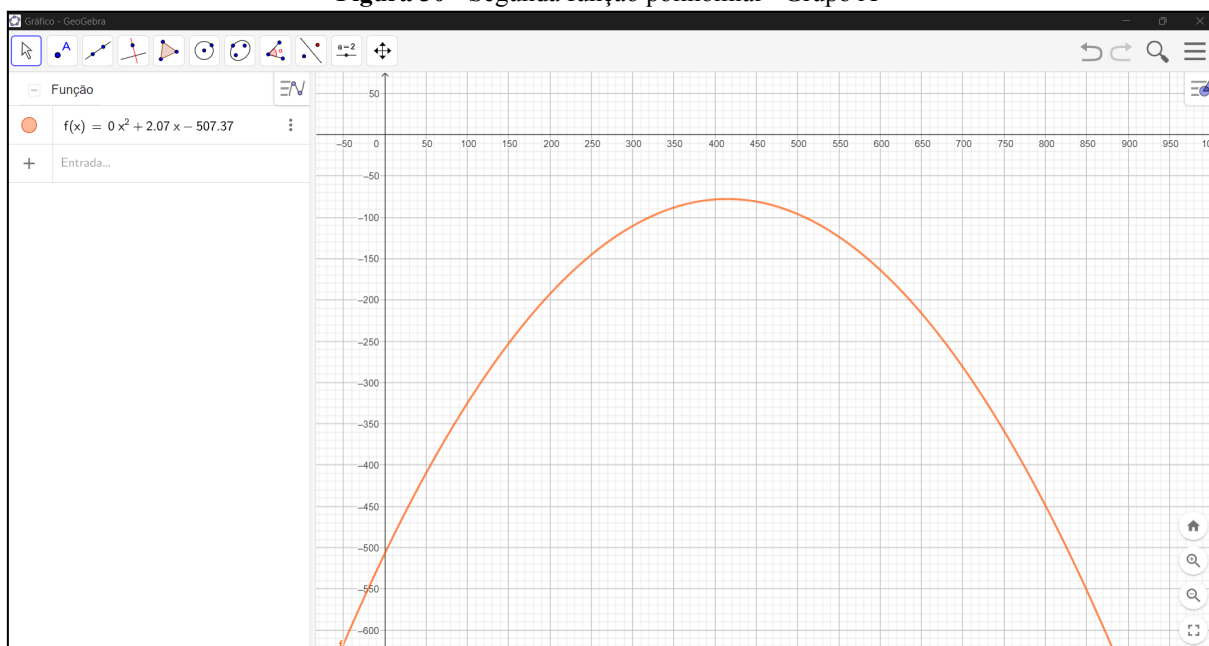
Fonte: Autor (2023)

A Figura 29, é a representação gráfica da trajetória obtida pelo grupo A, por meio do lançamento entre os jogadores com distância de quatro metros. Perguntamos aos estudantes se eles tinham ideia do que o gráfico estava representando. Ana respondeu: “*Professor, no Tracker observamos que as coordenadas se dão por (t, y) e no GeoGebra (x, y). Então, achamos que $t = x$, ou seja, x representa o tempo (segundo). E y continua sendo o espaço ou posição (metro) percorrido pela peteca de acordo com o tempo*”.

Isso mesmo, respondemos. Então, indagamos como podemos validar nossa problemática, “*Levando em consideração a trajetória da peteca entre dois jogadores, há uma relação entre a distância desses jogadores e a altura em que a peteca pode atingir?*”. Celine: “*Professor, se encontramos a posição da peteca em relação ao tempo, já validamos, não?*”.

Parabenizamos o grupo A, e falamos que sim! Porém, falamos que gostaríamos que eles experimentassem algumas características, propriedades e/ou definições que eles lembrassem da função polinomial obtida pela representação: $f(x) = -0,0025x^2 + 3,5804x - 1744,9517$. Assim, pedimos que eles encontrassem manualmente o vértice, as raízes, o discriminante, a fórmula canônica e a fórmula reduzida dessa função quadrática.

Figura 30 - Segunda função polinomial - Grupo A



Fonte: Autor (2023)

Já, a Figura 30, é a representação gráfica da trajetória obtida pelo grupo A, por meio do lançamento entre os jogadores com distância de um metro e meio. Todo o passo a passo usando o *software* GeoGebra foi análoga à Experimentação com Tecnologia anterior realizada pelo grupo A. Assim, após a validação os integrantes obtiveram a função polinomial do segundo grau: $f(x) = -0,0025x^2 + 2,0727x - 507,3738$.

Em conclusão, o grupo A demonstrou atenção durante a atividade ao atingir um dos resultados esperados sem enfrentar dificuldades. Sua compreensão das leis da Física relacionadas ao Movimento Uniformemente Variado foi evidente, o que contribuiu para a facilidade e precisão de suas análises e conclusões. Essa integração do conhecimento de diferentes disciplinas, neste caso, a Física, destaca a abordagem interdisciplinar incorporada às atividades de Modelagem (Borssoi, 2013; Araki, 2020; Santos, 2021).

A capacidade de usar conceitos da Física para analisar e interpretar o movimento da peteca revela não apenas um entendimento da matéria, mas também uma habilidade prática de transferir esse conhecimento para contextos da realidade dos estudantes. Além disso, o trabalho em equipe foi uma competência destacada, uma vez que os membros do grupo compartilharam conhecimentos, debateram ideias e colaboraram de maneira eficaz para alcançar seus objetivos.

Direcionamo-nos, então, aos integrantes do grupo B, perguntamos como estavam se saindo quanto a utilização do programa Tracker. Imediatamente, Bruno respondeu “*Estamos conseguindo, porém, não prestamos atenção na explicação e aí complicou*”. No que vocês estão em dúvida, perguntamos. Bruno: “*Aqui ó*”, o integrante mostrou os eixos de coordenadas, não sabia onde posicioná-lo e os outros que estavam dispersos, também não conseguiam saber. Assim, questionamos eles, tentando fazer eles darem a resposta.

Indagamos se eles já haviam estudado sobre os eixos de coordenadas (x, y) do plano cartesiano. Logo, Diogo respondeu: “*Sim, eu lembro*”. Perguntamos, para analisar o gráfico no plano cartesiano, qual quadrante eles acreditariam ser mais fácil, logo Diogo respondeu: “*primeiro quadrante*”. Perguntamos se os outros concordavam, e eles responderam que, sim! Então, deixa as coordenadas como se fosse analisar um objeto matemático [não falamos função, pois queríamos que eles chegassem a este objeto matemático sem influenciarmos, mesmo que parece lógico que poderíamos estar falando de uma função qualquer] no primeiro quadrante.

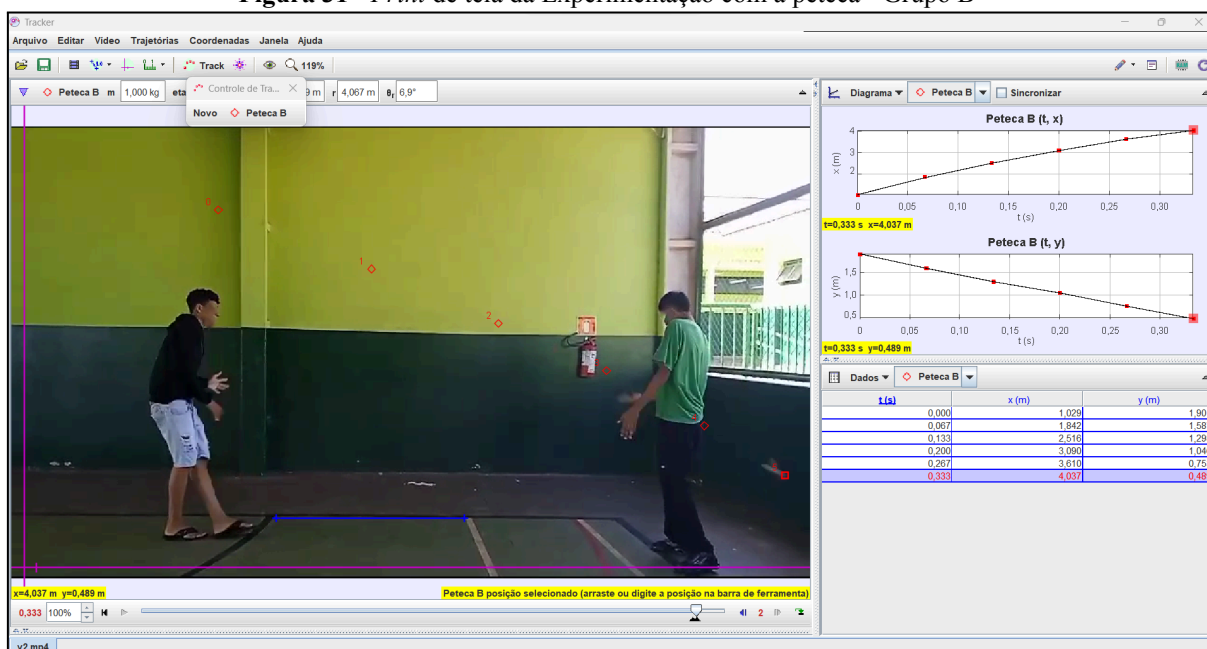
Então, na interface do Tracker, aonde ficaria melhor para ter essa posição do primeiro quadrante?, perguntamos. Diogo “*Ata professor, entendi*”.

Neste diálogo com o grupo B, incentivamos os estudantes a pensarem de maneira crítica e independente na tentativa de fazer eles refletirem sobre a questão levantada. Entendendo que o papel do professor torna-se ainda mais importante quando ele opta por não fornecer respostas diretas, mas sim utiliza perguntas estimulantes que desafiam os estudantes a raciocinarem e construírem seu próprio entendimento.

Ao invés de oferecer respostas prontas, tentamos criar um ambiente propício para o diálogo, permitindo que os estudantes expressassem suas ideias e discutissem diferentes pontos de vista sobre o plano cartesiano.

Voltando a situação com os alunos, ficamos observando e o grupo pareceu ter entendido, após deslocar os eixos de coordenadas para o canto inferior esquerdo da tela do programa Tracker, conforme a Figura 31.

Figura 31 - Print de tela da Experimentação com a peteca - Grupo B

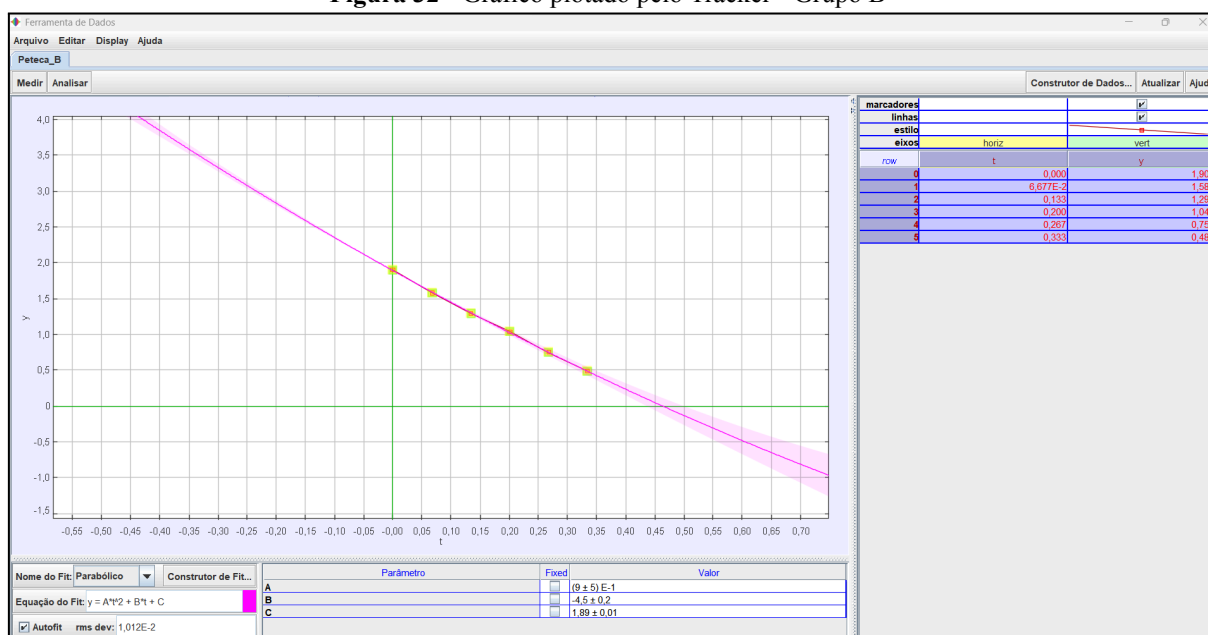


Fontes: Autor (2023)

Quando chega o momento de capturarem a trajetória da peteca por meio da tecla *Shift* de forma manual. Os integrantes do grupo B, demonstram estar atentos enquanto um deles, o integrante Cassio, manipula a interface do Tracker, assim, com o intuito de todos aprenderem eles, também, falaram que todos fariam o passo a passo novamente.

Deixamo-os traçando a trajetória da peteca e fomos ver outros grupos. Posteriormente, retornando ao grupo B, perguntamos como estavam com a Experimentação. Logo, Bruno falou: “*Professor só eu e Arthur fizemos, Cassio e Diogo ficaram jogando e foram conversar com os outros grupos*”. Perguntamos se eles haviam conseguido finalizar aquele passo a passo, e ele responderam que sim! Pedimos para ver, e eles mostram o *print*, conforme a Figura 32.

Figura 32 - Gráfico plotado pelo Tracker - Grupo B



Fontes: Autor (2023)

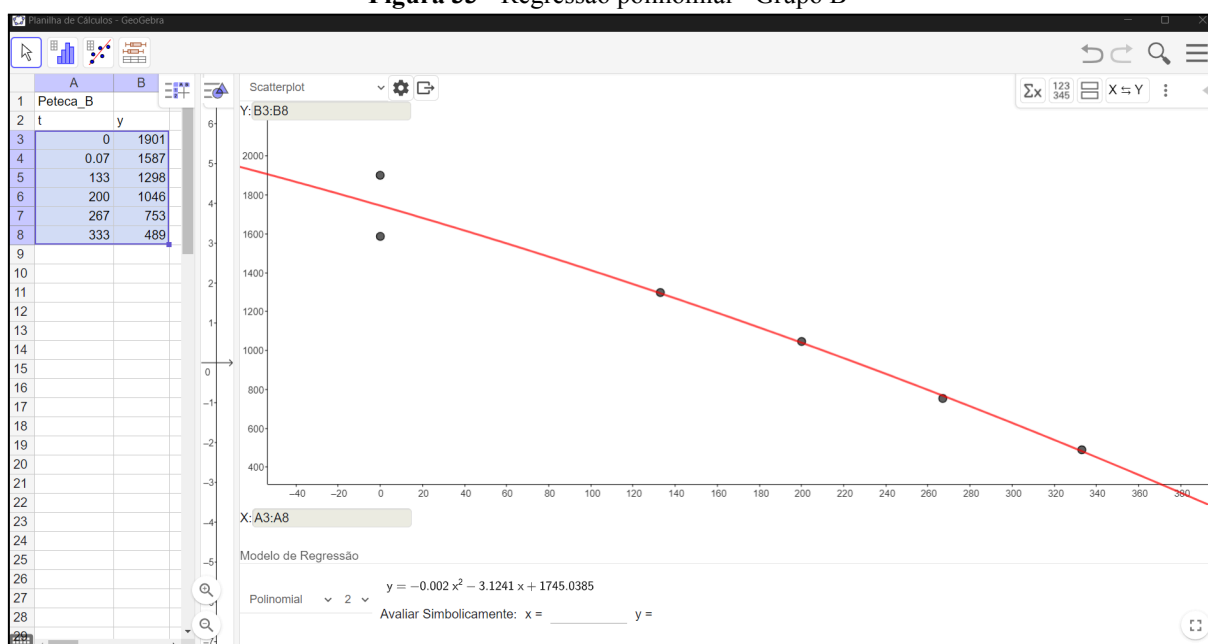
Questionamos ao grupo B como eles haviam pensado para chegar ao gráfico [Figura 32]. Arthur prontamente respondeu: “*Pensamos, e fizemos cortes [que é quando a peteca vem na sua direção você bate nela de cima para baixo, igual no bolei], porque os outros grupos não estavam fazendo*”. Elogiamos o grupo falando que era uma ideia diferente e original como eles olharam para a trajetória da peteca.

Apesar de alguns membros do grupo B não estarem contribuindo de maneira integral, o grupo demonstrou eficiência ao conseguir executar todos os passos da atividade proposta. Mesmo com a participação parcial de alguns integrantes, percebemos que o grupo B superou desafios e conseguiu atingir o objetivo até o momento. Destacamos que, apesar das dificuldades, o grupo apresentou uma abordagem inovadora ao introduzir o conceito de corte veloz na trajetória da peteca.

Essa originalidade reflete não apenas a capacidade de adaptação do grupo diante das circunstâncias, mas também sua habilidade em encontrar soluções criativas, o qual contribuiu de maneira diferenciada para o desenvolvimento das atividades da Modelagem. Para Burak (2019, p. 107) a Modelagem contribui “[...] para o desenvolvimento de competências complexas nos estudantes, como observar, explorar e investigar; estabelecer relações, classificar e generalizar; tomar decisões e argumentar; conjecturar e provar, utilizar a imaginação e a criatividade, dentre outras.”

Assim, após a conversa com os integrantes do grupo B, perguntamos se eles sabiam transferir os dados apresentados no Tracker para o GeoGebra. Bruno: “*Sim, essa parte eu prestei atenção*”. Pedimos para eles fazerem e ficamos ali para tirar dúvidas, porém, eles não precisaram de ajuda, conseguiram passar os dados para a planilha do geogebra e chegaram na representação da função polinomial do segundo grau: $f(x) = -0,0023x^2 - 3,0306x + 1769,1552$, conforme elucidado pela Figura 33.

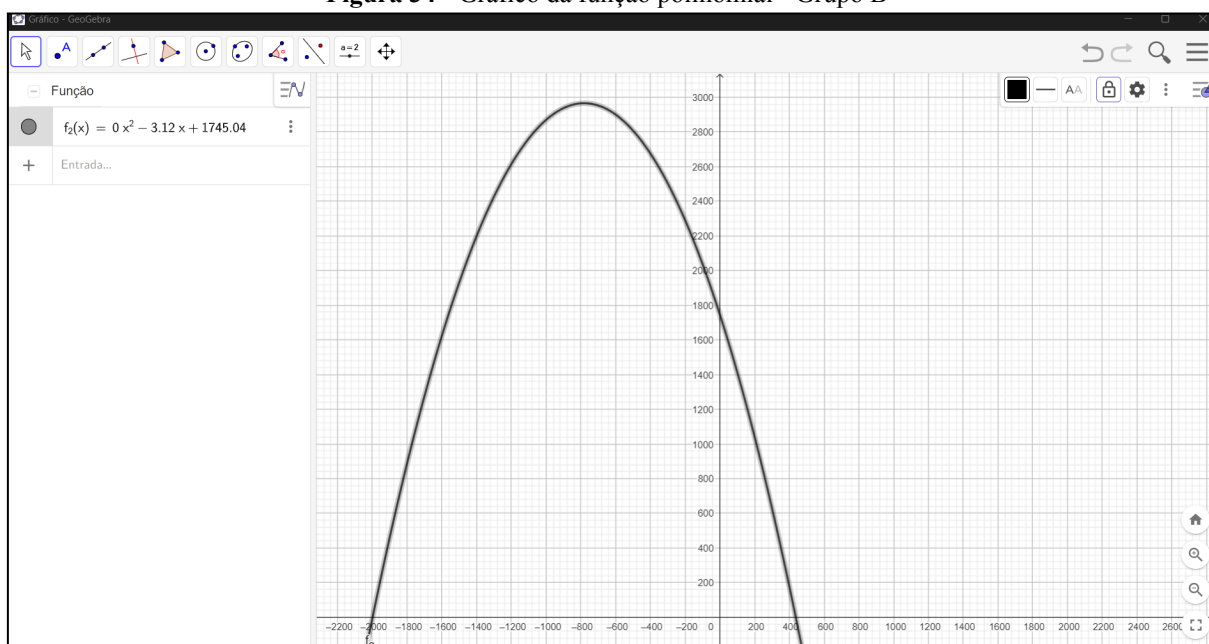
Figura 33 - Regressão polinomial - Grupo B



Fontes: Autor (2023)

Perguntamos para o grupo B, porque escolheram o ajuste de curva parabólico. Eles responderam que era a curva que eles mais sabiam analisar. E quando perguntamos sobre a função polinomial, se eles achavam que seria possível resolver o problema “levando em consideração a trajetória da peteca entre dois jogadores, há uma relação entre a distância desses jogadores e a altura em que a peteca pode atingir”. Responderam, então, que a função obtida poderia fornecer o caminho percorrido pela peteca num determinado tempo, que pelas fotos era fácil identificar a curva.

Parabenizamos eles, e pedimos para escrever a função polinomial na Janela Algébrica do GeoGebra, plotando o gráfico, mostrado na Figura 34.

Figura 34 - Gráfico da função polinomial - Grupo B

Fontes: Autor (2023)

No entanto, após repetirem três vezes a trajetória da peteca, conforme indicado pelos pontos em vermelho na Figura 31, os integrantes do grupo perceberam que o Tracker estava gerando, pela terceira vez, um gráfico de uma parábola com concavidade para cima, não representando graficamente o que almejavam. Esse acontecimento foi inesperado, levando a uma discussão com os integrantes do grupo. Os dados foram produzidos e inseridos no GeoGebra para verificar se, de fato, tratava-se de uma função quadrática com concavidade para cima.

Diferente do Tracker o GeoGebra apresentou o gráfico de uma função polinomial do segundo grau com a concavidade voltada para baixo, conforme ilustrado na Figura 34. Diante disso, adotamos o modelo matemático fornecido pelo GeoGebra para tirar conclusões sobre a situação-problema e tentar responder o problema.

Apesar de o Tracker ter apresentado uma função com concavidade para cima, o que não condizia com as expectativas, sugerimos que os estudantes encontrassem uma solução utilizando o *software* GeoGebra. Ao transferir os dados produzidos pelo Tracker para o GeoGebra, eles puderam explorar diferentes ajustes e, assim, identificar a função desejada com concavidade voltada para baixo. Essa abordagem permitiu validar o experimento, demonstrando a importância de utilizar múltiplas ferramentas e análises para aprimorar os resultados e garantir a confiabilidade das conclusões obtidas durante as atividades.

Logo, apresentamos no Quadro 15, os modelos matemáticos, apresentados pelos grupos A e B.

Quadro 15 - Função Polinomial do segundo grau no GeoGebra - Grupos A e B

GRUPO	Modelo Matemático
A	Distância de um metro e meio: $f(x) = -0,0025x^2 + 2,0727x - 507,3738$ Distância de quatro metro: $f(x) = -0,0046x^2 + 3,5804x - 1744,9517$
B	Corte veloz: $f(x) = -0,0022x^2 - 3,1241x + 1745,0385$

Fonte: Autor (2023)

Assim, como no grupo A, pedimos aos integrantes do grupo B que, encontrassem na função obtida sua fórmula reduzida e canônica, o vértice, o discriminante e as raízes de forma manual, somente, usando a calculadora, pois estavam lidando com números que não eram exatos, conforme apresentados em alguns livros didáticos.

Posteriormente, para enriquecer a experiência de aprendizado, foi introduzido o *software* GeoGebra como Experimentação com Tecnologia. Ao utilizar o GeoGebra, os estudantes puderam realizar os mesmos cálculos de forma mais eficiente, exploraram de forma visual as características, propriedades e definições da respectiva função estabelecida.

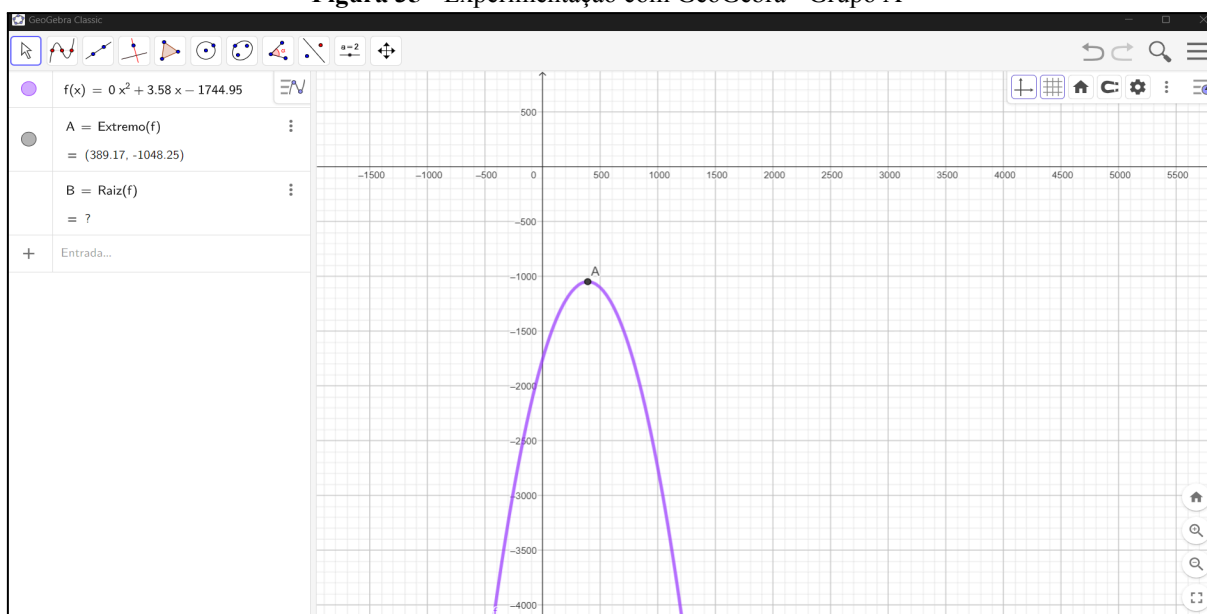
Entendemos que essa perspectiva inclui uma análise comparativa da abordagem manual e da digital, destacando a praticidade proporcionada pelas Tecnologias Digitais no contexto matemático, podendo contribuir para uma compreensão mais abrangente e integrada à *definição do problema*.

Na fase de *Integração e Validação de Resultados* da Modelagem, conforme concebido por Almeida, Silva e Vertuan (2023). Buscamos validar os cálculos realizados pelos estudantes na fase de Matematização, dos quais pedimos para que eles encontrassem manualmente o vértice, as raízes, o discriminante, a fórmula canônica e a fórmula reduzida de suas respectivas funções quadráticas, obtidas dos dados extraídos por meio do programa Tracker.

As integrantes do grupo A, realizaram esses cálculos levando em conta, somente, a primeira função polinomial (modelo matemático). Assim, esses cálculos realizados seriam, posteriormente, analisados através da Experimentação com o GeoGebra. À vista disso, a partir da Figura 35, os integrantes do grupo A validaram suas respostas com base na função: $f(x) = -0,0046x^2 + 3,5804x - 1744,9517$. Encontraram o discriminante:

$\Delta = -19,2879$. Encontraram o vértice da parábola $V(t_v, y_v) = V(389,1739, -1048,2554)$, possibilitando que achassem a Fórmula Canônica $f(x) = -0,0046(x - 389,1739)^2 - 1048,2554$. Logo, não foi possível calcular a Fórmula Reduzida, pois dependeria das raízes da função, e neste caso, a função não intersecta com o eixo das abscissas.

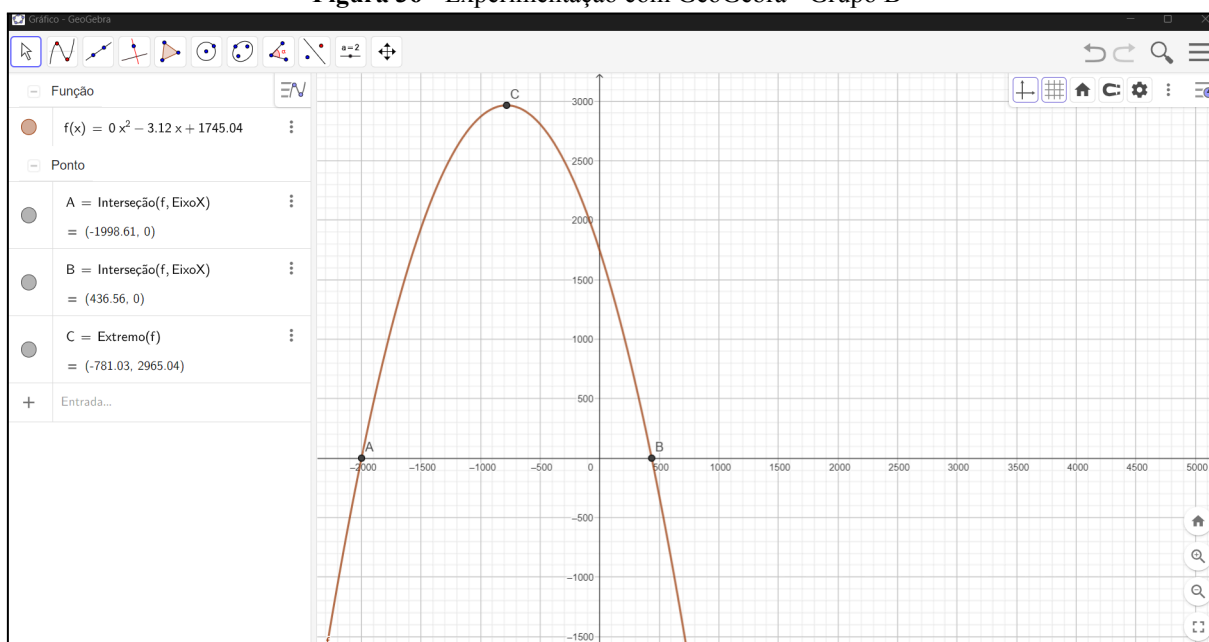
Figura 35 - Experimentação com GeoGebra - Grupo A



Fontes: Autor (2023)

Agora, na Figura 36, como resultado da função polinomial $f(x) = -0,002x^2 - 3,1241x + 1745,0385$, os integrantes do grupo B calcularam o discriminante que resultou em $\Delta = 23,7203$. Além disso, determinaram o vértice da parábola $V(t_v, y_v) = V(-781,03, 2965,04)$, possibilitando a obtenção da Fórmula Canônica $f(x) = -0,002(x + 781,03)^2 + 2965,04$. E ainda de posse das raízes $x' = -1998,61$ e $x'' = 436,56$, os estudantes obtiveram a Fórmula Reduzida: $f(x) = -0,002(x + 1998,61)(x - 436,56)$.

Figura 36 - Experimentação com GeoGebra - Grupo B



Fontes: Autor (2023)

A combinação entre cálculos manuais e ferramentas digitais não apenas fortaleceu a compreensão dos conceitos matemáticos, mas também destacou a importância da interdisciplinaridade e da integração de diferentes abordagens para organização e construção de conhecimentos matemático e extramatemático dos estudantes. Segundo Borba (2004, p. 12, grifo nosso) “de forma análoga, as câmeras, **softwares**, **lápiz-e-papel**, salas-de-bate-papo ou videoconferências são também atores, do ponto de vista da constituição do conhecimento gerado”.

Com base nos gráficos exibidos nos *slides* para todos os grupos, as Tecnologias Digitais, como os *softwares* apresentados, podem ajudar quanto à validação dos dados produzidos do fenômeno em estudo. Isso ocorre devido à facilidade de visualização das propriedades, definições e características das funções analisadas, como foi evidenciado durante o desenvolvimento da atividade.

Percebemos que apesar das inúmeras vantagens oferecidas pelas Tecnologias Digitais no contexto educacional, algumas fragilidades se tornaram evidentes durante o processo das atividades. Alguns grupos comentaram que as Tecnologias permitiu o acesso imediato à informação, e, em nosso entendimento isso pode resultar em uma dependência excessiva da resposta final, desestimulando a autonomia e o pensamento crítico dos estudantes. Além disso, a utilização inadequada das ferramentas digitais pode gerar a superficialidade no

entendimento dos conceitos, uma vez que os estudantes podem focar apenas na execução mecânica das tarefas, sem a devida compreensão teórica.

Para Chiari (2018, p. 355), o uso das Tecnologias Digitais no âmbito escolar “não é tarefa simples e que se possa fazer sem profunda reflexão. É preciso evitar cair no discurso que coloca a tecnologia digital como salvadora dos problemas educacionais.”

Outro desafio é a possibilidade de ocorrerem equívocos na interpretação dos resultados obtidos por meio das Tecnologias Digitais. Como exemplificado anteriormente, a discrepância entre as curvas geradas pelo Tracker e GeoGebra demonstrou a importância de validar e questionar os resultados, evitando interpretações precipitadas.

Após os cálculos manuais e Experimentais com Tecnologias, para melhor *Interpretação de Resultados e Validação* com base na problemática: *Levando em consideração a trajetória da peteca entre dois jogadores, há uma relação entre a distância desses jogadores e a altura em que a peteca pode atingir?*. Pedimos aos estudantes que fizessem uma tabela comparativa dos dados obtidos pelo Tracker e dos dados fornecidos pelos respectivos modelos matemáticos.

Para efeito de comparação, sob a orientação do professor/pesquisador, demonstramos aos estudantes como calcular o erro em porcentagem entre dois conjuntos de dados. Isso envolve um dado aproximado da realidade, produzido com o Tracker, e um dado proveniente do modelo matemático desenvolvido por meio da Experimentação com GeoGebra. Nessa abordagem, utilizamos conceitos estatísticos, especificamente os relacionados a Erros Numéricos, enfocando particularmente o "erro absoluto", que representa a diferença entre os dois conjuntos de dados, e o "erro relativo", usado para expressar a resposta em termos percentuais.

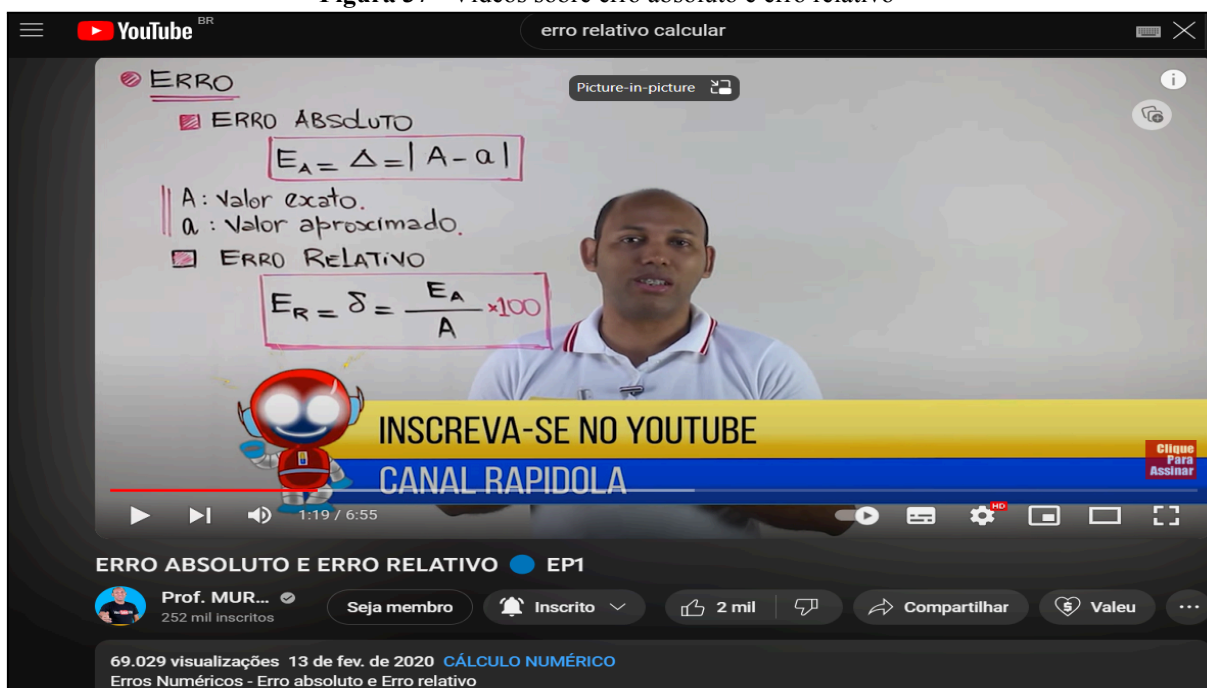
A escolha desse método se justifica pela sua capacidade de validar o controle de qualidade dos cálculos e as decisões tomadas pelos estudantes durante o estudo do fenômeno. Além disso, por se tratar de um conteúdo do ensino superior, não nos aprofundamos em detalhes teóricos, apenas instruímos os alunos sobre como realizar os cálculos utilizando as fórmulas pertinentes. Essa abordagem proporciona aos estudantes a oportunidade de entrar em contato com objetos matemáticos que não estão tradicionalmente incluídos em seus currículos escolares.

Assim, como já mencionado, a Modelagem Matemática pode proporcionar que os estudantes tenham experiências com conceitos matemáticos ou de outras disciplinas não seguindo necessariamente a linearidade propostas nos currículos escolares, possibilitando

maior aprendizagem em relação às *situações-problema* do fenômeno investigado (Rosa, 2009, 2013; Souza, 2020).

Apresentado na Figura 37, deixamos o *link* de um vídeo¹⁶ da plataforma *YouTube*, como exemplo, para os estudantes que quisessem ter mais conhecimento sobre erro absoluto e erro relativo.

Figura 37 - Vídeos sobre erro absoluto e erro relativo



Fontes: (cf. Matemática Rapidola..., 2023)

O vídeo acima apresentado pelo professor Murakami em seu canal “Matemática Rapidola”, mostra de forma rápida e objetiva como calcular os dados entre situações, neste caso, temos os dados obtidos pelo Tracker quando os estudantes traçaram a trajetória da peteca e os dados fornecidos pelo modelo matemático pelo GeoGebra. Estes dados podem ser visualizados na Tabela 1, Tabela 2 e Tabela 3.

¹⁶ Este *link* se trata de um vídeo disponível na plataforma YouTube, assim, é gratuito para o acesso a qualquer momento para os estudantes, disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=m3jstJ59aGQ>.

Tabela 1 - Primeira relação entre os dados fornecidos pelo Tracker e modelo matemático - Grupo A

t (tempo)	y (dados produzidos)	y (valores do modelo)	Erro (%)
0,000	-1,837	-1,744	5,062
0,067	-1,618	-1,522	5,933
0,133	-1,403	-1,348	3,920
0,200	-1,238	-1,212	2,100
0,267	-1,113	-1,116	0,269
0,333	-1,059	-1,062	0,283
0,400	-1,019	-1,048	2,845
0,467	-1,046	-1,076	2,868
0,533	-1,149	-1,143	0,522
0,600	-1,274	-1,253	1,648
0,667	-1,408	-1,403	0,355
0,733	-1,609	-1,592	1,056
0,800	-1,846	-1,825	1,137
0,866	-2,087	-2,094	0,3351

Fonte: Autor (2023)

Na Tabela 1, apresentamos os dados obtidos no Tracker sobre a trajetória da peteca entre dois jogadores com distância de quatro metros um do outro e os dados do modelo matemático fornecidos pelo GeoGebra, ambos os dados foram analisados pelo grupo A.

Tabela 2 - Segunda relação entre os dados fornecidos pelo Tracker e modelo matemático - Grupo A

t (tempo)	y (dados produzidos)	y (valores do modelo)	Erro (%)
0,000	-0,528	-0,507	3,977
0,075	-0,437	-0,365	16,475
0,142	-0,307	-0,263	14,332
0,209	-0,237	-0,183	22,784
0,275	-0,172	-0,126	26,744
0,342	-0,102	-0,090	11,764
0,409	-0,080	-0,077	3,750
0,475	-0,080	-0,087	8,750

0,542	-0,114	-0,118	3,508
0,609	-0,174	-0,172	1,149
0,675	-0,280	-0,247	11,785
0,742	-0,389	-0,345	11,311
0,809	-0,492	-0,466	5,284
0,875	-0,567	-0,607	7,054

Fonte: Autor (2023)

A Tabela 2 exibe os dados produzidos no Tracker referentes à trajetória da peteca entre dois jogadores posicionados a uma distância de um metro e meio um do outro. Além disso, são apresentados os dados do modelo matemático fornecidos pelo GeoGebra. Sendo estes dados submetidos à análise pelo grupo A. Os erros mais significativos foram identificados nos instantes de tempo $t = 0,075$, $t = 0,142$, $t = 0,209$, $t = 0,275$, $t = 0,342$. Essas discrepâncias podem ser atribuídas ao fato de que esses momentos representam os pontos mais próximos que os estudantes puderam marcar na trajetória da peteca.

Tabela 3 - Relação entre os dados fornecidos pelo Tracker e modelo matemático - Grupo B

t (tempo)	y (dados produzidos)	y (valores do modelo)	Erro (%)
0,000	1,901	1,745	8,206
0,667	1,587	1,527	3,700
0,133	1,298	1,292	0,400
0,200	1,046	1,038	0,700
0,267	0,753	0,767	1,800
0,333	0,489	0,481	1,600

Fonte: Autor (2023)

Na Tabela 3, encontram-se os dados registrados pelo Tracker, descrevendo a trajetória da peteca entre dois jogadores. Além disso, são apresentados os dados gerados pelo modelo matemático fornecido pelo GeoGebra. Logo, essas informações foram analisadas pelos integrantes do grupo B. Agora, os erros mais evidentes são observados nos instantes de tempo $t = 0,000$ e $t = 0,667$. E, também, essas discrepâncias são atribuídas aos pontos mais próximos demarcados pelos estudantes na trajetória da peteca.

Os dados observados dos fenômenos em estudo dos grupos A e B, apresentam um padrão que se assemelha a uma parábola, assim, consideramos que a escolha de uma função quadrática pelos estudantes, poderia ser justificada. Por exemplo, muitos processos físicos, como o lançamento de um projétil, seguem trajetórias parabólicas, conforme observado por uma integrante do grupo A. Logo, os dados experimentais fornecido pelo programa Tracker se ajustaram bem a uma parábola durante as análises, isso pode indicar que o modelo quadrático utilizado foi apropriado para descrever o fenômeno.

Os estudantes de ambos os grupos por meio da Experimentação com Tecnologias puderam fazer os cálculos manualmente e depois utilizaram as ferramentas do GeoGebra para verificar a precisão desses cálculos. Após finalizado as fases da Modelagem Matemática: *Interação, Matematização, Resolução e, Interpretação de Resultados e Validação*. Chegamos na *Situação final*, assim, ao retornar na situação inicial realizamos reflexões juntos aos grupos para responder o problema: *Levando em consideração a trajetória da peteca entre dois jogadores, há uma relação entre a distância desses jogadores e a altura em que a peteca pode atingir?*

Os estudantes notaram que, uma relação existente seria a posição da bola em determinado tempo. Assim, ao analisarem a representação da função polinomial do segundo grau $f(x) = -0,0046x^2 + 3,5804x + 1744,9517$, encontrada pelo grupo A, após marcarem a trajetória da peteca com os jogadores posicionados quatro metros de distância um do outro. Poderiam escolher o t (tempo) em segundos que conseguiriam saber a altura da peteca, por exemplo. Esse exemplo é válido, pois visualizando a Tabela 2, vemos um valor aproximado, quando a peteca estava no instante $t = 0,400$, a altura da bola (em metros) correspondia a altura máxima, ou seja, encontrava-se no ponto mais alto da parábola (vértice) no valor de $y = -1,048$, no quarto quadrante, ou seja, 2,400 metros no primeiro quadrante conforme já calculado pelos integrantes do grupo A. Todos os grupos seguiram os mesmo passos supracitados, encontrando o ponto mais alto de acordo com seus modelos matemáticos estabelecidos.

Assim, concluímos a atividade da peteca em relação à resolução do problema proposto na fase da *Interação*. Como ainda tínhamos alguns minutos disponíveis, deixamos os estudantes assistindo a um vídeo de um jogo de peteca profissional. Percebemos que todos, após investigarem sobre a peteca, ficaram animados ao ver como isso acontecia na prática.

4.4 ANÁLISE LOCAL DO DESENVOLVIMENTO DA ATIVIDADE DA PETECA, SEGUNDO AS CATEGORIAS *A PRIORI*

4.4.1 Categoria 1 (C1): Em relação às Tecnologias Digitais

Durante a fase de *Interação*, foi possível identificar diferentes Tecnologias, como a *Internet*, *WhatsApp*, *Drive*, *e-mail*, *Sites* e a Plataforma *online* Canva. A interação dos estudantes com essas ferramentas tecnológicas, mediada pelo professor/pesquisador, proporcionou aos alunos a oportunidade de buscar informações e dados relacionados à situação-problema, propiciando, assim, a Experimentação com Tecnologias nesta fase.

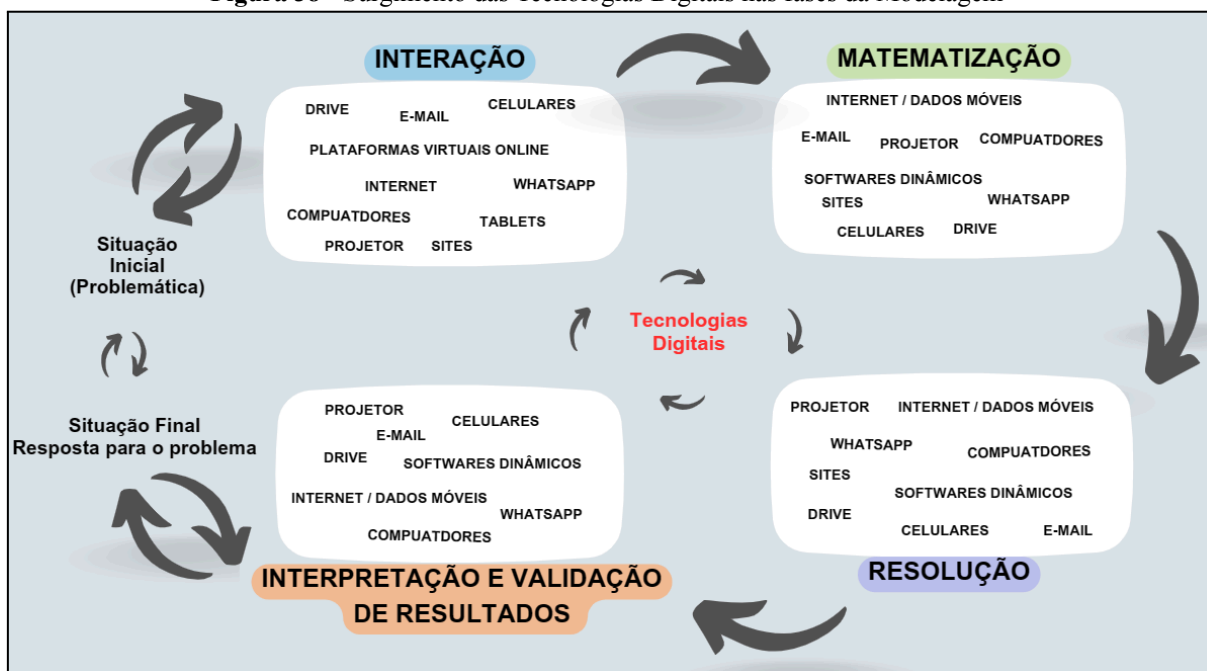
Ademais, as Tecnologias permitiram que os estudantes enviassem mensagens de forma prática, possibilitando uma comunicação rápida e, em tempo real, ajudando nas tomadas de decisões sobre a temática estudada. Foi perceptível ver nos grupos as facilidades que eles tinham em utilizar o *WhatsApp*, *e-mail* e *Drive* em seus dispositivos móveis (celulares), para enviar mensagens, vídeos e imagens sobre as informações encontradas nos *sites* pesquisados.

Nas fases de *Matematização*, *Resolução* e *Interpretação de Resultados e Validação*, ficou evidente que os estudantes demonstraram habilidades ao manipular o programa Tracker, seguindo as instruções apresentadas nos *slides*. Essa capacidade foi um ponto relevante que facilitou a condução das atividades, uma vez que a interação deles com as Tecnologias Digitais poderia representar um desafio durante essas fases da Modelagem, o que, no entanto, não se concretizou, mostrando que muitos estudantes possuem facilidade em manipular as Tecnologias (Bonafini, 2004).

No que diz respeito à utilização do *software* GeoGebra, os estudantes também evidenciaram habilidades ao utilizar esse aplicativo, juntamente com calculadoras científicas, baixadas em seus celulares, da qual possibilitaram que eles realizassem cálculos manualmente. Percebemos que conseguiram comparar, ficaram curiosos, perguntaram e interagiram. Logo, avaliamos positivamente a integração das Tecnologias Digitais nas fases da Modelagem, bem como a interação dos estudantes em relação a esses recursos tecnológicos.

Buscando mostrar de forma resumida o surgimento da Experimentação com Tecnologias em cada fase da Modelagem Matemática concebida por Almeida, Silva e Vertuan (2021), elaboramos a Figura 38, ilustrando as respectivas Tecnologias Digitais em cada fase com base nessa pesquisa.

Figura 38 - Surgimento das Tecnologias Digitais nas fases da Modelagem



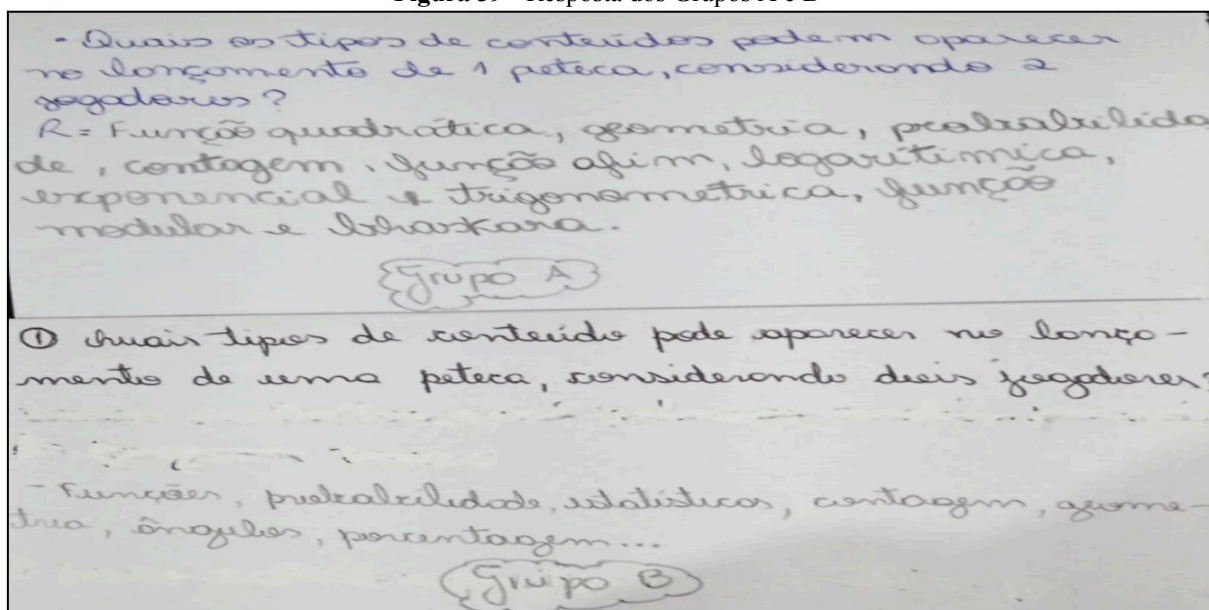
Fonte: Autor (2023)

4.4.2 Categoria 2 (C2): Em relação aos Conteúdos

Na segunda categoria a priori, C2: "Em relação aos Conteúdos", na fase de *Interação*, é possível identificar evidências de conteúdos extramatemáticos, uma vez que os estudantes estavam envolvidos na leitura e interpretação das informações relacionadas às petecas. Após essa fase, selecionavam as informações consideradas relevantes para compor o infográfico construído de maneira colaborativa, como observado durante o processo de Experimentação com Tecnologias nesta fase.

No que diz respeito às fases de *Matematização*, *Resolução* e, *Interpretação de Resultados e Validação*, nelas emergiram diferentes conteúdos matemáticos listados pelos estudantes, dos quais poderíamos estudar. Assim, foi perguntado aos alunos, quais tipos de conteúdo poderiam aparecer no lançamento de uma peteca considerando dois jogadores?. As respostas dos grupos A e B são apresentadas nas Figura 39.

Figura 39 - Resposta dos Grupos A e B



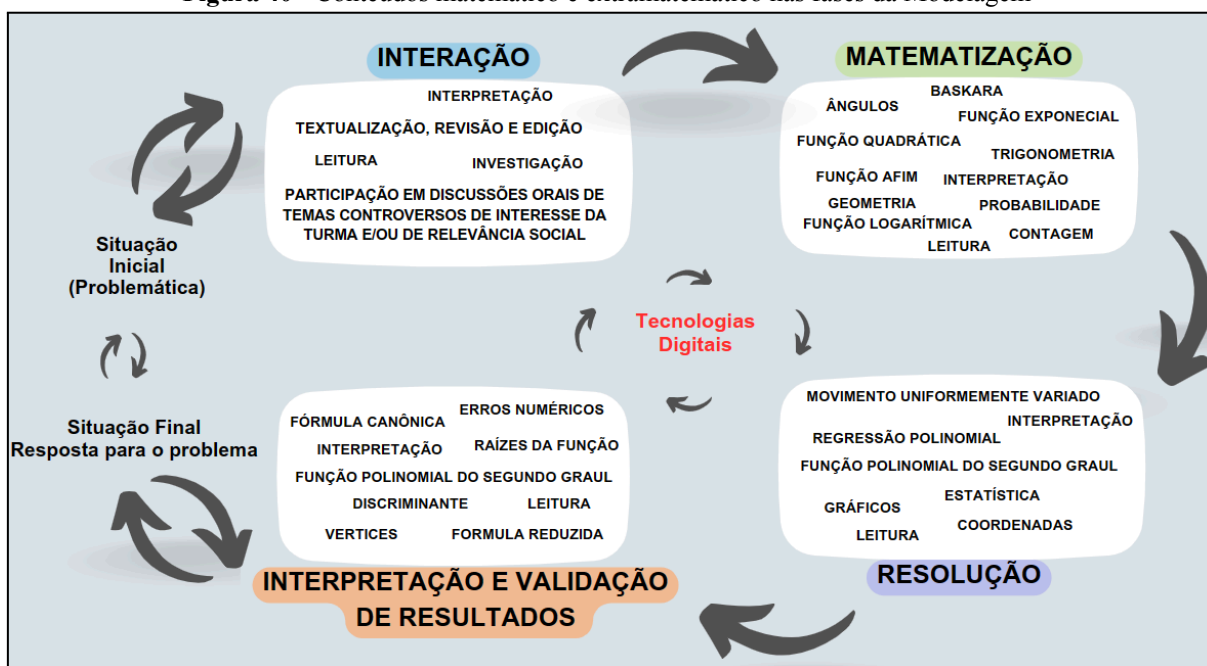
Fonte: Autor (2023)

Com base nas respostas dos estudantes, surgiram em ambos os grupos conteúdos relacionados a funções, e esse era o nosso objetivo quanto ao surgimento dos conteúdos, que eles identificassem no lançamento da peteca uma representação de parábola, conforme mencionado pela integrante Celine durante as análises. Através desse objeto matemático, proporcionamos aos estudantes a realização de cálculos matemáticos com calculadoras científicas, incentivando a identificação manual das características, propriedades e definições importantes contidas nas funções, tais como discriminantes, vértices, raízes, fórmula reduzida e fórmula canônica. Posteriormente, auxiliamos os estudantes na validação de seus resultados de maneira intuitiva e ágil no *software* GeoGebra.

Além disso, os estudantes tiveram a oportunidade de entrar em contato com conteúdo do ensino superior, como Regressão polinomial do segundo grau e, Erros Numéricos, ao validar os dados obtidos pelo Tracker e os dados do modelo matemático fornecidos pelo GeoGebra. Dessa maneira, compreendemos que tanto conteúdos matemáticos quanto extramatemáticos emergiram em diversas instâncias durante o desenvolvimento das fases de Modelagem Matemática.

Na Figura 40, mostramos de forma sucinta o surgimento de conteúdos matemático e extramatemático em cada fase da Modelagem Matemática concebida por Almeida, Silva e Vertuan (2021).

Figura 40 - Conteúdos matemático e extramatemático nas fases da Modelagem



Fonte: Autor (2023)

4.4.3 Categoria 3 (C3): Em relação às Experiências

Nesta categoria, buscamos analisar as experiências dos estudantes em relação às estratégias pedagógicas propostas neste trabalho. Isso inclui a Modelagem Matemática, de acordo com Almeida, Silva e Vertuan (2021), as Tecnologias Digitais conforme compreendidas por Kenski (2012) e Chiari (2018a, 2018b), e a Experimentação, definida por Giordan (1999). Além disso, buscamos alcançar nosso objetivo utilizando a Experimentação com Tecnologias, conforme descrito por Borba, Silva e Gadanidis (2023).

Visando iniciar os estudantes em sua experiência na situação-problema apresentada (Brincando com Petecas), projetamos algumas perguntas para que eles pudessem discutir entre seus respectivos grupos bem como se familiarizassem com a temática, conforme apresentado nas análises. Percebemos que neste primeiro contato, eles ficaram sem saber o que fazer, pois essa postura, na qual teriam que tomar decisões, ouvir outros colegas e mobilizar conhecimentos extramatemáticos, não é comum em suas aulas, especialmente em aulas de Matemática.

Neste contexto, segundo Souza (2020, p. 38)

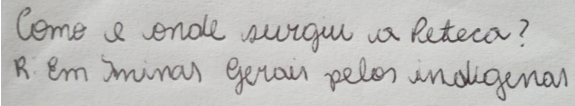
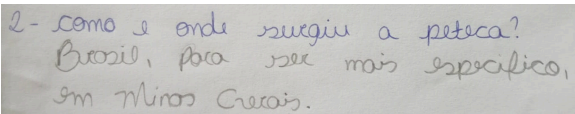
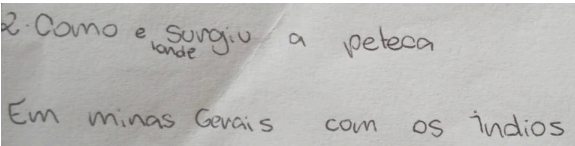
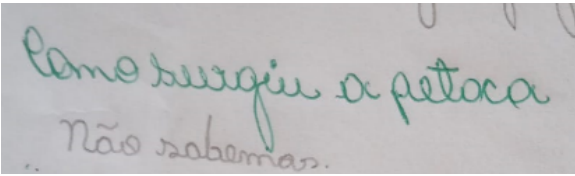
[...] em geral os alunos não estão acostumados a trabalharem desta forma, em que precisam ter uma postura mais ativa, investigativa, pois os mesmos estão acostumados com aulas em que o professor passa no quadro, dá um exemplo e eles apenas fazem os exercícios conforme o exemplo, ou seja, meros repetidores, o ensino de forma mecânica sem muitas discussões ou interação.

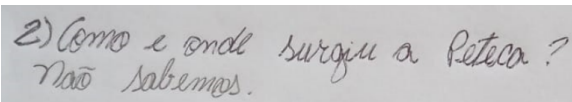
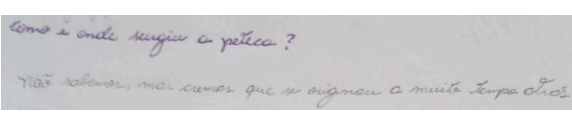
Assim, incomodados com a situação, alguns alunos perguntam quando iriam ver a Matemática na atividade. Relembramos a esses alunos que estávamos realizando uma estratégia diferente daquela à qual os professores de Matemática estão habituados, e reforçamos que os conceitos matemáticos surgiram e que eles realizariam muitos cálculos.

Neste primeiro contato com a situação-problema por meio do diálogo em seus grupos, pedimos aos estudantes que não utilizassem seus celulares para fazer pesquisas. No entanto, durante as respostas no debate entre os grupos, em que cada um teve que apresentar suas ideias, percebemos que alguns trouxeram informações que indicavam terem feito pesquisas, enquanto outros não o fizeram.

No Quadro 16, são apresentadas algumas imagens contendo as respostas dos estudantes e a transcrição dessas respostas para melhor visualização, inclusive do Grupo A e B. Assim, indagamos: "Como e onde surgiu a peteca?".

Quadro 16 - Respostas dos estudantes fase Interação - Petecas

Imagens	Respostas
	"Em Minas Gerais pelos indígenas"
	"Brasil, para ser mais específico em Minas Gerais"
	Grupo B: "Em Minas Gerais com os índios"
	"Não sabemos"

	“Não sabemos”
	Grupo A: “Não sabemos, mas cremos que se originou há muito tempo”

Fonte: Autor (2023)

Embora tenhamos incentivado os estudantes a não utilizarem seus celulares para realizar pesquisas na *internet*, em *sites* específicos ou plataformas *online*, percebemos que o uso das Tecnologias Digitais levaram os alunos a obter informações sem sair do ambiente escolar, evidenciando um aspecto positivo do uso de ferramentas digitais na sala de aula.

Com o uso das Tecnologias, percebemos que os muros da escola não representaram uma barreira física, permitindo que os alunos buscassem informações mesmo estando no Laboratório de Informática. Para Scheller (2014, p. 15) “A tecnologia digital e a modelagem proporcionam aos estudantes nos caminhos da pesquisa uma postura social ao estudarem um tema. Isto ocorre não somente pelo estudar, mas por considerar indispensável o extrapolar das fronteiras escolares com a socialização[...]”.

Outros fator que notamos os estudantes realizando Experimentação com Tecnologias foi durante sua manipulação com seus celulares e computadores. O uso do celular como ferramenta tecnológica apresentou benefícios e limitações na aprendizagem dos estudantes quando comparados com os computadores.

Nas experiências com os celulares, observamos que os estudantes enviavam rapidamente seus vídeos e imagens por meio do *WhatsApp* ao grupo, proporcionando uma comunicação instantânea. Por outro lado, o mesmo não poderia ser feito com os computadores, embora fosse possível, porém de maneira mais demorada.

No entanto, ao utilizar o Tracker e o GeoGebra, o computador se destacou pois, proporcionou uma interface ampla e a visualização de diversas funcionalidades, ao contrário do celular, onde a interface dessas tecnologias se apresentou com uma visualização limitada das ferramentas principalmente do Tracker. Além disso, houve relatos de alunos que comentaram que o Tracker e o GeoGebra travou no celular enquanto eles os manipulavam.

Em relação às experiências dos estudantes com o uso das Tecnologias como Tracker, GeoGebra, *Photomath*, Calculadoras Científicas *online* ou não para realização de cálculos matemáticos e visualização de gráficos, percebemos que a aprendizagem dos integrantes de

cada grupo se manifestou de forma mais rápida em comparação com os realizados por eles com o uso de lápis e papel.

Para Bonafini (2004, p. 42, grifo nosso)

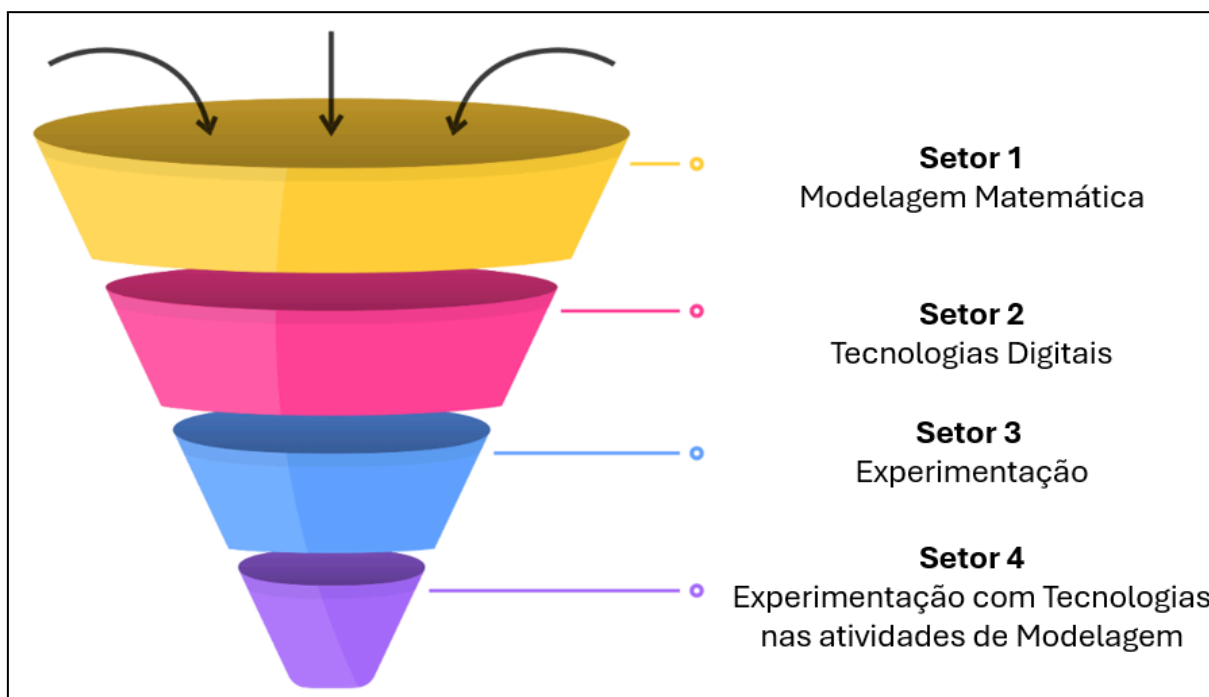
[...] analisar famílias de funções variando seus coeficientes em uma expressão algébrica, poderia ser um trabalho maçante para os estudantes, se estes se valessem somente do uso de **lápis-e-papel**. Entretanto, essa mesma atividade quando feita com uma **tecnologia informática (computador, calculadora**, entre outros), pode abrir novas possibilidades de discussões matemáticas, baseadas na visualização e na resposta fornecidas pelo instrumento em uso.

Essa aprendizagem proporcionada aos estudantes tanto por intermédio das interfaces dos programas quanto no uso de calculadoras, foi observada durante suas experiências quando:

- Inseriram e retiraram dados produzidos em tempo real de forma dinâmica;
- Analisaram seus próprios movimentos de acordo com suas filmagens brincando com a peteca;
- Exploraram conceitos relacionados ao plano cartesiano tanto no Tracker quanto no GeoGebra, como características relacionadas a posição, coordenadas (t, y), pontos, gráficos, medição, distância, números decimais;
- Transcreveram os dados da realidade para a linguagem Matemática;
- Transferiram os dados de um programa para o outro, ou seja, do Tracker para o GeoGebra;
- Tiveram contato com novos conteúdos matemáticos como regressão linear e erros numéricos;
- Calcularam a soma, diferença, divisão e multiplicação de números decimais; e
- Trabalharam com diferentes interfaces simultaneamente.

Para tanto, com base nas informações desta categoria e das análises de dados da atividade de peteca, elaboramos um esquema apresentado na Figura 41.

Figura 41 - Esquema das estratégias utilizada na pesquisa



Fonte: Autor (2023)

A Figura 41, mostra o conjunto das estratégias empregadas neste estudo. Começamos com o setor 1: Modelagem Matemática, que constitui nosso principal embasamento metodológico e teórico. Em seguida, surge o setor 2: Tecnologias Digitais.

Dentro de cada fase da Modelagem, buscamos apresentar aos estudantes diversas maneiras de utilizar esses recursos digitais, mesmo que inicialmente não tenham sido concebidos para fins pedagógicos. No setor 3: Experimentação, procuramos proporcionar experiências aos alunos com e sem o uso das Tecnologias, dependendo do momento e da tarefa em questão.

No entanto, nossa intenção era promover a Experimentação com Tecnologias. Assim, alcançamos o setor 4: Experimentação com Tecnologias nas atividades de Modelagem Matemática. Por meio desse setor, buscamos realizar esta atividade (Brincando com Petecas) como parte dos resultados para contemplar nossos objetivos.

CAPÍTULO 5

DESCRIÇÃO E ANÁLISE DE DADOS

5 SEGUNDA PARTE: TRABALHANDO A ATIVIDADE DOS DARDOS MAGNÉTICOS

5.1 TERCEIRO ENCONTRO (MOMENTO 2)

Neste segundo momento do terceiro encontro, iniciamos o desenvolvimento da atividade "**Lançando Dardos Magnéticos**". Informamos aos estudantes que tínhamos levado dois conjuntos de dardos magnéticos, nos quais eles poderiam realizar as atividades propostas. Inicialmente, para abordar a *Situação Inicial (Problemática)*, iniciamos a fase da *Interação*. Fizemos algumas perguntas sobre quem já havia lançado dardos magnéticos e se eles sabiam o que era.

Após algumas reflexões de estudantes que já haviam lançado dardos, exibimos em um *slide* projetado uma fotografia do jogo de dardos magnéticos que seriam utilizados, conforme ilustrado na Figura 42.

Figura 42 - Fotografia dos Dardos Magnéticos

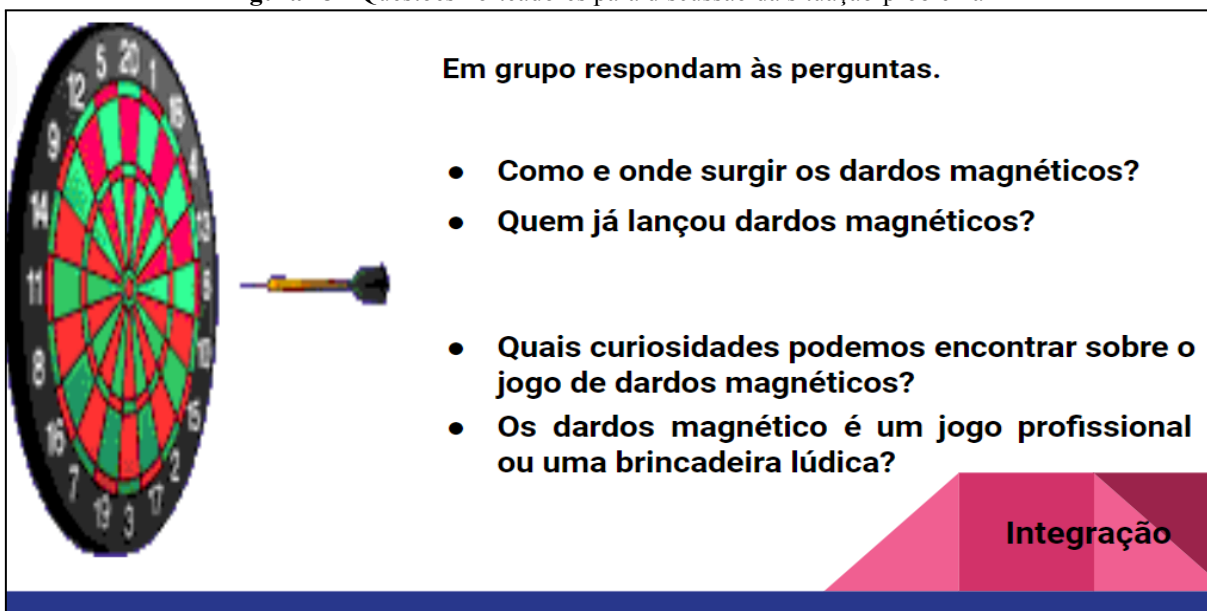


Fontes: Autor (2023)

Sugerimos que os estudantes, em seus respectivos grupos, discutissem sobre os dardos magnéticos, buscando despertar neles a curiosidade e o espírito de participação. Nesse contexto, eles realizaram debates entre os integrantes de seus próprios grupos, abordando questões que poderiam auxiliá-los na troca de informações sobre os dardos magnéticos. Esta é

uma abordagem realizada por autores da Modelagem (Almeida; Silva Malheiro, 2019; Araki: Kato, 2022), com o intuito de orientar os estudantes nesta tarefa apresentamos as seguintes perguntas em *slide*, conforme a Figura 43.

Figura 43 - Questões norteadoras para discussão da situação-problema



Em grupo respondam às perguntas.

- Como e onde surgir os dardos magnéticos?
- Quem já lançou dardos magnéticos?
- Quais curiosidades podemos encontrar sobre o jogo de dardos magnéticos?
- Os dardos magnético é um jogo profissional ou uma brincadeira lúdica?

Integração

Fonte: Autor

Compreendemos que as perguntas apresentadas na figura acima poderiam orientá-los, auxiliando no ponto de partida. Posteriormente, poderiam escolher quais outras informações gostariam de apresentar, além das questões sugeridas inicialmente.

Durante as discussões em grupo, os integrantes dos grupos A e B demonstraram grande interesse na atividade que estava por vir. Cássio falou: "*Professor, eu tenho o jogo de dardos, porém não é magnético, é de pontuação*". Em seguida, perguntamos a Cássio se ele já havia pensado nos objetos matemáticos que poderiam estar presentes no lançamento, e ele afirmou que não.

O diálogo com Cássio é um exemplo de que não é comum que os estudantes pensem diretamente na Matemática ao realizar atividades extraclases. Assim, compreendemos a importância da Modelagem Matemática, que pode proporcionar aos alunos a integração entre os conteúdos matemáticos aprendidos em sala de aula e as diversas realidades que podem ser vivenciadas por eles ou não. Sendo este um fator que pode ajudar os estudantes a enxergarem a Matemática presente em suas realidades, como percebemos que aconteceu em trabalhos como Barbosa 2001, Araújo (2002), Borsoi (2013), Araki (2020) e Santos (2020).

Para Almeida e Malheiros (2019), na escola, a experimentação é um processo que permite ao estudante envolver-se com o conteúdo em estudo, levantar hipóteses, procurar alternativas, avaliar resultados e participar das descobertas e socializações com seus pares. Desta forma, as atividades experimentais possuem um caráter motivador, promovendo o raciocínio, a reflexão, a construção do conhecimento e uma melhor compreensão das etapas de ação das ciências.

Assim, após a conclusão das discussões nos grupos, solicitamos que apresentassem aos demais o que haviam debatido sobre o jogo de dardos. Ao questionar o Grupo A sobre as ideias e informações discutidas, Celine respondeu: *“Professor, nós não sabemos muita coisa sobre esse jogo, e nenhuma de nós jogou.”* Beatriz acrescentou: *“Sabemos que é uma brincadeira infantil e divertida, mas não sabemos nenhuma curiosidade”* Em seguida, Ana complementou *“No final, concluímos que esta versão de dardo magnético é mais didática e pode ser utilizada nas escolas, já que sua versão original tem pontas e poderia ferir um aluno.”*

Parabenizamos o grupo pela percepção, pois, mesmo sem possuir um amplo conhecimento sobre os dardos, destacaram um ponto muito positivo sobre o jogo, indicando que dardos com pontas não seriam aconselháveis para atividades escolares por serem "perigosos". Após as apresentações dos demais grupos, o Grupo B manifestou-se, com Arthur dizendo: *“Professor, não temos informações sobre o jogo, concordamos com os outros grupos que este jogo é divertido e achamos que podemos encontrar Matemática nele”*. Em seguida, questionei se alguém já havia brincado com o jogo, e Cássio respondeu: *“Só eu, professor, eles [referindo-se aos outros integrantes de seu grupo] ainda não brincaram”*.

Durante as discussões, notamos que o tema não foi fácil de ser debatido entre os grupos. Como o jogo de dardos não é comum entre eles, as informações eram limitadas, sendo apenas a percepção de que o jogo parecia ser interessante e divertido. Nenhum grupo trouxe curiosidades, como a confecção do jogo ou a tradição em diferentes países. Mesmo após perguntarmos individualmente, nenhum grupo tinha essas informações. Ao questionar o Grupo A sobre se a falta de informações desmotivou o grupo em relação à atividade, Daiane respondeu: *“Na verdade, mal podemos esperar para pesquisar sobre os dardos, pois parece ser uma brincadeira bastante antiga”*.

Observamos que os conhecimentos extramatemáticos, normalmente explorados nesta fase (*Interação*), não se desenvolveram conforme esperávamos, devido à falta de

familiaridade dos estudantes com a *Situação Inicial* (dardos magnéticos). Diante disso, redirecionando o foco dos grupos para a etapa de Experimentação com Tecnologias, sugerimos que cada grupo utilizasse a plataforma *online* Mentimeter, na tentativa de proporcionar um trabalho colaborativo para facilitar a interação entre todos os grupos.

Dessa forma, na realização dessa tarefa cada grupo pôde pesquisar informações sobre os dardos e, ao mesmo tempo, compartilharam suas descobertas na tela projetada onde apareciam as informações do Mentimeter, permitindo que todos os outros grupos visualizassem. Os *sites* utilizados foi uma decisão que partiu de todos os grupos, assim, decidiram buscar suas informações nas seguintes bases de informações *online*.

- i) <https://pt.wikipedia.org/wiki/Dardos>;
- ii) <https://psycatgames.com/pt/magazine/party-games/darts/>;
- iii) <https://blog.jogajunto.net/dardos-conheca-o-popular-esporte-de-precisao/>.

Pedimos para os estudantes escolherem os *sites* de busca para incentivar o protagonismo e a exploração dos estudantes em relação às Tecnologias Digitais. O trabalho em equipe de forma colaborativa demonstrou que eles são capazes de tomar decisões com ou sem a interferência do professor. Nesse contexto, nosso objetivo era ouvir suas opiniões sobre os *sites* escolhidos e observar o ambiente de interação que poderia ser estabelecido entre eles e as Tecnologias.

Após a discussão sobre a seleção dos *sites*, os estudantes foram convidados a pesquisar diversas questões relacionadas aos dardos magnéticos, apresentadas na Figura 44. Cada grupo foi encarregado de analisar e decidir quais informações seriam compartilhadas no Mentimeter, com o intuito de criar um quadro de dados para posterior debate entre todos os grupos.

Figura 44 - Questões para a atividade colaborativa na plataforma *online* Mentimeter

Atividade Colaborativa: Acessar o Menti.com e responder às questões, como atividade colaborativo, simultaneamente, com os outros grupos:

- a) Contexto histórico;
- b) Curiosidades;
- c) Esportividade (regras);
- d) Tipos de dardos;
- e) Quais países tem tradição?



- Utilizem as Tecnologias Digitais (sites confiáveis) que acharem necessárias para obter informações sobre os dardos magnéticos.

Link Mentimeter: <https://www.menti.com/>

Integração

Fonte: Autor (2023)

Ao contrário da plataforma online Canva, o Mentimeter apresentou uma limitação na identificação das respostas dos grupos A e B. Infelizmente, devido a essa especificidade, não conseguimos rastrear e distinguir claramente as contribuições específicas de cada grupo nessa ferramenta.

Esse fato evidenciou que as Tecnologias podem ser grandes aliadas quanto ao seu uso educacional, porém, existem limitações nestas ferramentas digitais aos quais os professores precisam ficar atentos, e assim, buscarem novas iniciativas, pois não podemos ver a Tecnologias como solução de todos os problemas (Kenski, 2012; Chiari, 2018).

Entretanto, conseguimos debater e fazer reflexões entre todos os integrantes em uma roda de conversa sobre as respostas projetadas nos *slides*, conforme exemplificado por uma das respostas às perguntas apresentadas, na Figura 45.

Figura 45 - Respostas às atividades colaborativas na plataforma Mentimeter

Fonte: Autor (2023)

À medida que recebíamos as respostas, percebemos que algumas delas se repetiam. Dessa maneira, optamos por selecionar a primeira página de respostas gerada em *PDF* pelo Mentimeter. No total, foram recebidas 21 respostas, considerando todos os grupos que somavam 44 estudantes. Alguns estudantes responderam utilizando o celular do pesquisador/professor ou de outros colegas, assim, mais de uma resposta foram contabilizadas em uma única conta.

Ao passo que debatíamos sobre as respostas, os estudantes conseguiam refletir sobre as informações produzidas e expostas para todos, validando ou não suas hipóteses sobre as questões levantadas. Além disso, a Experimentação com Tecnologias neste momento pôde ser evidenciada, pois os estudantes estavam diretamente envolvidos na utilização da plataforma Mentimeter, interagindo com suas funcionalidades, respondendo perguntas e compartilhando suas reflexões. Outros aspectos que podemos apontar sobre a Experimentação com Tecnologias, as quais também evidenciados por Almeida, Silva e Borssoi (2021) foram o ambiente colaborativo, as respostas em tempo real, as tomadas de decisões autônomas e posteriormente em grupo.

À vista disso, buscando finalizar terceiro encontro, na fase de *Interação*, tofos os grupos em debate elabora a *Definição do problema*, a saber: “***Levando em consideração o lançamento dos dardos magnéticos, qual relação matemática podemos identificar em sua***

trajetória a partir do momento em que saem da mão de um jogador até atingirem o alvo circular?”.

Na justificativa para a escolha do problema, eles relataram o desejo de revisar o passo a passo de como encontrar uma relação matemática na trajetória dos dardos magnéticos. Ou seja, queriam descobrir que função poderia emergir, além de expressarem o interesse em usar o Tracker e o GeoGebra novamente.

5.2 QUARTO ENCONTRO

No quarto e último encontro, que ocorreu numa terça-feira, em 27/3/2023, buscamos retomar algumas reflexões sobre a fase *Interação*. Com o intuito de despertar o interesse dos estudantes para a *Situação Inicial* "Lançando dardos magnéticos", realizamos um sorteio por meio da plataforma *online*, Sorteador¹⁷, conforme a Figura 46. Para isso, elaboramos oito perguntas, correspondendo ao total de grupos formados, numerados sequencialmente de um a oito. Por decisão da turma, os números sorteados poderiam se repetir, pois acreditavam que a probabilidade de um grupo ficar sem responder seria maior. Nesse formato, cada grupo teria que responder uma ou mais perguntas caso fosse escolhido novamente.

Figura 46 - Sorteador de números



Fonte: Autor (2023)

¹⁷ Disponível em: <https://sorteador.com.br/>. Acesso em: 27 jun. 2023.

Refletindo sobre as perguntas que apresentaríamos, nosso objetivo era incentivar os estudantes a construírem seus conhecimentos extramatemáticos relacionados à *definição do problema* como defendem Almeida e Silva Malheiro (2019). Formulamos as seguintes questões: Qual a altura indicada para posicionar o alvo circular? Qual a distância adequada para o lançamento dos dardos magnéticos? Conseguiriam identificar um objeto matemático presente no lançamento do dardo magnético? O vento pode interferir na trajetória do dardo magnético após seu lançamento? Quais objetos matemáticos poderiam ser explorados em conjunto com as Tecnologias Digitais, como Tracker e GeoGebra? Além da Matemática, qual disciplina poderia ser relacionada para explicar a definição do problema? Considerando que nossa *Situação Inicial* envolve o lançamento de dardos magnéticos, qual seria a *definição do problema* formulada no encontro anterior? Como o trabalho colaborativo pode contribuir para a resolução da atividade proposta, ou seja, a *definição do problema*?

As perguntas foram escritas separadamente e colocadas em um boné de um dos estudantes. Assim, conforme os números eram sorteados no Sorteador *online*, um integrante do grupo sorteava no boné a pergunta a ser respondida. A sequência de números sorteados foi: 1, 1, 5, 7, 8, 3, 3, 2. Os grupos denominados pelos números 4 e 6 não responderam a nenhuma questão; no entanto, todos os grupos, inclusive esses dois, discutiram sobre os temas sorteados.

Os estudantes mostravam-se interessados na dinâmica e atentos à projeção dos números sorteados no *slide*. Entendemos que essa dinâmica permitiu aos estudantes refletirem sobre a atividade, pois puderam retomar pontos importantes que os auxiliariam na elaboração e validação de conjecturas sobre a temática.

Neste viés, para Roxa, Silva e Akira (2023, p. 106)

Dada a possibilidade de construção de conhecimentos, entendemos que, em uma atividade de modelagem matemática a partir de experimentos, torna-se imperativa a participação dos estudantes nos processos investigativos, de forma a oportunizar momentos de discussão e trocas de conhecimentos. Logo, a comunicação se constitui enquanto um aspecto relevante para a atividade

Durantes as respostas, percebemos que todos os grupos interagem entre si, haviam troca de ideias, tentando responder e/ou ajudar outros grupos a responderem.

Iniciando a fase de *Matematização*, convidamos os estudantes a irem ao pátio da escola ou à quadra coberta para realizar as filmagens sobre os lançamentos de dardos magnéticos com seus respectivos grupos. Como a quadra estava sendo lavada, e ventava

muito naquele momento devido ao mau tempo naquele dia, os estudantes optaram por realizar suas filmagens sob a orientação dos professores no Laboratório de Matemática ou em duas salas de aula que estavam disponíveis.

Na sala de aula, nos dirigimos ao grupo A para perguntar como as integrantes do grupo iriam posicionar o board (alvo circular) e a que distância iriam se posicionar para os lançamentos.

Daiane falou: “*Professor, iremos posicionar o alvo circular a uma altura de 1,73m e faremos uma faixa a 2,37m de distância do alvo, pois esses são os dados que discutimos hoje mais cedo*”. Assim, Ana complementou: “*Professor, anotamos esses dados justamente para quando fossemos gravar os vídeos*”. Novamente, neste diálogo, percebemos que o grupo A estava atento e anotando as discussões sobre os dardos, o que facilita e potencializa a construção de seus conhecimentos extramatemáticos.

Deixamos o grupo A se organizando enquanto nos dirigimos para o grupo B. Após perguntarmos sobre a altura e a distância dos lançamentos dos dardos, os integrantes demonstraram que também anotaram as medidas, pois, segundo eles, sabiam que iriam utilizá-las para as gravações.

Observamos que os estudantes enfrentavam desafios ao lançar os dardos magnéticos, pois, embora parecesse fácil o lançamento de dardos exigia um pouco de preparação. Com o intuito de superar essas dificuldades, incentivamos a prática prévia antes de iniciar as gravações dos vídeos. Embora os lançamentos se assemelhavam aos realizados com as petecas, este jogo demandava mais precisão, pois exigia acertar o alvo circular com apenas 451 mm de diâmetros.

Após um período, dirigimo-nos ao grupo A para verificar o andamento das filmagens e se as integrantes já estavam contemplando a *definição do problema*. Ana afirmou: “*Sim, como queremos utilizar o Tracker e o GeoGebra para aprofundar nossos conhecimentos sobre eles, iremos analisar a trajetória parabólica que o dardo faz*”. Indagamos sobre o método que estavam considerando, e Beatriz respondeu: “*Se optarmos por um lançamento não muito rápido, acreditamos que poderemos identificar uma função do segundo grau na trajetória do dardo*”. Parabenizamos o grupo, buscando incentivar as reflexões que estavam experimentando por meio do trabalho colaborativo, pois haviam testado algumas hipóteses extramatemáticas e já estavam avançando para os conhecimentos matemáticos que poderiam estar envolvidos no lançamento dos dardos magnéticos.

Para Giordan (1999, p. 6)

A formação de um espírito colaborativo de equipe pressupõe uma contextualização socialmente significativa para a aprendizagem, tanto do ponto de vista da problematização - temas socialmente relevantes -, como também da organização do conhecimento científico - temas epistemologicamente significativos. Novamente, ao professor é atribuído o papel de líder e organizador do coletivo, arbitrando os conflitos naturalmente decorrentes da aproximação entre as problematizações socialmente relevantes e os conteúdos do currículo de ciências.

Quando as integrantes do grupo A expressaram o desejo de explorar as possibilidades do objeto matemático (função polinomial do segundo grau), atenderam às nossas expectativas. Ao planejarmos essa atividade de lançamento de dardos magnéticos, imaginamos que os alunos poderiam explorar novamente a representação das funções quadráticas, evidenciando que esse conteúdo pode ser abordado de diversas formas no cotidiano dos estudantes.

Para os Parâmetros Curriculares Nacionais - Ensino Médio

Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para **lidar com o conceito de função em situações diversas** e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática (Brasil, 2000, p. 43 - 44, grifo nosso).

A escolha da função do segundo grau como objeto matemático também foi adotada pelo grupo B. Eles observaram que, ao lançar os dardos magnéticos, o movimento representava também uma parábola, como ocorreu com as petecas. Bruno ressaltou: "*estamos tentando lançar os dardos na mesma altura do centro do board [alvo circular], para que eles sigam em linha reta, porém eles [dardos magnéticos] sempre fazem uma curva*". Logo, quando passamos pelos outros grupos percebemos que a escolha de estudar a função polinomial do segundo grau foi adotada por todos, sendo que a maioria expressou o desejo de utilizar novamente o Tracker e o GeoGebra.

Após as Experimentações realizadas por meio dos lançamentos entre os integrantes de cada grupo, os estudantes foram convidados a voltar ao Laboratório de Informática para analisarem seus vídeos sob a orientação do professor/pesquisador, além de dar continuidade às suas análises. Os estudantes baixaram o vídeo dos lançamento dos dardos magnéticos para

o *drive* para posteriormente baixar no computador da escola, enquanto outros estudantes optaram em baixar pelo *Whatsapp*.

Conforme mencionado anteriormente, os estudantes compartilharam os computadores para garantir que todos pudessem utilizá-los, dada a escassez de equipamentos com acesso à *internet* no Laboratório de Informática da escola. Outros estudantes optaram por utilizar seus celulares, que tinham acesso à *internet* por meio de dados móveis, e ainda outros alunos utilizaram novamente seus celulares, usando os dados móveis do professor/pesquisador.

Prosseguindo com o desenvolvimento da atividade, apresentamos no Quadro 17 as hipóteses formuladas pelos estudantes, juntamente com as variáveis que surgiram durante a Experimentação, desde a fase de *Interação* até a atual fase, *Matematização*. Tais hipóteses e variáveis supracitadas foram produzidas durante as discussões dos estudantes em seus grupos e registradas pelo professor/pesquisador.

Quadro 17 - Hipóteses e variáveis elaboradas pelos grupos A e B

GRUPO ↓	HIPÓTESES	VARIÁVEIS
A	- Ao lançar os dardos magnéticos sua trajetória lembra uma parábola; - As parábolas nunca é a mesma; - O vento pode interferir na jogada do dardo devido à massa do objeto; - Consideramos que a resistência do ar não afeta o lançamento; - Não pegar impulso no lançamento, ou seja, não deve levar o braços para trás, somente, o antebraço faz o movimento; - A função quadrática e a função polinomial do segundo grau referem-se à mesma coisa. A função quadrática é um tipo específico de função polinomial, e é chamada assim porque o termo de maior grau na expressão da função é elevado ao quadrado.	Fórmula no Tracker $f(t) = at^2 + tb + c$ $f(t)$: representa a altura do dardo magnético em relação ao solo no tempo t. t: é a variável que representa a posição horizontal do dardo. a, b e c: representam coeficientes reais.
B	- Lançar os dardos magnéticos na mesma altura que o centro do alvo circular; - Quando os dardos são lançados devagar eles tendem a fazer um movimento parabólico; - No lançamento o pé que vai na frente tem que ser do mesmo lado da mão que vai lançar; - Os dois olhos devem permanecer aberto durante o lançamento e não somente um dos olhos;	m = Metro cm = Centímetro $g = 9,8 \frac{m}{s^2}$: aceleração da gravidade.

Fonte: Autor (2023)

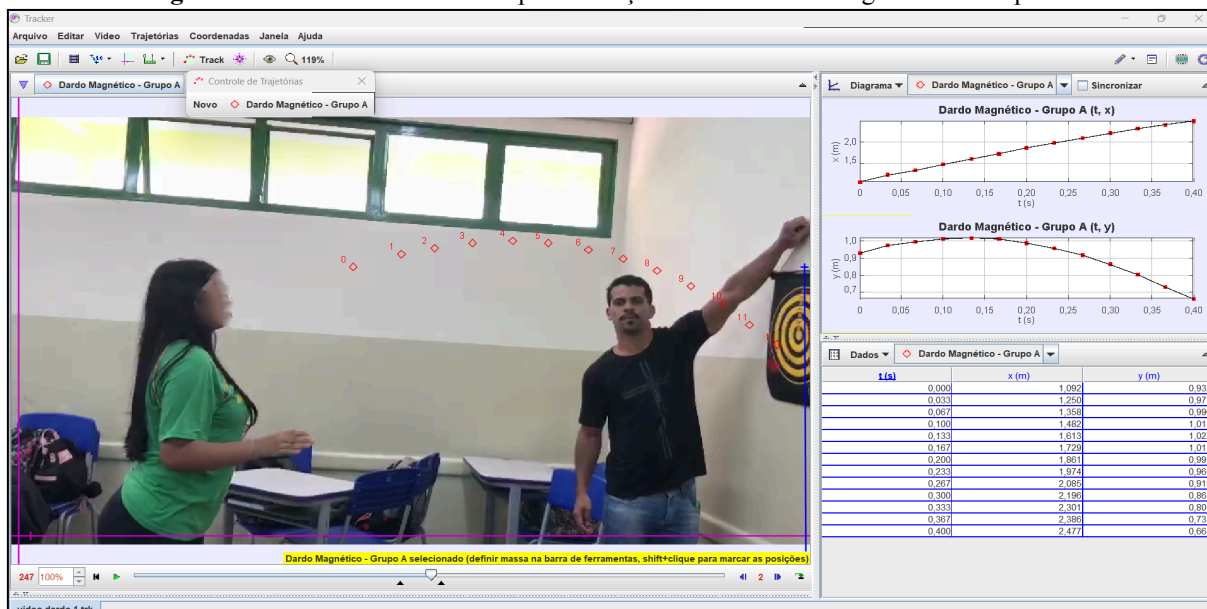
Dando continuidade à atividade, os grupos seguiram o passo a passo para importação dos vídeos no programa Tracker, cada integrante com seu respectivo grupo. Mais uma vez, disponibilizamos as instruções projetadas no *slide* para que pudessem consultá-las e esclarecer

suas dúvidas, promovendo assim a autonomia dos estudantes em relação às tomadas de decisão de maneira individual ou em equipe. Para Biembengut (2012, p.) a Modelagem “propicia aos estudantes capacidade para utilizar matemática na solução de problemas e tomada de decisão em outras áreas de conhecimento e diferentes contextos, fora dos limites escolares.”

Dando início à fase de *Resolução*, as integrantes do grupo A, com seus vídeos já baixados no programa Tracker, começaram a realizar os “ajustes de corte” nos vídeos. Essa ferramenta permitiu que eles traçassem a trajetória dos dardos em um determinado espaço de tempo, possibilitando que as estudantes recortassem o melhor lançamento num espaço de tempo. Podíamos observar que o grupo realizava as ações com destreza, ou seja, percebemos que elas tinham habilidade manual para realizar as tarefas com precisão e eficiência na interface do programa.

Após esse processo, o grupo continuou utilizando a fita métrica para identificar a altura do alvo circular. Em seguida, utilizaram as coordenadas (t, y) e finalizaram com a captura da trajetória dos dardos magnéticos, conforme mostra a Figura 47.

Figura 47 - Print de tela com a Experimentação com os dardos magnéticos - Grupo A



Fonte: Autor (2023)

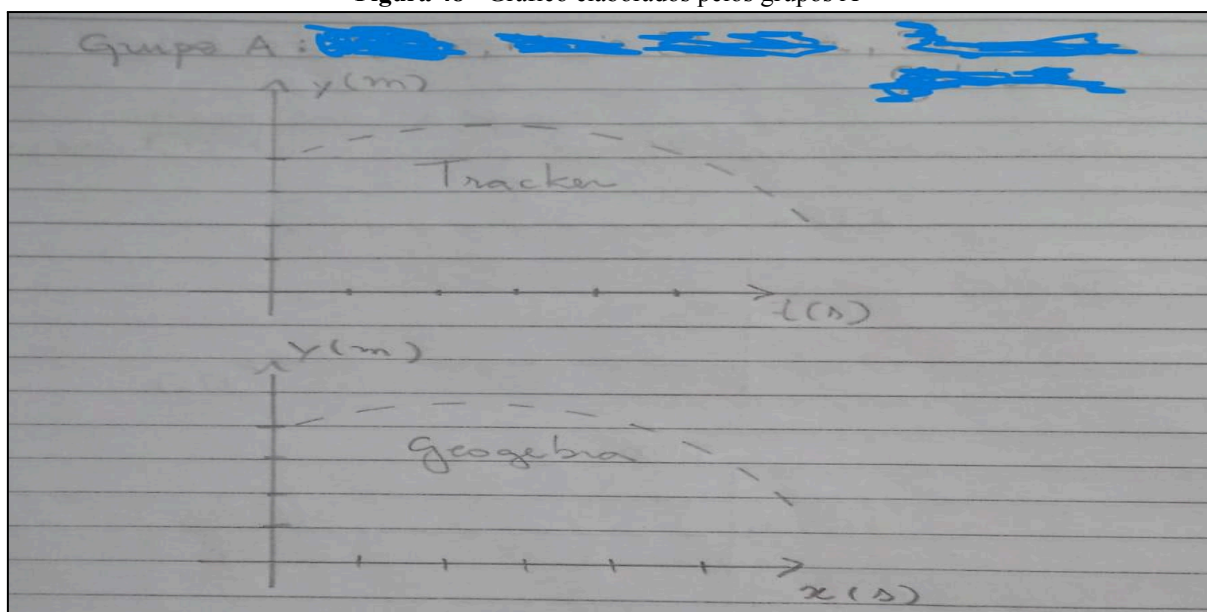
Dado não haver um espaço adequado na sala de aula para posicionar o alvo circular, o professor/pesquisador segurou-o, proporcionando assim um suporte para que os estudantes

pudessem gravar seus vídeos. Essa atitude foi essencial para prevenir lançamentos próximos às janelas de vidro, garantindo a segurança e o bom desenvolvimento da atividade.

Iniciando a atividade no Tracker, o grupo A rapidamente percebeu que trabalhariam novamente nesta atividade com as coordenadas (t, y) , sendo que no programa Tracker, "t" é a representação do tempo em segundos (s) representado pela reta horizontal e "y" representa o espaço percorrido em metros (m) representado pela reta vertical. Ou seja, as coordenadas (t, y) no Tracker seriam equivalentes às coordenadas (x, y) no GeoGebra.

Com a finalidade de não se perderem nas representações e cálculos na utilização das coordenadas de ambos os programas, como foi no caso da atividade da peteca, o grupo A elaborou dois gráficos como rascunho, em que poderiam consultá-lo sempre que tivessem dúvidas sobre as coordenadas, como mostra a Figura 48.

Figura 48 - Gráfico elaborados pelos grupos A

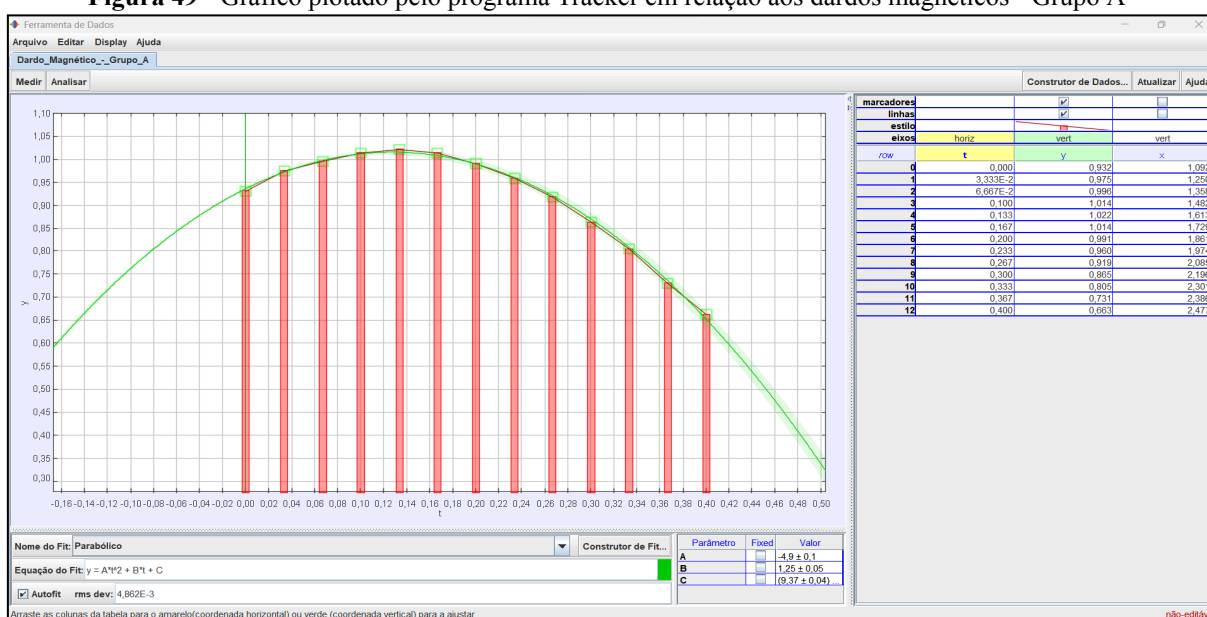


Fonte: Autor (2023)

Ao questionarmos as integrantes do grupo A sobre como foi realizar a marcação da trajetória dos dardos magnéticos, Ana afirmou: "*Foi desafiador, mas conseguimos*". Beatriz acrescentou: "*Diferentemente das petecas, que não se movem tão rapidamente, os dardos têm mais velocidade, o que dificultou a marcação*". Observamos que todos os grupos tiveram que se esforçar mais para realizar a demarcação da trajetória dos dardos magnéticos; no entanto, todos conseguiram concluir essa primeira etapa.

Após concluírem a primeira etapa em relação ao Tracker, o grupo A avançou para a segunda etapa, que consistia na escolha do ajuste da curva no programa Tracker. As integrantes seguiram os seguintes passos: clicaram na opção "Analisar", depois em "Ajuste de Curva" e selecionaram a opção "Parabólico". Dessa forma, o programa gerou a representação de uma função polinomial do segundo grau na cor verde, como ilustrado na Figura 49. Além disso, no gráfico, é possível observar que o grupo A estava considerando diferentes opções. Por exemplo, ao clicarem em "estilos" no canto superior direito, optaram pelo formato de "barra" na cor vermelha para representar as coordenadas (t, y).

Figura 49 - Gráfico plotado pelo programa Tracker em relação aos dardos magnéticos - Grupo A



Fonte: Autor (2023)

Durante todo o processo de construção do gráfico mencionado acima, as integrantes do grupo A, ao se envolverem na Experimentação com Tecnologias através do Tracker, discutiram e refletiram sobre suas escolhas e ações dentro do programa, bem como compararam suas conjecturas com outros grupos para garantir que estavam seguindo a mesma linha de resolução para a problemática.

Além disso, os estudantes conseguiram se familiarizar com o *design* intuitivo do Tracker, realizando tarefas semelhantes às da atividade com a peteca e explorando ainda mais outras capacidades do programa. Borba, Silva e Gadaniadis (2023, p. 55-56) relatam

[...] exploramos a noção de experimentação com tecnologias ao buscarmos atribuir um *design experimental* a uma atividade matemática. Desta forma, buscamos formar

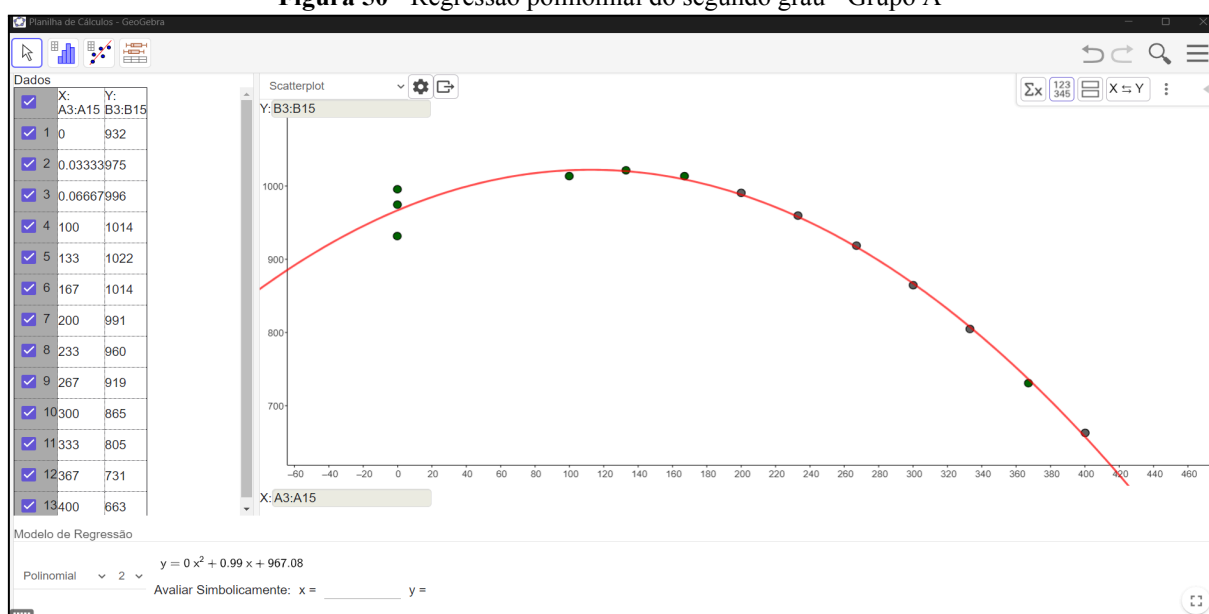
cenários de investigação matemática, ou seja, um ambiente heurístico, de descobertas, de formulação de conjecturas acerca de um problema e busca por possíveis e diversificadas soluções.

Após esse cenário de Experimentação com o Tracker, todos os grupos foram convidados a transferir os dados produzidos por meio da trajetória dos dardos magnéticos para o *software* GeoGebra. Neste momento, disponibilizamos, por meio de *slides*, o passo a passo para que todos realizassem essa transferência de maneira intuitiva.

Prosseguindo com o passo a passo para encontrar a regressão polinomial do segundo grau e seu respectivo gráfico, os grupos seguiram as seguintes etapas: copiaram os dados das coordenadas (t, y) do Tracker. Em seguida, abriram o GeoGebra e foram em "Disposição", nas três barras no canto superior esquerdo da tela do Geogebra, conforme mostra a Figura 50, escolhendo a opção "Planilha de Cálculos". Dentro da planilha, colaram os dados do Tracker e, depois, selecionaram esses dados.

Seguindo, foram então até a opção "Análise Bivariada" no canto superior direito da tela. Continuando, os estudantes escolheram o ajuste de curva "polinomial", gerando assim o gráfico e a função polinomial do segundo grau representado por $y = -0.0044x^2 + 0,9907x + 967.0754$. Nesta etapa, as integrantes do grupo A acessaram a opção "Exibir Dados", resultando na exibição, no lado esquerdo do GeoGebra, de uma coluna contendo os dados transferidos do Tracker, sendo esta outra forma de visualização na janela "Planilha de Cálculos".

Figura 50 - Regressão polinomial do segundo grau - Grupo A



Fonte: Autor (2023)

Após a apresentação do gráfico da Figura 50, questionamos se o grupo A enfrentou alguma dificuldade durante o processo de elaboração do gráfico. Em resposta, Celine afirmou: *“Ainda achamos meio estranho fazer cálculos com muitos números depois da vírgula, porém, não tivemos dificuldade”*. Reiteramos ao grupo que, ao lidarmos com a Matemática em situações do mundo real, ou seja, do nosso cotidiano, frequentemente não trabalhamos exclusivamente com números pequenos e inteiros (Rosa, 2009, 2013; Souza, 2020).

No trabalho de Souza (2020, p. 76 - 77), por exemplo, durante o desenvolvimento de uma atividade de Modelagem, a autora relata que

Depois de algumas discussões a maioria dos grupos optou por fazer uma média aritmética, e estabelecer um padrão de tamanho para cada numeração. surgiram então problemas com os cálculos, principalmente em relação à divisão, devido aos números decimais. Percebendo tal dificuldade fomos ao quadro relembrar e explicar sobre como realizar divisão com números decimais.

Continuando o diálogo, Ana respondeu: *“Foi bem tranquilo, nem precisamos olhar no slide; fomos nos ajudando conforme fazíamos”*. Nessa fala podemos perceber que a dinâmica de trabalho em equipe no grupo A destacou-se, evidenciado pela atenção do grupo, enquanto uma integrante manipulava os *softwares*, as demais ofereciam suporte ou investigavam outros meios na tentativa de ajudar. As integrantes buscavam realizar reflexões para assegurar que suas decisões estivessem corretas, e, quando surgiam dúvidas, prontamente nos procuravam para orientações.

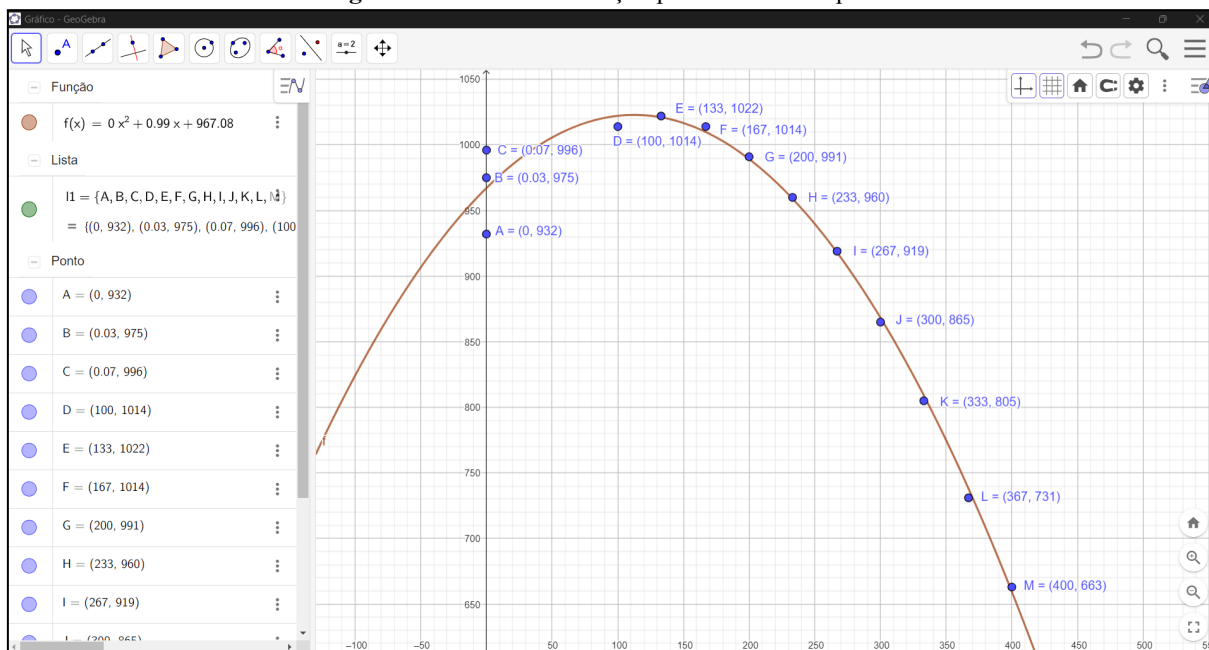
Para Rocha, Araki e Silva (2023, p. 106) a Modelagem Matemática “pode ser entendida como uma possibilidade de investigação de temas advindos de áreas do conhecimento como a Física, a Química, a Biologia e as Ciências Sociais. Tal investigação é potencializada ao associarmos a Modelagem Matemática a experimentação. ”

Solicitamos ao grupo A que inserisse a expressão da função polinomial encontrada na Janela Algébrica do GeoGebra, a fim de explorar propriedades, conceitos e definições relacionados à função polinomial em questão e realizar uma comparação com os dados fornecidos pelo Tracker.

Naquele momento, observamos que todos os grupos conseguiram executar as tarefas simultaneamente, o que contribuiu para o andamento da atividade. Retornando ao grupo A verificamos o progresso em relação ao gráfico gerado pelo GeoGebra, o qual utilizaram a função polinomial do segundo grau derivada dos dados do Tracker. Em resposta, elas

apresentaram uma captura de tela exibindo a representação gráfica, conforme demonstrado na Figura 51.

Figura 51 - Gráfico da função polinomial - Grupo A



Fonte: Autor (2023)

Diante do gráfico fornecido pelo grupo A, indagamos quais características, definições e propriedades eram recordadas pelo grupo, e quais poderiam ser calculadas por meio da função quadrática encontrada. Daiane respondeu: "*Lembro que encontramos as raízes e os vértices*". Ana acrescentou: "*O discriminante*". O que mais perguntamos, e Daiane mencionou: "*As fórmulas... esperem, anotei aqui. A fórmula canônica, obtida através do vértice e a fórmula reduzida utilizando as raízes.*"

Após o debate no qual as integrantes demonstraram grande atenção e comprometimento com a atividade proposta, solicitamos que realizassem manualmente os cálculos das características, definições e propriedades anteriormente mencionadas. Em conclusão dessa atividade o grupo A, mais uma vez, destacou-se ao realizar as atividades dentro do tempo esperado. Demonstraram um aprendizado efetivo ao explorar as funcionalidades do programa Tracker e do *software* GeoGebra.

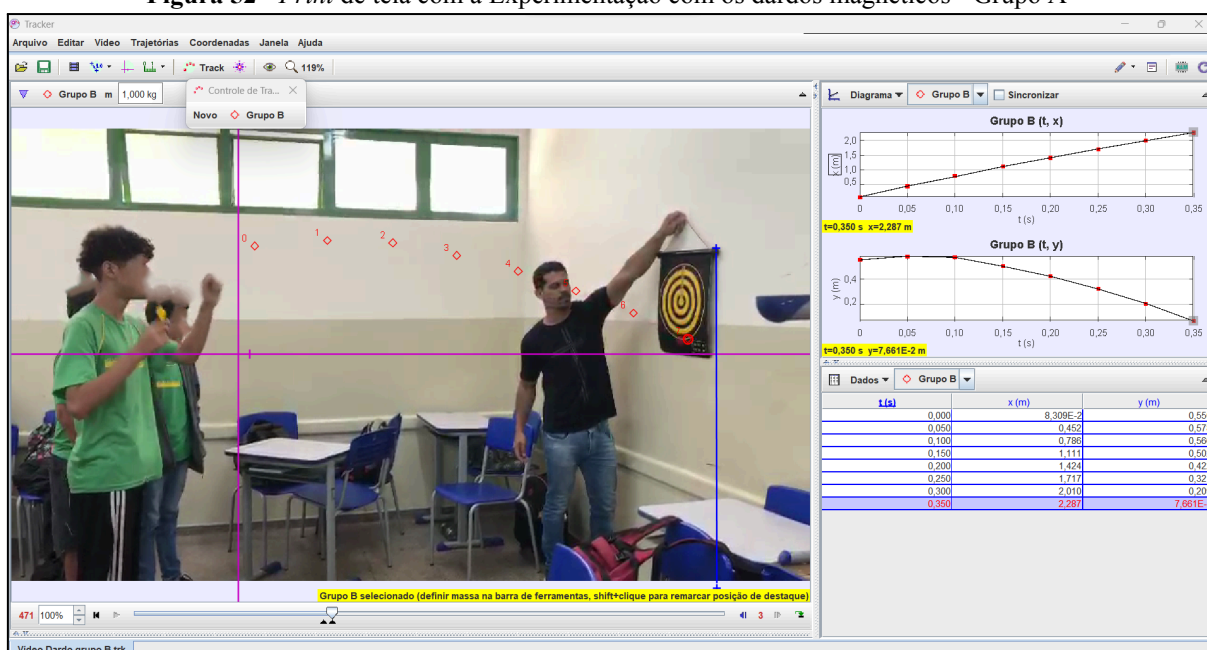
Finalizando, durante o processo o que nos chamou a atenção em relação a esse grupo foi a forma diferenciada como elaboraram os gráficos, em comparação com a primeira atividade, evidenciando um domínio expressivo sobre a Experimentação com Tecnologias.

Indagamos se eles poderiam apresentar os resultados obtidos até o momento, começando pela importação do vídeo e o uso das ferramentas do Tracker.

Em resposta, Bruno explicou: “*Professor após importar o vídeo, usamos as ferramentas indicadas no slide*”. Nesse momento, eles demonstraram na interface do programa as seguintes opções: "Ajuste de corte de vídeo", "Fita métrica com transferidor", "Mostrar ou ocultar os eixos de coordenadas" e "Mostrar ou ocultar o controle de trajetória". Após exibirem essa sequência, que estava correta em nossa percepção, apresentaram-nos o gráfico plotado pelo Tracker, o qual mostra uma curva parabólica.

Para segurança dos estudantes, o professor/pesquisador também sustentou o alvo circular para que todos os integrantes do grupo B pudessem realizar os lançamentos dos dardos magnéticos, conforme ilustrado na Figura 52.

Figura 52 - Print de tela com a Experimentação com os dardos magnéticos - Grupo A

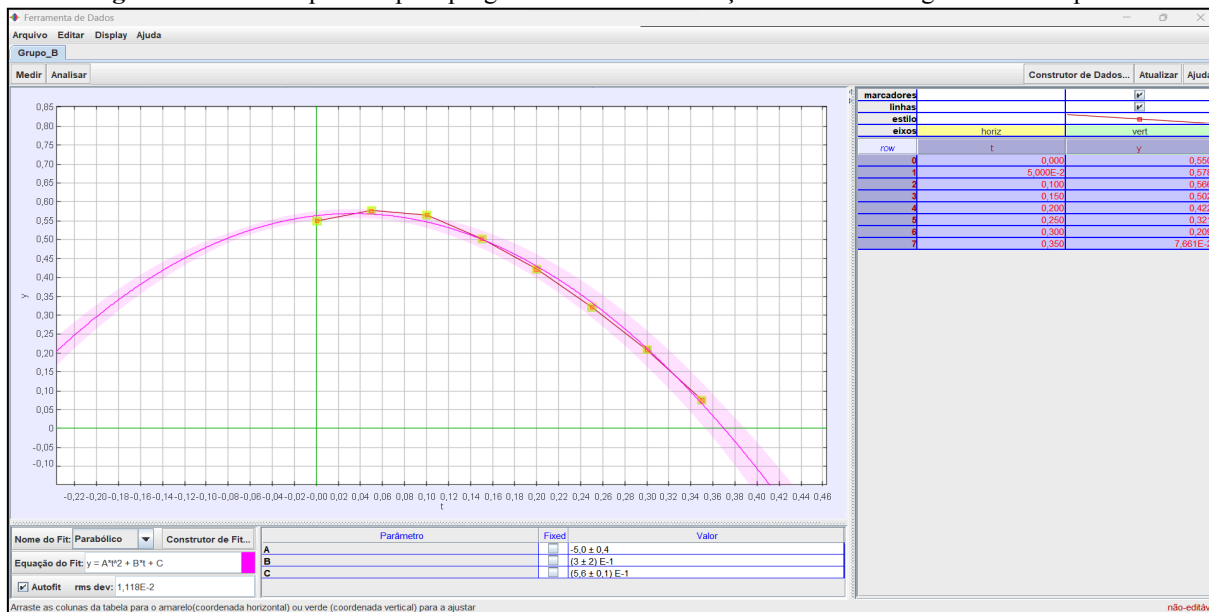


Fonte: Autor (2023)

Continuando nosso diálogo com o grupo B, questionamos qual ajuste de curva eles haviam escolhido. Bruno respondeu: “*Professor, como eu e Arthur fizemos o outro gráfico no Tracker, deixamos Cássio e Diogo fazer este*”. Assim, Diogo explicou: “*Professor, seguimos as instruções do slide. Clicamos em ‘Analisar’, depois em ‘Ajuste de Curva’, e fomos na opção ‘Parabólico’*”.

Neste momento, notamos que o grupo estava atento ao passo a passo, e eles nos apresentaram o gráfico no Tracker, conforme ilustrado na Figura 53.

Figura 53 - Gráfico plotado pelo programa Tracker em relação aos dardos magnéticos - Grupo B



Fonte: Autor (2023)

Na imagem da Figura 50, podemos notar que a escolha da curva parabólica pelos estudantes foi definida para analisar a trajetória do lançamento dos dardos magnéticos. A curva parabólica oferece uma representação visual válida para modelar esse tipo de movimento, capturando com precisão a variação da altura em relação à distância percorrida.

Essa escolha demonstra, ao nosso ver, a compreensão do grupo B sobre a utilização prática da função quadrática nesse contexto específico. Logo, a interseção entre a prática experimental com Tecnologias e os fundamentos teóricos da Matemática já aprendidos pelos estudantes podem proporcionar uma abordagem de aprendizado por meio da *Situação Inicial* (Lançando dardos magnéticos).

Em seguida, o grupo B explicou que copiou os dados fornecidos pelo Tracker, seguindo as coordenadas (t, y) , e os colaram na Planilha de Cálculos no GeoGebra, conforme o passo a passo apresentado no *slide* projetado (ver Quadro 11, neste capítulo). Posteriormente, apresentaram o gráfico e a função polinomial do segundo grau representada por $y = -0.0019x^2 - 0,3577x + 380,2322$, conforme ilustrado na Figura 54.

Figura 54 - Regressão polinomial do segundo grau - Grupo B



Fonte: Autor (2023)

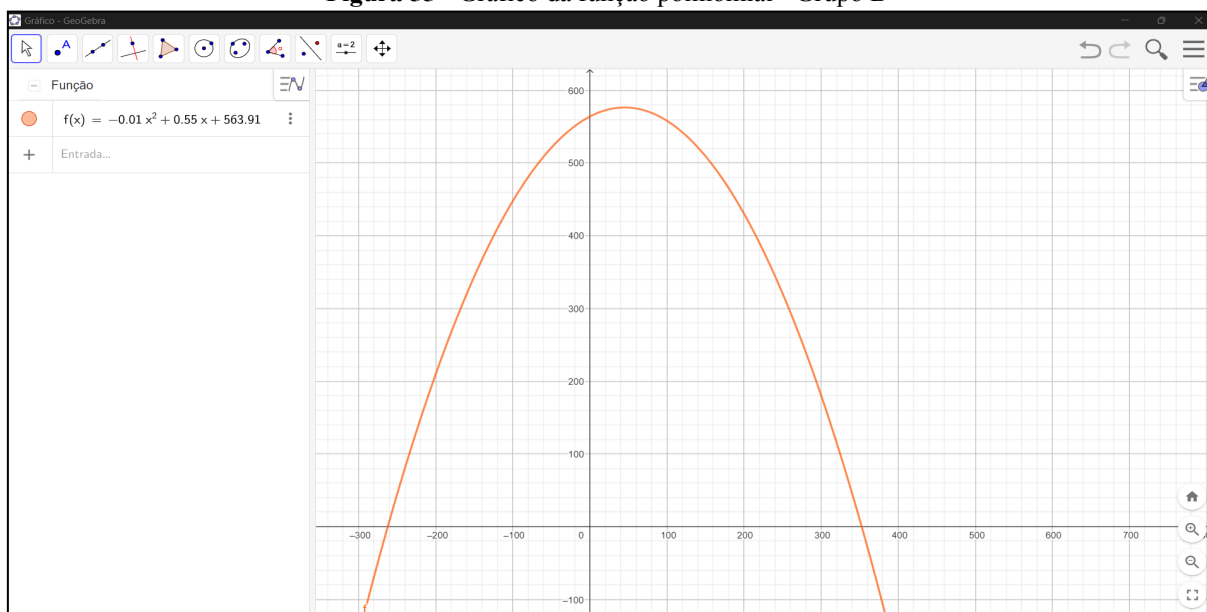
Questionamos o motivo da escolha da curva parabólica, e Arthur respondeu: “Podemos determinar a posição do dardo magnético em relação à distância que ele percorreu”. Bruno complementou: “Isso mesmo, cada ponto preto [referindo-se à Figura acima] representa um tempo, e em cada momento, o dardo está em uma posição diferente”. Em seguida, indagamos sobre o vértice, se seria possível identificá-lo apenas olhando o gráfico. Bruno explicou: “Não, precisamos usar a fórmula. Ajudem aí, galera! [Então chegaram à conclusão]: $x_v = \frac{-b}{2a}$ e $y_v = \frac{-\Delta}{4a}$, assim, determinamos o vértice.

Nas atividades de Modelagem, inicialmente, é necessário estimular o engajamento dos estudantes na proposta. No entanto, em algumas situações, nos deparamos com uma certa instabilidade de aceitação por parte de alguns grupos. Muitas vezes, no início, eles não compram a ideia, mas ao longo da atividade passam a se interessar. Esse fato também pode ser observado no relato de Santos (2021, p. 97),

[...] não podemos dizer que os alunos aceitaram o convite e se dedicaram prontamente a desenvolver a atividade. Havia alguns alunos dos grupos mais envolvidos e que queria, sim, concluir a atividade. Como as discussões foram insuficientes, ficamos na dúvida se estavam interessamos na atividade em si ou no seu término.

Continuando, elogiamos o grupo B pelo desempenho; mesmo com alguns deles dispersos, eles continuaram atendendo às expectativas, evidenciando que tinham conhecimento sobre as funções. Após isso, pedimos para eles escreverem a função polinomial na Janela Algébrica do GeoGebra, chegando no gráfico, mostrado na Figura 55.

Figura 55 - Gráfico da função polinomial - Grupo B



Fonte: Autor (2023)

Após a apresentação do gráfico acima, também perguntamos aos integrantes do grupo B sobre quais definições, características e propriedades eles recordavam que estavam presentes na função polinomial do segundo grau. Diogo prontamente respondeu: *“Lembro das raízes, do discriminante, e com isso podemos calcular o vértice da função quadrática”*. Indagamos sobre o que mais poderiam calcular com as raízes e os vértices encontrados.

O grupo B refletiu por um momento e concluiu que poderiam calcular as fórmulas canônicas por meio dos vértices e a fórmula reduzida por meio das raízes. Parabenizamos o grupo e os elogiamos na tentativa de incentivá-los. Para Souza (2020) “podemos dizer que uma das possibilidades quando trabalhamos com atividades de modelagem matemática é poder retomar conteúdos já vistos, uma vez que o processo de modelagem não é linear e sim espiral”, assim, entendemos importante voltar em conceitos estudados com a intenção de reforçar os conhecimentos assimilados anteriormente.

Após o diálogo com o grupo B, solicitamos que encontrassem as raízes, o discriminante, os vértices, assim como a fórmula canônica e reduzida da função polinomial.

Como conclusão, observamos que, nesta atividade, os integrantes do grupo demonstraram maior dedicação. Embora fosse perceptível que um ou outro estava disperso, o grupo comprometeu-se mais, diferentemente da dinâmica da atividade anterior envolvendo as petecas.

Dando continuidade, apresentamos o Quadro 18, que contém os modelos matemáticos validados pelos integrantes dos grupos A e B. É importante destacar que os outros seis grupos também validaram seus respectivos modelos.

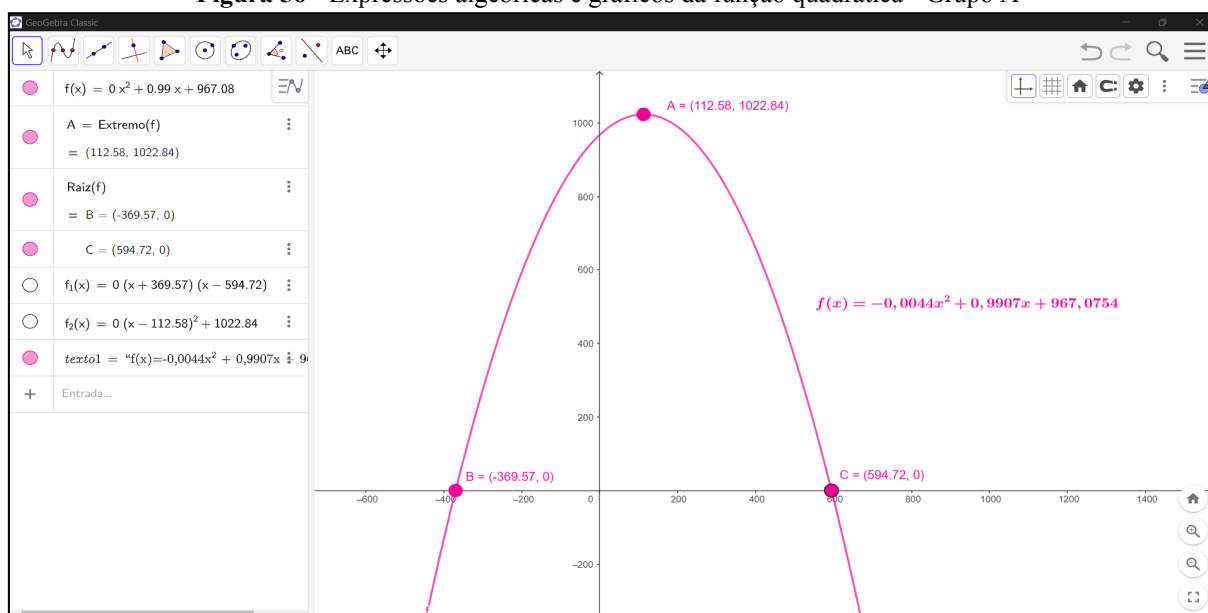
Quadro 18 - Modelos encontrado pelos grupo A e B, por meio da atividade lançando dardos magnéticos

GRUPO	Modelo Matemático
A	$f(x) = -0,0044x^2 + 0,9907x + 967,0754$
B	$f(x) = -0,0061x^2 + 0,5511x + 563,912$

Fonte: Autor (2023)

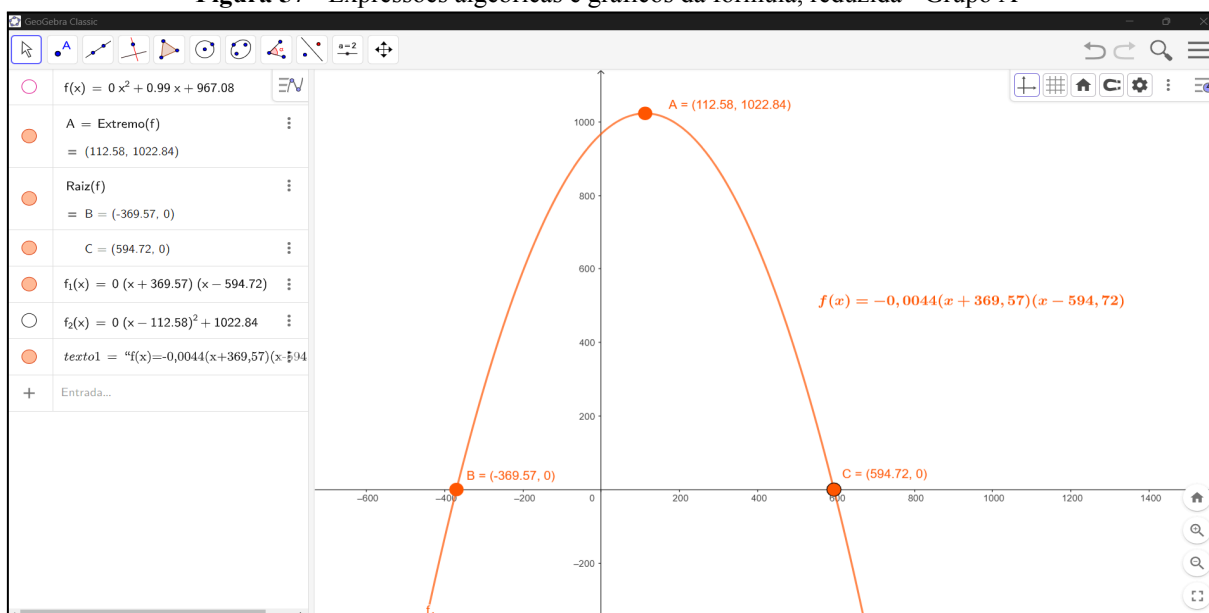
Iniciando a quarta e última fase da Modelagem Matemática concebida por Almeida, Silva e Vertuan, intitulada *Integração e Validação de Resultados*, solicitamos que todos os grupos compartilhassem no grupo do *WhatsApp* capturas de tela do GeoGebra, exibindo a função quadrática, as raízes, o discriminante, os vértices, a fórmula canônica e a fórmula reduzida. As Figuras 56, 57 e 58, elaboradas pelo grupo A, exemplificam esse processo.

Figura 56 - Expressões algébricas e gráficos da função quadrática - Grupo A



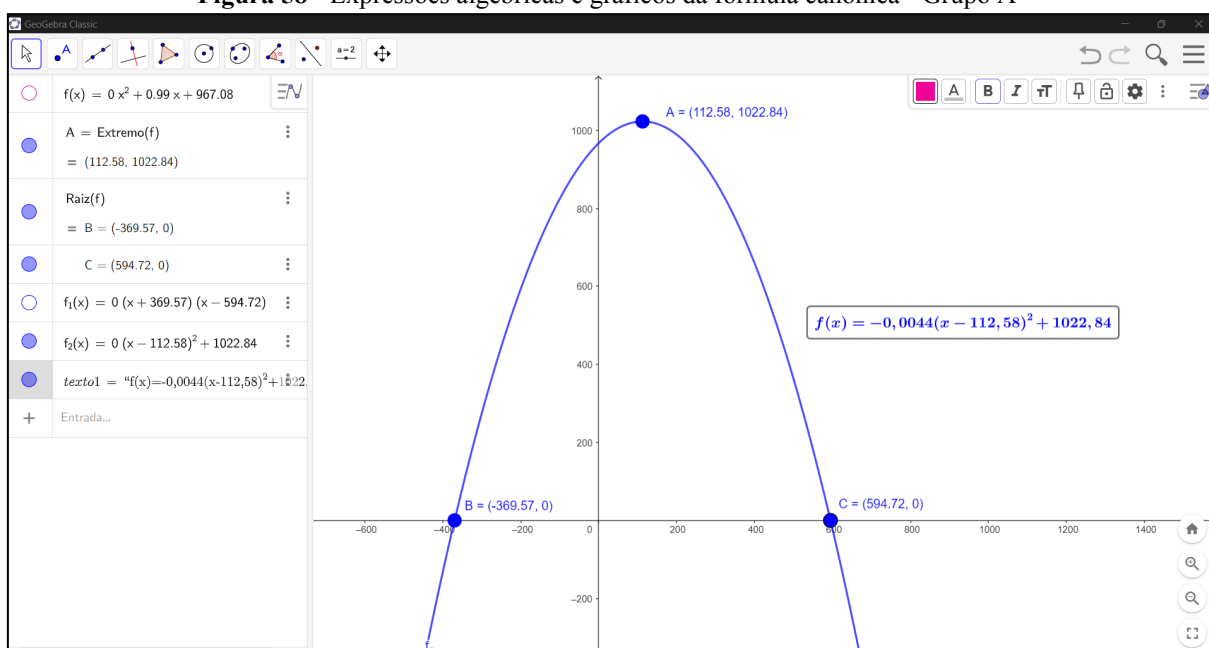
Fonte: Autor (2023)

Figura 57 - Expressões algébricas e gráficos da fórmula, reduzida - Grupo A



Fonte: Autor (2023)

Figura 58 - Expressões algébricas e gráficos da fórmula canônica - Grupo A



Fonte: Autor (2023)

Com base no processo de Experimentação com Tecnologias, utilizando especialmente o *software* GeoGebra, indagamos o grupo A sobre a experiência de realizar os cálculos manuais e conferir posteriormente os resultados obtidos no GeoGebra. Ana expressou: “Foi muito bom prof., já havia compreendido na primeira atividade e agora consigo realizar o que o senhor pediu e até mesmo explorar mais a fundo as funcionalidades”. A observação de Ana

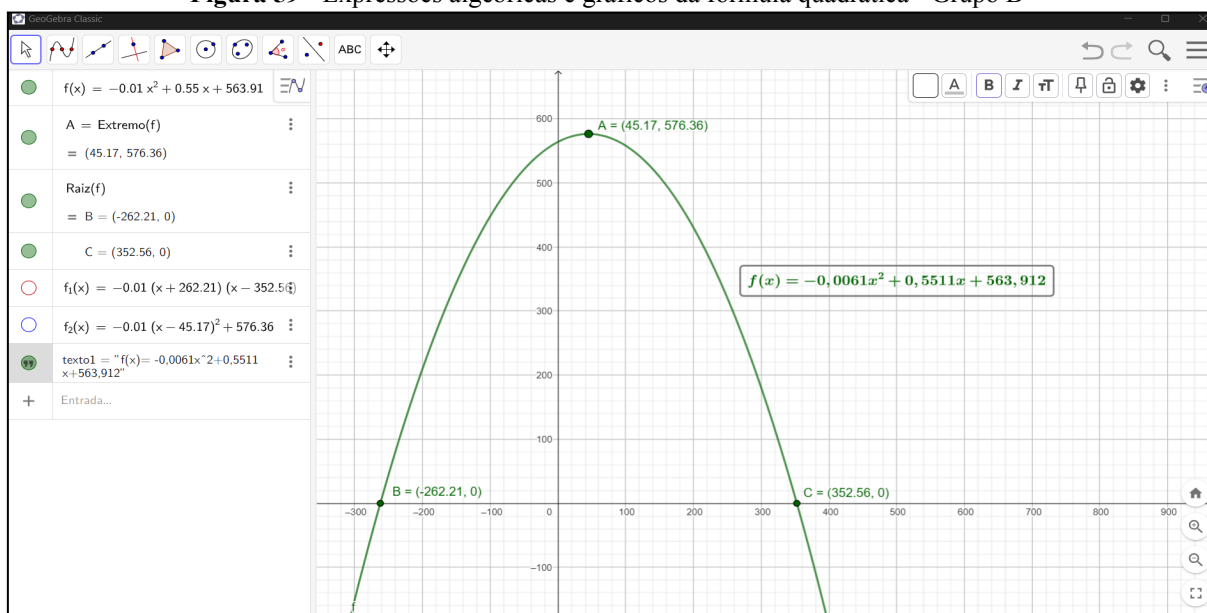
foi evidente ao longo de todo o desenvolvimento, pois o grupo demonstrou atenção ao processo, buscando apresentar novas hipóteses, tabelas e gráficos que pudessem esclarecer de forma mais precisa suas conjecturas.

Seus cálculos utilizando as Tecnologias eram realizados de forma rápida e com destreza, o que possibilitava mais tempo para fazerem reflexões. Neste contexto em relação às Tecnologia, segundo Araújo (2002, p. 42)

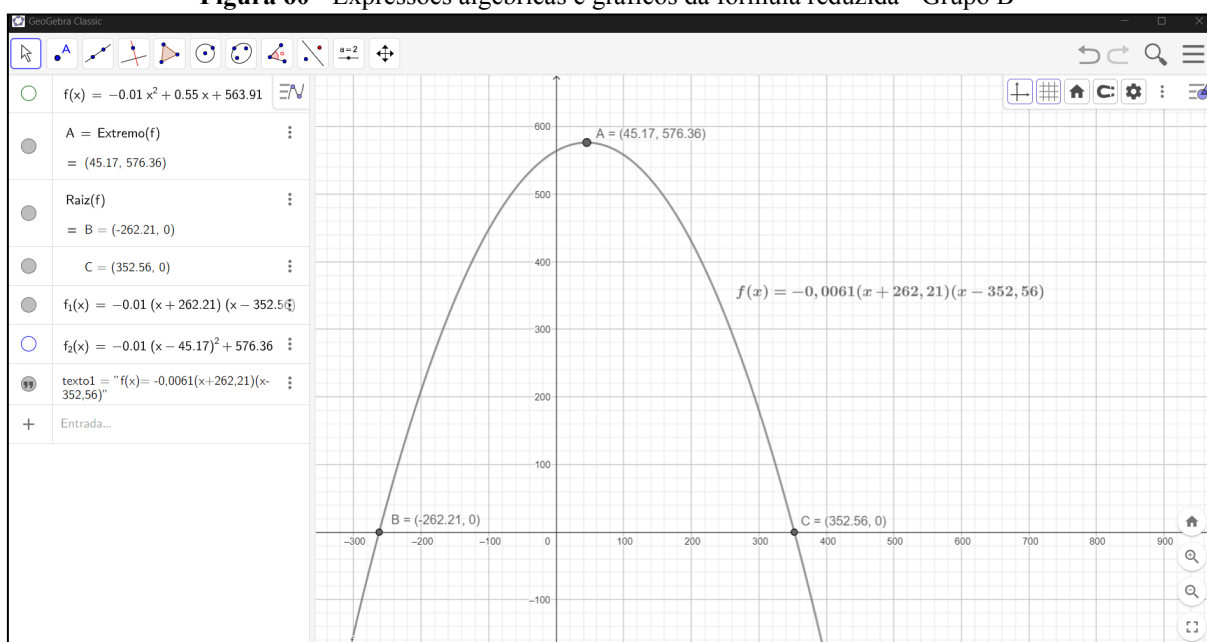
Seu potencial para lidar com cálculos elaborados liberta o indivíduo que está desenvolvendo algum modelo matemático de modo que ele se preocupe apenas com a compreensão e interpretação da situação e dos resultados, sem perder tempo ou energia com contas, fórmulas, lógica matemática, etc.

O grupo B, também apresentou os gráficos das funções quadrática, reduzida e canônica, bem como as raízes e o discriminante, conforme elucidado nas Figuras 59, 60 e 61.

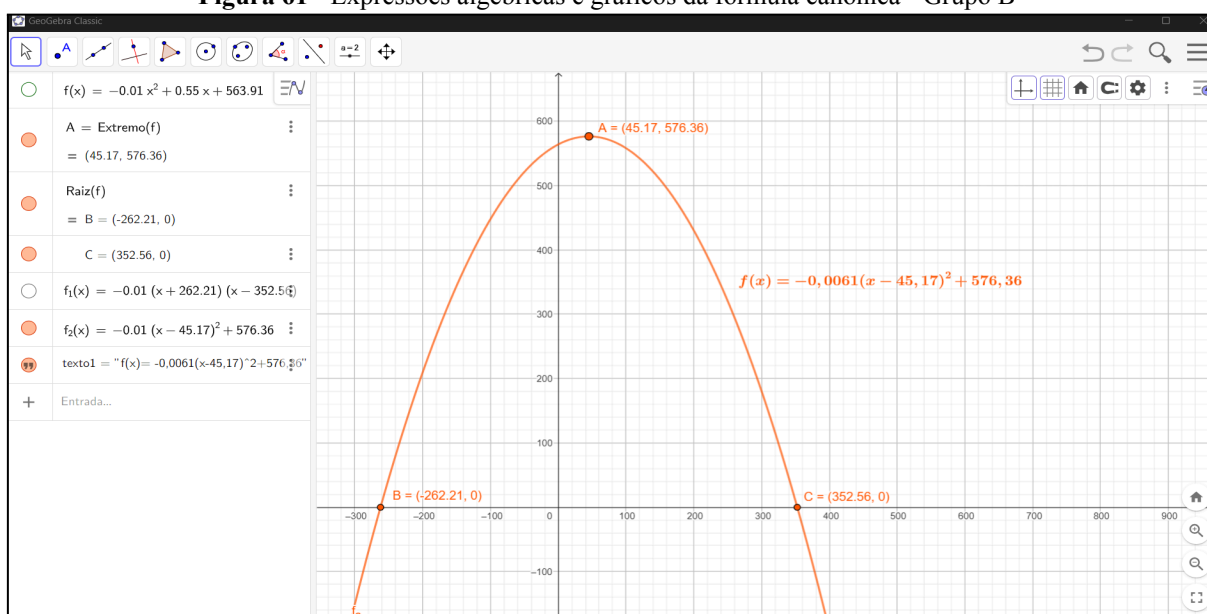
Figura 59 - Expressões algébricas e gráficos da fórmula quadrática - Grupo B



Fonte: Autor (2023)

Figura 60 - Expressões algébricas e gráficos da fórmula reduzida - Grupo B

Fonte: Autor (2023)

Figura 61 - Expressões algébricas e gráficos da fórmula canônica - Grupo B

Fonte: Autor (2023)

Ao grupo B, também questionamos sobre o processo de Experimentação com Tecnologias, utilizando principalmente o *software* GeoGebra, ao realizar os cálculos manuais e conferir posteriormente com os resultados obtidos na ferramenta. Bruno respondeu: “Gostamos de realizar os cálculos de forma manual, porém, no GeoGebra, podemos visualizar, inserir dados, remover, e isso facilita porque tudo é instantâneo nele”. Em seguida, explicamos que essa é uma vantagem do uso das Tecnologias; no entanto, alertamos que o

desafio está em não se tornar dependente desses recursos, buscando respostas prontas, mas sim em utilizar as ferramentas de maneira crítica e reflexiva.

Nesta perspectiva, Souza Barboza (2011, p. 8), relata que

No sentido da formação de seres autônomos, as aulas de Matemática, ao unir tecnologia e modelagem, podem contribuir para a autonomia. Na modelagem, buscam-se os problemas do mundo real e todas as ações voltadas para a criação dos modelos para as possíveis soluções são ações movidas por reflexões. A tecnologia poderá potencializar as verificações, além da oportunidade de manuseio do computador [...].

Posteriormente, refletindo sobre a *definição do problema*: “*Levando em consideração o lançamento dos dardos magnéticos, qual relação matemática podemos identificar em sua trajetória a partir do momento em que saem da mão de um jogador até atingirem o alvo circular?*”. Os grupos calcularam o erro em porcentagem, levando em consideração os dados fornecidos pelo Tracker, provenientes da trajetória por eles demarcada, e os dados obtidos no modelo matemático elaborado pelo GeoGebra.

Assim utilizaram novamente o método estatístico usado anteriormente na atividade da peteca, que seria o “ERROS NUMÉRICOS”, dos quais consistia em: "erro absoluto", que representa a diferença entre os dois conjuntos de dados e o "erro relativo", usado para expressar a resposta em termos percentuais. A adoção desse método é justificada pela sua capacidade de validar o controle de qualidade dos cálculos e das decisões tomadas pelos estudantes durante o estudo do fenômeno. Para aqueles que não se recordavam da fórmula, apresentamo-la novamente no slide projetado e explicamos o procedimento a ser seguido (ver Figura 37, deste capítulo).

De posse dessas informações, apresentamos a Tabela 4 e a Tabela 5, contendo os cálculos realizados pelos grupos A e B, respectivamente.

Tabela 4 - Relação entre os dados fornecidos pelo Tracker e modelo matemático, referentes a atividade de dardos magnéticos - Grupo A

<i>t</i> (tempo)	<i>y</i> (dados produzidos)	<i>y</i> (valores do modelo)	Erro (%)
0,000	0,932	0,967	3,755
0,033	0,975	0,967	0,820
0,067	0,996	0,967	2,911
0,100	1,014	1,022	0,788

0,133	1,022	1,021	0,097
0,167	1,014	1,009	0,493
0,200	0,991	0,989	0,201
0,233	0,960	0,959	0,104
0,267	0,919	0,917	0,217
0,300	0,865	0,868	0,346
0,333	0,805	0,809	0,496
0,367	0,731	0,737	0,820
0,400	0,663	0,659	0,603

Fonte: Autor (2023)

Ao analisar seus dados na Tabela 4, o grupo A conseguiu registrar com precisão a trajetória do dardo magnético. A taxa percentual de erro entre os dados do Tracker e do GeoGebra não ultrapassou 0%, com exceção aos tempos 0,000 e 0,067, que resultou em 3,755% e 0,067%, respectivamente. Porém, isso não comprometeu a validação do modelo matemático, pois os erros numéricos apresentados não interferiram no modelo matemático.

Tabela 5 - Relação entre os dados fornecidos pelo Tracker e modelo matemático, referentes a atividade de dardos magnéticos - Grupo B

<i>t</i> (tempo)	<i>y</i> (dados produzidos)	<i>y</i> (valores do modelo)	Erro (%)
0,000	0,550	0,563	2
0,050	0,578	0,563	2
0,100	0,566	0,557	1
0,150	0,502	0,508	1
0,200	0,422	0,430	2
0,250	0,321	0,320	0
0,300	0,209	0,180	13
0,350	0,076	9,500	10

Fonte: Autor (2023)

Durante a análise da taxa de erro do grupo B, os integrantes notaram uma maior discrepância entre os dados do Tracker e do GeoGebra. Isso ocorreu devido à dificuldade dos estudantes em seguir de forma precisa o ponto de massa, ou seja, o dardo, durante a captura da trajetória em movimento. Entretanto, é importante destacar que a maior discrepância

ocorre nos tempos de 0,300 e 0,350, resultando em 13% e 10%, respectivamente. Apesar disso, durante a atividade, os alunos perceberam que essa marcação atendeu ao modelo matemático. Assim, os estudantes em conjunto com o professor/pesquisador revisaram diversas vezes o vídeo em movimento, o que correspondia aos pontos demarcados, reforçando a validade do modelo adotado.

Ao finalizar as fases da Modelagem a saber, *Interação, Matematização, Resolução e Interpretação de Resultados e Validação*, chegamos à *Situação Final*, que consiste na “resposta para o problema” (Almeida; Silva; Vertuan, 2021, p. 17). Assim, retornamos junto aos estudantes a *definição do problema*: “***Levando em consideração o lançamento dos dardos magnéticos, qual relação matemática podemos identificar em sua trajetória a partir do momento em que saem da mão de um jogador até atingirem o alvo circular?***”.

Em resposta à *definição do problema*, os estudantes concluíram que poderiam identificar a relação entre a altura dos dardos magnéticos e os intervalos de tempo que demarcaram durante a captura da trajetória.

Buscando validar seus modelos matemáticos e fortalecer as evidências sobre a problemática, todos os grupos consideraram testar seus modelos no momento do lançamento dos dardos magnéticos com $t = 0,190$, a fim de determinar a posição da peteca, assim, verificariam se o ponto encontrado ficaria próximos ou distante do modelo validado. Além disso, eles pediram para utilizar duas Tecnologias Digitais de sua escolha para realizar os cálculos.

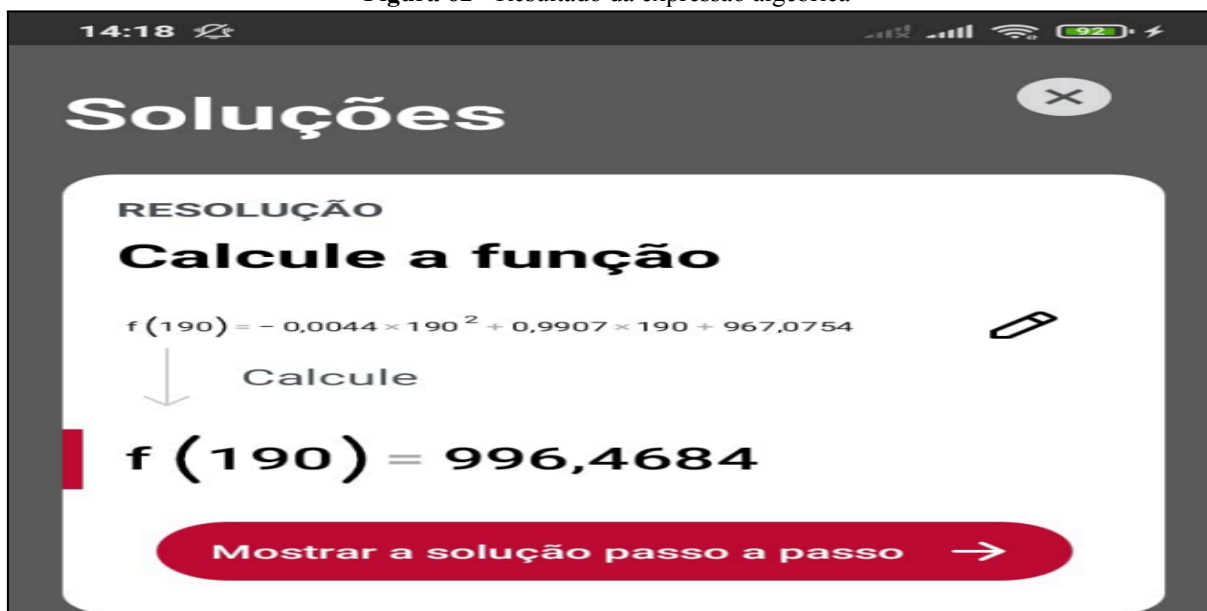
O grupo A se voluntariou para demonstrar quais recursos digitais selecionaram e em qual posição encontraram os dardos magnéticos a partir do ponto preestabelecido, o grupo B não apresentou para turma seus resultados, porém, observamos que os resultados deles foram validados conforme o tempo escolhido por todos.

Continuando, o grupo A optou pelo uso do *Photomath* para realizar os cálculos, uma Tecnologia que os estudantes anteriormente já haviam mencionado utilizar durante as aulas de Matemática para verificar algumas expressões algébricas. Com a intenção de explorar ainda mais o GeoGebra, utilizaram-no para representação gráfica e comparação do resultado obtido no *Photomath*.

Ao iniciar sua apresentação e compartilhar suas ideias com os demais grupos, o grupo A utilizou a representação da função $f(x) = -0,0044x^2 + 0,9907x + 967,0754$. Em seguida, eles substituíram o valor de x por 0,190. No *Photomath*, as integrantes digitaram

$f(190) = -0,0044(190)^2 + 0,9907(190) + 967,0754$, obtendo como resposta $f(190) = 996,4684$, como exibido na Figura 62.

Figura 62 - Resultado da expressão algébrica



Fonte: Autor (2023)

Quando perguntamos ao grupo A se encontraram dificuldades em realizar os cálculos da função no ponto específico 0,190, utilizando o aplicativo. Eles responderam que o *Photomath* é muito utilizado por elas e que já tinham essa ferramenta tecnológica baixada no celular antes de nossos encontros, então, consideravam seu uso muito fácil.

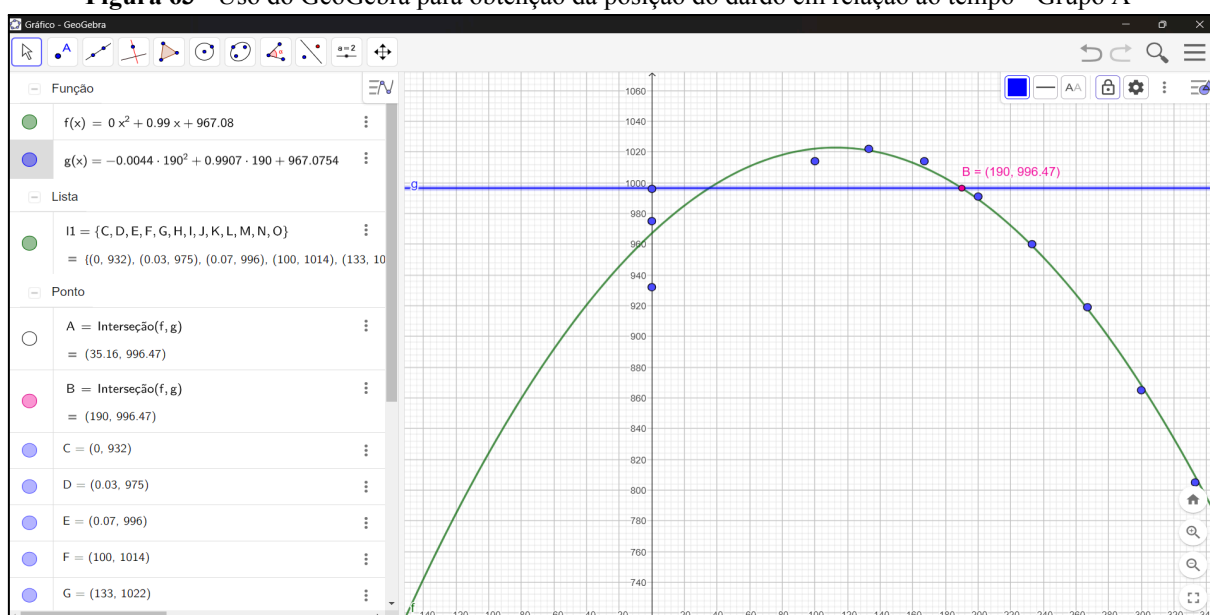
No GeoGebra, o grupo iniciou com a mesma estratégia utilizada no *Photomath*, digitando $f(190) = -0,0044(190)^2 + 0,9907(190) + 967,0754$. Neste momento, perceberam que o GeoGebra não reconheceu esse comando, surgindo a mensagem de alerta do *software*: “Por favor, verifique a estrutura de seu comando”. Assim, as integrantes refletiram sobre o problema detectado e não sabendo o que fazer, solicitaram ajuda ao professor/pesquisador para escreverem corretamente a expressão, a fim de obterem uma função constante como resultado. Explicaram que com essa função, poderiam marcar a intersecção entre a função de grau um e a de grau dois encontrando a posição do dardo em $y = 996,47$.

Então, perguntamos ao grupo A como procederiam se fossem fazer no caderno. Logo, Ana respondeu: “Escreveria a função normal e substituiria 0,190 apenas no lado esquerdo da função [Ana pensou: $f(x) = -0,0044(190)^2 + 0,9907(190) + 967,0754$]”.

Dessa forma, sugerimos que o grupo experimentasse essa expressão; e se não desse certo, poderiam usar outro método, porém, perceberam que conseguiram o resultado esperado, encontrando a posição do dardo representado no GeoGebra pelo ponto $B = (0.190, 996, 47)$.

Neste momento, Daiane pergunta: “*Prof., podemos colocar os pontos do Tracker [dados produzidos do fenômeno] para ver onde o ponto B está em relação aos outros já fixados?*”. Consideramos uma excelente ideia da Daiane, elogiamos-a e pedimos ao grupo que colocasse os pontos para vermos o resultado. Essa situação está retratada na Figura 63.

Figura 63 - Uso do GeoGebra para obtenção da posição do dardo em relação ao tempo - Grupo A



Fonte: Autor (2023)

Assim, na Figura 63, a primeira ação do grupo A foi escrever a função quadrática representada pelo primeiro círculo de cima para baixo na cor verde, na janela algébrica situada no lado esquerdo da imagem. Em seguida, escreveram a função constante representada pelo primeiro círculo em azul, de cima para baixo. E por fim, utilizaram-se da ferramenta “Interseção de Dois Objetos”, para encontrar o ponto B na cor rosa,

Finalizando a apresentação, o grupo A conseguiu concluir e validar os resultados utilizando tanto o *Photomath* quanto o *software* GeoGebra. Durante a discussão, todos os grupos perceberam que os aplicativos de Matemática podem conter particularidades em relação aos comandos desejados. Dessa forma, compreenderam a importância de tomar cuidado ao utilizar as Tecnologias, pois a falta de conhecimento das ferramentas digitais

poderia resultar em erros nos cálculos desejados. Este fato foi observado quando a expressão $f(190) = -0,0044(190)^2 + 0,9907(190) + 967,0754$, aceita pelo *Photomath*, não foi reconhecida no GeoGebra.

Desde o momento em que os grupos se propuseram a verificar a posição do dardo em relação ao tempo determinado, entendemos que eles realizaram Experimentações com Tecnologias por conta própria. Esse fato pode tê-los estimulado a querer aprender mais conteúdos matemáticos, pois, pela experiência, poderiam afirmar que sabiam manipular conceitos matemáticos que envolvessem função.

Para concluir essa atividade de "Lançamento de Dardos Magnéticos", visando preencher o tempo restante até o final da aula e, conseqüentemente, até o término daquele encontro, projetamos na tela de apresentação a plataforma *YouTube*¹⁸, mostrando o campeonato oficial de dardos com ponta. Os estudantes demonstraram animação e empolgação ao assistir ao vídeo. Eles se dividiram e torceram para os jogadores que acreditavam que venceriam. Em seguida, explicamos que deixáramos o relatório final (APÊNDICE 1) para que pudessem respondê-los com mais tempo em outro momento em grupo, marcando o fim de nossas atividades de Modelagem Matemática.

5.3 ANÁLISE LOCAL DO DESENVOLVIMENTO DA ATIVIDADE DOS DARDOS MAGNÉTICOS, SEGUNDO AS CATEGORIAS *A PRIORI*

5.3.1 Categoria 1 (C1): Em relação às Tecnologias Digitais

Nesta categoria, discutiremos sobre as Tecnologias Digitais que estiveram presentes na atividade de dardos magnéticos, nas quatro fases da Modelagem Matemática definidas por Almeida, Silva e Vertuan (2021), a saber: *Interação*, *Matematização*, *Resolução* e *Interpretação de Resultados e Validação*.

Na fase de *Interação*, iniciamos com a projeção de um *slide* contendo perguntas sobre a *Situação Inicial*, com a expectativa de chamar a atenção dos alunos para interagir conosco nesta atividade. O projetor durante esta fase foi um grande aliado, pois oportunizou aos

¹⁸ Link disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=Jx5Q8kd141Q>. Acesso em: 27 jun. 2023.

estudantes informações em tempo real, as quais eles podiam ver e elaborar hipóteses, fazendo reflexões com seus respectivos grupos, assim, não perdiam tempo com anotações.

Para Abreu (2022), o simples uso do projetor para a exposição de conteúdos não constitui um pleno uso pedagógico das Tecnologias, visto que tanto os professores quanto os estudantes precisam se envolver e interagir nos processos de ensino e aprendizagem com o auxílio das Tecnologias Digitais. Logo a autora entende que, especialmente ao apoiar a ideia de que a interação do aluno com o uso das Tecnologias no ensino de Matemática pode ser promovida por meio de diferentes tipos e qualidades de perguntas que o professor pode propor durante o ensino aliado ao projetor para fazer reflexões sobre a temática estudada.

Seguindo com as tecnologias propostas, possibilitamos aos estudantes a interação *online* através da plataforma Mentimeter, que se mostrou uma ferramenta colaborativa para o debate tanto entre os integrantes de cada grupo quanto entre os grupos presentes. O Mentimeter introduziu uma experiência tecnológica aos estudantes, permitindo que eles respondessem e visualizassem suas respostas em tempo real.

Ademais, por meio do Mentimeter, os estudantes puderam participar de debates e discussões sobre a temática, interagindo com colegas e contribuindo com ideias e opiniões. Eles responderam a questionários e pesquisas elaborados pelo professor ou pelos próprios colegas durante o debate, permitindo a produção de dados e a análise de diferentes perspectivas. Dessa forma, com tais ações, os estudantes recebiam *feedback*¹⁹ instantâneo sobre o desempenho e a compreensão da temática de cada grupo.

Outro recurso utilizado para que os estudantes respondessem de forma interativa a perguntas foi a plataforma *online* Sorteador. Esta ferramenta foi empregada para que os alunos recordassem suas reflexões durante a fase de *Interação*, ocorrida ao final do terceiro encontro, a fim de dar continuidade à atividade dos dardos magnéticos e avançar para a próxima fase da *Matematização*. Ao recorrer às reflexões passadas, os estudantes puderam aprofundar seu entendimento por meio de debates entre os grupos, consolidar ideias preestabelecidas e fortalecer seu envolvimento com a temática.

Neste trabalho, compreendemos que diversas plataformas *online*, mesmo aquelas que não foram originalmente desenvolvidas para fins pedagógicos, podem se tornar grandes aliadas aos professores. Isso se dá pelo fato de serem espaços maleáveis que podemos

¹⁹ O termo "*feedback*" refere-se à resposta, reação ou retorno que alguém ou algo recebe em relação a uma ação, comportamento ou desempenho.

manipular e adaptar conforme nossos propósitos e objetivos educacionais. Para Chiari (2018, p. 358, grifo nosso),

Olhando para a internet, para as plataformas como o Moodle e o Google Sala de Aula, com fins pedagógicos específicos, mas também para outras plataformas que não foram criadas especificamente com objetivos pedagógicos, **como o YouTube, temos um espaço propício para a democratização da produção de material didático**, já que qualquer usuário da grande rede é um produtor de conteúdo em potencial. Essa perspectiva também amplia a ideia de que um material didático é sempre um texto escrito.

Na fase de *Matematização*, os estudantes tiveram a oportunidade de retomar a Experimentação com Tecnologias, utilizando seus celulares para gravar o lançamento dos dardos magnéticos. Aqui, o celular não era apenas um dispositivo móvel comum, conforme utilizado no dia a dia dos estudantes, mas sim uma ferramenta tecnológica capaz de capturar informações relevantes para análise, reflexão e criação de conjecturas em direção à elaboração de modelos matemáticos com base nos dados reais obtidos.

Quando os estudantes utilizaram o modo *touch screen* em seus celulares, compreendemos que estavam envolvidos na Experimentação com Tecnologias. Isso ficou evidente durante esta segunda atividade, na qual os alunos precisavam configurar seus celulares para capturar a trajetória dos dardos, considerando sua alta velocidade. Além disso, ao utilizarem a tela do celular para visualizar o movimento adequado, surgiram debates entre os estudantes. Esses debates, por sua vez, representaram um potencial para a aprendizagem deles sobre o movimento dos dardos e que medidas poderiam usar para resolver o problema proposto.

Nesta fase de *Matematização*, o uso da *internet* torna-se mais frequente, uma vez que os estudantes dependem dessa Tecnologia Digital para acessar o *WhatsApp*, *Drive* e *e-mail*, a fim de baixar seus vídeos e começar a traçar a trajetória dos dardos magnéticos.

Na fase de *Resolução*, os estudantes utilizaram o programa Tracker e o *software* GeoGebra. Os alunos demonstraram interesse em reutilizar essas ferramentas tecnológicas, pois consideraram que elas possuíam uma interface intuitiva. Segundo eles, as ferramentas eram de fácil compreensão e possibilitavam a obtenção de resultados de maneira interessante e dinâmica.

O grupo A, por exemplo, demonstrou habilidades significativas durante a elaboração do gráfico no Tracker. Com a intenção de não se perderem em relação às coordenadas, fizeram um rascunho do gráfico e suas coordenadas tanto para o Tracker quanto para o

GeoGebra, o que facilitou o processo de construção do conhecimento nesta fase (*Resolução*). Além disso, ao finalizar o gráfico plotado pelo Tracker, as integrantes do grupo A entregaram um gráfico com informações extras em comparação com a primeira atividade de peteca.

Dando continuidade ao progresso realizado pelo grupo A, as estudantes também apresentaram um gráfico diferenciado durante a Experimentação com Tecnologias ao elaborarem o gráfico e a função polinomial do segundo grau. O processo de construção de conhecimento do grupo A em relação a esta segunda atividade, assim como dos outros grupos, teve um potencial diferenciado. Percebemos que os estudantes exploraram mais a fundo as ferramentas disponíveis na interface do Tracker e do GeoGebra, o que pode ter garantido uma aprendizagem relevante aos alunos.

Como já haviam tido contato com o Tracker e o GeoGebra na primeira atividade, notamos que, em sua maioria, os grupos foram proativos durante a exploração dessas Tecnologias. Assim, eles não se contentaram em utilizar apenas as funcionalidades que havíamos ensinado. Neste caso, podemos dizer que a Experimentação com Tecnologia durante as fases de Modelagem pode ter sido intensa e produtiva.

Na fase de *Interpretação de Resultados e Validação*, o dinamismo e a facilidade em manipular a interface do GeoGebra eram visíveis. Podíamos notar que eles exploravam as ferramentas, experimentavam as opções como: "Otimização", que é a ferramenta que mostra o ponto de máximo e mínimo; "Raízes", a qual mostra as raízes de uma função, caso esta função passe pelo eixo das abscissas; e "Interseção de Dois Objetos", que indica o ponto exato onde duas funções se encontram, por exemplo. Ao solicitar que fizessem gráficos representativos da função quadrática, canônica e reduzida a partir dos discriminantes e das raízes encontradas por seus cálculos, todos os grupos apresentaram com rapidez e entusiasmo.

Os estudantes puderam revisar o vídeo explicativo na plataforma YouTube, no qual o professor Murakami explica como calcular a porcentagem de erro entre os dados de um fenômeno e o modelo matemático encontrado pelos alunos. O grupo B, para se diferenciar da primeira atividade, optou por fornecer as respostas utilizando números inteiros, pois consideraram que poderiam ser mais fáceis de entender (rever Tabela 5).

Finalizando esta fase, todos os grupos foram convidados a utilizar duas Tecnologias para resolver uma questão que propusemos, a qual consistia em encontrar a posição da peteca utilizando o modelo matemático em relação ao tempo $t = 0,190$. Como resposta, o Grupo A, juntamente com a maioria dos grupos, utilizou a calculadora *Photomath* e o GeoGebra. Além

de encontrarem a resposta, puderam observar que cada Tecnologia tem seus comandos, o que pode ser válido em uma, não necessariamente é válido para outra.

Para Silva, Barone e Basso (2016), a inserção de propostas de trabalho baseadas na Modelagem Matemática e Tecnologias promovem a reconstrução dos conhecimentos prévios entre os envolvidos. À medida que a investigação Matemática avança na compreensão de fenômenos ou objetos de estudo, professores e estudantes reinterpretam e atribuem novos significados a diversos conceitos, enriquecendo o processo de aprendizagem e a construção de novos conhecimentos matemáticos.

Nesse contexto, para os autores a Tecnologia Digital se destaca como uma ferramenta essencial, auxiliando na criação, verificação e validação de modelos propostos, além de estimular o desenvolvimento das habilidades Matemáticas necessárias para compreender completamente o contexto investigado (Silva; Barone; Basso, 2016). Assim, a integração da Modelagem Matemática e da Tecnologia Digital pode potencializar a qualidade do aprendizado, bem como pode aprofundar a compreensão dos conceitos matemáticos em questão.

Outras dimensões apontadas pela BNCC como pensamento computacional, mundo digital e cultura digital estiveram presentes nas quatro fases da Modelagem supracitadas. Estas dimensões foram relevantes para as tomadas de decisão dos estudantes, ajudando-os nas escolhas de informações e ideais iniciais sobre a temática, bem como na (fase da *Interação*); nas importações dos vídeos das atividades para os computadores utilizando *Drive* e o *Tracker* (fase da *Matematização*); nas interações com as interfaces do *Tracker* e *GeoGebra*, (fase da *Resolução*); nas validações de novos ponto no modelo matemático usando outras Tecnologias como o aplicativo *Photomath* (fase da *Interpretação de Resultados e Validação*).

Para a BNCC cada uma dessa dimensão podem ser resumidas como:

- Pensamento Computacional: envolve as capacidades de **compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções**, de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento de algoritmos;
- Mundo Digital: envolve as aprendizagens relativas às formas de processar, transmitir e distribuir a informação de maneira segura e confiável em **diferentes artefatos digitais** – tanto físicos (computadores, celulares, *tablets*, etc.) como virtuais (*internet*, redes sociais e nuvens de dados, entre outros) –, compreendendo a importância contemporânea de codificar, armazenar e proteger a informação;
- Cultura Digital: [...], a construção de uma atitude crítica, ética e responsável em relação à multiplicidade de ofertas midiáticas e digitais, aos usos possíveis das **diferentes Tecnologias e aos conteúdos por elas veiculados**, e, também, à fluência no uso da Tecnologia Digital para expressão de

soluções e manifestações culturais de forma contextualizada e crítica (Brasil, 2018, p. 478, adaptações e grifos nossos).

De posse dessas informações, em relação à atividade dos dardos magnéticos elaboramos o Quadro 19, na qual mostra quais Tecnologia Digital emergiram nas fases de Modelagem Matemática concebidas por Almeida, Silva e Vertuan (2023).

Quadro 19 - Tecnologias que emergiram nas fases da Modelagem

FASES	TECNOLOGIAS DIGITAIS
Interação	Celular, <i>Drive</i> , <i>E-mail</i> , Mentimeter, <i>WhatsApp</i> , <i>Internet</i> , <i>Sites</i> , computadores, projeto (<i>Dataschow</i>).
Matematização	Mentimeter, Celular, <i>E-mail</i> , Computadores, <i>Softwares</i> dinâmicos, <i>Sorteador</i> , <i>Drive</i> , <i>WhatsApp</i> , <i>Internet</i> /dados móveis, <i>Sites</i> , Projeto (<i>Dataschow</i>).
Resolução	<i>Internet</i> /dados móveis, <i>Softwares</i> dinâmicos, <i>Sites</i> , <i>WhatsApp</i> , <i>E-mail</i> , Celular, <i>Tablet</i> , Computadores, <i>Drive</i> , Projeto (<i>Dataschow</i>), Mentimeter.
Interpretação de Resultados e Validação	<i>YouTube</i> , <i>Softwares</i> dinâmicos, <i>Internet</i> /dados móveis, Computadores, Celular, <i>Sites</i> , <i>WhatsApp</i> , <i>E-mail</i> , <i>Drive</i> , Projeto (<i>Dataschow</i>), Mentimeter, <i>Photomath</i> .

Fonte: Autor (2023)

Como podemos observar na tabela acima, em uma atividade de Modelagem Matemática, podemos utilizar diversas Tecnologias Digitais com a intenção de proporcionar aos estudantes outras formas de aprender os conteúdos matemáticos. Entretanto, na literatura bibliográfica, encontramos trabalhos que destacam o surgimento natural das Tecnologias nas atividades de Modelagem (Bonafini, 2004; Scheller, 2014; Campos, 2015; Silva; Uribe; Rosa, 2022).

Com base numa revisão sistemática da literatura realizada por Silva, Uribe e Rosa (2022, p. 3), o autores entendem que

Durante o desenvolvimento das atividades de Modelagem Matemática, **o uso das Tecnologias Digitais pode acontecer de forma natural** e espontânea ao utilizar calculadora digital, celular, tablet, entre outras ferramentas tecnológicas educacionais, em que os alunos podem manipular os resultados conforme as mudanças que ocorre durante uma investigação de um fenômeno da realidade vivenciado por eles ou não.

Também podemos nos respaldar na pesquisa de Campos (2015), em que o autor fala que no desenvolvimento das atividades de Modelagem Matemática propostas em seu trabalho, a utilização das Tecnologias Digitais surgiu naturalmente como apoio nas buscas,

organização, tratamento e apresentação de dados, além da comunicação a distância entre os participantes e a realização de textos colaborativos, entre outras formas de uso.

Concluindo esta categoria, podemos dizer que o uso das Tecnologias nas atividades de Modelagem Matemática pode proporcionar tanto aos professores quanto aos estudantes a Experimentação de outras formas de ensinar e aprender conceitos matemáticos. Os recursos digitais neste trabalho pode oportunizar os alunos a pesquisa, a investigação, o trabalho colaborativo e a habilidade em lidar com cálculos envolvendo números não necessariamente inteiros. No entanto, não queremos afirmar aqui que as Tecnologias são apenas benéficas ao meio educacional (Araújo, 2002; Abreu, 2022). Como observado neste trabalho, o uso das ferramentas digitais pode influenciar na aprendizagem, mas não é garantia de aprendizado.

5.3.2 Categoria 2 (C2): Em Relação aos Conteúdos

Ao elaborarmos esta categoria "Em Relação aos Conteúdos", buscamos evidenciar os conhecimentos matemáticos e extramatemáticos investigados pelos estudantes nas fases da Modelagem Matemática. Esses conhecimentos, em uma atividade de Modelagem, podem estar relacionados tanto com conteúdos já aprendidos ou estudados, quanto ao novos saberes matemáticos que possam surgir por meio da orientação do professor/pesquisador.

Neste contexto, seguindo as considerações de Burak (2019), “Às vezes, acontece que um conteúdo necessário para a resolução de um problema ainda não tenha sido apresentado ao estudante. É, então, um momento importante para que o professor, na condição de mediador, ofereça ao estudante a aquisição desse conhecimento” (Burak, 2019, p. 1003 - 104).

Percebemos que durante as atividades de Modelagem, os estudantes comentavam que em suas aulas de Matemática só aprendiam o que o professor passava e que não eram estimulados a aprender sem ser por memorização e exercícios repetitivos. Segundo Bonafini (2004, p. 13)

Nessas aulas, os conteúdos são apresentados de forma pronta e inquestionável, na maioria das vezes não são feitas as conexões de assuntos dentro da própria disciplina e, com isso, raríssimas vezes a disciplina relaciona-se com outras adjacentes, como, por exemplo, interação entre a Física e a Matemática, o que poderia mostrar aos alunos relações e aspectos comuns nos conceitos estudados entre essas duas áreas.

Na fase da *Interação*, os estudantes, em nosso entendimento, exploraram habilidades que favoreceram a interpretação e a compreensão da realidade proposta, ou seja, da segunda atividade, lançamento de dardos magnéticos, na intenção de formular a problemática e definir metas para resolvê-lo (*Ibid.*, 2021). Assim, foram capazes de refletir sobre conceitos de outras áreas do conhecimento, poderiam fundamentar suas hipóteses e conjecturas. Refletiram e separaram informações em *sites* e plataformas *online*, bem como realizaram debates tanto entre os integrantes do próprio grupo quanto entre os oito grupos formados.

Buscando sustentação no desenvolvimento da Modelagem nessa fase, nos apoiamos nas competências "Investigação e Compreensão" do PCNEM nas quais, identificamos que os alunos desenvolveram habilidades, tais como:

- Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc);
- Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema;
- Formular hipóteses e prever resultados;
- Selecionar estratégia de resolução de problemas;
- Interpretar e criticar resultados numa situação concreta;
- Distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos;
- Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades;
- Discutir ideais e produzir argumentos convincentes (Brasil, 2000, p. 46, adaptação nossa).

As habilidades citadas foram alvo de reflexão à medida que o professor/pesquisador disponibilizava as tarefas planejadas. Dessa forma, na fase da *Interação*, os estudantes experimentavam, testavam e selecionavam informações e dados que entendiam ser relevantes para elaborar o problema e, posteriormente, solucioná-lo.

Na fase da *Matematização*, os estudantes buscaram a partir do problema definido na linguagem natural, transcrevê-lo para linguagem Matemática. Atendendo, assim, alguns requisitos estabelecidos pela BNCC.

[...] na Matemática, o uso dos registros de representação e das diferentes linguagens é, muitas vezes, necessário para a compreensão, a resolução e a comunicação de resultados de uma atividade. Por esse motivo, espera-se que os estudantes conheçam diversos registros de representação e possam mobilizá-los para **modelar** situações diversas por meio da linguagem específica da matemática – verificando que os recursos dessa linguagem são mais apropriados e seguros na busca de soluções e respostas – e, ao mesmo tempo, promover o desenvolvimento de seu próprio raciocínio (Brasil, 2018, p. 529).

Durante o processo de transcrição da linguagem natural para linguagem Matemática os estudantes mobilizam conhecimentos prévios relacionados a diferentes registros de

representação no formato coletivo ou individual. Assim, refletiram sobre informações específicas da situação-problema, figuras, fórmulas e conceitos matemáticos, tabelas e gráficos.

Quando questionamos quais tipos de conteúdos poderiam emergir para auxiliar na solução do problema, eles apontaram trigonometria, estatística, contagem, entre outros, porém, todos os grupos em debate destacaram a função quadrática como o principal objeto matemático. Logo, a resposta dos estudantes em relação ao objeto matemático função quadrática atendeu às nossas expectativas. Juntamente com os conceitos matemáticos, eles, sem a interferência do professor/pesquisador, refletiram sobre conceitos da Física, chegando à relação correta que lhes permitiria determinar a posição da peteca de acordo com o tempo.

Durante as Fases da *Resolução e Interpretação de Resultados e Validação*, os estudantes realizaram experimentos com Tecnologias utilizando os conceitos matemáticos inclusos na função quadrática, tais como: raízes, discriminantes, vértices, fórmula canônica e reduzida, interseção entre dois objetos matemáticos, pontos contidos em uma função, gráfico e interpretação geométrica. Além disso, trabalharam conhecimentos matemáticos como números decimais, representações decimais de números fracionários, números com potência, percebendo que ao lidar com questões da realidade, nem sempre precisam lidar exclusivamente com números inteiros.

Na atividade de dardos magnéticos, quando foram expostos a novos conhecimentos matemáticos. Por exemplo, na regressão polinomial de segundo grau, os estudantes tiveram contato com conceitos matemáticos como funções polinomiais, equações quadráticas, coeficientes da regressão, métodos de ajustes, interpretação geométrica e análise de dados. Ao fazer cálculos como erros numéricos, os estudantes, trabalharam com precisão e exatidão, erro absoluto e erro relativo, arredondamento, propagação de erro, entre outros.

Com base nas informações supracitadas nesta categoria, elaboramos o Quadro 20, na qual mostra quais conteúdos e conhecimentos matemáticos e extramatemáticos emergiram nas fases de Modelagem de acordo com Almeida, Silva e Vertuan (2023).

Quadro 20 - Conteúdos que emergiram nas fases da Modelagem

FASES	CONTEÚDOS
Interação	Interpretação, Compreensão, Seleção de Estratégias, Leitura, Investigação, Revisão e Edição, Raciocínio Dedutivo, Raciocínio Indutivo, Debate de Ideias, Defesa de Argumentos.

Matematização	Analisar Informações, Estabelecer Metas, Interpretar dados, Comparar conjuntos de Informações e Dados, Transcrição da Linguagem Natural para Matemática, Função Polinomial do segundo grau, pensamento computacional, mundo digital, cultura digital, Raciocínio Dedutivo, Raciocínio Indutivo.
Resolução	Função Quadrática: raízes, discriminantes, vértices, fórmula canônica, fórmula reduzida, Interseção entre dois Objetos matemático, pensamento computacional, mundo digital, cultura digital.
Interpretação de Resultados e Validação	Regressão Polinomial do segundo grau, Erros Numéricos: Erro relativo e Erro absoluto, Raciocínio Dedutivo, Raciocínio Indutivo, pensamento computacional, mundo digital, cultura digital.

Fonte: Autor (2023)

Neste sentido, compreendemos que a escolha dos estudantes em examinar, novamente, o estudo da função quadrática por meio da Experimentação com Tecnologias nesta atividade de Modelagem (dardos magnéticos) os auxiliou a compreender melhor seus conceitos. Embora já tivessem tido contato com esse conteúdo anteriormente, desde o primeiro momento puderam refletir sobre questões que não se limitavam apenas a conhecimentos matemáticos.

Além disso, foram capazes de analisar propriedades, definições e características das funções sob diferentes perspectivas, especialmente com o uso das Tecnologias Digitais, as quais permitiram que os estudantes visualizassem de maneiras diversas as representações matemáticas relacionadas aos modelos parabólicos validados.

5.4.3 Categoria 3 (C3): Em relação às Experiências

Na experiência dos estudantes com os dardos magnéticos percebemos que eles se tornaram participantes ativos do processo de aprendizagem. Eles tiveram a oportunidade de explorar, experimentar em diferentes ambientes digitais e criar utilizando as Tecnologias disponíveis, o que os envolveu na construção de conhecimentos matemáticos e extramatemáticos.

Por outro lado, durante as aulas expositivas, os alunos tendem a ser mais passivos, seguindo instruções diretas do professor sem muita oportunidade de exploração de conceitos matemáticos ou de outras áreas do conhecimento. Assim, quando expostos a problemas matemáticos, o

[...] aluno não compreende o problema ou utiliza para sua resolução apenas dados memorizados, considera-se que esse aluno evocou apenas dados algorítmicos, elaborando pouco ou nenhum raciocínio lógico para sua resolução [...] (Suart, Marcondes, 2009, p. 58 - 59).

Para as autoras, quando os estudantes são conduzidos a um processo de aprendizagem no qual não assumem o protagonismo do seu próprio conhecimento, eles não conseguem identificar a situação-problema, ficam restritos a fornecer informações superficiais e acabam limitados a aplicar fórmulas ou conceitos de forma mecânica.

Observamos que os estudantes exploraram os conceitos matemáticos em seu próprio ritmo por meio da Experimentação com Tecnologias, permitindo que, seguindo seus interesses, descobrissem soluções de maneira independente. As dinâmicas realizadas durante o tempo de cada grupo podem ter contribuído para que os estudantes desenvolvessem um senso de responsabilidade pelo próprio aprendizado, o que pode ter despertado neles a autoconfiança.

Ao efetuarem os cálculos manuais com a calculadora científica para determinar os conceitos matemáticos representados pela função $f(x) = -0,0061x^2 + 0,5511x + 563,912$, o grupo B relatou que levou cerca de 15 minutos para obter o resultado do discriminante, do vértice, das raízes, da fórmula reduzida e da fórmula canônica, porém, que conseguiram encontrar mais dígitos do que o GeoGebra, o que aumentou a autoestima do grupo.

Por outro lado, no GeoGebra, o único esforço necessário foi digitar a fórmula da função quadrática, pois para obter os conceitos desse objeto matemático, eles apenas precisaram clicar nas funcionalidades desejadas. Entendemos que essa facilidade pode contribuir para que os estudantes não percam tempo realizando cálculos, possibilitando que eles possam refletir melhor sobre a resolução do problema como afirma Araújo (2002).

Segundo Bonafini (2004, p. 99)

Há de se notar que, inicialmente, os alunos se valeram mais do lápis-e-papel, porém, durante o desenvolvimento da atividade, os alunos já estavam manuseando os equipamentos e efetuando cálculos mais avançados na calculadora. Esse desempenho já mostra os estudantes interagindo com as mídias disponíveis no experimento e relacionando a Física com a Matemática, de maneira a encontrar uma expressão para a temperatura da mistura.

Nessa situação descrita pela autora, os estudantes puderam ganhar mais tempo ao começarem a utilizar calculadoras para realizar cálculos difíceis, o que lhes permitiu refletir sobre outros aspectos.

A funcionalidade dos aplicativos, *softwares* e programas matemáticos. Durante os testes realizados para verificar a validade do modelo matemático nesta segunda atividade, os estudantes se depararam com as diferentes funcionalidades dessas ferramentas em relação aos conceitos que utilizaram para determinar a posição da peteca em função do tempo estipulado por eles.

Por meio da Experimentação com Tecnologias, os estudantes puderam perceber que há diferentes variações associadas aos conceitos matemáticos entre uma ferramenta digital e outra. No entanto, conseguiram observar que o tempo escolhido estava de acordo com o modelo validado por eles na fase da *Interpretação de Resultados e Validação*.

Com base nas informações extraídas desta categoria e nas análises de dados da atividade de dardos magnéticos, criamos um esquema, mostrado no Quadro 21. Nesse esquema, categorizamos as estratégias empregadas neste estudo em quatro setores, alinhados com os fundamentos metodológicos e teóricos adotados nesta pesquisa.

Quadro 21 - Esquema das estratégias utilizada na pesquisa, na atividade de Dardos Magnéticos

Setor	Estratégias Pedagógicas
1	Modelagem Matemática
2	Tecnologias Digitais
3	Experimentação
4	Experimentação com Tecnologias nas atividades de Modelagem Matemática

Fonte: Autor (2023)

Ao desenvolvermos a atividade dos dardos utilizando Tecnologias, os alunos experimentaram diferentes abordagens, e em cada uma delas, características distintas do objeto matemático em estudo foram evidenciadas, o que consideramos essencial para que o estudante compreenda o conteúdo. Neste sentido, a Experimentação nas atividades de Modelagem Matemática oportunizou um maior leque de questões a serem analisadas em um período limitado, o que, em geral, não seria possível se utilizássemos apenas a abordagem manual.

CAPÍTULO 6

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

6 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Nossa pesquisa aconteceu a partir do desenvolvimento de duas atividades de Modelagem Matemática, sendo a primeira “Brincando com Peteca” e a segunda “Lançando Dardos Magnéticos”, em duas turmas do 3º ano do ensino médio. As turmas faziam parte de uma Escola Estadual de Educação Integral em Campo Grande–MS. As atividades foram desenvolvidas durante as aulas de Recomposição de Aprendizagem (RA) da disciplina de Matemática, nas terças-feiras. Devido à junção das duas turmas para a realização das atividades, os encontros foram programados para todas as terças-feiras, cobrindo os quatro períodos disponíveis no matutino.

Durante as duas atividades, os estudantes tiveram a oportunidade de utilizar as Tecnologias Digitais, como o programa Tracker, o *software* GeoGebra, as plataformas *online* Canva, Mentimeter, *YouTube*, Sorteador e a calculadora científica. Além disso, utilizaram o computador, o celular e o projetor para acessar informações na *internet*, trocar mensagens pelo *WhatsApp*, armazenar vídeos no *Drive* e visitar *sites* específicos.

A cada dinâmica, os estudantes tiveram a oportunidade de realizar Experimentação com Tecnologias, buscando informações, produzindo dados, testando hipóteses, construindo e analisando gráficos com base nos dados fornecidos pelas situações-problemas e pelo modelo matemático. Como parte dos resultados, solicitamos que os estudantes respondessem um relatório final no qual mostrariam as repercussões do uso das Tecnologias nas atividades de Modelagem.

Percebemos que em relação ao uso das Tecnologias, os grupos se mostraram curiosos. Mesmo com a dificuldade inicial relacionada ao equipamento, experimentaram, conversaram, discutiram, tentaram, inovaram, pareciam ter interesse sobre os assuntos que iam surgindo, por mais banais que fossem. Mesmo o grupo B, que inicialmente demonstrou certa reserva, na segunda atividade estava menos inibido, parecia mais interessado.

Esse fato foi perceptível na resposta ao relatório, pois quando perguntamos se o uso de Tecnologias Digitais facilitou a busca por informações sobre as situações-problemas, o grupo B respondeu: “*Sim, pois nosso grupo no início não estava focado nas atividades aí não conseguíamos discutir muito só com nossas ideias, mas quando usamos as tecnologias principalmente na segunda atividade o grupo ajudava mais pois tinha muita informações para pegar nos sites*”.

Em resposta a mesma pergunta, o grupo A relatou: *“Sim, pois quando iniciamos a atividade de peteca mesmo que nós tínhamos discutidos não sabíamos muita coisa sobre a peteca, aí conseguimos melhores informações quando pesquisamos nos sites da peteca, achamos que o debate fluiu. O debate foi legal no Canva pois víamos os grupos colocando as informações e não queríamos repetir o que eles colocavam. No início foi um pouco difícil mexer no Canva mas em alguns minutos já sabíamos muitas coisas. No Mentimeter foi também foi legal, mas não tinha muita interação não tinha muito o que fazer, mas foi bom. Gostamos que lá podíamos colocar respostas no mesmo instante também.”*

Com base nestas respostas, evidenciamos que, nas atividades de Modelagem, os estudantes iniciaram mais timidamente e, ao longo das outras atividades, conseguiram interagir mais, aspecto relatados por autores como Araújo (2002), Rosa (2013), Brandt, Burak e Klüber (2016), Souza (2020). Neste contexto, em suas atividades autores como Brandt, Burak e Klüber (2016, p. 216) apontaram que: “ O aluno mostrava-se tímido, mas pela dinâmica da atividade de Modelagem Matemática superou, ao menos naquele momento, a sua timidez.”

Em uma sua pesquisa, segundo Santos (2021, p. 56, grifo nosso), a autora relatou que:

Procuramos conduzir a interação dos alunos com a temática a partir de um diálogo, objetivando, também, a motivação por parte dos alunos. O diálogo envolvia perguntas relacionadas a rodoviárias, em geral, até que se pudessemos mencionar a Rodoviária de Londrina. **Poucos alunos responderam às perguntas, mostraram-se tímidos.** Como estratégia para que ficassem mais desinibidos, adiantamos a constituição dos grupos.

Em todas as situações sobre timidez mencionadas pelos autores, eles destacaram que os estudantes, com o tempo, foram se soltando e interagindo tanto com as atividades quanto com os colegas de sala.

Também vale ressaltar que o grupo B, que na primeira atividade demonstrou dispersão durante a realização das tarefas - saindo do grupo para conversar com integrantes de outros grupos, permanecendo com a cabeça baixa, utilizando seus celulares, entre outras situações -, mostrou-se mais proativo e participativo na segunda atividade. Embora alguns ainda se dispersassem, não o faziam com a mesma frequência da primeira atividade. Isso resultou em uma maior concentração do grupo e dos demais participantes. Esta questão nos leva a acreditar da importância de trabalhar com os alunos de forma gradativa, tanto no desenvolvimento da atividade de Modelagem, quanto no uso das Tecnologias Digitais.

Constatamos que outro aspecto importante relatado pelos estudantes foi a facilidade de uso das Tecnologias como GeoGebra, para compreender a função quadrática, por meio de sua interface intuitiva. Dessa forma concordamos com Borba e Penteadó (2010, p. 46), em que os autores relatam que os *softwares* dinâmicos “[...] permitem o trabalho com funções, tabelas e estatística como o *Excel*, tornam-se importantes aliados em investigações abertas como as empreendidas em uma abordagem ligada à modelagem.”. Além disso, os alunos ressaltaram a possibilidade de realizar cálculos de forma mais rápida; em alguns casos, bastava clicar na funcionalidade desejada que os aplicativos já apresentavam os resultados.

À vista disso, quando indagamos os grupo A e B, se eles acreditavam que sem o uso das Tecnologias Digitais poderiam ter se saído melhor nas discussões com seus grupos. O grupo A ressaltou que: *“Acreditamos que não porque com as tecnologias conseguimos ter mais informações, usando os softwares conseguimos concluir melhor o problema. Não precisamos fazer os cálculos difíceis pois podíamos usar a calculadora o que não acontece nas aulas de matemática o professor não deixa. Outra coisa que marcou foi que na segunda atividade podemos explorar mais a função com as tecnologias.”*.

À mesma questão supracitada, o grupo B falou que: *“Com as petecas talvez mas com os dardos não porque só o Cássio que era do grupo que já tinha jogado dardos. As tecnologias ajudou na nossa aprendizagem, e também nos cálculos que era com muitas casas decimais depois da vírgula. Também podemos usar os softwares para encontrar mais rápido as respostas de cálculos como vértices e raízes.”*.

No que se refere à integração das Tecnologias Digitais nas duas atividades propostas, podemos observar que sua aceitação foi positiva durante as fases da Modelagem pelos estudantes, conforme evidenciado na C1. Isso porque permitiu que os estudantes investigassem de forma autônoma e tomassem decisões sem depender exclusivamente da orientação do professor/pesquisador, como mencionado pelo grupo A: *“[...] conseguimos construir nossos conhecimentos é claro que o senhor teve grande parte nisso mais o senhor deixava nós escolher qual caminho seguir”*.

Percebemos que, no que diz respeito aos conteúdos, o uso da Experimentação com Tecnologia em ambas as atividades auxiliou os estudantes na construção de conhecimentos tanto matemáticos quanto extramatemáticos. Esse fato ocorreu por meio de investigações que resultaram na elaboração de conjecturas fundamentadas, as quais contribuíram para a resolução dos problemas. Logo, segundo Borba e Penteadó (2010, p. 38) “vale ressaltar que a conjectura é fruto do enfoque experimental-com-tecnologias, visto que ela surge das

investigações feitas em conjuntos com as calculadoras gráficas e com o computador equipado com o *software* [...]”.

A prática de experimentar o mesmo objeto matemático, no caso a função quadrática, em diferentes situações-problemas contribuiu para os estudantes mobilizarem seus conhecimentos de forma diferenciada, bem como os diferentes registros como a linguagem natural, gráficas, algébricas, tabular ou simbólica. Tais pontos de vista, possibilitaram que eles a refletir sobre os conceitos matemáticos imbricados de maneira mais natural.

De acordo com o PCNEM

Determinados aspectos exigem imagens e, mais vantajosamente, imagens dinâmicas; outros necessitam de cálculos ou de tabelas de gráfico; outros podem demandar expressões analíticas, **sendo sempre vantajosa a redundância de meios para garantir confiabilidade de registro e/ou reforço no aprendizado** (Brasil, 2000, p. 53, grifo nosso).

Na BNCC, em sua quarta competência específica de Matemática e suas Tecnologias para o ensino médio, dispõe que: “Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, **diferentes registros de representação matemáticos** (algébrico, geométrico, estatístico, computacional, etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas (Brasil, 2018, p. 531, grifo nosso).

Quando perguntamos no relatório se tanto o Tracker quanto o GeoGebra se foram fáceis de usar, se eles apresentavam os conceitos matemáticos de forma fácil desde a importação do vídeo no Tracker até o modelo matemático encontrado no GeoGebra. O grupo B respondeu que: *“Achamos que os dois software fortaleceram nossos conhecimento, porque conseguimos mexer aos mesmo tempo em mais de um elemento matemático. Quando arrastamos um ponto no plano cartesiano estamos lidando com coordenadas, distância e posição diferentes. O GeoGebra deu mais possibilidades de mexer nos gráficos na função no vértice e raízes. ”*

Em resposta a mesma questão o grupo B ressaltou que: *“Sim foi muito fácil de usar e o professor explicou muito bem ele nos ajudou bastante. Conseguimos realizar as atividades aprender mais matemática igual a função, o que mais gostamos foi que no gráfico da função encontramos o vértice a raízes sem fazer cálculos com aqueles números decimais.”*

Com base nas falas dos grupos A e B e nas análises realizadas, percebemos que, embora os estudantes tenham encontrado inicialmente pequenas dificuldades com os programas, conseguiram identificar diferentes conceitos matemáticos interligados. Pois,

perceberam que, ao alterar um ponto, por exemplo, isso influenciava em vários conceitos matemáticos, e, esse fato era evidenciado na interface do GeoGebra. Também exploraram questões gráficas que surgiram durante as reflexões em grupo, o que contribuiu para o fortalecimento de seus conhecimentos tanto matemáticos quanto extramatemáticos.

No que concerne à experiência, compreendemos que os estudantes puderam perceber que, durante as atividades, especialmente na segunda atividade dos dardos magnéticos, as ferramentas digitais apresentam especificidades matemáticas que podem ter características distintas em relação aos conceitos dos objetos matemáticos. Entendemos ser importante essa diferença entre os programas matemáticos, pois são questões que levam os estudantes a buscar novos caminhos e a refletir sobre suas decisões em relação à situação-problema estudada como defendem Scheller e Biembengut (2013).

Outra questão observada pelos estudantes foi que as interfaces do Tracker e do GeoGebra podem variar dependendo onde esta sendo utilizado. Por exemplo, no celular, encontraram limitações quanto ao uso do Tracker, levando-os a refletir que, no computador, essa Tecnologia seria mais eficiente para realizar as tarefas desejadas naquele momento. No caso do GeoGebra, embora houvesse muita semelhança com a versão do computador, encontraram limitações que dificultavam sua manipulação no celular, como ao tentarem clicar em uma ferramenta e clicarem em outra por engano, o que acabava demandando mais tempo para realizar as dinâmicas.

Constatamos também que em muitas situações durante as dinâmicas, as Tecnologias proporcionaram um ambiente mais propício ao diálogo dentro do contexto da Modelagem Matemática.

Para Borssoi e Almeida (2015, p. 38)

Ambientes de ensino e de aprendizagem com modelagem matemática, em geral, estimulam os alunos a interagir e trabalhar em grupos. Assim, os interesses e conhecimentos de cada grupo de alunos envolvido com atividades de modelagem remetem a resoluções que podem fazer uso de diferentes conceitos matemáticos. Neste sentido, ao compartilhar as diferentes resoluções, os alunos tanto põe em evidência aquilo que sabem e pensam a respeito do assunto em questão, quanto conhecem outros modos de pensar sobre o assunto [...].

Percebemos que quando os estudantes têm acesso a informações retiradas de diferentes realidades em tempo real, com o auxílio de *sites* específicos e plataformas *online*, a discussão pode fluir melhor. Eles se tornam mais confiantes em fazer comentários,

conseguiram refletir sobre as informações de seus colegas em relação ao que pesquisaram, e tudo isso gerou um ambiente propício para a aprendizagem, no campo da Matemática.

Em nossa última questão ao relatório final, propomos que os estudantes descrevesse sobre o desenvolvimento das atividades no geral, levando em consideração as Tecnologias Digitais e suas experiências com as mesmas nas fases da Modelagem Matemática. O grupo A respondeu que: *“Professor essas atividades que o senhor fez com nós foi demais, todas do grupo amou queríamos só ter atividades assim. Aprendemos mais que só matemática aprendemos sobre peteca e dardos discutir em grupo, foi uma experiência rica e cheio de emoções boas. Cada uma de nós só agradecemos porque conseguimos construir nossos conhecimentos é claro que o senhor teve grande parte nisso mais o senhor deixava nós escolher qual caminho seguir. As experiências com as tecnologias foi boa começamos bem de leve e depois avançamos isso foi muito bom. Foi legal que aprendemos até a matemática da graduação e os conceitos de funções ficaram bem fixados na memória. Agradecemos pelas experiências.”*

O grupo B respondeu: *“A atividade foi muito diferente de tudo que já fizemos, gostamos muito todas as tarefas foi muito dinâmicas e fáceis conseguimos seguir tudo. Usamos muitas tecnologias isso foi legal porque nosso grupo gostava de jogar todo momento. Aprendemos muito sobre função e outros conteúdos mais avançados isso ajudou a vermos que podemos realizar cálculos mais difíceis. Se aprender matemática fosse assim seria mais divertido, e gostamos de brincar de peteca e dardos.”*

Com base nas respostas dos grupos e nas análises realizadas durante as atividades de peteca e dardos magnéticos, compreendemos que os estudantes consideraram a atividade positiva de forma geral. Eles expressaram satisfação em realizar experimentos com as Tecnologias, mostraram-se contentes em lidar com conteúdos de nível superior, o que aumentou sua confiança ao perceberem que não era tão difícil quanto imaginavam. No geral, apreciaram as atividades de Modelagem Matemática por serem diferentes e proporcionarem uma experiência única.

O objetivo geral desta pesquisa no campo da Educação Matemática, era analisar como a Experimentação pode potencializar as contribuições do uso das Tecnologias Digitais na construção dos conhecimentos matemáticos e extramatemáticos de estudantes do ensino médio de acordo com as fases da Modelagem Matemática. Nos debruçamos a separar tais variáveis, de acordo com as fases da Modelagem: *Interação, Matematização, Resolução e Interpretação de Resultados e Validação*.

Verificamos que na fase de *Interação*, o início da Experimentação com Tecnologias por meio das plataformas *online* Canva e Mentimeter. Os estudantes buscaram investigar as situações-problemas a partir de *sites* específicos que forneciam subsídios teóricos e/ou técnicos que continham informações relevantes sobre o tema de pesquisa. Após uma análise reflexiva, essas informações foram inseridas em tempo real nas plataformas.

Para Suart e Marcondes (2009) uma atividade experimental, requer mais do que simples manipulação ou observação por parte dos estudantes. A resolução de problemas por meio da Experimentação deve envolver reflexões, relatos, discussões, ponderações e explicações típicas de uma investigação científica. Assim, no Canva e no Mentimeter, os estudantes após reflexões, visualizavam e manipulavam diferentes tipos de registros, como textos em linguagem natural, imagens para melhorar o *design* e formatação, utilizando caixas de texto, figuras e desenhos disponíveis nessas plataformas, especialmente no Canva.

Durantes as investigações, o debate e as reflexões entre os grupos foram aspectos diferenciais, como expressaram os alunos. Nas aulas de Matemática, eles não costumavam realizar reflexões além dos assuntos específicos da disciplina. Na atividade de peteca, por exemplo, eles descobriram o contexto por trás da frase: “não deixe a peteca cair²⁰”, uma expressão muito utilizada em nossa cultura. Quando se depararam com essa informação, puderam fazer associações com seu cotidiano, o que possibilitou a construção de conhecimentos extramatemáticos.

Percebemos que na fase de *Matematização*, o processo de experimentação se iniciava quando os estudantes começaram a manipular seus celulares para fazer filmagens de seus colegas brincando com petecas ou lançando dardos magnéticos. Naquele momento, eles faziam ajustes, diminuindo ou aumentando o *zoom* conforme necessário. A função *touch screen* no celular é considerada uma experiência de Experimentação com Tecnologia, uma vez que é regida por códigos binários. Cada toque na tela do celular é convertido em informações binárias, que são então interpretadas pelo sistema operacional do dispositivo para executar a ação desejada.

Constatamos a articulação entre diferentes Tecnologias Digitais. Após as filmagens, os estudantes se dirigiram ao Laboratório de Informática com o intuito de transferir seus próprios vídeos para o computador da escola, visando uma possível análise posterior. Para Kenski (2012, p. 33)

²⁰ A expressão "não deixe a peteca cair" é frequentemente utilizada para incentivar alguém que está cansado de realizar uma tarefa árdua. Trata-se de um “ditado popular comum”.

É possível articular telefones celulares, computadores, televisores, satélites, etc. e, por eles, fazer circular as mais diferentes formas de informação. Também é possível a comunicação em tempo real, ou seja, a comunicação simultânea, entre pessoas que estejam distantes, em outras cidades, em outro país ou mesmo viajando no espaço (Kenski, 2012, p. 33).

Nesse contexto, deduzimos que os estudantes tinham acesso à *internet*, ao *Drive*, ao *E-mail* e ao *WhatsApp*, ou seja, outras ferramentas digitais que potencializavam a experiência dos alunos com a Experimentação com Tecnológica, pois estas permitiam que eles pudessem acessar e se comunicarem de forma assíncrona ou síncrona.

Nesta fase, os estudantes exploraram questões relacionadas à Física, destacando a interdisciplinaridade entre diversas áreas do conhecimento. Estabeleceram conexões entre diferentes conceitos matemáticos, tais como trigonometria, contagem, estatística e diversos tipos de funções, na tentativa de desenvolver um modelo matemático capaz de abordar as problemáticas apresentadas em ambas as situações-problema.

Em relação à fase de *Resolução*, os estudantes praticamente basearam todas as suas experiências no uso do Tracker e do GeoGebra. Nessa fase, eles começaram a mobilizar seus conhecimentos matemáticos conforme as dinâmicas surgiam, objetivando a plotagem do gráfico pelo Tracker com os dados fornecidos da realidade deles. Para Borba e Penteado (2010, p. 43) um aspecto a ser destacado é que “há *softwares* que fazem ajustes de curvas de uma forma bastante simples. Com um *software* desse tipo, os alunos poderiam facilmente determinar qual a melhor função que se ajustaria ao conjunto de pontos produzidos.

Além disso a articulação entre esses programas contribuiu para potencializar a aprendizagem de conceitos matemáticos relacionados à função quadrática. Por meio da visualização das interfaces do Tracker e do GeoGebra, os estudantes puderam manipular diversificadas representações matemáticas como gráficos, coordenadas, distâncias, fórmulas e intersecções entre objetos matemáticos. Tiveram contato com conteúdo matemático de nível superior, como regressão polinomial. A regressão polinomial é um conceito mais avançado em Estatística e Matemática é geralmente ensinada em cursos superiores em Matemática, Estatística, Engenharia, Ciências da computação e áreas afins.

Os debates e reflexões sobre as hipóteses levantadas em fases anteriores eram retomados constantemente, o que, em nossa opinião, se enquadra em atividades de Modelagem, onde retomar as discussões é fundamental para a construção de conhecimentos

extramatemáticos, bem como para validar o modelo da melhor forma possível (Almeida, Silva e Vertuan, 2021).

Entendemos que, na fase de *Interpretação de Resultados e Validação*, os estudantes prosseguiram tendo contato com conteúdos de nível superior, ou seja erros numéricos. O estudo sobre erros numéricos é explorado geralmente em cursos de graduação como na Matemática, Engenharia e Física nas disciplinas de cálculo, métodos numéricos, análise numérica entre outros.

Nesse sentido, eles tiveram a oportunidade de comparar os dados gerados pelo Tracker, que proporcionou uma representação gráfica e coordenadas (t, y) dos dados reais dos alunos, com a representação gráfica e coordenadas (x, y) elaborada no GeoGebra, que representava o modelo matemático construído por eles. Assim, para Bassanezi (2013, p. 24) “A modelagem é eficiente a partir do momento que nos conscientizamos que estamos sempre trabalhando com aproximações da realidade, ou seja, que estamos elaborando sobre representações de um sistema ou parte dele”.

Embora reconheçamos que o desenvolvimento das atividades teve resultados positivos, identificamos alguns desafios nesta pesquisa. Dentre esses aspectos, destacamos:

- Problemas técnicos com os equipamentos como projetor, cabos de HDMI, mau funcionamento de mouses e teclados;
- Poucos computadores disponíveis, assim, até mesmo os grupo com seis alunos tinha que utilizar no máximo dois computadores;
- A escola não liberava o acesso à *internet* para que os estudantes pudessem acessar as ferramentas digitais em seus celulares;
- Interferências na continuação das atividades, sendo que tivemos duas semanas interrompidas por questão de feriado e aplicação da OBMEP. Isso afetou diretamente no planejamento inicial, ao qual tivemos que adaptar;
- Superlotação de estudantes no Laboratório de Informática, devido ao fato que as atividades foram realizadas com duas turmas do terceiro ano do ensino médio;
- Mau funcionamento do programa Tracker em celulares, embora abria interface mas era muito lento, o que dificultava a interação do estudantes com este dispositivo;
- No dia da atividade de dardos magnéticos ventava muito, assim, tivemos que recorrer às salas de aulas desocupadas e perdemos a característica de atividade ao ar livre.

Neste trabalho, identificamos as seguintes fragilidades relacionadas à Experimentação com o uso das Tecnologias Digitais:

- Alguns estudantes buscavam respostas prontas facilitadas pelo *software* GeoGebra, ou seja, em vez de realizar os cálculos primeiro, eles buscavam os resultados nas Tecnologias para depois efetuarem os cálculos;
- Alguns *softwares* e aplicativos matemáticos podem oferecer comandos diferentes para alcançar determinados resultados matemáticos, como exemplificado pelo grupo A ao utilizar o *Photomath* e o GeoGebra;
- Em diferentes momentos, alguns estudantes extraíam informações dos *sites* sem refletir sobre esses dados, o que não contribuía para a construção de conhecimentos extramatemáticos.

Em resumo, apesar de termos conseguido terminar o desenvolvimento de duas atividades com sucesso, muitas adaptações foi necessário fazer, e, embora não seja o objetivo desta pesquisa, pensamos que estas dificuldades é um obstáculo para os professores utilizarem Modelagem Matemática e Tecnologias em sala de aula.

Enfim, refletindo sobre o desenvolvimento das atividades, identificamos que o uso de diferentes estratégias pedagógicas requer muita dedicação por parte dos professores e dos estudantes. O planejamento que antecedeu as atividades foi essencial para a realização deste trabalho, porém não pode ser rígido. Além disso, os estudantes avaliaram positivamente essas práticas por meio da Experimentação com Tecnologias nas fases de Modelagem. Em um período curto de tempo, conseguimos abordar um maior número de conteúdos, visando diferentes aspectos destes, o que abre caminho para outras experiências, com outras turmas da educação básica ou até do ensino superior. Acreditamos que unir atividades lúdicas, Modelagem Matemática e Tecnologias Digitais pode ser uma forma potencial para o ensino e aprendizagem de Matemática.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

REFERÊNCIAS

- ABREU, S. M. C. **A integração das tecnologias digitais à prática pedagógica do professor de matemática**. 2022. 333 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) - Programa de Pós-Graduação Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto de Física “Gleb Wataghin” da Universidade Estadual de Campinas, Campinas - SP, 2022. Disponível em: [A Integração das Tecnologias Digitais à prática...](#). Acesso em: 12 dez. 2023.
- AGUIAR, M. K. S.; MALHEIROS, A. P. D. S. Modelagem Matemática e a Sala de Aula: um olhar para um material didático. **Revista de Educação Matemática (TANGRAM)**, v. 3, n. 4, p. 93 – 113, 2020. Disponível em: <https://ojs.ufgd.edu.br/index.php/tangram/article/view/12515>. Acesso em: 20 dez. 2023.
- ALMEIDA, L. M. W.; VERTUAN, R. E. Perspectiva educacional e perspectiva cognitivista para a Modelagem Matemática: um estudo mediado por representações semióticas. **Modelagem na Educação Matemática**, v. 1, n. 1, p. 28-42, 2010.
- _____; SILVA, K. P.; BORSSOI, A. H. Um estudo sobre o potencial da experimentação em atividades de modelagem matemática no ensino superior. **Quadrante**, v. 30, n. 2, p. 123-146, 2021.
- _____; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem matemática na educação básica**. 1 ed. 2ª reimpressão. São Paulo: Contexto, 2021.
- ALMEIDA, W. N. C.; SILVA MALHEIRO, J. M. A experimentação investigativa como possibilidade didática no ensino de matemática: o problema das formas em um clube de ciências. **Experiências em Ensino de Ciências**, v. 14, n. 1, p. 391-405, 2019. Disponível em: <https://fisica.ufmt.br/eenciojs/index.php/eenci/article/view/42>. Acesso em: 1 out. 2023.
- ARAKI, P. H. H. Atividades experimentais em contexto de aulas com modelagem matemática: uma análise semiótica. 2020. 169 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática – PPGMAT, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Londrina/Cornélio Procópio, 2020. Disponível em: <http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/4898>. Acesso em: 1 out. 2023.
- ARAKI, P. H. H.; KATO, L. A. Modelagem Matemática e Experimentação Didática: Relato de uma atividade envolvendo ondulatória. In: XVI Encontro Paranaense de Educação Matemática (XVI EPREM), anais..., Foz do Iguaçu, 2022. Disponível em: <http://sbemparana.com.br/xvieprem/anais/547425.pdf>. Acesso em: 20 jan. 2023.
- ARAÚJO, J. L. Cálculo, Tecnologias e Modelagem Matemática: As discussões dos alunos. 2002. 180f. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – Área de Concentração em Ensino e Aprendizagem da Matemática e seus Fundamentos Filosófico-Científicos, Rio Claro, 2002.
- BARBOSA, J. C. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. **Reunião anual da ANPED**, v. 24, n. 7, p. 1-15, 2001.

_____. Modelagem Matemática na sala de aula. In: VIII Encontro Nacional de Educação Matemática. **Anais do VIII ENEM**. Perspectiva, v. 27, n. 98, p. 65-74, 2004.

_____. Integrando Modelagem Matemática nas práticas pedagógicas. **Educação Matemática em Revista**, v. 14, n. 26, p. 1-10, 2009. disponível em: <https://scholar.google.com/schhp?hl=pt-BR>. Acesso em: 4 jan. 2023.

BASSANEZI, R. C. **Temas e modelos**. São Paulo: Editora Unicamp, 2012.

_____. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. 3 ed., 4.^a reimpressão. São Paulo: Contexto, 2013.

BICUDO, M. A. V. **Educação matemática**. Moraes, 2005. Disponível em: <https://www.researchgate.net/profile/Maria-Bicudo/publication/>. Acesso em: 2 jan. 2023.

_____. A pesquisa em educação matemática: a prevalência da abordagem qualitativa. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, v. 5, n. 2, 2012. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/1185>. Acesso em: 2 jan. 2023.

BIEMBENGUT, M. S. 30 Anos de Modelagem Matemática na Educação Brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais. **Revista de Educação em Ciência e Tecnologia (Alexandria)**, v. 2, n. 2, p. 07 – 32, 2009. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/alexandria/article/view/37939>. Acesso em: 28 mar. 2023.

_____. Modelagem matemática & resolução de problemas, projetos e etnomatemática: pontos confluentes. **Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v. 7, n. 2, p. 197-219, 2014. Disponível em: <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6170851>. Acesso em: 28 mar. 2023.

_____. **Modelagem na Educação Matemática e na Ciência**. São Paulo, Ed. Livraria da Física, 2016.

BLUM, W.; NISS, M. Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects-State, trends and issues in mathematics instruction. **Educational studies in mathematics**, v. 22, n. 1, p. 37-68, 1991. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/BF00302716>. Acesso em: 26 jan. 2023.

BORBA, M. C. A pesquisa qualitativa em Educação Matemática. In: Publicado em CD da 27^a reunião anual da Anped. **Anais...**, Caxambu-MG, 21-24 Nov. 2004. Disponível em: <TIVA+EM+EDUCA%C3%87%C3%83O+MATEM%C3%81TICA&btnG=>. Acesso em: 16/1/2024.

_____; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. - 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2010.

_____; SOUTO, D. L. P. CANEDO JUNIOR, N. R. **Vídeos na Educação Matemática: Paulo Freire e a quinta fase das tecnologias digitais**. - 1 ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2022.

_____; SILVA, R. S. R.; GADANIDIS, G. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática: sala de aula e internet em movimento**. 3. ed. Autêntica Editora, Belo Horizonte, 2023.

BORSSOI, A. H. **Modelagem matemática, aprendizagem significativa e tecnologias: articulações em diferentes contextos educacionais**. 2013. 255f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Londrina, 2013.

_____; ALMEIDA, L. M. W. Percepções sobre o uso da Tecnologia para a Aprendizagem Significativa de alunos envolvidos com Atividades de Modelagem Matemática. **Revista electrónica de investigación en educación en ciencias**, v. 10, n. 2, p. 36-45, 2015. Disponível em: <https://reiec.unicen.edu.ar/reiec/article/view/191>. Acesso em: 1 fev. 2024.

BONAFINI, F. C. Explorando conexões entre a matemática e a física com o uso da calculadora gráfica e do CBL. 2004. 275 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Rio Claro/SP. 2004. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/items/cf0a8797-bb90-41fd-a1ae-f259e7706ba7>. Acesso em: 1 out. 2023.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Versão final. Brasília/DF: MEC/SEB, 2018. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/conselho-nacional-de-educacao/base-nacional-comum-curricular-bnc-c-etapa-ensino-medio>. Acesso em: 24 mai. 2023.

_____. Parâmetros Curriculares Nacional; Ensino Médio. Parte III-Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. **Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica**, 2000. Disponível em: <http://www.basenacionalcomum.mec.gov.br/implementacao/biblioteca-de-apoio/pcn-e-pcn-ensino-medio/>. Acesso em: 23 jan. 2024

BURAK, D. **Modelagem Matemática: Ações e Interações no processo de Ensino-Aprendizagem**. 1992. 460 f. Tese (Doutorado Educação) - Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas, 1992.

_____. Critérios norteadores para a adoção da Modelagem Matemática no ensino fundamental e secundário. **Revista Zetetiké**. Campinas, vol. 1, ano 2, nº 2, p. 47-60, 1994

_____. Formação dos pensamentos Algébrico e Geométrico: uma experiência com a modelagem matemática. **Pró-Mat**. Paraná, Curitiba, v.1, nº. 1, p. 32-41, 1998.

_____. A Modelagem Matemática e a sala de aula. In: Encontro Paranaense de Modelagem em Educação Matemática - I EPMEM, 1, 2004, Londrina. **Anais...** Londrina: UEL, 2004. p. 1-10.

_____. Modelagem Matemática: avanços, problemas e desafios. In: Encontro Paranaense de Modelagem em Educação Matemática, – II EPMEM, 2, 2006, Apucarana, PR. **Anais...** Modelagem Matemática: Práticas, Críticas e Perspectivas de Modelagem na Educação Matemática: Apucarana: FAP, 2006. p. 1-9.

_____. Uma perspectiva de Modelagem Matemática para o ensino e a aprendizagem da Matemática. In: BRANDT, Celia Finck. BURAK, Dionísio. KLÜBLER, Tiago Emanuel. **Modelagem matemática: perspectivas, experiências, reflexões e teorizações** [online]. 2nd ed. rev. and enl. Ponta Grossa: Editora UEPG, 2016. Disponível em: <http://books.scielo.org/id/b4zpq/epub/brandt-9788577982325.epub>. Acesso em: 2 fev. 2023.

_____. Modelagem na perspectiva da Educação Matemática: um olhar sobre seus fundamentos. **Unión-Revista Iberoamericana de Educacion Matemática**, v. 13, n. 51, 2017. Disponível em: <http://www.revistaunion.org/index.php/UNION/article/view/383>. Acesso em: 9 nov. 2022.

BURAK, D. KLÜBER, T. E. Modelagem Matemática na Educação Básica numa perspectiva de Educação Matemática. In: BURAK, Dionísio. PACHECO, Edilson Roberto. KLÜBER, Tiago Emanuel. **Educação Matemática: reflexões e ações**. 1 ed. Curitiba: Editora CRV, 2010.

BURAK, D. Modelagem na perspectiva da Educação Matemática: um olhar sobre seus fundamentos. **Unión-Revista Iberoamericana de Educacion Matemática**, v. 13, n. 51, 2017. Disponível em: <https://www.revistaunion.org/index.php/UNION/article/view/383>. Acesso em 1 fev. 2024.

CAMPOS, D. G. O desenvolvimento de posturas críticas nos estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental por meio da Modelagem Matemática. 2015. 125 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituição de Ciências Exatas e Biológicas, Universidade Federal de Ouro Preto, 2015. Disponível em: <https://www.repositorio.ufop.br/handle/123456789/5960>. Acesso em: 11 jan. 2024.

CHIARI, A. S. S. **O papel das tecnologias digitais em disciplinas de Álgebra Linear a distância: possibilidades, limites e desafios**. 2015. 206 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2015. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/items/cdb1debe-51a6-473f-85e6-cfcb6d162ad4>. Acesso em: 21 out. 2023.

_____. Tecnologias Digitais e Educação Matemática: relações possíveis, possibilidades futuras. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 11, n. 26, 2018a. Disponível em: <https://desafioonline.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/6570>. Acesso em: 13 mai. 2023.

_____. O que faço e o que (não) posso com as tecnologias digitais na educação a distância? In: ROCHA, P. G. (Org.). . Dez anos da UAB na UFMS: as licenciaturas em EaD. cap. 2. 1. ed. Porto Alegre: Editora Fi, 2018b. p. 43–64. Disponível em: https://www.editorafi.org/_files/ugd/48d206_6f5aa7c2b1cc44dd9f522dbb8dd339d4.pdf#page=43. Acesso em: 21 out. 2023.

DALLA VECCHIA, R. **A modelagem matemática e a realidade do mundo cibernético**. 2012. 275 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2012.

D'AMBRÓSIO, U. Sociedade, cultura, matemática e seu ensino. **Educação e pesquisa**, v. 31, p. 99-120, 2005. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/ep/a/TgJbqssD83ytTNyxnPGBTcw/>. Acesso em: 2 jan. 2023.

_____. A interface entre história e Matemática uma visão histórico-pedagógica. **Revista história da matemática para professores**, v. 7, n. 1, p. 41-64, 2021. Disponível em: <https://rhmp.com.br/index.php/RHMP/article/view/67>. Acesso em: 1 jul. 2023.

FERREIRA, A. B. H. **Miniaurélio: o dicionário da Língua Portuguesa**. 6.ed. Curitiba: Positivo, 2006.

FLEMMING, D.M.; LUZ, E. F.; MELLO, A. C. C. **Tendências em educação matemática**. 2 ed. Palhoça: UnisulVirtual, 2005.

GARNICA, A. V. M. Pesquisa qualitativa e Educação (Matemática): de regulações, regulamentos, tempos e depoimentos. **Mimesis, Bauru**, v. 22, n. 1, p. 35-48, 2001. Disponível em: https://secure.unisagrado.edu.br/static/biblioteca/mimesis/mimesis_v22_n1_2001_art_02.pdf. Acessado em: 1 jul. 2023.

GIORDAN, M. O papel da experimentação no ensino de ciências. **Química nova na escola**, v. 10, n. 10, p. 43-49, 1999. Disponível em: <https://fep.if.usp.br/~profis/arquivo/encontros/enpec/iienpec/Dados/trabalhos/A33.pdf>. Acesso em: 1 out. 2023.

HOHENWARTER, M. GeoGebra Classic 5 - Software de geometria dinâmica. Versão 5.0., 2021. Disponível em: <https://www.geogebra.org/>. Acesso em: 20 jun. 2021.

KAISER, G.; SRIRAMAN, B.. A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. **Zdm**, v. 38, p. 302-310, 2006. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/BF02652813>. Acesso em: 17 mar. 2023.

KENSKI, V. M. **Educação e tecnologias: O novo ritmo da informação**. 8 ed. Campinas-SP: Papirus, 2012.

KLÜBER, T. E. **Modelagem Matemática e Etnomatemática no contexto da Educação Matemática: Aspectos Filosóficos e Epistemológicos**. 2007, 151 f. 2007. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Estadual de Ponta Grossa - UEPG. Programa de Pós-graduação em Educação, Ponta Grossa, 2007.

_____; BURAK, D. Sobre a pesquisa qualitativa na Modelagem Matemática em Educação Matemática. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 26, p. 883-905, 2012. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/bolema/a/rjqt7ZmmPYckD4LpvvXdVzm/?format=html>. Acesso em: 30 abri. 2023.

_____. **Uma metacompreensão da modelagem matemática na educação matemática**. 2012. 396 f. 2012. Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica) - Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, 2012.

MADRUGA, Z. E. F.; KLUG. A função da experimentação no ensino de ciências e matemática: uma análise das concepções de professores. **Revista de Educação, Ciências e Matemática**, v. 5, n. 3, 2015. Disponível em: <http://publicacoes.unigranrio.edu.br/index.php/recm/article/view/2790>. Acesso em: 1 out. 2023.

ERRO ABSOLUTO E ERRO RELATIVO, EP1. Vídeo. 6min55s. Publicado pelo canal Matemática Rapidola. 13 fev. 2020. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=m3jstJ59aGQ>. Acesso em: 20 jun. 2023.

MALHEIROS, A. P. S. **A produção matemática dos alunos em um ambiente de modelagem**. 2004. 180 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas Campus de Rio Claro/SP, 2004. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/items/1d1a24fd-2b26-4d09-9cd8-5fd7e2e13f24>. Acesso em: 1 out. 2023.

MORAES, R. Uma Tempestade de Luz: a compreensão possibilitada pela Análise Textual Discursiva. **Ciência & Educação**, Bauru-SP, v. 9, n. 2, p. 191-211, 2003. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/ciedu/a/SJKF5m97DHykhL5pM5tXzdj/?format=html>. Acesso em: 1 jul. 2023.

MORAES, R.; GALIAZZI, M. C. **Análise Textual Discursiva**. 2. ed. rev. Ijuí: Unijuí, 2011.

MORAES, K. N.; REGINATTO, D. C.; ZARA, R. A. Aplicativo Canva para ensinar Estatística por meio de Histórias em Quadrinhos. Disponível em: https://www.famper.com.br/arquivos/imagens/revistaeletronica/aplicativo-canva-para-ensinar-estatistica-por-meio-de-historias-em-quadrinhos_1543941221.pdf. Acesso em: 17 out, 2023.

MOREIRA, H. Critérios e estratégias para garantir o rigor na pesquisa qualitativa. **Revista brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, v. 11, n. 1, 2018. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/6977>. Acesso em: 1 jun. 2023.

MOREIRA, M. A. **Metodologias de Pesquisa em Ensino**. 1. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

NASCIMENTO, T. **Escuta, Autoria e Colaboração: aberturas formativas em Educação Matemática com Tecnologias Digitais**. 2023. 134 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Instituto de Matemática, Campo Grande, MS, 2023. Disponível em: <https://repositorio.ufms.br/handle/123456789/5709>. Acesso em: 7 ago. 2023.

OLIVEIRA, A. X.; MELLO, D. E.; FRANCO, S. A. P. Práticas de ensino com o uso de tecnologias digitais: o papel da formação docente. **Revista Teias**, v. 21, n. 60, p. 75-90, 2020.

Disponível em:

http://educa.fcc.org.br/scielo.php?pid=S1982-03052020000100075&script=sci_arttext.

Acesso em: 7 ago. 2023.

OLIVEIRA JÚNIOR, F. G. **Modelagem Matemática e Neurociências: Algumas Relações**. 2020. 159 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Instituto de Matemática, Campo Grande, 2020.

OVANDO NETO, E. **Modelagem Matemática e currículo: desafios e possibilidades**. 2019. 218 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de mato Grosso do Sul, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Campo Grande, 2019.

RIBEIRO, D. A. E. **História da Matemática: A interdisciplinaridade e o lúdico pedagógico na aprendizagem em Matemática**. 2019. 102 f. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologias, Campina Grande, 2019.

ROCHA, R.; ARAKI, P. H. H.; SILVA, K. A. P. Comunicação em Atividade de Modelagem Matemática com Experimentação: Uma Análise da Atribuição de Significado. **Educação Matemática em Revista-RS**, v. 1, n. 24, 2023. Disponível em: <http://www.sbemrevista.com.br/revista/index.php/EMR-RS/article/view/2952>. acesso em: 1 out. 2023.

RODRIGUES, A. Z.; COSTA, J. B. A. Avaliando o Proinfo em Sobral: A desigualdade digital como uma nova forma de privação. In: VI Congresso Nacional de Educação. **Anais...** Congresso Nacional de Educação. 2023. Disponível em: https://www.editorarealize.com.br/editora/anais/conedu/2019/TRABALHO_EV127_MD1_SA11_ID2694_03102019195604.pdf. Acesso em: 26 out. 2023.

ROSA, C. C. **Um estudo do fenômeno de congruência em conversões que emergem em atividades de modelagem matemática no ensino médio**. 2009. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática), Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2009.

ROSA, C. C. **A formação do professor reflexivo no contexto da Modelagem Matemática**. 2013. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência e a Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática, Universidade Estadual de Maringá, Maringá. 2013. Disponível em: . Acesso em: 22 jun. 2022.

SANDRI, M. C. M. **Experimentos de Química Geral na perspectiva da Química Verde**. São Paulo: Livraria da Física, 2018.

SCHELLER, M.; BIEMBENGUT, M. S. A utilização de tecnologias digitais nos primeiros passos na arte da pesquisa: uma experiência de modelagem. **RENOTE**, v. 11, n. 3, p. 1 – 11, 2013. DOI:<https://doi.org/10.22456/1679-1916.44369>. Disponível em: <https://www.seer.ufrgs.br/renote/article/view/44369/0> . Acesso em: 15 fev. 2023.

SILVA, A. R.; SILVA, R. C.; ROMANINI, E. Números Complexos e Quatérnios: dos Contextos Históricos ao uso do Software Educativo Livre GeoGebra e Software Livre On-Line Quaternion. **Revista Ensin@ UFMS**, v. 2, n. 6, p. 266-290, 2021. Disponível em: <https://desafioonline.ufms.br/index.php/anacptl/article/view/13612>. Acesso em: 17 mai. 2023.

SILVA, A.R.; ALMEIDA, C. G.; URIBE, E. B. O.; ROSA, C. C. Fotografia e Modelagem Matemática: Uma experiência para o ensino de funções. XII Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática (CNMEM). **Anais do XII CNMEM**. 2023. Disponível em: <https://www.ufrgs.br/cnmem/anais-relatos-de-experiencia/>. Acesso em: 1 out. 2023.

SILVA, A. R.; URIBE, E. B. O.; ROSA, C. C. Modelagem Matemática e Tecnologias Digitais: o que mostram as pesquisas sobre esta nova alternativa pedagógica para o ensino e aprendizagem de matemática. **Revista Diálogos em Educação Matemática**, v. 1, n. 1, p. e202207-e202207, 2022. Disponível em: <https://www.seer.ufal.br/index.php/redemat/article/view/14594>. Acesso em: 20 dez. 2022.

SILVA, A.R.;ALMEIDA, C. G.;ROSA, C. C. Levantamento Bibliográfico de pesquisas publicadas nos anais do Seminário Sul-Mato-Grossense de pesquisa em Educação Matemática (SESEMAT/UFMS) que utilizaram a Modelagem Matemática como Estratégia de Ensino e Aprendizagem. **Anais do Seminário Sul-Mato-Grossense de Pesquisa em Educação Matemática**, n. 16, 2022. Disponível em: <https://periodicos.ufms.br/index.php/sesemat/article/view/16420>. Acesso em: 23 dez. 2022.

SILVA, A. R.; ALMEIDA, C. G.; ROSA, C. C. Tecnologias digitais nas atividades de Modelagem: possíveis direcionamentos para o ensino e a aprendizagem de Matemática. **Anais da Conferência Nacional sobre Modelagem Matemática**, n. 12, 2023. Disponível em: <https://www.ufrgs.br/cnmem/anais-comunicacoes-cientificas/>. Acesso em: 23 dez. 2022.

SILVA, R;S.; BARONE, D. A. C.; BASSO, M. V. A. Modelagem matemática e tecnologias digitais: uma aprendizagem baseada na ação. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 18, n. 1, p. 421-446, 2016. Disponível em: <http://funes.uniandes.edu.co/26364/>. Acesso em: 4 jul. 2023.

SILVA, K. A. P.; BORSSOI, A. H.; ALMEIDA, L. M. W. Uma análise semiótica de atividades de modelagem matemática mediadas pela tecnologia. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, v. 8, n. 1, 2015. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/1928>. Acesso em: 1 jul. 2023.

SKOVSMOSE, O. **Educação Matemática crítica: a questão da democracia**. Campinas: Papirus, 2001.

SOUZA BARBOSA, A. A. de. Algumas Relações entre Modelagem Matemática e Tecnologia de Informação e Comunicação. X Congresso Nacional de Educação - EDUCERE. I Seminário Internacional de Representações, Sociais, Subjetivas e Educação - SIRSSE. PUC-Paraná. Curitiba, 7 a 10 de novembro de 2011.

SOUZA, D.C.; ROSA, C. C. Representação Social e Modelagem Matemática: Possibilidades e limitações/ssocial. Representation and Mathematical Modeling: Possibilities and limitations. **Revista Dynamis**, v. 26, n. 2, p. 83-99, 2020. Disponível em: <https://bu.furb.br/ojs/index.php/dynamis/article/view/8036>. Acesso em: 1 jan. 2023.

SOUZA, D. C. **Representações Sociais e Modelagem Matemática: um estudo envolvendo o ensino de matemática na formação de pedagogos**. 2020. 134f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Campo Grande, 2020.

SUART, R. C.; MARCONDES, M. E. R. A manifestação de habilidades cognitivas em atividades experimentais investigativas no Ensino Médio de Química. *Ciência & Cognição*, Rio de Janeiro, v. 14, n. 1, p. 50-74, mar. 2009. Disponível em: <http://www.cienciasecognicao.org/revista/index.php/cec/article/view/38>. Acesso em: 1 out. 2023.

TORTOLA, E.; SILVA, H. C.; ALMEIDA, LMW. Um olhar sobre os trabalhos do IV EPMEM à luz das perspectivas de Kaiser e Sriraman para a modelagem matemática. **Anais do 11º Encontro Paranaense de Educação Matemática**. Apucarana, PR: EPMEM, p. 1-14, 2011.

TRACKER. Software de análise de vídeo. Versão 6.1.3 Win64, 2023. Disponível em: <https://physlets.org/tracker/>. Acesso em: 19 mai. 2023.

APÊNDICE 1

QUESTIONÁRIO FINAL / RELATÓRIO - PLATAFORMA <i>GOOGLE FORMS</i>	
QUESTÃO 1	O uso de Tecnologias Digitais facilitou a busca por informações sobre as situações-problemas?
QUESTÃO 2	Você acredita que sem o uso das Tecnologias Digitais, poderia ter se saído melhor nas discussões com o seu grupo?
QUESTÃO 3	Quanto ao Programa Tracker e o <i>software</i> GeoGebra, você acha que estes aplicativos foram fáceis de usar (intuitivo), eles apresentavam conceitos, propriedades e/ou características matemáticas durante sua manipulação desde a importação do vídeo no Tracker até a elaboração do gráfico no GeoGebra?
QUESTÃO 4	Descreva sobre o desenvolvimento das atividades no geral, levando em consideração as Tecnologias Digitais e suas experiências com as mesmas nas fases de Modelagem Matemática.